ΜΗΥΠ 512 - Αλγόριθμοι Επικοινωνιών

Προβλήματα κατανομής εύρους ζώνης σε οπτικά δίκτυα τεχνολογίας WDM

Εισαγωγή

Παρουσιάζουμε αλγόριθμους και κάτω φράγματα σε μοντέλα οπτικών δικτύων τεχνολογίας WDM (Wavelength Division Multiplexing). Αυτά τα δίκτυα χρησιμοποιούν οπτικές ίνες για τις συνδέσεις μεταξύ κόμβων και έχουν τη δυνατότητα να μεταφέρουν ροές δεδομένων με μεγάλες ταχύτητες μεταξύ απομακρυσμένων κόμβων του δικτύου χωρίς να χρειάζεται ενδιάμεση μετατροπή του οπτικού σήματος σε ηλεκτρικό και αντίστροφα. Έτσι επιτυγχάνουν μεγάλες ταχύτητες μετάδοσης. Η τεχνολογία WDM μπορεί να μεταφέρει ταυτόχρονα διαφορετικές ροές δεδομένων μέσα από την ίδια οπτική ίνα υπό τον περιορισμό ότι κάθε ροή δεδομένων μεταδίδεται σε διαφορετική συχνότητα. Ο αριθμός των διαθέσιμων συχνοτήτων ονομάζεται εύρος ζώνης και είναι σχετικά μικρός με βάση την υπάρχουσα τεχνολογία.

Επομένως, ένα σημαντικό πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί σε αυτά τα δίκτυα είναι το πρόβλημα της κατανομής εύρους ζώνης. Με δεδομένες αιτήσεις επικοινωνίας που αντιστοιχούν σε ζευγάρια αποστολέα-παραλήπτη που θέλουν να μεταφέρουν ροές δεδομένων σε ένα δίκτυο, το πρόβλημα ζητά να βρούμε ένα μονοπάτι που να συνδέει τον αποστολέα με τον παραλήπτη για κάθε αίτηση επικοινωνίας και να αναθέσουμε μια συχνότητα σε κάθε μονοπάτι έτσι ώστε μονοπάτια που χρησιμοποιούν την ίδια σύνδεση του δικτύου να χρησιμοποιούν διαφορετικές συχνότητες και ο συνολικός αριθμός συχνοτήτων που χρησιμοποιούνται να ελαχιστοποιείται. Διαισθητικά, συνήθως αντιμετωπίζουμε τις συχνότητες σαν χρώματα και τα αντίστοιχα συνδυαστικά προβλήματα σαν προβλήματα χρωματισμού.

Μοντελοποιούμε τα δίκτυα σαν γραφήματα. Κάθε σύνδεση μεταξύ δυο κόμβων του δικτύου αντιστοιχεί είτε σε μια οπτική ίνα με δυνατότητα αμφίδρομης επικοινωνίας είτε σε δυο οπτικές ίνες που υποστηρίζουν την επικοινωνία μεταξύ των κόμβων που συνδέουν σε κάθε μια από τις δυο κατευθύνσεις. Μελετάμε τοπολογίες γραμμικών δικτύων, δακτυλίων και δέντρων που είναι αυτές που συναντώνται συχνότερα στην πράξη. Στην περίπτωση των γραμμικών και δεντρικών δικτύων, τα μονοπάτια που αντιστοιχούν σε κάθε αίτηση επικοινωνίας είναι μοναδικά. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ένα πρόβλημα χρωματισμού μονοπατιών. Με δεδομένο ένα σύνολο μονοπατιών σε ένα δίκτυο, ορίζουμε ως φορτίο μιας σύνδεσης τον αριθμό των μονοπατιών που τη χρησιμοποιούν. Ως φορτίο του συνόλου μονοπατιών ορίζεται το μέγιστο φορτίο μεταξύ όλων των συνδέσεων. Λέμε ότι ένας χρωματισμός μονοπατιών είναι σωστός αν οποιαδήποτε δυο μονοπάτια που χρησιμοποιούν την ίδια σύνδεση έχουν διαφορετικό χρώμα. Προσέξτε ότι το φορτίο ενός συνόλου μονοπατιών αποτελεί κάτω φράγμα για τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων που χρειάζονται για έναν σωστό χρωματισμό.

1 Γραμμικά δίκτυα

Το απλούστερο είδος δικτύου είναι το γραμμικό δίκτυο. Παραθέτουμε έναν απλό αλγόριθμο χρωματισμού που χρωματίζει κάθε σύνολο μονοπατιών φορτίου L με το πολύ L χρώματα. Εφόσον το φορτίο ενός συνόλου μονοπατιών αποτελεί κάτω φράγμα για τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων, συμπεραίνουμε ότι ο αλγόριθμός μας επιτυγχάνει έναν βέλτιστο χρωματισμό.

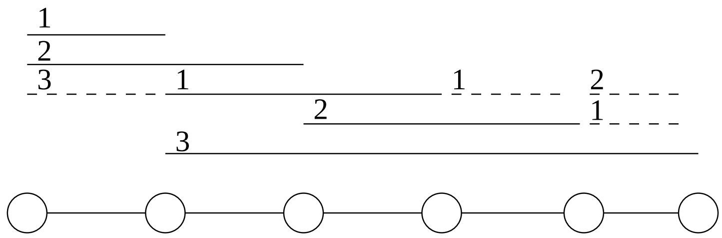
Αρχικά, υπολογίζουμε το φορτίο L του συνόλου μονοπατιών. Σε κάθε σύνδεση e με φορτίο $\ell_e < L$, προσθέτουμε $L - \ell_e$ νέα μονοπάτια που περιέχουν μόνο τη σύνδεση e. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε ένα νέο σύνολο μονοπατιών που περιέχει το αρχικό σύνολο μονοπατιών και έχει φορτίο L σε κάθε σύνδεση του δικτύου. Θα δείξουμε πώς μπορούμε να χρωματίσουμε τα μονοπάτια του νέου συνόλου με ακριβώς L χρώματα. Για να πάρουμε το χρωματισμό για το αρχικό σύνολο μονοπατιών αγνοούμε τα νέα μονοπάτια που προσθέσαμε.

Χρωματίζουμε το νέο σύνολο μονοπατιών ως εξής. Ξεκινάμε από τα μονοπάτια που περιέχουν την σύνδεση e_1 και τα χρωματίζουμε με L διαφορετικά χρώματα. Στη συνέχεια, για $i = 2, ..., n$, βρίσκουμε τα μονοπάτια που ξεκινούν με τη σύνδεση e_i και τους αναθέτουμε τα χρώματα των μονοπατιών που τερματίζουν με τη σύνδεση e_{i-1} έτσι ώστε όλα τα μονοπάτια που ξεκινούν με τη σύνδεση e_i να παίρνουν διαφορετικά χρώματα.

Ένα παράδειγμα εκτέλεσης του αλγορίθμου φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο αλγόριθμός μας είναι σωστός.

Θεώρημα 1 *Ο αλγόριθμος είναι σωστός, δηλ. χρωματίζει σωστά οποιοδήποτε σύνολο μονοπατιών με φορτίο L σε κάθε σύνδεση ενός γραμμικού δικτύου με ακριβώς L χρώματα.*



Σχήμα 1: Ένα παράδειγμα εκτέλεσης του αλγορίθμου σε γραμμικά δίκτυα. Οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν σε μονοπάτια που προσθέτει ο αλγόριθμος και οι αριθμοί αντιστοιχούν στα χρώματα που χρησιμοποιούνται.

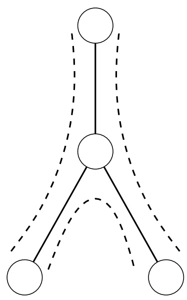
Απόδειξη: Προφανώς, ο αλγόριθμος χρωματίζει σωστά τα μονοπάτια που περιέχουν τη σύνδεση e_1 χρησιμοποιώντας ακριβώς L χρώματα. Θα δείξουμε χρησιμοποιώντας επαγωγή στο i, ότι για $i = 1, ..., n$, ο αλγόριθμος χρωματίζει σωστά τα μονοπάτια που περιέχουν τη σύνδεση e_i χρησιμοποιώντας τα ίδια ακριβώς χρώματα που χρησιμοποιούνται στα μονοπάτια που περιέχουν τη σύνδεση e_1.

Προφανώς, η πρόταση ισχύει για $i = 1$. Υποθέτουμε ότι ο αλγόριθμος χρωματίζει σωστά τα μονοπάτια που περιέχουν τη σύνδεση e_{i-1} χρησιμοποιώντας τα L χρώματα που χρησιμοποιούνται στα μονοπάτια που περιέχουν τη σύνδεση e_1· θα δείξουμε ότι χρωματίζει σωστά τα μονοπάτια που περιέχουν τη σύνδεση e_i χρησιμοποιώντας τα ίδια χρώματα. Εφόσον το νέο σύνολο μονοπατιών έχει φορτίο L σε κάθε σύνδεση του δικτύου, ο αριθμός των μονοπατιών που ξεκινούν με τη σύνδεση e_i είναι ίσος με τον αριθμό των μονοπατιών που τερματίζουν με τη σύνδεση e_{i-1}. Επομένως, τα χρώματα που χρησιμοποιούνται από τα μονοπάτια που τερματίζουν με τη σύνδεση e_{i-1} αρκούν για να χρωματιστούν με διαφορετικά χρώματα τα μονοπάτια που ξεκινούν με τη σύνδεση e_i. Επίσης, εφόσον τα μονοπάτια που τερματίζουν με τη σύνδεση e_{i-1} χρησιμοποιούν διαφορετικά χρώματα από τα μονοπάτια που περιέχουν και τις δυο συνδέσεις e_{i-1} και e_i (λόγω της επαγωγικής υπόθεσης), τα μονοπάτια που ξεκινούν με τη σύνδεση e_i θα πάρουν διαφορετικά χρώματα από τα μονοπάτια που περιέχουν και τις δυο συνδέσεις e_{i-1} και e_i. Άρα όλα τα μονοπάτια που περιέχουν τη σύνδεση e_i χρησιμοποιούν διαφορετικά χρώματα και επομένως ο χρωματισμός τους είναι σωστός. Εφόσον τα χρώματα που παίρνουν τα μονοπάτια που ξεκινούν με τη σύνδεση e_i είναι τα ίδια ακριβώς χρώματα που χρησιμοποιούν τα μονοπάτια που τερματίζουν με τη σύνδεση e_{i-1}, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, τα μονοπάτια που περιέχουν τη σύνδεση e_i χρησιμοποιούν τα ίδια L χρώματα με τα μονοπάτια που χρησιμοποιούν τη σύνδεση e_1. ■

2 Δεντρικά δίκτυα

Σε δίκτυα με δεντρική τοπολογία, δεν είναι δυνατόν να χρωματίσουμε οποιοδήποτε σύνολο μονοπατιών χρησιμοποιώντας αριθμό χρωμάτων ίσο με το φορτίο του συνόλου μονοπατιών. Αυτό φαίνεται στο επόμενο απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα 2 *Θεωρήστε το δεντρικό δίκτυο και το σύνολο των τριών μονοπατιών σε αυτό που αναπαρίσταται στο επόμενο σχήμα. Οποιαδήποτε δυο μονοπάτια μοιράζονται την ίδια σύνδεση του δικτύου και πρέπει να χρωματιστούν με διαφορετικό χρώμα. Επομένως, χρειάζονται (τουλάχιστον) τρία χρώματα ενώ το φορτίο σε κάθε σύνδεση είναι* 2.



Σχήμα 2: Ένα κάτω φράγμα για δεντρικά δίκτυα.

2.1 Ένα αποτέλεσμα υπολογιστικής δυσκολίας

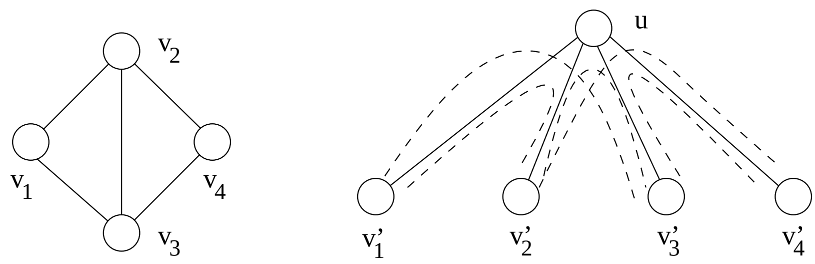
Υπάρχει όμως και άλλος ένας λόγος για τον οποίο δεν μπορούμε να χρωματίσουμε σύνολα μονοπατιών με τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων. Θα αποδείξουμε ότι το πρόβλημα είναι υπολογιστικά δύσκολο.

Θεώρημα 3 *Το πρόβλημα της κατανομής εύρους ζώνης σε δεντρικά δίκτυα είναι υπολογιστικά δύσκολο.*

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε ένα γνωστό αποτέλεσμα που αναφέρει ότι το πρόβλημα του *χρωματισμού ακμών σε γραφήματα* είναι υπολογιστικά δύσκολο. Αυτό το πρόβλημα ορίζεται ως εξής: δίνεται ένα γράφημα G και ζητείται ένας χρωματισμός των ακμών του G με τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων έτσι ώστε γειτονικές ακμές να έχουν διαφορετικά χρώματα.

Θα δείξουμε ότι για οποιδήποτε στιγμιότυπο του προβλήματος χρωματισμού ακμών σε γραφήματα, υπάρχει ένα ισοδύναμο στιγμιότυπο του προβλήματος χρωματισμού μονοπατιών σε δέντρα. Οπότε, ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που χρωματίζει οποιοδήποτε σύνολο μονοπατιών με τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για το βέλτιστο χρωματισμό ακμών σε γραφήματα.

Έστω ένα στιγμιότυπο του προβλήματος χρωματισμού ακμών γραφημάτων που αποτελείται από ένα γράφημα $G = (V, E)$. Κατασκευάζουμε το στιγμιότυπο του προβλήματος χρωματισμού μονοπατιών σε δέντρα που αποτελείται από ένα δίκτυο αστέρα T και ένα σύνολο μονοπατιών P ως εξής. Το δίκτυο T έναν κόμβο v' για κάθε κόμβο $v \in V$ και έναν επιπλέον κόμβο u. Ο κόμβος u συνδέεται μέσω συνδέσεων με όλους τους άλλους κόμβους. Το σύνολο μονοπατιών P περιέχει ένα μονοπάτι που συνδέει τους κόμβους v_1' και v_2' για κάθε ακμή $(v_1, v_2) \in E$. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 3: Η αναγωγή στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.

Παρατηρούμε ότι η κατασκευή μας έχει τις εξής ιδιότητες: για οποιεσδήποτε δυο ακμές που είναι γειτονικές στο γράφημα G, τα αντίστοιχα μονοπάτια μοιράζονται μια σύνδεση του δικτύου T και, αντίστροφα, για οποιαδήποτε δυο μονοπάτια που μοιράζονται μια σύνδεση του δικτύου, οι αντίστοιχες ακμές του γραφήματος G είναι γειτονικές. Οπότε, κάθε σωστός χρωματισμός των μονοπατιών του συνόλου P μπορεί να μετατραπεί σε σωστό χρωματισμό των ακμών του γραφήματος G με τον ίδιο αριθμό χρωμάτων (αναθέτοντας σε κάθε ακμή του G το χρώμα του αντίστοιχου μονοπατιού) και αντίστροφα. ∎

2.2 Ένας αλγόριθμος

Οι περισσότεροι γνωστοί αλγόριθμοι για το πρόβλημα του χρωματισμού μονοπατιών σε δεντρικά δίκτυα ανήκουν σε μια ειδική κατηγορία αλγορίθμων, την κατηγορία των *άπληστων* αλγορίθμων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την μελέτη τους. Δεδομένου ενός δέντρου T και ενός συνόλου μονοπατιών P, καλούμε έναν αλγόριθμο χρωματισμού μονοπατιών άπληστο όταν δουλεύει ως εξής:

> Ξεκινώντας από έναν αυθαίρετο κόμβο (την ρίζα του δέντρου), ο αλγόριθμος υπολογίζει μια αρίθμηση κατά πλάτος (BFS) των κόμβων του δέντρου.

> Ο αλγόριθμος λειτουργεί σε φάσεις, μία φάση για κάθε κόμβο u του δέντρου. Η σειρά με την οποία ο αλγόριθμος εξετάζει τους κόμβους εξαρτάται από την αρίθμηση κατά πλάτος των κόμβων. Η φάση που σχετίζεται με τον κόμβο u έχει ως είσοδο έναν σωστό χρωματισμό όλων των μονοπατιών που περιλαμβάνουν κόμβους με αριθμό κατά πλάτος αυστηρά μικρότερο από αυτό του κόμβου u· όλα τα άλλα μονοπάτια μένουν αχρωμάτιστα.
>
> Κατά την εκτέλεση της φάσης που σχετίζεται με τον κόμβο u, ένας μερικός σωστός χρωματισμός επεκτείνεται σε έναν σωστό χρωματισμό που αναθέτει χρώματα σε μονοπάτια που περιλαμβάνουν τον κόμβο u αλλά δεν έχουν χρωματιστεί ακόμα.
>
> Σε κάθε φάση, ο αλγόριθμος δεν επαναχρωματίζει μονοπάτια που είχαν χρωματιστεί σε προηγούμενες φάσεις.

Οι διάφοροι άπληστοι αλγόριθμοι διαφέρουν μεταξύ τους σε σχέση με την στρατηγική που ακολουθούν για να επεκτείνουν έναν μερικό σωστό χρωματισμό κατά την διάρκεια κάθε φάσης.

Ένας απλός άπληστος αλγόριθμος υλοποιεί την κάθε φάση ως εξής. Θεωρήστε τη φάση που σχετίζεται με τον κόμβο u. Ο αλγόριθμος θεωρεί τα χρώματα σαν θετικούς ακεραίους $1, 2, ...$, εξετάζει τα μη χρωματισμένα μονοπάτια που περιλαμβάνουν τον κόμβο u με μια αυθαίρετη σειρά και αναθέτει σε κάθε μονοπάτι p το μικρότερο διαθέσιμο χρώμα που δε χρησιμοποιείται σε μονοπάτια που μοιράζονται την ίδια σύνδεση με το p.

Θεώρημα 4 *Ο αλγόριθμος που περιγράψαμε χρωματίζει οποιοδήποτε σύνολο μονοπατιών φορτίου L με το πολύ $2L-1$ χρώματα.*

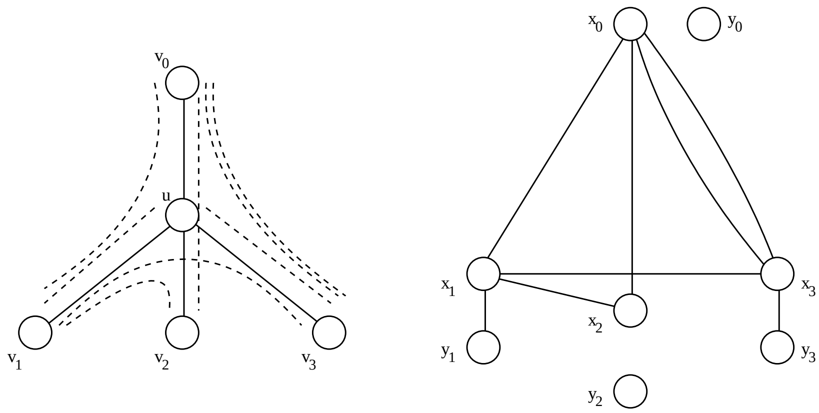
Απόδειξη: Θεωρούμε την εκτέλεση της φάσης του αλγορίθμου που σχετίζεται με τον κόμβο u και έστω ένα μονοπάτι p που χρωματίζεται σε αυτή τη φάση. Παρατηρούμε ότι εφόσον το μονοπάτι p δεν είχε χρωματιστεί σε προηγούμενες φάσεις, είτε προέρχεται από κάποιο κόμβο-παιδί του κόμβου u και κατευθύνεται προς έναν άλλο κόμβο-παιδί του u, είτε ξεκινά από τον κόμβο u και κατευθύνεται προς έναν κόμβο-παιδί του u. Όταν ο αλγόριθμος χρωματίζει το μονοπάτι p, οι περιορισμοί στα χρώματα που μπορούν να δοθούν στο p προέρχονται από μονοπάτια που έχουν χρωματιστεί προηγουμένως και μοιράζονται κάποια σύνδεση με το μονοπάτι p (άρα περιλαμβάνουν και τον κόμβο u). Εφόσον το φορτίο της συλλογής μονοπατιών είναι το πολύ L, αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν το πολύ $2(L-1)$ άλλα μονοπάτια που περιλαμβάνουν τον κόμβο u και μοιράζονται κάποια σύνδεση με το μονοπάτι p (δηλ. το πολύ $L-1$ άλλα μονοπάτια για κάθε σύνδεση γειτονική του κόμβου u που χρησιμοποιεί το μονοπάτι p). Οπότε, ο αλγόριθμος θα αναθέσει στο μονοπάτι p κάποιο χρώμα από το 1 μέχρι το $2L-1$. ∎

2.3 Καλύτεροι αλγόριθμοι

Υπάρχουν ακόμα καλύτεροι αλγόριθμοι στη βιβλιογραφία οι οποίοι ανάγουν τον χρωματισμό κατά την διάρκεια μιας φάσης στο πρόβλημα χρωματισμού των ακμών ενός γραφήματος. Στη συνέχεια περιγράφουμε αυτή την αναγωγή.

Θεωρούμε ένα σύνολο μονοπατιών P με φορτίο L σε ένα δέντρο T και την φάση κατά την οποία ο άπληστος αλγόριθμος εκτελείται για τον κόμβο u του T. Η φάση δέχεται ως είσοδο τον χρωματισμό των μονοπατιών του P από τις προηγούμενες φάσεις (δηλαδή, σε φάσεις κατά τις οποίες ο αλγόριθμος ασχολήθηκε με κόμβους που είχαν μικρότερο αριθμό κατά πλάτος από αυτό του u) και επεκτείνει τον χρωματισμό, χρωματίζοντας τα μονοπάτια που περιλαμβάνουν τον u τα οποία δεν είχαν χρωματιστεί στο παρελθόν. Ο χρωματισμός αυτός γίνεται λύνοντας ένα πρόβλημα χρωματισμού ακμών στο γράφημα G_u.

Το γράφημα G_u που σχετίζεται με τον κόμβο u κατασκευάζεται ως εξής. Συμβολίζουμε με v_0 τον πατέρα του κόμβου u και έστω $v_1, ..., v_k$ τα παιδιά του κόμβου u. Για κάθε κόμβο v_i από τους $v_0, ..., v_k$, το γράφημα G_u έχει δύο κορυφές x_i και y_i. Για κάθε μονοπάτι που ξεκινά από τον u και καταλήγει στον v_i, προσθέτουμε μια ακμή μεταξύ των x_i και y_i στο G_u. Για κάθε μονοπάτι ανάμεσα σε δύο γειτονικούς κόμβους v_i και v_j του u, προσθέτουμε μια ακμή μεταξύ των κορυφών x_i και x_j στο γράφημα G_u. Είναι εύκολο να δούμε πως το γράφημα G_u έχει μέγιστο βαθμό L. Ένα παράδειγμα αυτής της κατασκευής φαίνεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Μονοπάτια που ακουμπούν τον κόμβο u και το αντίστοιχο γράφημα. Τα μονοπάτια που ακουμπούν τον πατέρα v_0 του κόμβου u έχουν χρωματιστεί σε προηγούμενες φάσεις οπότε και οι ακμές του γραφήματος που είναι γειτονικές στον κόμβο x_0 είναι επίσης χρωματισμένες.

Διαισθητικά, ακμές στο γράφημα G_u που είναι γειτονικές σε μια κορυφή x_i αντιστοιχούν σε μονοπάτια του T που χρησιμοποιούν τη σύνδεση μεταξύ των κόμβων u και v_i. Οι ακμές του G_u που είναι γειτονικές σε μια κορυφή x_0 αντιστοιχούν σε μονοπάτια του P που διαπερνούν την σύνδεση του T ανάμεσα ατους κόμβους u και τον v_0, που είναι ο πατέρας του u· αυτά τα μονοπάτια έχουν χρωματιστεί σε προηγούμενες φάσεις.

Καλούμε τις ακμές του G_u που είναι γειτονικές στην κορυφή x_0 *δεσμευμένες* ακμές. Η φάση που σχετίζεται με έναν κόμβο u χρωματίζει τις ακμές του G_u με τον περιορισμό ότι οι δεσμευμένες ακμές θα πάρουν το χρώμα που είχε ανατεθεί στα αντίστοιχα μονοπάτια κατά το παρελθόν. Μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι αυτοί οι περιορισμοί δεν κάνουν δυσκολότερο το πρόβλημα χρωματισμού ακμών σε σχέση με τον απαιτούμενο αριθμό χρωμάτων, καθώς σε κάθε σωστό χρωματισμό των ακμών του G_u (χωρίς περιορισμούς για τις ακμές που είναι γειτονικές με την x_0), θα πρέπει να ανατεθούν διαφορετικά χρώματα στις δεσμευμένες ακμές. Αυτοί οι περιορισμοί απλώς μειώνουν τον αριθμό των διαφορετικών σωστών χρωματισμών. Ο παραγόμενος χρωματισμός των ακμών του G_u δίνει με προφανή τρόπο έναν χρωματισμό των μονοπατιών του P που περιλαμβάνουν τον κόμβο u καθώς και κόμβους με αριθμό κατά πλάτος μικρότερο από αυτόν του u.

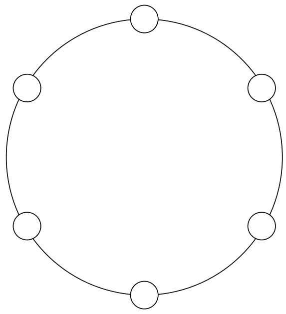
Για να επεκτείνουμε τον χρωματισμό σε όλες τις ακμές του G_u, τα χρώματα που χρησιμοποιήθηκαν σε προηγούμενες φάσεις και δεν χρησιμοποιούνται στις ακμές που είναι γειτονικές με την κορυφή x_0 στο G_u, μπορούν να ξαναχρησιμοποιηθούν. Νέα χρώματα χρησιμοποιούνται μόνο όταν τα χρώματα που έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί δεν επαρκούν για να ολοκληρωθεί ο χρωματισμός των ακμών. Επομένως, ο συνολικός αριθμός των χρωμάτων για τον χρωματισμό των μονοπατιών του P είναι η μέγιστη τιμή για όλες τις φάσεις του αριθμού των χρωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν για τον χρωματισμό του αντίστοιχου γραφήματος. Χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο του Shannon ο οποίος χρωματίζει τις ακμές ενός γραφήματος με μέγιστο βαθμό L χρησιμοποιώντας το πολύ $3L/2$ χρώματα, επιτυγχάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5 *Υπάρχει άπληστος αλγόριθμος που χρωματίζει οποιοδήποτε σύνολο μονοπατιών με φορτίο L σε ένα δεντρικό δίκτυο χρησιμοποιώντας το πολύ $3L/2$ χρώματα.*

3 Δακτύλιοι

Μέχρι στιγμής έχουμε δει τοπολογίες όπου τα μονοπάτια για την εξυπηρέτηση των αιτήσεων επικοινωνίας είναι μοναδικά. Το απλούστερο δίκτυο όπου αυτό παύει να ισχύει είναι ο δακτύλιος. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Το πρόβλημα κατανομής εύρους ζώνης σε δακτυλίους είναι υπολογιστικά δύσκολο. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε έναν απλό αλγόριθμο που επιτυγχά-



Σχήμα 5: Ένας δακτύλιος με 6 κόμβους.

νει μια καλή προσέγγιση της βέλτιστης λύσης. Επιλέγουμε μια σύνδεση e του δακτυλίου και δρομολογούμε όλες τις αιτήσεις επικοινωνίας έτσι ώστε να αποφεύγουν τη σύνδεση e. Πλέον, έχουμε μονοπάτια στο γραμμικό δίκτυο που σχηματίζεται αν αφαιρέσουμε τη σύνδεση e από το δακτύλιο. Για το χρωματισμό τους χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο που είδαμε στο κεφάλαιο 1.

Το επόμενο θεώρημα δίνει την απόδοση του αλγορίθμου.

Θεώρημα 6 *Ο αλγόριθμος που περιγράψαμε χρησιμοποιεί το πολύ 2 φορές περισσότερα χρώματα από αυτά που χρησιμοποιούνται σε ένα βέλτιστο χρωματισμό.*

Απόδειξη: Έστω ένα στιγμιότυπο του προβλήματος κατανομής εύρους ζώνης που αποτελείται από ένα δακτύλιο και ένα σύνολο αιτήσεων επικοινωνίας μεταξύ κόμβων του δακτυλίου. Θεωρούμε μια βέλτιστη λύση του προβλήματος με w χρώματα που αποτελείται από το σύνολο P_1 των μονοπατιών που δεν χρησιμοποιούν την σύνδεση e και το σύνολο P_2 των μονοπατιών που χρησιμοποιούν τη σύνδεση e. Προφανώς, ο αριθμός των μονοπατιών του συνόλου P_2 είναι το πολύ w ενώ το σύνολο μονοπατιών P_1 έχει φορτίο το πολύ w. Ο αλγόριθμος δρομολογεί τις αιτήσεις που αντιστοιχούν στα μονοπάτια P_1 μέσω των ίδιων μονοπατιών ενώ χρησιμοποιεί ένα σύνολο μονοπατιών P_2' για τη δρομολόγηση των αιτήσεων που αντιστοιχούν στα μονοπάτια του συνόλου P_2 της βέλτιστης λύσης. Άρα, έχουμε ένα σύνολο μονοπατιών $P_1 \cup P_2'$ φορτίου το πολύ $2w$ στο γραμμικό δίκτυο που σχηματίζεται αν αφαιρέσουμε τη σύνδεση e από το δακτύλιο, το οποίο χρωματίζεται με το πολύ $2w$ χρώματα χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που είδαμε στο κεφάλαιο 1. ■

Παράδειγμα 7 *Το αποτέλεσμα του θεωρήματος είναι ισχυρό με την έννοια ότι υπάρχει ένα σύνολο μονοπατιών που θα μπορούσε να χρωματιστεί με ένα μόνο χρώμα ενώ ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τουλάχιστον δύο χρώματα. Θεωρήστε δυο αιτήσεις επικοινωνίας μεταξύ δυο κόμβων ενός δακτυλίου. Ο αλγόριθμος* *που περιγράψαμε θα επιλέξει μια σύνδεση και θα δρομολογήσει και τις δύο αιτήσεις επικοινωνίας μέσω του μονοπατιού που αποφεύγει την σύνδεση. Επομένως το σύνολο μονοπατιών που επιλέγει ο αλγόριθμος θα έχει φορτίο 2 που σημαίνει ότι δεν μπορεί να χρωματιστεί με λιγότερα από δύο χρώματα. Βέβαια, επιλέγοντας διαφορετικά μονοπάτια για κάθε μια από τις δυο αιτήσεις, έχουμε μονοπάτια που δεν μοιράζονται καμία σύνδεση και μπορούν να χρωματιστούν με το ίδιο χρώμα.*

4 Δεντρικά δίκτυα με κατευθυνόμενες συνδέσεις και κατευθυνόμενα μονοπάτια

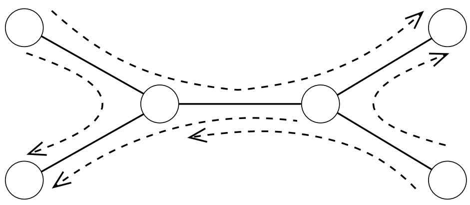
Ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο που έχει προταθεί στη βιβλιογραφία για το πρόβλημα κατανομής εύρους ζώνης σε οπτικά δίκτυα υποθέτει ότι κάθε σύνδεση μεταξύ δυο κόμβων του δικτύου αποτελείται από δυο αντίθετα κατευθυνόμενες συνδέσεις και ότι οι αιτήσεις επικοινωνίας είναι διατεταγμένα ζεύγη αποστολέα-παραλήπτη. Οι αλγόριθμοι που παρουσιάσαμε μέχρι στιγμής για γραμμικά δίκτυα και δακτυλίους εύκολα μπορούν να τροποποιηθούν ώστε να δουλεύουν και στην περίπτωση δικτύων με κατευθυνόμενες συνδέσεις. Η περίπτωση των δεντρικών δικτύων παρουσιάζει κάποιες διαφορές που συζητάμε στη συνέχεια.

Όπως και στην περίπτωση των μη κατευθυνόμενων συνδέσεων, σε δίκτυα με δεντρική τοπολογία και κατευθυνόμενες συνδέσεις, δεν είναι δυνατόν να χρωματίσουμε οποιοδήποτε σύνολο μονοπατιών χρησιμοποιώντας αριθμό χρωμάτων ίσο με το φορτίο του συνόλου μονοπατιών.

Θεώρημα 8 *Για κάθε ακέραιο $\lambda > 0$, υπάρχει ένα σύνολο κατευθυνόμενων μονοπατιών φορτίου $L = 4\lambda$ σε ένα δυαδικό δέντρο που απαιτεί τουλάχιστον $5L/4$ χρώματα.*

Απόδειξη: Θεωρήστε το δεντρικό δίκτυο και το σύνολο των μονοπατιών που φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Κάθε βέλος αναπαριστά 2λ παράλληλα κατευθυνόμενα μονοπάτια (δηλ., 10λ μονοπάτια, συνολικά). Παρατηρούμε ότι, σε οποιονδήποτε σωστό χρωματισμό, κανένα χρώμα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περισσότερα από 2 μονοπάτια. Οπότε, χρειάζονται τουλάχιστον $10\lambda/2 = 5L/4$ χρώματα. ∎

Το πρόβλημα είναι επίσης υπολογιστικά δύσκολο. Η σχετική απόδειξη χρησιμοποιεί μια ελαφρώς παραλλαγμένη και πιο πολύπλοκη αναγωγή. Οπότε, η ερευνητική προσπάθεια έχει επικεντρωθεί στο σχεδιασμό προσεγγιστικών αλγορίθμων. Οι περισσότεροι αλγόριθμοι της βιβλιογραφίας ανήκουν στην κατηγορία των άπληστων αλγορίθμων και ακολουθούν τη γενική δομή που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 2. Εύκολα μπορεί κανείς να δει κανείς ότι ο απλός



Σχήμα 6: Ένα κάτω φράγμα για δεντρικά δίκτυα με κατευθυνόμενες συνδέσεις και κατευθυνόμενα μονοπάτια. Κάθε ακμή μεταξύ κόμβων αντιστοιχεί σε δυο αντίθετα κατευθυνόμενες συνδέσεις.

αλγόριθμος που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 2.2 δουλεύει και στην περίπτωση δεντρικών δικτύων με κατευθυνόμενες συνδέσεις και κατευθυνόμενα μονοπάτια και, χρησιμοποιώντας την ίδια ανάλυση με την απόδειξη του Θεωρήματος 4, αποδεικνύεται ότι χρωματίζει οποιοδήποτε σύνολο κατευθυνόμενων μονοπατιών φορτίου L με το πολύ $2L-1$ χρώματα.

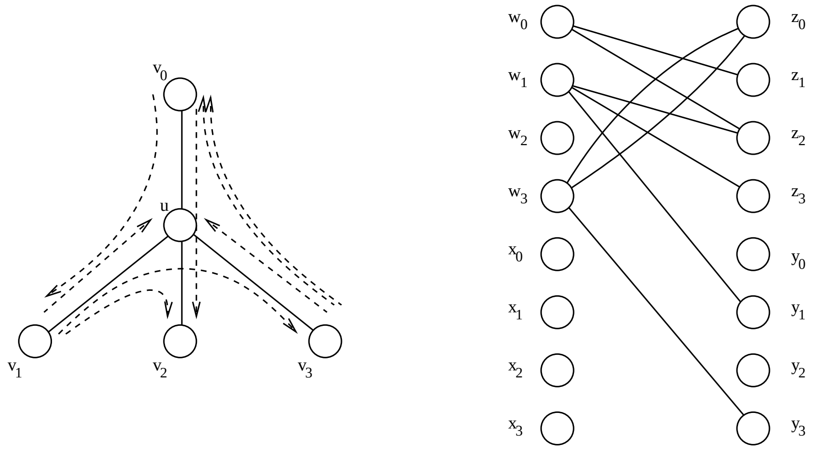
Στη συνέχεια παραθέτουμε έναν διαφορετικό τρόπο χρωματισμού σε κάθε φάση του άπληστου αλγορίθμου. Μολονότι το συγκεκριμένο αποτέλεσμα που αποδεικνύουμε στη συνέχεια δεν είναι καλύτερο από $2L$, περιγράφουμε τις βασικές ιδέες που έχουν χρησιμοποιηθεί στη βιβλιογραφία για το σχεδιασμό άπληστων αλγορίθμων με πολύ καλύτερη απόδοση.

Οι καλύτεροι γνωστοί αλγόριθμοι για χρωματισμό κατευθυνόμενων μονοπατιών σε δέντρα με κατευθυνόμενες συνδέσεις ανάγουν τον χρωματισμό μιας φάσης σε ένα πρόβλημα χρωματισμού ακμών ενός διμερούς γραφήματος. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε αυτή την αναγωγή.

Θεωρούμε ένα σύνολο κατευθυνόμενων μονοπατιών P με φορτίο L σε ένα δέντρο T με κατεθυνόμενες συνδέσεις και την φάση ενός άπληστου αλγορίθμου που σχετίζεται με έναν κόμβο u του T. Η φάση δέχεται ως είσοδο τον χρωματισμό των μονοπατιών του P σε προηγούμενες φάσεις (δηλαδή σε φάσεις που σχετίζονται με κόμβους του T με μικρότερο αριθμό κατά πλάτος από ότι ο u) και τον επεκτείνει χρωματίζοντας τα μονοπάτια που περιλαμβάνουν τον κόμβο u (και δεν είχαν χρωματιστεί σε προηγούμενες φάσεις) μέσω της επίλυσης ενός προβλήματος χρωματισμού ακμών σε ένα διμερές γράφημα H_u.

Το γράφημα H_u που σχετίζεται με τον κόμβο u κατασκευάζεται ως εξής. Συμβολίζουμε με v_0 τον πατέρα του u και έστω $v_1, \cdots, v_k$ τα παιδιά του u. Για κάθε κόμβο v_i, το διμερές γράφημα έχει 4 κορυφές w_i, x_i, y_i, z_i και η αριστερή και δεξιά διαμέριση είναι $\{w_i, x_i | i = 0, \cdots, k\}$ και $\{z_i, y_i | i = 0, \cdots, k\}$, αντιστοίχως. Για κάθε μονοπάτι που κατευθύνεται από έναν κόμβο v_i σε έναν κόμβο v_j, το διμερές γράφημα H_u έχει μια ακμή μεταξύ των w_i και z_j. Για κάθε μονοπάτι που κατευθύνεται από κάποιο κόμβο v_i και τερματίζει στον u, έχουμε μια ακμή μεταξύ των w_i και y_i. Τέλος, για κάθε μονοπάτι που κατευθύνεται από τον u

προς κάποιο κόμβο v_i, έχουμε μια ακμή μεταξύ των z_i και x_i. Μπορούμε εύκολα να δούμε πως το διμερές γράφημα H_u έχει μέγιστο βαθμό L. Ένα παράδειγμα αυτής της κατασκευής παρουσιάζεται στο Σχήμα 7.



Σχήμα 7: Κατευθυνόμενα μονοπάτια που ακουμπούν τον κόμβο u και το αντίστοιχο διμερές γράφημα. Τα μονοπάτια που ακουμπούν τον πατέρα v_0 του κόμβου u έχουν χρωματιστεί σε προηγούμενες φάσεις οπότε και οι ακμές που έχουν άκρα στους κόμβους w_0 και x_0 του διμερούς γραφήματος είναι επίσης χρωματισμένες.

Διαισθητικά, οι ακμές του H_u που είναι γειτονικές σε μια κορυφή w_i αντιστοιχούν σε μονοπάτια του P που χρησιμοποιούν την κατευθυνόμενη ακμή του T από τον κόμβο v_i προς τον κόμβο u, ενώ οι ακμές του H_u που είναι γειτονικές σε μια κορυφή z_i αντιστοιχούν σε μονοπάτια του P που διαπερνούν την κατευθυνόμενη ακμή του T από τον κόμβο u προς τον κόμβο v_i. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει καμία ακμή που να συνδέει δύο αντίθετες κορυφές w_i και z_i, καθώς αυτό θα αντιστοιχούσε σε μονοπάτια που θα άρχιζαν και θα τελείωναν στον ίδιο κόμβο. Οι ακμές του H_u που είναι γειτονικές στις κορυφές w_0 και z_0 αντιστοιχούν σε μονοπάτια του P που διαπερνούν τις αντίθετα κατευθυνόμενες συνδέσεις μεταξύ του κόμβου u και του κόμβου v_0, που είναι ο πατέρας του u· αυτά τα μονοπάτια έχουν χρωματιστεί σε προηγούμενες φάσεις. Καλούμε τις ακμές του H_u που είναι γειτονικές στις κορυφές w_0 και z_0 δεσμευμένες ακμές. Στην φάση που αντιστοιχεί στον κόμβο u, χρωματίζονται οι ακμές του H_u με τον περιορισμό ότι οι δεσμευμένες ακμές θα πάρουν το χρώμα που είχε ανατεθεί στα αντίστοιχα κατευθυνόμενα μονοπάτια σε προηγούμενες φάσεις. Ο παραγόμενος χρωματισμός των ακμών του H_u δίνει έναν χρωματισμό των μονοπατιών του P που περιλαμβάνουν τον κόμβο u και των κόμβων με μικρότερο αριθμό κατά πλάτος από ότι ο u. Παρομοίως με την περίπτωση χρωματισμού μονοπατιών σε μη-κατευθυνόμενα δέντρα, ο συνολικός αριθμός των χρωμάτων που χρησιμοποιούνται για τον χρωματισμό των μονοπατιών του P μπορεί να γίνει τόσο μικρός όσο το μέγιστο για όλες τις φάσεις του αριθμού των χρωμάτων που χρησιμοποιούνται για τον χρωματισμό των ακμών του αντίστοιχου διμερούς γραφήματος.

Συνεπώς, το πρόβλημα του χρωματισμού μονοπατιών σε κάθε φάση ανάγεται στο πρόβλημα χρωματισμού των ακμών ενός διμερούς γραφήματος με μέγιστο βαθμό L, με τον περιορισμό ότι κάποια χρώματα έχουν ήδη ανατεθεί σε κάποιες δεσμευμένες ακμές. Ονομάζουμε αυτό το πρόβλημα *α-περιορισμένο χρωματισμό ακμών διμερούς γραφήματος* σε ένα γράφημα με μέγιστο βαθμό L. Η παράμετρος α συμβολίζει το ότι οι δεσμευμένες ακμές έχουν χρωματιστεί με το πολύ αL χρώματα ($1 \leq \alpha \leq 2$). Παρατηρούμε ότι αντίθετα με την περίπτωση του χρωματισμού ακμών ενός γραφήματος που παράγεται από σύνολα μη-κατευθυνόμενων μονοπατιών, η ύπαρξη περιορισμών στις δεσμευμένες ακμές του διμερούς γραφήματος H_u που σχετίζεται με έναν κόμβο u όντως δυσκολεύει το πρόβλημα σε σχέση με τον συνολικό αριθμό των χρωμάτων που απαιτούνται για τον χρωματισμό όλων των ακμών. Τα διμερή γραφήματα με μέγιστο βαθμό L μπορούν πάντοτε να χρωματιστούν με L χρώματα (αν δεν υπάρχουν περιορισμοί στις δεσμευμένες ακμές). Όμως, τα διμερή γραφήματα κατά τις φάσεις του άπληστου αλγορίθμου για τον χρωματισμό κατευθυνόμενων μονοπατιών σε δέντρα με κατευθυνόμενες συνδέσεις μπορεί να απαιτήσουν τουλάχιστον $5L/4$ χρώματα λόγω του κάτω φράγματος που παρουσιάστηκε στο Θεώρημα 8.

Στην συνέχεια, πρώτα περιγράφουμε μια απλή λύση για το πρόβλημα του 2-περιορισμένου χρωματισμού. Πιο συγκεκριμένα, θα δείξουμε πώς μπορούμε να χρωματίσουμε τις ακμές ενός διμερούς γραφήματος H_u με μέγιστο βαθμό L στο οποίο οι δεσμευμένες ακμές υπόκεινται στον περιορισμό να χρωματιστούν με το πολύ $2L$ συγκεκριμένα χρώματα και χρησιμοποιώντας συνολικά το πολύ $2L$ χρώματα. Ακολούθως, παρουσιάζουμε συνοπτικά τις κύριες ιδέες που οδηγούν σε καλύτερες λύσεις του προβλήματος.

Ονομάζουμε *μονά* χρώματα εκείνα τα χρώματα που εμφανίζονται μόνο σε μια δεσμευμένη ακμή και *διπλά* χρώματα εκείνα τα χρώματα που εμφανίζονται σε δύο δεσμευμένες ακμές (μια γειτονική στην w_0 και μία γειτονική στην z_0). Συμβολίζουμε με S και D τον αριθμό των μονών και διπλών χρωμάτων αντιστοίχως. Ισχύει ότι $2D + S \leq 2L$.

Θα αποσυνθέσουμε το διμερές γράφημα σε L ταιριάσματα (matchings), κάτι που είναι γνωστό ότι μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο αφού το γράφημα είναι διμερές και έχει μέγιστο βαθμό L. Τουλάχιστον $S/2$ από αυτά τα ταιριάσματα έχουν τουλάχιστον ένα μονό χρώμα σε μια από τις δύο δεσμευμένες ακμές. Άρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μονό χρώμα για να χρωματίσουμε τις αχρωμάτιστες ακμές του ταιριάσματος. Οι αχρωμάτιστες ακμές ενός ταιριάσματος που δεν έχει δεσμευμένες ακμές που να χρωματίζονται με μονό χρώμα, χρωματίζονται με επιπλέον χρώματα (ένα επιπλέον χρώμα για κάθε ταίριασμα). Συνολικά, χρησιμοποιούμε το πολύ

$$D + S + L - S/2 = L + D + S/2 \leq 2L$$

χρώματα.

Σε κάθε φάση του άπληστου αλγορίθμου που εφαρμόζεται σε ένα σύνολο κατευθυνόμενων μονοπατιών με φορτίο L σε ένα δέντρο με κατευθυνόμενες συνδέσεις, επιλύεται ένα στιγμιότυπο του 2-περιορισμένου χρωματισμού ακμών ενός διμερούς γραφήματος με μέγιστο βαθμό L. Ο αριθμός των χρωμάτων που χρησιμοποιούνται σε κάθε φάση δεν ξεπερνάει το $2L$. Με αυτό τον τρόπο, καταλήγουμε σε έναν απλό άπληστο αλγόριθμο χρωματισμού κατευθυνόμενων μονοπατιών που χρησιμοποιεί το πολύ $2L$ χρώματα για κάθε σύνολο μονοπατιών με φορτίο L σε ένα δέντρο με κατευθυνόμενες συνδέσεις.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε συνοπτικά τη βασική ιδέα για καλύτερες λύσεις του προβλήματος. Θεωρούμε την εφαρμογή του άπληστου αλγορίθμου σε ένα σύνολο κατευθυνόμενων μονοπατιών με φορτίο L σε ένα δέντρο με κατευθυνόμενες συνδέσεις και έστω u ένας κόμβος, v_0 ο πατέρας και $v_1, ..., v_k$ τα παιδιά του u. Για $i = 0, ..., k$, καλούμε *γραμμή* το ζεύγος κορυφών w_i, z_i του διμερούς γραφήματος H_u. Λέμε ότι το χρώμα c χρησιμοποιείται στην γραμμή w_i, z_i αν το χρώμα c χρησιμοποιείται σε κάποια ακμή που είναι γειτονική είτε στήν κορυφή w_i είτε στην κορυφή z_i. Παραθέτουμε το επόμενο θεώρημα χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 9 *Υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος, για οποιοδήποτε $\alpha \in [1, 4/3]$, χρωματίζει ένα στιγμιότυπο του α-περιορισμένου προβλήματος χρωματισμού ακμών σε σε διμερές γράφημα H_u με μέγιστο βαθμό L και χρησιμοποιεί το πολύ $\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) L$ συνολικά χρώματα, έτσι ώστε ο αριθμός των χρωμάτων που χρησιμοποιούνται σε κάθε γραμμή του H_u να είναι το πολύ $4L/3$.*

Σημειώνουμε ότι οι ακμές του H_u που είναι προσκείμενες στην γραμμή w_i, z_i αντιστοιχούν σε κατευθυνόμενα μονοπάτια που διαπερνούν αντίθετα κατευθυνόμενες ακμές του δέντρου μεταξύ του u και ενός παιδιού v_i του u. Αυτό σημαίνει ότι, αν χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο χρωματισμού ακμών του Θεωρήματος 9 στην φάση που σχετίζεται με τον κόμβο u για να λύσουμε ένα στιγμιότυπο του α-περιορισμένου χρωματισμού ακμών στο διμερές γράφημα H_u με μέγιστο βαθμό L με $\alpha \leq 4/3$, τότε τα προβλήματα χρωματισμού ακμών που πρέπει να επιλυθούν στις φάσεις που σχετίζονται με τα παιδιά του u είναι επίσης στιγμιότυπα του α-περιορισμένου χρωματισμού ακμών σε διμερές γράφημα με μέγιστο βαθμό L για $\alpha \leq 4/3$. Στην πρώτη φάση του άπληστου αλγορίθμου (δηλαδή αυτήν που σχετίζεται με την ρίζα του δέντρου), δεν υπάρχουν περιορισμοί στις ακμές του αντίστοιχου διμερούς γραφήματος, επομένως οι ακμές μπορούν να χρωματιστούν σωστά με το πολύ L χρώματα. Τότε, μπορούμε να επαληθεύσουμε επαγωγικά ότι, σε κάθε μία από τις επόμενες φάσεις, ο αριθμός των χρωμάτων που χρησιμοποιούνται στα μονοπάτια που χρωματίστηκαν σε προηγούμενες φάσεις δεν ξεπερνά το $4L/3$. Επομένως, σε όλες τις φάσεις του άπληστου αλγορίθμου, ένα στιγμιότυπο του α-περιορισμένου προβλήματος χρωματισμού ακμών με $\alpha \leq 4/3$ πρέπει να λυθεί για διμερές γράφημα με μέγιστο βαθμό L και ο συνολικός αριθμός των χρωμάτων που χρησιμοποιούνται δεν ξεπερνά το $5L/3$. Συνοψίζουμε την προηγούμενη συζήτηση στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 10 *Υπάρχει άπληστος αλγόριθμος που χρωματίζει οποιοδήποτε σύνολο κατευθυνόμενων μονοπατιών με φορτίο L σε ένα δέντρο με κατευθυνόμενες συνδέσεις χρησιμοποιώντας το πολύ $5L/3$ χρώματα.*