Ασκήσεις Αριθμητικής Ανάλυσης
και Στοιχεία Θεωρίας

Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

Χρήστος Α. Αλεξόπουλος

Πάτρα Ιούνιος 2007

Το παρόν φυλλάδιο περιλαμβάνει λυμένες ασκήσεις και μερικά επιλεγμένα στοιχεία θεωρίας που αφορούν στην ύλη των κεφαλαίων I, II, III και VI του διδακτικού βιβλίου «Εισαγωγή στις Αριθμητική Ανάλυση και Περιβάλλοντα Υλοποίησης» του Χ. Αλεξόπουλου (διδάσκοντος), το οποίο διανέμεται στους Β'ετείς φοιτητές του Τμήματος Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής. Σκοπός του είναι να δώσει ένα συμπληρωματικό εφόδιο και εργαλείο στους φοιτητές για την κατανόηση βασικών στοιχείων και εννοιών της Αριθμητικής Ανάλυσης,, να τους φέρει πιο κοντά σε πεδία εφαρμογών και να βοηθήσει στην εμβάθυνση στη σχετική ύλης. Με αυτή την έννοια μπορεί να θεωρηθεί ως συμπληρωματικό βοήθημα σε σχέση με το εν λόγω διδακτικό βιβλίο.

Οι περισσότερες ασκήσεις έχουν τεθεί σε διάφορες γραπτές εξετάσεις (εξεταστικών περίοδων ή πρόοδων) του μαθήματος «Αριθμητική Ανάλυση και Περιβάλλοντα Υλοποίησης». Για καλύτερη εμπέδωση της ύλης,, οι ασκήσεις περιλαμβάνουν σε ορισμένα σημεία πρόσθετες ερωτήσεις και εναλλακτικούς τρόπους απαντήσεων, στο πνεύμα πάντα των παραδόσεων και του διδακτικού βιβλίου, στο οποίο γίνονται κατ' ευθείαν αναφορές, όπου αυτό κρίνεται αναγκαίο.

Η συνδρομή της γλώσσας Matlab (και του περιβάλλοντός της) κρίνεται χρήσιμη έως και αναγκαία σε πολλές περιπτώσεις, όπως άλλωστε απαιτεί και το μάθημα. Συχνά, στα πλαίσια των υπολογισμών που περιλαμβάνονται στις απαντήσεις των ασκήσεων, ο αναγνώστης, ενθαρύνεται ή και παρακινείται να ανατρέξει για επαλήθευση και για περισσότερες ιδέες σε ενδογενή χαρακτηριστικά και εντολές που υλοποιούν στοιχειώδεις μαθηματικούς υπολογισμούς της Γραμμικής Άλγεβρας και της Αριθμητικής Ανάλυσης ή ακόμα και σε πηγαίο κώδικα που περιλαμβάνεται στα αντίστοιχα κεφάλαια ή στο παράρτημα Β (Εισαγωγή στο Matlab) του βιβλίου.

Τέλος, θα πρέπει να τονιστεί ότι, για την κατανόηση της μεθοδολογίας, προαπαιτείται ένα ικανό γνωστικό υπόβαθρο από την Γραμμική Άλγεβρα (πράξεις και ιδιότητες πινάκων, απαλοιφή Gauss, διάσπαση LU, ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα κλπ.), όπως και από την Κλασσική Μαθηματική Ανάλυση.

Περιεχόμενα

Επαναληπτικές τεχνικές επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων

Άσκηση 1

Σε ποιο διάστημα βρίσκονται οι αριθμοί που προσεγγίζουν τον αριθμό 60 με ακρίβεια 5 σημαντικών ψηφίων;

Απ: Από τον ορισμό της ακρίβειας λαμβάνουμε την ανισότητα:

$$\frac{|x-30|}{30} \leq 5*0.001 \Rightarrow$$
$$|x-30| \leq 150*0.001 = 0.15 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -0.1500 \leq x-30 <= 0.15 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 30-0.15 \leq x \leq 30+0.15 \Rightarrow$$
$$29.8500 \leq x \leq 30.1500$$

Άσκηση 2

Έστω ότι για την εύρεση του $(7)^{1/3}$ χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της διχοτόμησης. (Υπόδειξη: το όποια δεδομένα απαιτεί η μέθοδος επιλέγονται από εσάς)

α) Βρείτε την 3η προσέγγιση (επανάληψη).

β) Δώστε φράγμα για το απόλυτο σφάλμα μετά την 20ή επανάληψη.

Απαντήσεις:

α) Ο αριθμός $7^{1/3}$ είναι ρίζα της συνάρτησης $f(x)=x^3-7$ η οποία είναι συνεχής σε όλο το R. Επιλέγουμε τώρα ένα διάστημα (a,b) της ρίζας ξ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(a)f(b)<0$. Ας θεωρήσουμε το (1.5, 2), με $f(1.5)f(2)=-3.6250<0$. Λαμβάνουμε τις διαδοχικές προσεγγίσεις:

- $a_0=a=1.5$, $b_0=b=2$: $x_1=(1.5+2)/2=1.75$ και $f(x_1)*f(b_0)= -1.6406 <0$, άρα $\xi\in(x_1, b_0)$.
- $a_1=x_1$, $b_1=b_0$: $x_2=(1.75+2)/2=1.8750$ και $f(x_2)*f(b_1)= -0.4082<0$, άρα $\xi\in(x_2, b_1)$.
- $a_2=x_2$, $b_2=b_1$: $x_3=(1.8750+2)/2=1.9375$

β) Αν e_k είναι το σφάλμα στην k προσέγγιση, γνωρίζουμε ότι ισχύει η ανισότητα

$$|e_k| \leq (b_0-a_0)/2^{k+1}$$

Για k=21 λαμβάνουμε: $|e_k| \leq 0.5*2^{21} = 2.3842e-007$ (με α.κ.υ. 5 σ.ψ.) □

Άσκηση 3

Δίνεται η εξίσωση: $-x^3 + 3*x^2 - 5*x + 1 = 0$. Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρούμε ότι ισχύει α.κ.υ. 4 σ.ψ.

α) Με τη μέθοδο του «εγκλεισμού» των ριζών βρείτε ένα διάστημα [a,b], αρκούντως μικρό, στο οποίο να ανήκει μια πραγματική ρίζα της.
β) Στη συνέχεια, με εφαρμογή 4 βημάτων της μεθόδου της διχοτόμησης, βρείτε μια προσέγγιση $\mathbf{x}^*$ της παραπάνω ρίζας.
γ) Πόσες επαναλήψεις θα χρειαστούν το πολύ για να βρεθεί μια προσέγγιση της ρίζας με απόλυτο σφάλμα $e<10^{-4}$? Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
δ) Ποιό συγκεκριμένο κριτήριο τερματισμού του αλγορίθμου θα προτείνατε στην περίπτωση σύγκλισης?

<u>Απαντήσεις</u>

Άσκηση 4

α. Ποια είναι η ακολουθία Newton-Raphson για την προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας ενός θετικού αριθμού a;
β. Βρείτε με την παραπάνω μέθοδο μια προσέγγιση της √7 με ακρίβεια 5 σημ. ψηφίων. Να γραφούν όλες οι ενδιάμεσες προσεγγίσεις και να δικαιολογηθεί το αποτέλεσμα.
γ. Ποια είναι η τάξη σύγκλισης της παραπάνω μεθόδου; Και ποια η μαθηματική της σημασία στην περίπτωση αυτή;

<u>Απαντήσεις</u>

α) Βλ. παράδειγμα βιβλίου.

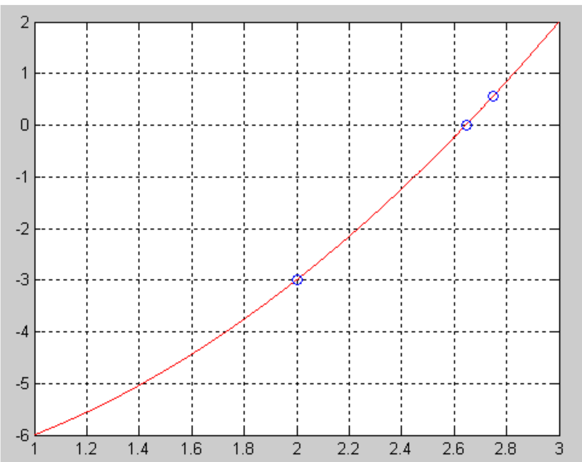
β) Είναι a=7, συνεπώς αναζητούμε μια από τις δύο λύσεις της $f(x)=x^2-7$ (έστω τη θετική) που είναι συνεχώς παραγωγίσιμος σε όλο το R. Η ακολουθία N-R είναι:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 7}{2x_{n-1}}, \text{ n=1,2,...}$$

Επιλέγουμε $x_o=2$ (η αρχική προσέγγιση είναι ακριβής σε ένα σ.ψ.) Εφαρμόζοντας τώρα έλεγχο στο απόλυτο και στο σχετικό σφάλμα αντίστοιχα (βλ. κριτήρια σελίδας I-15 διδακτικού βιβλίου), λαμβάνουμε διαδοχικά:

$x_1=x_0-(x_0^2-7)/(2*x_0) = 2.7500$ με $|x_1-x_0|=0.7500=0.75e+0$ και $|(x_1-x_0)/x_0|=3.750e-1$
$x_2=x_1-(x_1^2-7)/(2*x_1) = 2.6477$ με $|x2-x1|=0.1023=1.023e-1$ και $|(x_2-x_1)/x_1|=3.72e-2$
$x_3=x_2-(x_2^2-7)/(2*x_2) = 2.6458$ με $|x3-x2|=0.0019=1.9e-3$ και $|(x_3-x_2)/x_2|=7.1760e-4$
$x_4=x_3-(x_3^2-7)/(2*x_3)=2.6458$ με $|x4-x3|=0$ και $|(x_4-x_3)/x_2|=0$

Συνεπώς η ζητούμενη προσέγγιση είναι η x_3. Χρειάστηκαν συνολικά $\lfloor \log_2 5 \rfloor + 1$=3 επαναλήψεις για την επίτευξη της ζητούμενης ακρίβειας.



Γράφημα 1: Γράφημα της $f(x)=x^2-7$ στο διάστημα [1,3] και επαναλήψεις της μεθόδου N-R

γ) Η τάξη σύγκλισης είναι τετραγωνική, εφ' όσον η ρίζα της $f(x)=x^2-7$ είναι απλή: $f'(r)=2r\neq 0$. Τετραγωνική σύγκλιση σημαίνει ότι, αν $|e_n|=|x_n-r|$ είναι το απόλυτο σφάλμα, τότε η ακολουθία $|e_n|/|e_{n+1}|^2$ συγκλίνει σε ένα θετικό αριθμό. Τότε θα ισχύει και η προσεγγιστική σχέση:

$$\|e_{k+1}\| \approx \frac{\left|g^{(2)}(h)\right|}{2}\|e_k\|^2$$

όπου g η συνάρτηση επανάληψης (σταθερού σημείου) – στην περίπτωση της N-R, $g(x)=x-f(x)/f'(x)$ – και h ικανοποιητικά κοντά στη ρίζα r.

Άσκηση 5

(α) Να υπολογισθεί η μικρότερη πραγματική λύση της εξίσωσης $\mathbf{f(x)=3x^2-e^x=0}$ με εφαρμογή του αλγορίθμου Newton-Raphson και με ακρίβεια 4 σ.ψ. Να καθορισθεί αρχικά διάστημα της λύσης με τη βοήθεια γραφικής παράστασης. Για την αρχική προσέγγιση να εφαρμοσθεί η μέθοδος διχοτόμησης (2 επαναλήψεις). Να γραφούν τέλος, τα ενδιάμεσα βήματα και να δικαιολογηθεί η τελική προσέγγιση.

(β) Ποια είναι η τάξη σύγκλισης της μεθόδου Newton-Raphson, όπως εφαρμόστηκε στο ερώτημα (α) και τι σημαίνει αυτό για το σφάλμα;

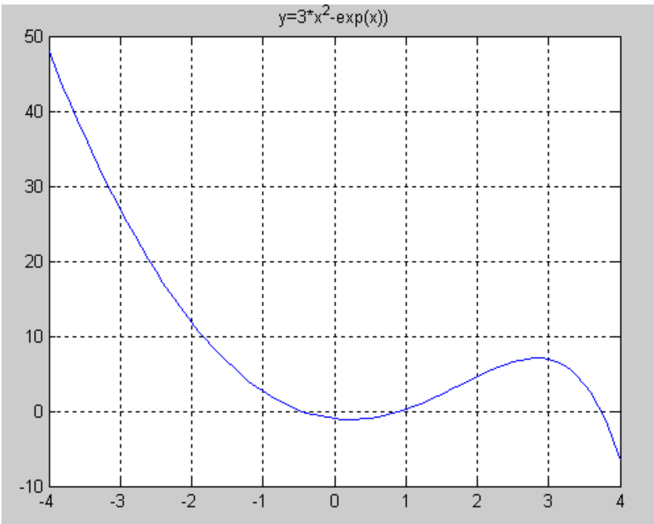
Απάντηση

(α) Η f είναι προφανώς συνεχής σε ολόκληρο το R. Δίνουμε το γράφημά της f στο διάστημα [-4, 4], στο οποίο εμφαίνεται ότι υπάρχουν 3 ρίζες. Για τον εντοπισμό τους αναζητούμε τις ρίζες εντός του [1,4] με βήμα 1 (προφανώς είναι f(1)f(4)<0). Λαμβάνουμε διαδοχικά:

f(-4)*f(-3)= 1.2931e+003>0
f(-3)*f(-2)= 319.7552>0
f(-2)*f(-1)= 31.2292>0
<u>f(-1)*f(0)= -2.6321<0</u>
<u>f(0)*f(1)= -0.2817<0</u>
f(1)*f(2)= 1.2990>0
f(2)*f(3)= 31.8822>0
<u>f(3)*f(4)= -45.6227<0</u>

Επομένως οι ρίζες ανήκουν στα διαστήματα (-1,0), (0,1) και (3,4) (το παραπάνω συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί και κατόπιν μελέτης της f ως προς τη μονοτονία και τοπικά ακρότατα). Θεωρούμε τώρα το διάστημα (-1,0) της μικρότερης λύσης. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της διχοτόμισης για τον καθορισμό μιας αρχικής προσέγγισης, έχουμε:

$x_1=(-1+0)/2$ και $f(-1/2)f(0)= -0.1435$ και επομένως η ρίζα ανήκει στο (-1/2,0).
$x_2= (-1/2+0)/2=-1/4=-0.25$



Γράφημα 2. Γράφημα της $3x^2$-e^x για τον εντοπισμό της μικρότερης ρίζας.

Λαμβάνουμε τώρα σαν αρχική προσέγγιση u_0 της μεθόδου N-R την x_2, οπότε ο επαναληπτικός τύπος δίνεται:

$$u_n = u_{n-1} - \frac{f(u_{n-1})}{f'(u_{n-1})}, n = 1,2,.... \text{ με } u_0 = x_2$$

δηλαδή:

$$u_n = u_{n-1} - \frac{3x^2 - e^x}{6x - e^x}, n = 1,2,.... \text{ με } u_0 = -0.25$$

Λαμβάνουμε διαδοχικά τις επαναλήψεις:

u_1=-0.5095, με $|u_1 - u_0|$= 0.2595
u_2= -0.4608, με $|u_2 - u_1|$= 0.0487
$\underline{u_3 = -0.4590}$, με $|u_3 - u_2|$= 0.0018= 1.8*10e-4<0.5 e-4

και απομένως απαιτήθηκαν μόνον 3 επαναλήψεις για να επιτευχθεί η ζητούμενη ακρίβεια.

(β) Η ρίζα που βρέθηκε είναι απλή. Επομένως η τάξη σύγκλισης είναι τετραγωνική και η ακολουθία $|e_{k+1}|/|e_k|^2$ συγκλίνει:

$|e_{k+1}|= |e_k|^2\ |g''(h)|/2$, όπου g(x)=x-f(x)/f′(x) ή:

$$|e_{k+1}| \approx \frac{1}{2} * \left|\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\right| e_k^2 = \frac{1}{2} * \left|\frac{6 - e^{\xi}}{6\xi - e^{\xi}}\right| e_k^2 \text{ (ξ είναι η ρίζα)}$$

Αυτό σημαίνει ότι το απόλυτο σφάλμα στο βήμα k είναι ανάλογο του τετραγώνου του σφάλματος στο βήμα k-1.

Άσκηση 6

(α) *Να δοθεί η ακολουθία Newton-Raphson για την προσέγγιση της ρίζας* $17^{1/3}$.
(β) *Βρείτε με την παραπάνω μέθοδο μια προσέγγιση της* $17^{1/3}$ *με ακρίβεια 4 σημ. ψηφίων. Για την αρχική προσέγγιση να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος διχοτόμησης. Να γραφούν όλες οι ενδιάμεσες προσεγγίσεις και να δικαιολογηθεί το αποτέλεσμα.*
(γ) *Ποια είναι η τάξη σύγκλισης της μεθόδου Newton-Raphson, όπως εφαρμόστηκε στο ερώτημα (α) και τι σημαίνει αυτό για το σφάλμα;*

Απαντήσεις:

(α) Είναι $f(x)=x^3-17=0$ και $f'(x)=3x^2$. Προφανώς η f είναι συνεχώς παραγωγήσιμη μέχρι 2ης τάξης σε ολόκληρο το R. Η ακολουθία N-R είναι: $x_n=x_{n-1}-f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$ n=1,2…, από όπου:

$$x_n = x_{n-1} - (x_{n-1}^3-17)/3x_{n-1}^2 \quad n=1,2\ldots$$

Σαν αρχική προσέγγιση λαμβάνουμε μια τιμή στην «περιοχή της ρίζας», π.χ. $x_0=2.6$.

(β) Επιλέγουμε το αρχικό x_0 «επαρκώς κοντά» στη ρίζα με τη μεθοδο διχοτόμισης:

- Είναι f(2.5)= -1.3750 και f(2.6)= 0.5760 με f(2.5)*f(2.6)<0, οπότε η ρίζα ανήκει στο (2.5, 2.6). Διχοτομούμε: $x_1=(2.5+2.6)/2=2.55$ με f(2.55)=-0.4186.
- Το νέο διαστημα της ρίζας είναι το (2.55,2.6). Με νέα διχοτόμηση έχουμε $x_2=(2.55+2.6)=2.58$. Ακριβώς αυτή θα ληφθεί ως αρχική προσέγγιση για τη μέθοδο Newton-Raphson στη συνέχεια.

Λόγω συνέχειας των παραγώγων μέχρι δευτέρας τάξης, αναμένουμε σύγκλιση αν ξεκινήσουμε στην περιοχή της ρίζας. Εφαρμόζοντας τώρα την επανανάληψη Newton-Raphson με $x_0=2.58$, λαμβάνουμε διαδοχικά:

$$x_1 = x_o - (x_0^3-17)/3x_0^2 = fl(2.5713)_{n=4}=2.571$$
$$x_2 = x_1 - (x_1^3-17)/3x_1^2 = fl(2.5713)_{n=4}=2.571 \quad (!)$$

δηλαδή η απαιτούμενη ακρίβεια επιτυγχάνεται με μια μόνον επανάληψη και η ζητούμενη προσέγγιση είναι $x_2=2.571$.

◊ **Παρατήρηση 1:** Το γεγονός ότι χρειάστηκε μόνον μια επανάληψη οφείλεται ακριβώς στο ότι λάβαμε την αρχική προσέγγιση πολύ κοντά στη ρίζα.

(γ) Προφανώς η ρίζα ξ της $f(x)=x^3-17$ είναι απλή (τυπική δικαιολόγηση: είναι $f'(x)=3x^2 \neq 0$ για $x\neq0$). Συνεπώς η τάξη σύγκλισης είναι τετραγωνική, δηλ. ο λόγος $|e_{k+1}|/|e_k|^2$ συγκλίνει και θα ισχύει: $|e_{k+1}|= |e_k|^2\ |g''(h)|/2$. Αυτό σημαίνει ότι το απόλυτο σφάλμα στο βήμα k είναι ανάλογο του τετραγώνου του απολύτου σφάλματος στο βήμα k-1. Συνεπώς αν μια προσέγγιση είναι ακριβής σε ένα σ.ψ. σε κάποιο βήμα της επανάληψης, μετά από k βήματα θα είναι ακριβής σε 2^k σ.ψ.

◊ **Παρατήρηση 2:** *Με άλλα λόγια, στην περίπτωση της τετραγωνικής σύγκλισης, αν η αρχική προσέγγιση είναι ακριβής σε 1 σημαντικό ψηφίο, τότε για να επιτευχθεί ακρίβεια σε m σημαντικά ψηφία, απαιτούνται το πολύ* $\lfloor \log_2 m \rfloor +1$ *επαναλήψεις.*

Γραμμικά Συστήματα-Διασπάσεις-Ανάλυση Σφάλματος-Νόρμες

Άσκηση 7

Δίνεται το μητρώο A= [1 1 0; 0 2 0 ; 0 1 3]. Για όλα τα ερωτήματα υποθέτουμε ότι οι πράξεις γίνονται με α.κ.υ. 4 σ.ψ. και ότι μας απασχολούν μόνον σφάλματα στρογγύλευσης.

α. Βρείτε το δείκτη κατάστασης του A με χρήση των φυσικών νορμών 1, 2 και «άπειρο».
β. Βρείτε με τη μέθοδο Gauss μια λύση για το σύστημα A**x**=$(1,-5,1)^T$, δουλεύοντας με α.κ.υ. 4 σημαντικών ψηφίων και στρογγύλευση.
γ. Θεωρώντας μόνον σφάλματα στρογγύλευσης κατά τους υπολογισμούς, βρείτε φράγματα για το σχετικό σφάλμα της λύσης του παραπάνω συστήματος.
δ. Εξετάστε αν ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος, <u>χωρίς</u> να γίνει χρήση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Στη συνέχεια επαληθεύστε, υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές.
ε. Θεωρούμε συστήματα της μορφής A**x**=**b**, όπου A=[1 6 0 0 ; 3 2 -2 0 ; 0 9 3 4 ; 0 0 7 1] και b τυχαίο διάνυσμα. Να διατυπωθεί τυπικά και να υπολογισθεί η πλέον αποδοτική διάσπαση για το μητρώο A.

<u>Απαντήσεις</u>

α) Υπολογίζουμε τώρα τον A^{-1} με τη μέθοδο Gauss-Jordan: $[A|I]\rightarrow[I|A^{-1}]$. Λόγω της ειδικής μορφής του A, παρατηρούμε ότι τα μηδενικά στοιχεία των στηλών 1 και 3 παραμένουν και στον αντίστροφο! (απλή εφαρμογή Γραμμικής Άλγεβρας). Λαμβάνουμε τελικά:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1.0000 & -0.5000 & 0\\ 0 & 0.5000 & 0\\ 0 & -0.1667 & 0.3333\end{bmatrix}$$

Δουλεύοντας τώρα με κάθε νόρμα ξεχωριστά έχουμε:

- Νόρμα 1: $||A||_1=4$, $||A^{-1}||_1=1.1667$, $k(A)=||A||_1\,||A^{-1}||_1 = 4*1.1667 = 4.6667$
- Νόρμα «άπειρο»: $||A||_\infty=4$, $||A^{-1}||_\infty=1.500$, $k(A)=6$
- Νόρμα 2: $||A||_2=\sqrt{\rho(A^{T}A)}$. Εδώ θα πρέπει να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του A^TA. Ο A δεν είναι συμμετρικός, οπότε θα είχαμε $||A||_2=\sqrt{\rho(A^{T}A)}=\sqrt{\rho(A^2)}=\sqrt{(\rho(A))^2}=\rho(A)$. Οδηγούμαστε λοιπόν υποχρεωτικά στην εύρεση των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\varphi(\lambda)=\det(A^TA-\lambda I)$ που είναι ένα πλήρες πολυώνυμο τρίτου βαθμού, όχι εύκολα παραγοντοποιήσιμο. Θα υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές με τη βοήθεια του Matlab (επαληθεύστε τα αποτελέσματα!):

  eig(A'*A) = $[0.7590,\ 4.3586,\ 10.8824]^T$
  B=inv(A);
  eig(B'*B)= $[0.0919,\ 0.2294,\ 1.3176]^T$

απ' όπου:

$||A||_2 = \sqrt{10.8824} = 3.2988$ και

$||A^{-1}||_2 = \sqrt{1.3176} = 1.1479$

και επομένως: $k(A)=||A||_2\, ||A^{-1}||_2 = 3.7866$. Επιβεβαιώνουμε: cond(A,2)=3.7866

Παρατηρούμε ότι ο δείκτης κατάστασης είναι μικρός, οπότε μπορούμε να δεχθούμε το σχετικό υπόλοιπο ως ενδεικτικό για την τάξη μεγέθους του σχετικού σφάλματος.

► [Διαβάστε εδώ την παραπομπή 3]

β) Εφαρμόζουμε απαλοιφή στον επαυξημένο [A| b], με b=$(1,-5,1)^T$, κάνοντας τις πράξεις σε α.κ.υ. 4 σ.ψ. Λαμβάνουμε:

$$[A\,|\,b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 1+5/2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 3.5 \end{array}\right]$$

Εφαρμόζοντας απαλοιφή και πίσω αντικατάσταση, υπολογίζουμε τελικά μια προσεγγιστική λύση x*:

$x^*=[3.500, -2.500, 1.167]^T$

Παρατηρούμε ότι με α.κ.υ. 4.σ.ψ. υπάρχει κατ' αρχήν απώλεια σ.ψ. στη διαίρεση 3/3.5=1.166…., οπότε η τρίτη συνιστώσα δεν είναι ακριβής!

γ) Εφαρμογόζουμε τη διπλή ανισότητα για τον δείκτη κατάστασης.

$$||r||_\sigma / k(A) \le ||\varepsilon||_\sigma \le ||r||_\sigma * k(A) \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε τις εμπλεκόμενες ποσότητες, ενδεικτικά με τη νόρμα «άπειρο»:

$$\|r\|_\sigma = \frac{\| r \|_\infty}{\| b \|_\infty} = \frac{\| b - Ax^* \|_\infty}{\| b \|_\infty} \quad \text{(σχετικό υπόλοιπο-residual)}$$

Είναι $b - Ax^* =$ [0, 0, -0.0010]]^T (αυτό το περιμέναμε!), $\|b\|_\infty = 5$, $\| b - Ax^* \|_\infty$ =0.0010, οπότε:

$\|r\|_\sigma$ =2.0000e-004

Η (1) γράφεται:

3.3333e-005 $\le ||\varepsilon||_\sigma \le$ 0.0012=1.2e-003

δ) Από το θεώρημα των κύκλων Gerchgorin προκύπτει

$|\lambda-1|\le 1 \Rightarrow 0\le\lambda\le 2$,
$|\lambda-2|\le 0 \Rightarrow \lambda=2$ (βρέθηκε η μια ιδιοτιμή)
$|\lambda-3|\le 1 \Rightarrow 2\le\lambda\le 4$,

που συναληθεύουν στο [0, 4]. Εξ' άλλου ο A είναι προφανώς αντιστρέψιμος και επομένως το 0 δεν είναι ιδιοτιμή. Επομένως $\lambda\in(0,4]$ και άρα ο A είναι θετικά ορισμένος.
Οι ιδιοτιμές του A υπολογίζονται άμεσα από την det(A-λI)=0:

$$\det(A)=\begin{bmatrix}\lambda-1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 1 & \lambda-3\end{bmatrix}=(\lambda-1)\begin{bmatrix}\lambda-2 & 0\\ 1 & \lambda-3\end{bmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

και συνεπώς $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$, όλες θετικές και $\rho(A)=3$.

ε) O A είναι ταινιακός. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι είναι και αντιστρέψιμος ($\det(A)=418\neq 0$), αν και αυτό μπορεί να ελεγχθεί κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου διάσπασης! Επομένως μπορεί να παραγοντοποιηθεί. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν εναλλαγές γραμμών (P=I), επιχειρούμε λοιπόν τη διάσπαση. Αν δεν ισχύει η υπόθεση, θα προκύψει μη επιτρεπτή πράξη, διαίρεση δια 0, ή υπόριζα ποσότητα αρνητική:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 6 & 0 & 0\\ 3 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 9 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 7 & 1\end{bmatrix}=LU=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ l_{21} & 1 & 0 & 0\\ 0 & l_{32} & 1 & 0\\ 0 & 0 & l_{43} & 1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1 & 6 & 0 & 0\\ 0 & u_2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & u_3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & u_4\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 6 & 0 & 0\\ l_{21} & 6l_{21}+u_2 & -2 & 0\\ 0 & l_{32}u_2 & -2l_{32}+u_3 & 4\\ 0 & 0 & l_{43}u_3 & 4l_{43}+u_4\end{bmatrix}$$

από όπου παίρνουμε το σύστημα:

$l_{21}=3$
$6l_{21}+u_2=2 \Rightarrow u_2 = -16$
$l_{32}u_2=9 \Rightarrow l_{32} = 9/(-16)= -0.5625$
$-2l_{32}+u_3=3 \Rightarrow u_3 = 3+2*(-0.5625) = 1.8750$
$l_{43}u_3=7 \Rightarrow l_{43} = 7/1.8750 = 3.7333$
$4l_{43}+u_4=1 \Rightarrow u_4 = 1-4*3.7333 = -13.9332$

Επομένως ο A είναι άμεσα διασπάσιμος.

Σημείωση: Επιβεβαιώνουμε στο Matlab:

```
>> L*U
ans =
```

```
   1.0000    6.0000         0         0
   3.0000    2.0000   -2.0000         0
        0    9.0000    3.0000    4.0000
        0         0    6.9999    1.0000
```

◊ **Παρατήρηση:** Το Matlab στη διάσπαση LU εφαρμόζει μερική οδήγηση (και στους ταινιακούς πίνακες). Συνεπώς, όταν $P \neq I$ (εναλλαγή οδηγών), στην έξοδο οι L και U δεν έχουν την παραπάνω μορφή. Αντ' αυτού θα ισχύει PA=LU. Δοκιμάζουμε:

```
>> [L, U, P]=lu(A)

L =
   1.0000         0         0         0
        0    1.0000         0         0
        0         0    1.0000         0
   0.3333    0.5926   -0.1587    1.0000

U =
   3.0000    2.0000   -2.0000         0
        0    9.0000    3.0000    4.0000
        0         0    7.0000    1.0000
        0         0         0   -2.2116

P =
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
     1     0     0     0
```

Εύκολα επαληθεύουμε ότι PA=LU.

Άσκηση 8

Στα παρακάτω ερωτήματα υποθέτουμε ότι δουλεύουμε με α.κ.υ. 5 σημαντικών ψηφίων.
Δίνεται ο πίνακας :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

α) Με βάση ιδιότητες του Α (βρείτε τις και αιτιολογείστε τις), υπολογίστε μια γρήγορη διάσπαση LU του Α, χωρίς να εφαρμοσθεί η κλασσική απαλοιφή (Gauss).
β) Είναι όλες οι ιδιοτιμές του Α πραγματικές και γιατί;
γ) Εξετάστε αν ο Α είναι θετικά ορισμένος χωρίς να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του. Βρείτε διαστήματα στα οποία ανήκουν οι ιδιοτιμές

δ) Εξετάστε τώρα αν υπάρχει απλούστερη διάσπαση για τον Α. Εάν υπάρχει, δώστε την, υπολογίζοντας τον ή τους απαιτούμενους πίνακες.

Απαντήσεις:

α) Ο Α προφανώς έχει αυστηρή διαγώνια κυριαρχία και επομένως είναι αντιστρέψιμος και άμεσα διασπάσιμος: A=LU. Επειδή είναι και είναι τρισδιαγώνιος, οι τριγωνικοί πίνακες L και U έχουν τις γνωστές ειδικές μορφές: Ο L περιέχει 1 στην 1η διαγώνιο, τα στοιχεία $l_{i+1,i}$ (i=1,2,3) (κάτω διαγώνιος του L) στην κάτω διαγώνιο και 0 στα υπόλοιπα στοιχεία. Ο U περιέχει τα u_{ii} (i=1,2,3) στη 1η διαγώνιο και τα $a_{i,i+1}$ (i=1,2,3) της πάνω διαγωνίου του Α στην πάνω διαγώνιό του:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ l_{21}u_{11} & l_{21}a_{12}+u_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & l_{32}u_{22} & l_{32}a_{23}+u_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & l_{43}u_{33} & l_{43}a_{34}+u_{44} \end{bmatrix}$$

Από την ταυτότητα A=LU καταλήγουμε συστηματικά στις παρακάτω εξισώσεις ως προς l_{ij} και u_{ii}.

$a_{11}=4=L_{(1)}U^{(1)} \Rightarrow u_{11} = 4$
$a_{21}=1=L_{(2)}U^{(1)} = l_{21}u_{11} \Rightarrow l_{21} = 0.25$
$a_{22}=5=L_{(2)}U^{2} = l_{21}a_{12}+u_{22} \Rightarrow u_{22} = 4.7500$
$a_{32}=-1=L_{(3)}U^{(2)} = l_{32}u_{22} \Rightarrow l_{32} = -0.2105$
$a_{33}=3=L_{(3)}U^{(3)} = l_{32}a_{23}+u_{33} \Rightarrow u_{33} = 2.7895$
$a_{43}=1=L_{3}U^{3} = l_{43}u_{33} \Rightarrow l_{43} = 0.3585$
$a_{44}=2=L_{4}U^{4} = l_{43}a_{34}+u_{44} \Rightarrow u_{44} = 1.6415$

και επομένως οι L και U έχουν καθοριστεί πλήρως.

β) Παρατηρούμε ότι ο Α είναι συμμετρικός και συνεπώς έχει πραγματικές ιδιοτιμές, σύμφωνα με γνωστή πρόταση της Γραμμικής Άλγεβρας.

γ) Βρήκαμε ότι οι ιδιοτιμές του Α είναι πραγματικές. Εφαρμόζουμε τώρα το Θεώρημα *των κύκλων του Gershgorin* και λαμβάνουμε ότι οι ιδιοτιμές λ ανήκουν στην εξής ένωση κύκλων:

E(A) = $C[(4,0), 1] \cup C[(5,0), 2] \cup C[(3,0), 2] \cup C[(2,0), 1]$

ή ισοδύναμα κάθε ιδιοτιμή λ πληροί μια από τις ανισότητες:

$|\lambda-4|\leq 1$, $|\lambda-5|\leq 2$, $|\lambda-3|\leq 2$, $|\lambda-1|\leq 1$

από όπου προκύπτουν οι ανισότητες

$-1\leq\lambda-4\leq 1$, $-2\leq\lambda-5\leq 2$, $-2\leq\lambda-3\leq 2$, $-1\leq\lambda-2\leq 1$

ή:

$3\le\lambda\le5,\ 3\le\lambda\le7,\ 1\le\lambda\le5,\ 1\le\lambda\le3$

Παρατηρούμε ότι όλες οι ιδιοτιμές οριοθετούνται σε θετικά διαστήματα, επομένως είναι θετικές. Πιο συγκεκριμένα, οι παραπάνω ανισότητες συναληθεύουν στο διάστημα $E(A)=[3,7]$, άρα θα είναι $\lambda\ge3>0$. Αφού ο πίνακας A είναι συμμετρικός και έχει θετικές ιδιοτιμές, από σχετικό θεώρημα (βλ. παραπομπή 1) είναι θετικά ορισμένος.

◊ **Παρατήρηση:** Το ότι ο A είναι θ.ο., μπορεί να εξαχθεί άμεσα: είναι συμμετρικός, παρουσιάζει α.δ.κ. και έχει θετικά διαγώνια στοιχεία (βλ. παραπομπή 1).

δ) Η απλούστερη διάσπαση είναι η διάσπαση Choleski, η οποία ισχύει στην περίπτωσή μας, αφού ο A είναι συμμετρικός και θ.ο.:

$$A = L\,L^T$$

όπου L κάτω τριγωνικός πίνακας. Επειδή ο A είναι τρισδιαγώνιος, ο L θα έχει διδιαγώνια μορφή:

$$L=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & 0 & 0\\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 & 0\\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & 0\\ 0 & 0 & \beta_3 & \alpha_4\end{bmatrix}$$

Η $A = L\,L^T$ τώρα γράφεται:

$$A=LL^T=\begin{bmatrix}a_1 & 0 & 0 & 0\\ \beta_1 & a_2 & 0 & 0\\ 0 & \beta_2 & a_3 & 0\\ 0 & 0 & \beta_3 & a_4\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}a_1 & \beta_1 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & \beta_2 & 0\\ 0 & 0 & a_3 & \beta_3\\ 0 & 0 & 0 & a_4\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}a_1^2 & a_1\beta_1 & 0 & 0\\ a_1\beta_1 & \beta_1^2+a_2^2 & a_2\beta_2 & 0\\ 0 & a_2\beta_2 & \beta_2^2+a_3^2 & a_3\beta_3\\ 0 & 0 & a_3\beta_3 & \beta_3^2+a_4^2\end{bmatrix}$$

Οι άγνωστοι a_i και β_j υπολογίζονται από το σύστημα $a_{ij}=L_{(i)}(L^T)^{(j)}=L_{(i)}L_{(j)}^T$, $i,j=1,..,4$, το οποίο προφανώς ανάγεται (λόγω συμμετρίας) σε σύστημα 7 διαφορετικών εξισώσεων με 7 αγνώστους, το οποίο αναμένουμε φυσικά να έχει πραγματικές λύσεις:

$a_1^2=a_{11}=4 \Rightarrow a_1 = 2$
$a_1\beta_1=a_{21}=1\Rightarrow \beta_1=0.5$
$\beta_1^2+a_2^2= 5 \Rightarrow a_2^2 = 5-(0.5)^2 = 4.7500 \Rightarrow a_2 = 2.1794$
$a_2\beta_2= -1 \Rightarrow \beta_2 = -1/ 2.1794 = -0.4588$
$\beta_2^2+a_3^2= 3 \Rightarrow a_3^2 = 3-(-0.4588)^2 = 2.7895 \Rightarrow a_3 = 1.6702$
$a_3\beta_3= 1 \Rightarrow \beta_3 = 1/1.6702= 0.5987$
$\beta_3^2+a_4^2= 2 \Rightarrow a_4^2 = 2-(0.5987)^2 = 1.6416 \Rightarrow a_4 = 1.2812$

Συνεπώς:

$$L = \begin{bmatrix} 2.000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5000 & 2.1794 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4588 & 1.6702 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5987 & 1.2812 \end{bmatrix}, \text{ με } A=LL^T$$

□

Άσκηση 9

Δίνεται ο πίνακας A=[2 0 0 0 ; 0 8 5 0 ; 0 5 8 0 ; 0 0 0 2]. Υποθέτουμε ότι δουλεύουμε *σε α.κ.υ. 4 σημ. ψηφίων με εφαρμογή στρογγύλευσης* και ότι *μας απασχολούν μόνον σφάλματα οφειλόμενα σε απώλεια ακρίβειας κατά τους υπολογισμούς.*

α) Αφού εξετάσετε διεξοδικά και αναφέρετε όλες τις ιδιότητες του A, *να δικαιολογήσετε και να δώσετε την απλούστερη δυνατή (από πλευράς μνήμης-ταχύτητας) διάσπαση του A,* υπολογίζοντας τους εμπλεκόμενους πίνακες.

β) Πόσο «καλός» υπολογιστικά είναι ο A για την επίλυση ενός συστήματος A**x**=**b** (**b**$\in R^4$) και γιατί; Παίζει ρόλο το b;

γ) Για ποια πραγματικά k συγκλίνει η επαναληπτική μέθοδος $\mathbf{x}_k=kA\mathbf{x}_{k-1}+\mathbf{c}$ ($\mathbf{c}\in R^4$, δοθέν) για κάθε αρχικό $\mathbf{x}_0$;

Απαντήσεις

α) Ο A είναι συμμετρικός τρισδιαγώνιος, έχει α.δ.κ. και θετικά διαγώνια στοιχεία. Οι δύο τελευταίες ιδιοότητες εξασφαλίζουν το ότι είναι θ.ο. Επομένως ο A επιδέχεται την απλούστερη και πλέον αποδοτική σε μνήμη και ταχύτητα διάσπαση, τη διάσπαση Choleski: $A=LL^T$. Ο L θα είναι της μορφής:

$$L = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Από την ταυτότητα:

$$A = L^T L = \begin{bmatrix} a_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & a_2\beta & 0 \\ 0 & a_2\beta & \beta^2 + a_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4^2 \end{bmatrix}$$

Λαμβάνουμε 5 εξισώσεις με 5 αγνώστους. Βρίσκουμε τελικά:

$$L = \begin{bmatrix} 1.4142 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.8284 & 0 & 0 \\ 0 & 1.7678 & 2.2079 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.4142 \end{bmatrix}$$

2) Υπολογίζουμε το δείκτη κατάστασης:

$||A||_1=13$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2051 & -0.1282 & 0 \\ 0 & -0.1282 & 0.2051 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$||A^{-1}||_1=0.5$

Άρα k(A)=6.5. Λόγω της μικρής τιμής του k(A), ο A είναι υπολογιστικά καλός ανεξαρτήτως της τιμής του σταθερού διανύσματος b. Μπορούμε λοιπόν να εμπιστευθούμε το σχετικό υπόλοιπο έναντι του σχετικού σφάλματος.

3) Η επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει εάν και μόνον εάν ρ(kA)<1, δηλαδή θα πρέπει kρ(A)<1 ή k<1/ρ(A). Βρίσκουμε λοιπόν τις ιδιοτιμές του A:

det(λI-A)= $\begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-8 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda-8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-2)\left[(\lambda-8)^2-5^2\right] = (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-13)(\lambda-3)$

Συνεπώς ρ(A)=13 και η ζητούμενη συνθήκη είναι: k<1/13.

Άσκηση 10

Δίνεται ο πίνακας (μητρώο) A και το διάνυσμα b:

A=[1 0 0 0 ; 0 8 4 0 ; 0 4 8 0 ; 0 0 0 2], b=[1 1 0 -1]^T

Έστω επίσης ότι ισχύει α.κ.υ. 4 σ.ψ. Με εφαρμογή της μεθόδου Gauss-Jordan (ή στο Matlab…) βρίσκουμε τον A^{-1}:

A^{-1} = [1.0000 0 0 0 ; 0 0.1667 -0.0833 0 ; 0 -0.0833 0.1667 0 ; 0 0 0 0.5000]

1α) Κάνοντας τους κατάλληλους υπολογισμούς, πόσο «καλός» περιμένετε να είναι ο A για την υπολογιστική επίλυση ενός συστήματος A**x**=c και γιατί; Παίζει ρόλο σ' αυτό και η τιμή του σταθερού διανύσματος **c** ή όχι;

1β) Θεωρούμε τώρα το συγκεκριμένο σύστημα Ax=b. Να δώσετε με συστηματικό τρόπο και με πλήρη δικαιολόγηση φράγματα για το σχετικό σφάλμα $||\varepsilon||_\sigma$ της λύσης.

2α) Χωρίς καν να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές βρείτε διαστήματα στα οποία αυτές βρίσκονται. Υπάρχει κάποιο συμπέρασμα?

2β) Ποιες είναι τώρα οι ιδιοτιμές του Α και ποια η φασματική ακτίνα ρ(Α); *[Υπόδειξη:όλες οι ιδιοτιμές είναι ακέραιοι]*

2γ) (α) Με βάση και τα παραπάνω, δώστε τώρα όλες τις μέχρι τώρα εμφανείς ιδιότητες του Α: ___ , ____ , … κλπ. (β) Χωρίς να εφαρμοσθεί οποιοδήποτε σύνθετος υπολογισμός στον Α, πως μπορούμε να αποφανθούμε ότι ο Α μπορεί να παραγοντοποιηθεί χωρίς να απαιτούνται εναλλαγές γραμμών?

2δ) Ο αλγόριθμος του *Grout*, υπολογίζει συστηματικά και άμεσα τον L και U, από την απαίτηση A=LU, χωρίς να εφαρμόζει τυπικά τη γνωστή μέθοδο LU. Εφαρμόστε τον συστηματικά, για τον υπολογισμό των L και U, αφού λάβετε υπ' όψη *και άλλη ιδιότητα του Α (από το ερώτημα (γ)) για την εύρεση των τελικών μορφών των L και U.*

2ε) *Λαμβάνοντας τώρα υπ' όψιν όλες τις ιδιότητες του Α, υπάρχει απλούστερη ακόμα παραγοντοποίηση για τον Α και ποια είναι αυτή; Προσαρμόστε* τον αλγόριθμο Grout στην περίπτωση αυτή, υπολογίζοντας τον, ή τους, εμπλεκόμενους πίνακες.

<u>Απαντήσεις:</u>

1α) Αρκεί να βρούμε το δείκτη κατάστασης k(A) του Α. Με χρήση της νόρμας «άπειρο» βρίσκουμε: $||A||_\infty=12$, $||A^{-1}||_\infty=1$ και άρα $k(A)= ||A||_\infty\, ||A^{-1}||_\infty=12$. Παρατηρούμε ότι ο k(A) είναι σχετικά μικρός και επομένως ο Α θα είναι υπολογιστικά καλός (συμφωνία σφάλματος και υπολοίπου). Το σταθερό διάνυσμα δεν παίζει ρόλο.

1β) Αν ε_σ το σχετικό σφάλμα, ως γνωστόν ισχύει η ανισότητα

$$||r_\sigma|| \,/\, k(A) \le ||\varepsilon_\sigma|| \le ||r_\sigma|| * k(A)$$

όπου $||r_\sigma||=||b-Ax^*||/||b||$ το σχετικό υπόλοιπο.
Λύνοντας το Ax=b με Gauss και ακρίβεια 4 σ.ψ., υπολογίζουμε την προσεγγιστική λύση x^*:

$$x^* = (1.0000,\ 0.1667,\ -0.0833,\ -0.5000)^T$$

Βρίσκουμε τώρα:

$r=b-Ax^*= 1.0e-015 *(0,\ 0.2220,\ 0.1110,\ -0.1110)^T$
$||b||_\infty=1$
$||r_\sigma||_\infty=||r||_\infty/||b||_\infty=2.2204e-016$

και τελικά: $1.8504e-017 \le ||\varepsilon_\sigma|| \le 2.6645e-015$

2α) Σύμφωνα με το Θ. των κύκλων του Gerschgorin οι ιδιοτιμές βρίσκονται στην ένωση κύκλων: C[(1,0), 0]$\cup$C[(8,0), 4]$\cup$C[(2,0),0], δηλ. ικανοποιούν τις ανισότητες |1-λ|≤ 0, |8-λ|≤ 4, |2-λ|≤ 0, που συναληθεύουν στην 1 ≤ λ ≤ 12. Συνεπώς λ>0 και άρα ο A είναι θετικά ορισμένος.
Σημείωση: Το ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θ.ο. συνάγεται άμεσα από το γεγονός ότι έχει α.δ.κ. και θετικά τα διαγώνια στοιχεία (βλ. Παραπομπή 1). Επομένως θα είναι και λ>0.

2β) Οι ιδιοτιμές είναι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου φ(λ)=det(A-λI). Αναπτύσσοντας την ορίζουσα προκύπτει αμέσως:

$$\text{Det}\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 8-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} =$$

$= (1-\lambda)(2-\lambda)[(8-\lambda)^2-4^2] = (1-\lambda)(2-\lambda)[(8-\lambda-4)(8-\lambda+4) =$
$=(1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)(12-\lambda)$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι οι 1,2,4 και 12. Η φασματική ακτίνα είναι ρ(A)=12.

2γ) (α) Ο A είναι *συμμετρικός, τρισδιαγώνιος και θετικά ορισμένος*. Επιπλέον έχει *α.δ.κ. και ως εκ τούτου αντιστρέψιμος.*
(β) Επειδή ο A είναι α.δ.κ. (ή επειδή ο A είναι θ.ο.), σύμφωνα με σχετικό θεώρημα, ισχύει η άμεση διάσπαση A=LU (δεν υπάρχουν εναλλαγές γραμμών, ή P=I).

2δ) Επειδή ο A είναι τρισδιαγώνιος θα ισχύει η διάσπαση (οι L και U θα έχουν απαραίτητα διδιαγώνια μορφή):

$$A=LU=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

όπου οι προσδιοριστέοι άγνωστοι είναι μόνον 5: οι l_{32} και u_{ii}, i=1,…,4. Εξισώνοντας συστηματικά κατά στήλες, λαμβάνουμε τελικά (εδώ παραλείπονται οι ενδιάμεσες εξισώσεις):

$$L = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5000 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2ε) Επειδή ο A είναι συμμετρικός και θ.ο. ισχύει η διάσπαση Choleski $A=LL^T$, όπου L κάτω τριγωνικός. Αφού ο A είναι και τρισδιαγώνιος, το ίδιο θα είναι και ο L, δηλαδή θα ισχύει: L(3,1)=L(4,1)=L(4,2)=0. Επιπλέον, παρατηρούμε αμέσως ότι θα είναι και L(2,1)=L(4,3)=0. Επομένως οι προσδιοριστέοι άγνωστοι είναι μόνον 4. Θέτουμε:

$$L=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$A=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{22} & l_{32} & 0 \\ 0 & 0 & l_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix}$$

Εξισώνοντας συστηματικά κατά στήλες, λαμβάνουμε τελικά (εδώ παραλείπονται οι ενδιάμεσες εξισώσεις):

$$L=\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.8284 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4142 & 2.4495 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.4142 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 11

Δίνεται ο πίνακας A και το διάνυσμα b:

A=[1 0 0 0 ; 0 8 5 0 ; 0 5 8 0 ; 0 0 0 2], b=[1 1 0 -1]^T

Υποθέτουμε ότι δουλεύουμε *σε α.κ.υ. 4 σημ. ψηφίων με εφαρμογή στρογγύλευσης* και ότι *μας απασχολούν μόνον σφάλματα οφειλόμενα σε απώλεια ακρίβειας κατά τους υπολογισμούς.* Υπόδειξη: Ο A^{-1} υπολογίζεται εύκολα. Έχει την ίδια μορφή με τον A με $A^{-1}(1,1)=1/\alpha_{11}$, $A^{-1}(4,4)=1/\alpha_{44}$ και με κεντρικό 2x2 μπλόκ ίσο με το αντίστροφο του αντίστοιχου μπλοκ του A: $A^{-1}(2{:}3, 2{:}3)= [A(2{:}3, 2{:}3)]^{-1}$

1) Εξετάζοντας προσεκτικά και διεξοδικά τις ιδιότητες του A, *δώστε και δικαιολογείστε την απλούστερη δυνατή παραγοντοποίηση LU του A*, υπολογίζοντας τους απαραίτητους πίνακες.

2) Πόσο «καλός» υπολογιστικά είναι ο A για την επίλυση ενός συστήματος A**x**=c (**c**$\in R^4$) και γιατί;

3) Δώστε με συστηματικό τρόπο και με πλήρη δικαιολόγηση αριθμητικά φράγματα για το σχετικό σφάλμα $||\varepsilon||_\sigma$ της λύσης του συστήματος A**x**=b. Να γίνει χρήση της νόρμας «άπειρο».

Απαντήσεις

1) Διαπιστώνουμε άμεσα ότι ο A είναι τρισδιαγώνιος, συμμετρικός, με αυστηρή διαγώνια κυριαρχία και με θετικά διαγώνια στοιχεία. Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο (iv) της §2 της παραπομπής 1, είναι θετικά ορισμένος και συνεπώς επιδέχεται διάσπαση Choleski A=L^{T}L όπου L κάτω

τριγωνικός (εναλλακτικά μπορούμε να φθάσουμε στο ίδιο συμπέρασμα εφαρμόζοντας το Θεώρημα των κύκλων Gerschgorin).
Όπως και στην άσκηση 1, συμπεραίνουμε ότι ο L θα έχει τη διδιαγώνια μορφή:

$$L=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4\end{bmatrix}$$

και συνεπώς θα είναι:

$$A=LL^T=\begin{bmatrix}a_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & 0 & 0\\ 0 & \beta & a_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_4\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}a_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & \beta & 0\\ 0 & 0 & a_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_2^2 & a_2\beta & 0\\ 0 & a_2\beta & \beta^2+a_3^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_4^2\end{bmatrix}$$

Έχουμε 5 εξισώσεις με 5 αγνώστους. Επιλύοντας συστηματικά τις προκύπτουσες εξισώσεις με α.κ.υ. 4 σ.ψ., λαμβάνουμε τελικά:

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2.828 & 0 & 0\\ 0 & 1.768 & 2.208 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1.414\end{bmatrix}$$

2) Θα υπολογίσουμε το δείκτη κατάστασης k(A) με χρήση της νόρμας «1». Ο A^{-1} θα είναι παρομοίως τρισδιαγώνιος και συμμετρικός και υπολογίζεται εύκολα:

$\|A\|_1=13$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.2051 & -0.1282 & 0\\ 0 & -0.1282 & 0.2051 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.5\end{bmatrix}$$

$\|A^{-1}\|_1=1$
k(A)=1*13=13

Ο δείκτης κατάστασης είναι της τάξης του 10 και συνεπώς το μητρώο Α αναμένεται να έχει καλή υπολογιστική συμπεριφορά για την επίλυση ενός συστήματος Ax=c: δηλ. μπορούμε να εμπιστευτούμε το σχετικό υπόλοιπο για την τάξη μεγέθους του σχετικού σφάλματος.

3) Το σχετικό σφάλμα $||\varepsilon||_\sigma$ ως γνωστόν φράσσεται:

$||r_\sigma|| / k(A) \le ||\varepsilon_\sigma|| \le ||r_\sigma||* k(A)$

όπου $||r_\sigma||=||b-Ax^*||/||b||$ το σχετικό υπόλοιπο.
Λύνοντας το $Ax=b$ με Gauss και ακρίβεια 4 σ.ψ., υπολογίζουμε την προσεγγιστική λύση x^*:

$$x^* = (1.0000,\ 0.2051,\ -0.1282,\ -0.5000)^T$$

Εξ' άλλου είναι (οι υπολογισμοί πάντα με α.κ.υ. 4 σ.ψ.!):

$$r=b-Ax^*= 1.0\text{e-}015 *(0,\ 0.2220,\ -0.2220,\ -0.1110)^T$$
$$||b||_\infty=3$$
$$||r_\sigma||_\infty=||r||_\infty/||b||_\infty=fl(1.8504\text{e-}016)_{n=4}= 1.850\text{e-}016$$

και τελικά: $1.423\text{e-}017 \le ||\varepsilon_\sigma|| \le 2.4050\text{e-}015$

Άσκηση 12

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι δουλεύουμε με αριθμητική κινητής υποδιαστολής 3 σημαντικών ψηφίων.

(1) Εξηγείστε, κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς, πως μπορεί να διαπιστωθεί ότι ο A είναι μη ιδιάζων (αντιστρέψιμος).
(2α) Ποια ιδιότητα θα πρέπει να είχε ο A, για να μπορούσε να διαπιστωθεί με το ελάχιστο υπολογιστικό κόστος (χωρίς να γίνει απαλοιφή) ότι είναι αντιστρέψιμος;
(2β) Ποια ιδιότητα θα πρέπει να είχε ο A, για να μπορούσε να διαπιστωθεί με το ελάχιστο υπολογιστικό κόστος ότι είναι άμεσα παραγοντοποιήσιμος (δηλ. A=LU);
(3) Υποθέτουμε ότι εφαρμόζουμε εις το εξής απαλοιφή με μερική οδήγηση για την παραγοντοποίηση LU του A. Τότε, παρατηρώντας προσεκτικά τη μορφή του A και <u>χωρίς καμία απολύτως αριθμητική πράξη</u>, δώστε σε ένα βήμα μια οικονομική μορφή παραγοντοποίησης του A, υποδεικνύοντας τους αγνώστους που πρέπει να υπολογισθούν. Δικαιολογείστε.
(4) Υπολογίστε συστηματικά τους αγνώστους, όπως προκύπτουν από την μορφή παραγοντοποίησης της (1.3), εφαρμόζοντας α.κ.υ. 3 σημαντικών ψηφίων.
(5) Τι περιμένετε να σας επιστρέψει η κλήση [L, U, P]=lu(A) της συνάρτησης lu στη γλώσσα MATLAB;
(6) Φράξτε τις ιδιοτιμές του A σε διαστήματα, χωρίς να τις υπολογίσετε.
(7α) Καλώντας τη συνάρτηση eig(B) της MATLAB για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του πίνακα $B=[e_2 ; e_1 ; e_3 ; e_4]A$, λαμβάνουμε:

ans =

4.41124474142754
3.10685727473998
-1.69072714276719
0.17262512659969

Είναι ο B είναι θετικά ορισμένος και γιατί;

(7β) Τι μπορείτε τότε να συμπεράνετε για την επιτυχία της διάσπασης Choleski για τον πίνακα B;

Απαντήσεις

(1) Εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss (με ή χωρίς οδήγηση). Καταλήγουμε τελικά στον αναγμένο κλιμακωτό πίνακα $R=I\in R^{4x4}$, άρα ο A είναι μη ιδιάζων (αντιστρέψιμος).

(2α) Αν είχε α.δ.κ., οπότε, όπως γνωρίζουμε, θα ήταν αντιστρέψιμος.

(2β) Αν και πάλι είχε α.δ.κ., οπότε, όπως γνωρίζουμε, θα ήταν A=LU με P=I.

(3) Εναλλάσσοντας τις γραμμές 1 και 2 (4>1) έχουμε

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = PA, \text{ με } P=[e_2\ ;\ e_1\ ;\ e_3\ ;\ e_4]$$

Παρατηρούμε όμως ότι ο B είναι τρισδιαγώνιος. Τότε γνωρίζουμε ότι ο B παραγοντοποιείται ως εξής:

$$B= LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{11} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

(δεύτερη διαγώνιος του U= δεύτερη διαγ. του B) και άρα μια οικονομική μορφή διάσπασης είναι

$$B= PA = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{11} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Σημ. Παρατηρούμε ότι η περαιτέρω απαλοιφή δεν εναλλάσσει γραμμές.

(4) Σύμφωνα με τα παραπάνω, ξεκινάμε από την ανάπτυξη της ταυτότητας B=PA=LU και υπολογίζουμε συστηματικά τους αγνώστους $l_{i,i-1}$ και u_{ii} από τις εξισώσεις που προκύπτουν. Αναπτύσσοντας τις χρήσιμες εξισώσεις κατά στήλες του A λαμβάνουμε:

$b_{11} = 4 = L_1 U^1 = u_{11}$
$b_{21} = 1 = L_2 U^1 = l_{21}\, u_{11}$, άρα $l_{21} = 0.25$
$b_{22} = -1 = L_2 U^2 = (l_{21}, 1, 0, 0)\,(2, u_{22}, 0, 0)^T = 2\, l_{21} + u_{22}$, άρα $u_{22} = -1.5$
$b_{23} = 1 = L_3 U^2 = (0, l_{32}, 1, 0)\,(2, u_{22}, 0, 0)^T = l_{32}\, u_{22}$, και άρα
$l_{32} = \frac{1}{-1.5} = fl(-0.666666666666667)_{n=3} \approx -0.667$ (α.κ.υ. 3 σ.ψ.)

και παρομοίως: $u_{33} \approx 2.67$ (α.κ.υ. 3 σ.ψ.), $l_{43} = 0.75$ και $u_{44} = 0.25$.

(5) Ακριβώς τα αποτελέσματα που πήραμε παραπάνω, μαζί με τον πίνακα μετάθεσης:

[L, U, P]=lu(A)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.667 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2.67 & 1 \\ 0 & 0 & 0. & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(6) Από το Θ. των κύκλων του Gerschgorin έχουμε ότι οι ιδιοτιμές βρίσκονται στην ένωση των κύκλων $\mathbf{C}((a_{ii}, 0), R_i)$ του μιγαδικού επιπέδου με $R_i = \Sigma|a_{ij}|$, $i \neq j$. Για την περίπτωση του A έχουμε:

$R_1 = 2$, $R_2 = 4$, $R_3 = 2$, $R_4 = 2$

και επομένως για τις ιδιοτιμές λ ικανοποιούνται οι σχέσεις:

|λ-1|<=2, |λ-2|<=4, |λ-2|<=2, |λ-1|<=2

δηλαδή οι λ βρίσκονται στην ένωση των κύκλων: $C((1, 0), 2) \cup C((2, 0), 4) = [2, 6]$.

(7α) Η τρίτη ιδιοτιμή είναι αρνητική. Συνεπώς ο A <u>δεν</u> είναι θ.ο. αφού δεν ισχύει η ικανή και αναγκαία συνθήκη λ>0.

(7β) Αφού ο B δεν είναι θ.ο., η διάσπαση δεν είναι εφικτή.

◊ **Σημείωση:** Πράγματι στο Matlab θα είχαμε:

R= chol(A)
%chol: προκαθορισμένη συνάρτηση του συστήματος που υλοποιεί την μέθοδο Choleski

??? Error using ==> chol
Matrix must be positive definite.

Άσκηση 13

Δίνεται το σύστημα Ax=b με

A=[3 -1 0 ; -1 2 -1 ; 0 -1 3] και b=[1.2 2.6 -3.4]

Με εφαρμογή της μεθόδου Gauss-Jordan (ή στο Matlab…) βρίσκουμε τον A^{-1}:
A^{-1} = [0.4167 0.2500 0.0833 ; 0.2500 0.7500 0.2500 ; 0.0833 0.2500 0.4167]

α) Χωρίς καν να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές βρείτε διαστήματα στα οποία αυτές βρίσκονται.
β) Να δοθούν τώρα οι νόρμες 1, 2 και «άπειρο» του Α. Ποιες είναι οι ιδιοτιμές του Α και ποια η φασματική ακτίνα ρ(Α); *[Υπόδειξη: τουλάχιστον μια ιδιοτιμή που θα βρείτε είναι ακέραιος αριθμός]*
γ) Με βάση και τα παραπάνω, δώστε τώρα όλες τις μέχρι τώρα εμφανείς ιδιότητες του Α: αντιστρέψιμος, ___ , ____ , … κλπ.
δ) Ενδιαφερόμαστε για την παραγοντοποίηση LU του Α. Χωρίς να εφαρμοσθεί οποιοδήποτε σύνθετος υπολογισμός, πως μπορούμε να αποφανθούμε ότι ο Α μπορεί να παραγοντοποιηθεί χωρίς να απαιτούνται εναλλαγές γραμμών?
ε) Ο αλγόριθμος του *Grout* που διδάχτηκε στο μάθημα, υπολογίζει συστηματικά τον L και U, από την απαίτηση A=LU, χωρίς να εφαρμόζει τυπικά τη γνωστή μας από την Γραμμική Άλγεβρα μέθοδο LU. *Λαμβάνοντας τώρα υπ' όψιν και άλλη τυχόν ιδιότητα του Α (από το ερώτημα (γ)).* εφαρμόστε τον συστηματικά, δίνοντας τελικά τα L και U.
ζ) *Λαμβάνοντας τώρα υπ' όψιν όλες τις ιδιότητες του Α, υπάρχει απλούστερη παραγοντοποίηση για τον Α? Προσαρμόστε* τον αλγόριθμο Grout στην περίπτωση αυτή, υπολογίζοντας τον, ή τους, εμπλεκόμενους πίνακες.

<u>Απαντήσεις</u>

α) *Οι ιδιοτιμές φράσσονται σε διαστήματα που υπαγορεύονται από το Θ. κύκλων Guersgorin.* Επομένως έχουμε ότι οι ιδιοτιμές ανήκουν στην εξής ένωση κύκλων κέντρων (a_{ii}, 0) και ακτίνων $R_i=\Sigma|a_{ij}|$, j=1,…,n με $j\neq i$:

$$\lambda\in C[(3,0), 1)] \cup C[(2,0), 2)] \cup C[(3,0), 1)]$$

δηλ. τελικά $\lambda\in[0, 4]$. Επιπλέον, επειδή det(A-0*I)=det(A)≠0, το 0 δεν είναι ιδιοτιμή (δηλ. ο Α είναι αντιστρέψιμος) και συνεπώς $\lambda\in(0, 4]$, δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές και άρα ο Α είναι θετικά ορισμένος (από σχ. θεώρημα).

β) Υπολογίζουμε εύκολα:

$\|A\|_\infty$ = 4,   και $\|A\|_1$ = 4

Αφού ο A είναι συμμετρικός, αναμένουμε πραγματικές ιδιοτιμές. Έχουμε:

$$\varphi(\lambda)=\mathrm{Det}(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(\lambda)=(3-\lambda)[(2-\lambda)(3-\lambda)-1]+[-(3-\lambda)+0]=(3-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+5-1)=(3-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4)=0$$

απ' όπου $\lambda_1=3$ και

$$\lambda_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}$$, δηλαδή: $\lambda_2=1$ και $\lambda_4=4$

Επομένως η φασματική ακτίνα ρ(A)=4.

Προφανώς ο A είναι συμμετρικός. Η νόρμα 2 για συμμετρικούς πίνακες προκύπτει άμεσα, συγκεκριμένα είναι ίση με τη φασματική ακτίνα (βλ. και παραπομπή 3):

$$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^T A)}=\sqrt{\rho(AA)}=\sqrt{\rho(A^2)}=\sqrt{(\rho(A))^2}=\rho(A)$$

δηλαδή $\|A\|_2$ = 4 στην περίπτωσή μας.

Σημείωση: Εναλλακτικός υπολογισμός της ορίζουσας με χρήση γραμμικότητας (δεν προτιμάται εδώ, αλλά καλόν είναι να εφαρμόζεται για length(A)>3):

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -(3-\lambda) \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(3-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -1 \\ 3-\lambda & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(-1)(3-\lambda)\,[2-(2-\lambda)(3-\lambda)]=(\lambda-3)[-\lambda^2+5\lambda-4]$$

γ) Οι άμεσα ορατές ιδιότητες είναι: συμμετρικός και τρισδιαγώνιος (ταινιακός). Επίσης είναι **θετικά ορισμένος**, αφού όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές όπως βρέθηκε, και άρα αντιστρέψιμος (από σχετικό θεώρημα).

δ) Ο A είναι θετικά ορισμένος και άρα από σχετικό θεώρημα είναι A=LU (δεν απαιτούνται εναλλαγές γραμμών, δηλ. P=I)

ε) Αφού ο A είναι και **τρισδιαγώνιος**, το ίδιο θα ισχύει και για τους U και L. Άρα στην ταυτότητα $A=(a_{ij})$ = LU, θα είναι:

- $L=(l_{ij})$ κάτω τριγωνικός με L(i,i)=1 και L(3,3)=0

- $U=(u_{ij})$ άνω τριγωνικός με στοιχεία της 2ης διαγωνίου u(1,2)=a(1,2)=-1 και u(2,3)= a(2,3)=-1 και u((1,3)=0.

Συνεπώς υπάρχουν συνολικά 2+3=5 άγνωστοι. Εξισώνοντας συστηματικά λαμβάνουμε τελικά:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.33333 & 1 & 0 \\ 0 & -0.6 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } U = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1.667 & -1 \\ 0 & 0 & 2.4 \end{bmatrix}$$

(παραλείπονται εδώ οι ενδιάμεσες εξισώσεις, ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει).

ζ) Ναι. Αφού ο A είναι θετικά ορισμένος (ιδιοτιμές θετικές) και συμμετρικός, επιδέχεται διάσπαση Choleski:

$$A = LL^T \text{ ή } A=U^TU \qquad (1)$$

Αφού A τρισδιαγώνιος, το ίδιο θα είναι και ο U. Συνεπώς, για την προσαρμογή του αλγορίθμου Grout, απαιτούμε να ισχύει η (1), όπου U= (u_{ij})=άνω τριγωνικός και u(1,3)=0. Άρα υπάρχουν συνολικά 5 άγνωστα u_{ij}. Εξισώνοντας συστηματικά και με ανάλογο τρόπο όπως πιο πάνω βρίσκουμε τελικά:

$$U = L^T = \begin{bmatrix} 1.732 & -0.5773 & 0 \\ 0 & 1.291 & -0.775 \\ 0 & 0 & 1.549 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 14

Δίνεται το σύστημα Ax=b με A=[3 -1 0 ; -1 2 -1 ; 0 -1 3] και b=[1.2 2.6 -3.4]^T

α) Πόσο «καλός» περιμένετε να είναι ο A για την υπολογιστική επίλυση ενός συστήματος A**x**=c και γιατί; Παίζει ρόλο σ' αυτό και η τιμή του σταθερού διανύσματος **c** ή όχι;

β) Θεωρούμε τώρα το συγκεκριμένο σύστημα Ax=b. Να δώσετε με συστηματικό τρόπο και με πλήρη δικαιολόγηση φράγματα για το σχετικό σφάλμα $||\varepsilon||_\sigma$ της λύσης.

Απαντήσεις:

α) Βρίσκουμε πρώτα τον αντίστροφο του A με εφαρμογή της μεθόδου Gauss-Jordan:

$$[A/I] \to \ldots \to [I/A^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.4167 & 0.2500 & 0.0833 \\ 0 & 1 & 0 & 0.2500 & 0.7500 & 0.2500 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0833 & 0.2500 & 0.4167 \end{array}\right]$$

Εύκολα βρίσκουμε:

$$||A||_1 = 4 \text{ και } ||A^{-1}||_1 = 1.25$$

Κριτήριο για την υπολογιστική συμπεριφορά του Α είναι ο δείκτης κατάστασης k(A). Είναι $k(A)=||A||_1\ ||A^{-1}||_1 = 4 * 1.25 = 5$ που βρίσκεται πολύ κοντά στο 1, δηλ. ο Α έχει καλή κατάσταση: το σχετικό σφάλμα συμβαδίζει με το σχετικό υπόλοιπο, το οποίο είναι «αξιόπιστο» ως προς την ακρίβεια της υπολογιστικής επίλυσης του συστήματος Ax=c <u>ανεξάρτητα</u> της τιμής του c.

β) Για το σχετικό σφάλμα $||\varepsilon||_\sigma$ ισχύει η ανισότητα:

$$||r||_\sigma / k(A) <= ||\varepsilon||_\sigma <= ||r||_\sigma * k(A) \qquad (1)$$

Το σχετικό υπόλοιπο ορίζεται: $||r||_\sigma = ||r||/||b|| = ||b-Ax^*||/||b||$

Επιλύουμε πρώτα το Ax=b με τη μέθοδο Gauss βρίσκοντας μια προσέγγιση x^* του x:

x^*= [0.8667 1.4 -0.6667]

Όσον αφορά τα υπόλοιπα μεγέθη, είναι:

$r=b-Ax^*$ = [-4.441e-016 0 4.441e-016] $\Rightarrow ||r||_1$ = 8.882e-016
$||b||_1$ = 7.2,

και άρα $||r||_\sigma$ = 1.234e-016

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε τα συγκεκριμένα φράγματα:

2.467E-017 <= $||\varepsilon||_\sigma$ *<= 6.168E-016*

Σημ. Το πόσο καλός είναι ο Α (k(A)=5) επαληθεύεται ακριβώς από τη «στενότητα» του παραπάνω διαστήματος. □

Άσκηση 15

Δίνεται ο πίνακας Α και το διάνυσμα b:

A=[1 0.2 -0.1 ; 1 -2 0.2 ; 0.1 0 2] , $b=[2\ 0\ 2]^T$

Υποθέτουμε ότι εργαζόμαστε με αριθμητική κ. υ. 4 σ.ψ.
α) Μπορεί να διασπασθεί ο Α στη μορφή AP=LU με P=I και γιατί;
(εξηγείστε χωρίς να εφαρμόσετε μέθοδο Gauss)
β) Να βρεθούν οι L και U και P (με ή χωρίς οδήγηση) της διάσπασης LU, <u>χωρίς</u> να εφαρμοσθεί απαλοιφή Gauss. Τι παρατηρείτε αν εφαρμόζατε μερική οδήγηση;
γ) Να βρεθεί ο δείκτης κατάστασης του Α. (νόρμα 1).
δ) Να βρεθούν φράγματα για το σχετικό σφάλμα $||\varepsilon||_\sigma$ του συστήματος Ax=b. Διατυπώστε και εξηγείτε με σαφήνεια τα απαιτούμενα βήματα

<u>Απαντήσεις</u>:

α) Ο Α έχει προφανώς α.δ.κ. και ως εκ τούτου (όπως γνωρίζουμε από σχετικό θεωρητικό αποτέλεσμα), διασπάται άμεσα : A=LU (δεν υπάρχουν ανταλλαγές γραμμών ή ισοδύναμα P=I)
β) Γράφουμε την ταυτότητα A=LU απαιτώντας l(i,i)=1, L=κάτω τριγ. και U=άνω τριγ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

που δίνει ένα γραμμικό σύστημα με 9 αγνώστους (l_{ij} και u_{ij}). Εξισώνοντας συστηματικά τα A(i,j) με τα στοιχεία του Ax κατά στήλες, λαμβάνουμε:

Στοιχεία $1^{ης}$ στήλης:
$A(1,1)=1 = L_1 U^1 = u(1,1)$
$A(2,1)=1= L_2 U^1 = l(2,1)\, u(1,1) \Rightarrow$ **l(2,1)** = 1
$A(3,1)=0.1= L_3 U^1 = l(3,1)\, u(1,1) \Rightarrow$ **l(3,1)** = 0.1

Στοιχεία $2^{ης}$ στήλης:
$A(1,2)=0.2= L_1 U^2 =$ **u(1,2)**
$A(2,2)=-3= L_2 U^2 = l(2,1)\, u(1,2)+u(2,2) \Rightarrow$ **u(2,2)** = -3 – 1*0.2 = -3.2
$A(3,2)=0= L_3 U^2 = l(3,1)\, u(1,2)+l(3,2)u(2,2) \Rightarrow$ **l(3,2**) = -0.1*0.2/(-3.2)= $fl(0.00625)_{n=4}$=0.0063

Στοιχεία $3^{ης}$ στήλης:
$A(1,3)=-0.1= L_1 U^3 =$ **u(1,3)**
$A(2,3)=0.2= L_2 U^3 = l(2,1)\, u(1,3)+u(2,3) \Rightarrow$ **u(2,3)** = 0.2 – 1*(-0.1) = 0.3
$A(3,3)=1= L_3 U^3 = l(3,1)\, u(1,3)+l(3,2)u(2,3)+u(3,3) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ **u(3,3)** = 1 – (0.1)*(-0.1)- 0.00625*(0.3) = $fl(1.008125)_{n=4}$ = 1.0081

Επομένως οι L και U έχουν καθορισθεί πλήρως.

γ) Είναι $\|A\|_1=2.300$

Υπολογίζουμε τώρα τον A με τη μέθοδο Gauss-Jordan. Τελικά λαμβάνουμε κάνοντας πράξεις σε α.κ.υ. 4 σ.ψ.:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.9058 & 0.0906 & 0.0362 \\ 0.4484 & -0.4552 & 0.0679 \\ -0.0453 & -0.0045 & 0.4982 \end{bmatrix}$$

οπότε: $\|A^{-1}\|_1 = fl(1.3995)_{n=4}=1.400$

Τελικά έχουμε $k(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = 3.220$
δ) Αν $\|e\|_r$ το σχετικό σφάλμα και $\|r\|_r = \dfrac{\| r \|}{\| b \|}$ το σχετικό υπόλοιπο, τότε ισχύει η ανισότητα:

$||r||_r / k(A) \leq ||e||_r \leq ||r||_r * k(A)$ (1)

Υπολογίζουμε τώρα το $||r||_{rel}$:

$$//r//_r = \frac{\| r \|}{\| b \|} = \frac{\| b - Ax^* \|}{\| b \|}$$

όπου x^* είναι η υπολογιζόμενη λύση του $Ax^*=b$. Λύνουμε τώρα το $Ax^*=b$ εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss και με α.κ.υ. 4 σ.ψ. Τελικά λαμβάνουμε:

$x^* = [1.884, 1.033, 0.9058]^T$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις απαιτούμενες υπόλοιπες ποσότητες:

$||b||_1 = 4$, και:
$b-Ax^* = [0, -0.3331, -0.4441]^T$
$||b-Ax^*||_1 =$ 7.772e-016

οπότε τελικά λαμβάνουμε:

$||r||_{rel}$ = 7.772e-016/4 = 1.943e-016

Άρα η (1) γίνεται:

1.943e-016/3.220$\leq ||e||_r \leq$ 3.220*1.943e-016$\Rightarrow$
$\Rightarrow$ *6.034e-017*$\leq //e//_r \leq$ *6.256e-016*

Το σχετικό σφάλμα επομένως φράσσεται (όπως αναμενόταν) σε πολύ στενό διάστημα.

♦**Ερώτηση**: σε πόσα τουλάχιστον σ.ψ. θα είναι ακριβής η προσεγγιστική λύση? (βλ. Κεφ. Ι, ο-ρισμός ακρίβειας)

Άσκηση 16

Δίνεται ο πίνακας A=[-3 2 0 ; 1 3 0 ; 0 0 6] και θεωρούμε τον $B=A^TA$. Υποθέτουμε επίσης ότι δουλεύουμε με αριθμητική κινητής υποδιαστολής 5 σ.ψ. και ότι ισχύουν μόνον σφάλματα οφειλόμενα σε στρογγύλευση κατά τους υπολογισμούς.

α) Χωρίς σύνθετους υπολογισμούς, να ελέγξετε αν ο B **είναι** θετικά ορισμένος. Δικαιολογεί-στε πλήρως την απάντησή σας.

β) Βρείτε <u>τη νόρμα 2</u> του B ($\|B\|_2$).

γ) Υπολογίστε το δείκτη κατάστασης του B (με χρήση της νόρμας 1). Σχολιάστε σχετικά.

δ) Να υπολογισθούν επακριβώς όλες οι ιδιοτιμές του B. Ποιο το συμπέρασμά σας?

ε) Αναφέρατε ποιές μορφές διάσπασης επιδέχεται ο Β και γιατί. Στη συνέχεια δικαιολογείστε και υπολογίστε επακριβώς την απλούστερη δυνατή μορφή διάσπασής του.
ζ) Δίνεται τώρα το διάνυσμα b=[2 1 3]^T. Πως μπορεί να λυθεί κατόπιν της (ε), το σύστημα Bx=b? Βρείτε τις λύσεις του.

<u>Απαντήσεις:</u>

Επαναληπτικές Μέθοδοι για γραμμικά συστήματα

Άσκηση 17

Δίνεται ο πίνακας A=[2 0 0 0 ; 0 8 5 0 ; 0 5 8 0 ; 0 0 0 2]. Υποθέτουμε ότι δουλεύουμε *σε α.κ.υ. 4 σημ. ψηφίων με εφαρμογή στρογγύλευσης* και ότι *μας απασχολούν μόνον σφάλματα οφειλόμενα σε απώλεια ακρίβειας κατά τους υπολογισμούς* Θεωρούμε την επαναληπτική μέθοδο Gaus-Seidel για την υπολογιστική επίλυση του Ax=b με $b=[1\ 1\ 0\ 1]^T$.

(α) Για τα δεδομένα που δίνονται, δώστε τον επαναληπτικό τύπο της υπό τη μορφή πινάκων. Πως υπολογίζεται στην πράξη η προσέγγιση στο βήμα k;

(β) Συγκλίνει ο αλγόριθμος αυτός για κάθε αρχικό διάνυσμα $\mathbf{x_0}$ και γιατί;

(γ) Να υπολογίσετε αριθμητικό φράγμα για το απόλυτο σφάλμα στη 10η επανάληψη. Να τεθεί αρχικά $\mathbf{x_0}=(0.5, 0, 0, 0.5)^T$ και να γίνει χρήση της νόρμας «άπειρο». Να δοθούν όλα τα απαιτούμενα βήματα.

(δ) Ποιές <u>συγκεκριμένες</u> εντολές θα δίνατε στο Matlab για να υπολογίσετε το αποτέλεσμα που βρήκατε στο ερώτημα (γ) ?

<u>Απαντήσεις:</u>

α) Είναι $x_k=Bx_{k-1}+c$ με $B=Q^{-1}(Q-A)$ και $c=Q^{-1}b$, όπου

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ P = Q\text{-}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος του διδιαγώνιου Q υπολογίζεται εύκολα: έχει ακριβώς την ίδια μορφή με τον Q, με αντίστροφα διαγώνια στοιχεία (γνωστή ιδιότητα στη γραμμική άλγεβρα, που αποδεικνύεται με πράξεις υπομητρώων σε μορφή μπλόκ):

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & (Q(2:3,2:3))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

όπου Q(2:3,2:3) είναι το κεντρικό μπλοκ του $Q=\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$. Υπολογίζουμε εύκολα:

$$(Q(2:3,2:3))^{-1} = \frac{1}{8*8-0}*\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.1250 & 0 \\ -0.0781 & 0.1250 \end{bmatrix}$$

και τελικά:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1250 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0781 & 0.1250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5000 \end{bmatrix} =$$

Επομένως:

$$B = Q^{-1}P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6250 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3906 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

και $c = Q^{-1}b = (0.500, 0.1250, -0.0781, 0.5000)^T$

► **[Διαβάστε εδώ την παραπομπή 2]**

β) Ο A έχει προφανώς αδκ και επομένως, από σχετικό θεώρημα, η ακουλουθία Gaus-Seidel συγκλίνει.

γ) Για $x_0=(0.5, 0, 0, 0.5)^T$ υπολογίζουμε:

$x_1=B*x_0+c = (0.5000, 0.1250, -0.0781, 0.5000)^T$
$||B||_\infty = 0.6250$
$||x_1-x_0||_\infty=0.1250$

Αν $||e_{10}||=||x_{10}-x||_\infty$ είναι το απόλυτο σφάλμα στην $10^η$ επανάληψη, τότε ως γνωστόν (σελ. IV5-5, τύπος (IV.1.9)) ισχύει η ανισότητα:

$$\|e_{10}\| \leq \frac{\|B\|^{10}}{1-\|B\|}\|x_1 - x_0\|$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$||e_{10}|| \leq 0.0030$

Σχόλιο 1: Μπορούμε να επαληθεύσουμε στο Matlab με την εντολή:

```
fragma=norm(x1-x0, inf)*norm(B, inf)^10 / (1-norm(B, inf))
```

δ) Οι στοιχειώδεις υπολογισμοί του ερωτήματος (γ) υλοποιούνται από τις παρακάτω εντολές της Matlab:

```
A=[2 0 0 0 ; 0 8 5 0 ; 0 5 8 0 ; 0 0 0 2]
b=[1 1 0 1]'
Q=A    /*υπολογισμός Q*/
Q(2,3)=0
P=Q-A
B=inv(Q)*P /*πίνακας επανάληψης*/
```

```
c=inv(Q)*b
x0=[0.5 0 0 0.5]'    /*αρχική προσέγγιση*/
x1=B*x0+c
fragma=norm(x1-x0, inf)*norm(B, inf)^10 / (1-norm(B, inf))  /*υπολογισμός άνω φράγματος*/
```

Σχόλιο 2: Ένας κώδικας Matlab για την Gauss-Seidel δίνεται στην §IV.3 .

Άσκηση 18

Δίνεται ο πίνακας (μητρώο) A και το διάνυσμα b:

A=[1 0 0 0 ; 0 8 4 0 ; 0 4 8 0 ; 0 0 0 2], b=[1 1 0 -1]^T

Υποθέτουμε ότι όλες οι πράξεις γίνονται με α.κ.υ. 4 σ.ψ.

α) Θεωρούμε την επαναληπτική μέθοδο Gauss-Seidel για την υπολογιστική επίλυση του Ax=b. (α1) Δώστε τον επαναληπτικό τύπο της, υπό τη μορφή πινάκων και τον πίνακα επανάληψης B. (α2) Συγκλίνει ο αλγόριθμος αυτός για κάθε αρχικό διάνυσμα ή όχι και γιατί;

β) Δώστε τώρα μια αριθμητική εκτίμηση του απολύτου σφάλματος στη 2η επανάληψη, αφού θέσετε αρχικά **x0**=[1, 1, 1, 1].

γ) Ποια βήματα θα ακολουθούσατε (αναφέρατε συγκεκριμένα) για να επαληθεύσετε στη Matlab τα αποτελέσματα των (3α) και (3β) ?

δ) Αναφέρατε πως θα μπορούσατε να υπολογίσετε (χωρίς εφαρμογή μαθηματικής μεθόδου) την φασματική ακτίνα του A.

Απαντήσεις:

α1) Ο επαναληπτικός τύπος θα είναι $x_k=Bx_{k-1}+c$, k=1,2,… , όπου:

$$B = Q^{-1}P,\ c=Q^{-1}b \ \text{ με }\ Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$P=Q-A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο Q είναι κάτω τριγωνικός οπότε εύκολα προκύπτει (π.χ. απλή εφαρμογή μεθ. Gauss-Jordan)

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1250 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0625 & 0.1250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5000 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τέλος το γινόμενο:

$$B = Q^{-1}P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

α2) Ο Α έχει α.δ.κ., οπότε από σχετικό θεώρημα ο παραπάνω αλγόριθμος συγκλίνει για κάθε αρχικό διάνυσμα. Άλλη δικαιολόγηση: προφανώς είναι $||B||_1$= 0.75 < 1 και από σχετικό θεώρημα ο αλγόριθμος συγκλίνει.

β) Υπολογίζουμε πρώτα την πρώτη προσέγγιση $x_1=Bx_0+c$. Είναι:

$c= Q^{-1}b = (1.0000, 0.1250, -0.0625, -0.5000)^T$
$x_1=Bx_0+c = (0, -0.5000, 0.2500, 0)^T + (1.0000, 0.1250, -0.0625, -0.5000)^T=$
$= (1.0000, -0.3750, 0.1875, -0.5000)^T$

◊ **Παρατήρηση: Εναλλακτικά** (βλ. και παραπομπή 2) υπολογίζουμε με εμπρός αντικατάσταση τη λύση του κάτω τριγωνικού συστήματος $Qx_1=Px_0+b$. Βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα.
Για τις επαν. μεθόδους ισχύει ως γνωστόν η παρακάτω εκτίμηση σφάλματος:

$$\varepsilon=||x-x_k||\leq ||x_1-x_0||\ ||B||^k/(1-||B||)$$

Εδώ είναι k=2 και

$||B||_1=0.75$
$||x_1-x_0||_1= 3.6875$

οπότε: $||x-x_k||_1 \leq 3.6875*(0.75)^2/0.25 \Rightarrow \varepsilon \leq 8.2969$

◊ **Παρατήρηση:** Ασφαλώς και δεν περιμέναμε καλύτερο φράγμα, αφού αφ' ενός περιοριστήκαμε στο σφάλμα στη δεύτερη επανάληψη, και αφ' ετέρου, το x_0 δεν επιλέχτηκε επαρκώς κοντά στη λύση ($x^*=(1.0000, 0.1667, -0.0833, -0.5000)^T$). Αν συμβολίσουμε $\varepsilon_k= ||x-x_k||$, τότε:

- Για την 20η επανάληψη, παίρνουμε: $\varepsilon_{20} \leq 0.0468$.
- Αν επιλέξουμε «καλύτερο» x_0, π.χ. $x_0=(1.0000, 0, 0, -0.5000)^T$, (με τις δύο συνιστώσες απολύτως ακριβείς), βρίσκουμε: $\varepsilon_2 \leq 0.4219$ και $\varepsilon_{20} \leq 0.0024$, που αποτελούν σαφώς καλύτερες εκτιμήσεις.

γ) Δίνουμε κατά σειρά τις εντολές:

```
A=[1 0 0 0 ; 0 8 4 0 ; 0 4 8 0 ; 0 0 0 2];
b=[1 1 0 -1];
Q=A; /*καθορισμός του Q*/
Q(2,3)=0;
P=Q-A;
```

```
B=inv(Q)*P /υπολογισμός του B*/
c=inv(Q)*b;
x0=[1 1 1 1]'; /*αρχική προσέγγιση*/
x1=B*x0+c ; /*πρώτη προσέγγιση*/
fragma=norm(x1-x0, 1)*norm(B, 1)^2/(1-norm(B, 1))  /*υπολογισμός άνω φράγματος*/
```

◊ **Εναλλακτικά:** Δίνουμε:

```
A=[1 0 0 0 ; 0 8 4 0 ; 0 4 8 0 ; 0 0 0 2]
b=[1 1 0 -1];
Q=A /*καθορισμός του Q*/
Q(2,3)=0
P=Q-A
c=inv(Q)*b
x0=[1 1 1 1]' /*αρχική προσέγγιση*/
x1=Q\(P*x0+b)   /*υπολογισμός πρώτης προσέγγισης από το σύστημα τριγωνικό Qx1=Px0+c */
fragma=norm(x1-x0, 1)*norm(B, 1)^2/(1-norm(B, 1)) /*υπολογισμός άνω φράγματος*/
```

δ) Όπως είδαμε πιο πάνω, ο A έχει διακεκριμένες πραγματικές ιδιοτιμές (άρα έχει 4 γ.α. ιδιοδιανύσματα). Συνεπώς, για τον υπολογισμό της φασματικής ακτίνας $\rho(A)=\max(|\lambda_i|)$, πληρούνται οι προϋποθέσεις εφαρμογής της *μεθόδου των δυνάμεων*: $x_k=Ax_{k-1}$, x_0=αυθαίρετο$\neq 0$. Για αποφυγή ενδεχομένου διαίρεσης με 0 και σφαλμάτων στρογγύλευσης, εφαρμόζουμε κανονικοποίηση (νόρμα ∞), οπότε προκύπτει η επανάληψη:

$$x_0=(1,1,1,1)^T$$
$$u_k=Ax_k\ ,\ x_{k+1}= u_k/||u_k||_\infty,\ k=0,1,2,\ldots \qquad (1)$$

Για την ακολουθία αυτή θα ισχύει $\lim_{k\to\infty}x_k=v_{\rho(A)}$=ιδιοδιοδιάνυσμα για την $\rho(A)$, με $||v_{\rho(A)}||_\infty=1$ και $\rho(A) = \lim_{k\to\infty}||u_k|_\infty$.
Τώρα εφαρμόζοντας την (1), λαμβάνουμε:

$$A*x_0 =(1, 12, 12, 2)^T = 12 *(0.0833, 1.0000, 1.0000, 0.1667)^T = c_1\ x_1$$
$$A*(0.0833, 1.0000, 1.0000, 0.1667)^T = (0.0833, 12.0000, 12.0000, 0.3333)^T =$$
$$= 12 * (0.0069, 1.0000, 1.0000, 0.0278)^T = c_2\ x_2$$
$$A*(0.0069, 1.0000, 1.0000, 0.0278)^T = (0.0069, 12.0000, 12.0000, 0.0556) =$$
$$= 12 * (0.0006,\ 1.0000, 1.0000, 0.0046)^T = c_3\ x_3$$

Είναι φανερό πως η ακολουθία $\{c_k\}$ συγκλίνει στη φασματική ακτίνα $\rho(A)=12$, ενώ η $\{x_k\}$ στο αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $v_{\rho(A)}= (0,\ 1.0000, 1.0000, 0)^T$.

◊ **Β' τρόπος:** Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την επανάληψη με κανονικοποίηση με τη νόρμα 2:

$$x_0=(1,1,1,1)^T$$
$$u_k=A\ x_{k-1}\ ,\ x_k= u_k/||u_k||_2,\ k=1,2,\ldots$$

για την οποία ισχύει $\lim_{k\to\infty} x_k = v_{\rho(A)}$=ιδιοδιοδιάνυσμα για την ρ(A), με $||v_{\rho(A)}||_2=1$, και $\rho(A) = \lim_{k\to\infty\to\infty}||u_k||_2$. Οι υπολογισμοί είναι ανάλογοι με πριν, αν θεωρήσουμε ότι δουλεύουμε σε υπολογιστικό περιβάλλον το οποίο υποστηρίζει την νόρμα 2 [π.χ. Matlab, Βλ. παράρτημα Β διδακτικού βιβλίου]

Σημείωση: το ερώτημα δεν απαιτούσε τους συγκεκριμένους υπολογισμούς, παρά μόνον την υπόδειξη της μεθοδολογίας.

Άσκηση 19

Δίνεται το σύστημα Ax=b με A=[3 -1 0 ; -1 2 -1 ; 0 -1 3] και b=[1.2 2.6 -3.4]

α) Αποδείξτε ότι, αν ||B||<1 για κάποια φυσική νόρμα (B είναι ο πίνακας επανάληψης), τότε μια εκτίμηση για το απόλυτο σφάλμα μιας επαναληπτικής μεθόδου δίνεται από τη σχέση: $||x-x_k||<=||B||^k(1-||B||)^{-1}||x_1-x_0||$.

β) Θεωρούμε τώρα μια επαναληπτική μέθοδο Gauss-Seidel σαν μοντέλο υπολογιστικής επίλυσης του Ax=b. Δώστε τον επαναληπτικό τύπο της, υπό τη μορφή πινάκων. Ποιος ο πίνακας επανάληψης B;

γ) Συγκλίνει ο αλγόριθμος αυτός για κάθε αρχικό διάνυσμα ή όχι και γιατί;

δ) Δώστε τώρα μια εκτίμηση του απολύτου σφάλματος στη 2η επανάληψη

<u>Απαντήσεις</u>:

α) Η απόδειξη βρίσκεται στο βιβλίο (κεφ. IV, Ανάλυση σφάματος Επαναληπτικών Μεθόδων).
β) Η μέθοδος G-S δίνεται από την επανάληψη:

$x_k = Bx_{k-1} + c$, k=1,2, ….
x_0 = δοθέν (καλόν είναι να επιλεγεί «κοντά» στη ρίζα από πλευράς νόρμας!)

με $B=Q^{-1} P$ και $c= Q^{-1} P$, όπου

$$Q=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } P=Q-A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για τον υπολογισμό του $B=Q^{-1}P$ αντιστρέφουμε τον άνω τριγωνικό Q: (διαγώνια στοιχεία = 1/aii, και υπολογίζουμε τα υπόλοιπα 3):

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 \\ 0.1667 & 0.5 & 0 \\ 0.05556 & 0.1667 & 0.3333 \end{bmatrix}$$

και τελικά

$$B = Q^{-1}P = \begin{bmatrix} 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0.1667 & 0.5 \\ 0 & 0.0556 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

γ) Ο Α <u>δεν</u> έχει αδκ. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συγκλίνει είναι η ρ(Β)<1, ενώ μια ικανή είναι η ||Β||<1. Εξετάζουμε τη δεύτερη προκειμένου για τη νόρμα 1. Είναι:

$||B||_1 = 0.5+0.1667=0.6667<1$

και επομένως η επαναληπτική ακολουθία $x_K=B_{k-1}+c$, k=1,2,… συγκλίνει για κάθε x_0.

δ) Για την εκτίμηση του απολύτου σφάλματος e_2, φυσικά θα κάνουμε χρήση της ανισότητας

$$e_k=||x_k-x||_1 \le ||B||^2 (1-||B||_1)^{-1} ||x_1-x_0||_1 \qquad (1)$$

για k=2. Αρχικά βρίσκουμε τις επαναλήψεις x_1, x_2. Θέτουμε αρχικά, αυθαίρετα μεν, αλλά «κοντά» στη λύση: x_0=[1, 1 1]
Ο υπολογισμός κάθε νέας επανάληψης $x_k = Q^{-1}Px_{k-1}+Q^{-1}b$, μπορεί βέβαια να υπολογισθεί βάσει των αποτελεσμάτων της (β) (υπολογισμός Q^{-1} και γινομένων, όπως έχει απαντηθεί και σε άλλες ασκήσεις). Υπάρχει όμως προσφορότερος και πιο άμεσος τρόπος που δεν υπολογίζει αντίστροφο!. (βλ. Παραπομπή 2)**. Απλά η εύρεση της επανάληψης k (k-προσέγγισης) ισοδυναμεί με την επίλυση του *κάτω τριγωνικού συστήματος*:**

$Qx_k = Px_{k-1} + b$

ως προς τον άγνωστο $x_{k,}$ το οποίο **λύνεται με εμπρός αντικατάσταση** Με άλλα λόγια **η Gauss-Seidel για τον υπολογισμό μιας προσέγγισης x_k χρησιμοποιεί προηγουμένως υπολογισθείσες συνιστώσες του διανύσματος.** *Ο τύπος (IV.3.2) της παραγράφου IV.3 του διδακτικού βιβλίου περιγράφει ακριβώς αυτό το γεγονός, χωρίς να χρειάζεται να απομνημονευθεί (απλά πρέπει να τον κατανοήσετε!).* Έτσι, για να υπολογίζουμε το x_1 από την $x_1=Bx_0+b$, λύνουμε ισοδύναμα το σύστημα

$Qx_1 = Px_0 + b$ και εδώ το: $Qx_1 = [2.2\ \ 3.6\ \ -3.4]^T$

που γράφεται και:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2 \\ 3.6 \\ -3.4 \end{bmatrix}$$

Με εμπρός αντ/ση παίρνουμε:

x_{11} =2.2/3=0.7333
x_{12} = $(3.6+x_{11})$/2=(3.6+0.7333)/2=2.1667
x_{13} =$(-3.4+ x_{12})$/3=(-3.4+ 2.1667)/3=-0.4111

δηλαδή:
$x_1 = [0.7333\ \ 2.1667\ \ -0.4111]^T$
[Επαλήθευση στο matlab: x1=Q1\(P1*x0+b)]^T

Υπολογίζουμε τώρα την νόρμα 1 του B:

$||B||_1=|| Q^{-1}P||_1 = 0.6667$

Οπότε αντικαθιστώντας στην (1), λαμβάνουμε τελικά:

$||x_2-x||_1\leq 1.881$

Σχόλιο: Το φράγμα είναι προφανώς «κακό». Αυτό είναι απόλυτα εξηγήσιμο, αφού για τέτοιο πίνακα δεν μπορούμε φυσικά να περιμένουμε καλύτερο φράγμα και μάλιστα στη $2^η$ επανάληψη!

◇ **$2^{ος}$ τρόπος:** Για τον υπολογισμό του φράγματος θα μπορούσαμε εναλλακτικά να κάνουμε χρήση της δεύτερης γνωστής ανισότητας

$$||x_k-x||_1 \leq ||B|| (1-||B||_1)^{-1} ||x_k-x_{k-1}||_1$$

η οποία εμπλέκει τις δύο τελευταίες επαναλήψεις (εδώ τις x_1 και x_2). Ο σχετικός υπολογισμός είναι φυσικά πιο χρονοβόρος, αφού απαιτεί και τον υπολογισμό του x_2 από την $x_2=Bx_1+b$, ή ισοδύναμα από το κάτω τριγωνικό σύστημα

$Qx_2 = Px_1 + b = [0.36667\ 2.189\ -3.4\ ]^T$

Η λύση του παραπάνω με εμπρός αντ/ση είναι:

$x_2 = [1.1222\ \ 1.655\ \ -0.5814]^T$
[Επαλήθευση στη matlab: x2=Q1\(P1*x1+b)]

Τώρα, για τον υπολογισμό του φράγματος, προχωράμε όπως πιο πάνω. □

Άσκηση 20

Δίνεται ο πίνακας A και το διάνυσμα b:

A=[1 0 0 0 ; 0 8 5 0 ; 0 5 8 0 ; 0 0 0 2], $b=[1\ 1\ 0\ -1]^T$

Υποθέτουμε ότι (α) δουλεύουμε *σε α.κ.υ. 4 σημ. ψηφίων με εφαρμογή στρογγύλευσης* και ότι (β) *μας απασχολούν μόνον σφάλματα οφειλόμενα σε απώλεια ακρίβειας κατά τους υπολογισμούς.*

Θεωρούμε την επαναληπτική μέθοδο Jacobi για την υπολογιστική επίλυση του Ax=b.

(α) Δώστε τον επαναληπτικό τύπο της, υπό τη μορφή πινάκων.

(β) Συγκλίνει ο αλγόριθμος αυτός για κάθε αρχικό διάνυσμα $\mathbf{x_0}$ και γιατί;

(γ) Δώστε αριθμητικό φράγμα για το απόλυτο σφάλμα στη $20^η$ επανάληψη, αφού δοθούν όλα τα απαραίτητα ενδιάμεσα βήματα. Να τεθεί αρχικά $\mathbf{x_0}=(1, 0, 0, -0.5)^T$ και να γίνει χρήση της νόρμας «άπειρο».

(δ) Ποιές εντολές του Matlab θα δίνατε κατά σειρά (αναφέρατε συγκεκριμένα) για να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα που πήρατε στο ερ. (γ) ?

Απαντήσεις:

α) Είναι x(k)=Bx(k-1)+c με

$$B1 = Q^{-1}(Q\text{-}A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6250 & 0 \\ 0 & -0.6250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$c1 = Q^{-1}b$ =(1.0000, 0.1250, 0, -0.5000)

Αναλυτικά:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5000 \end{bmatrix}$$

$$P=Q-A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

β) Ο Α έχει αδκ, άρα, σύμφωνα με γνωστή πρόταση, συγκλίνει.

γ) Είναι:

x_1=B*x0+c = $(1.0000, 0.1250, 0, -0.5000)^T$
$||B||_\infty$ = 0.6250
$||x_1-x_0||_\infty$=0.1250

Για το απόλυτο σφάλμα $||e_k||$ στην k επανάληψη ισχύει

$||e_k||_\infty <= ||x_1-x_0||_\infty * (||B||_\infty)^{20}/(1-||B||_\infty)$,

και μετά από αντικατάσταση:

$||e||_\infty$<=2.7573e-005

δ) Δίνουμε κατά σειρά τις εντολές:

```
A=[1 0 0 0 ; 0 8 5 0 ; 0 5 8 0 ; 0 0 0 2]
b=[1 - 0 -0.5]
Q=A
```

```
Q(2,3)=0
P=Q-A
B=inv(Q)*P
c=inv(Q)*b
x0=[1 1 1 1]'
x1=B*x0+c
fragma=norm(x1-x0, inf)*norm(B, inf)^2 / (1-norm(B, inf))
```

□

Άσκηση 21

Δίνεται ο πίνακας A και το διάνυσμα b:

A=[1 0.2 -0.1 ; 1 -2 0.2 ; 0.1 0 2] , b=[2 0 2]^T

Θεωρούμε τον σύστημα Ax=b και υποθέτουμε ότι εργαζόμαστε με αριθμητική κ. υ. 4 σ.ψ.
α) Συγκλίνει η επαναληπτική μέθοδος Jacobi για οποιοδήποτε αρχικό διάνυσμα x0 και γιατί;
β) Διατυπώστε με σαφήνεια την επαναληπτική αυτή μέθοδο <u>υπό τη μορφή πινάκων</u>.
γ) Βρείτε την πρώτη επανάληψη της μεθόδου για το παραπάνω σύστημα
d) Έστω ότι επιθυμούμε να κάνουμε μια εκτίμηση του απολύτου σφάλματος στην πρώτη επανάληψη. Χρησιμοποιώντας κατάλληλη ανισότητα, βρείτε φράγμα για το απόλυτο σφάλμα με χρήση της νόρμας «άπειρον».

<u>Απαντήσεις</u>:

α) Ο A έχει προφανώς α.δ.κ. Επομένως, όπως γνωρίζουμε από σχετικό θεωρητικό αποτέλεσμα, η μέθοδος Jacobi συγκλίνει για κάθε αρχικό διάνυσμα $\mathbf{x_0}$.

β) Για το δοθέν Ax=b, η μέθοδος Jacobi περιγράφεται ως εξής:

$$x_k = Q^{-1} P\, x_{k-1} + Q^{-1}\, b \quad k=1,2... \qquad (1)$$
$$x_0 = \text{αρχικό διάνυσμα}$$

όπου Q τριγωνικός με

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

και

$$P=Q-A = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & 0.1 \\ -1 & 0 & -0.2 \\ -0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Η (1), μετά τις πράξεις, γράφεται τελικά:

$$B = Q^{-1} P = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{22}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.1 \\ -0.05 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Το c υπολογίζεται εξ ίσου εύκολα:

$$c = Q^{-1} b = [b_1/a_{11}, b_2/a_{22}, b_3/a_{33}]^T = [2, 0, 1]^T$$

γ) Μπορούμε να επιλέξουμε το αρχικό διάνυσμα να βρίσκεται «κοντά» (από πλευράς νόρμας) στην προσεγγιστική λύση του Ax=b, έτσι όπως αυτή υπολογίσθηκε στο ερ. (δ) της Άσκησης 12. Έστω λοιπόν $x_0 = [2,1,1]$, οπότε λαμβάνουμε $x_1 = B\, x_0 + c$ και μετά από πράξεις:

$$x_1 = [1.9\ 1.1\ \ 0.9]^T$$

δ) Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι, αν είναι γνωστές οι δύο τελευταίες επαναλήψεις, μια εκτίμηση του απολύτου σφάλματος στις επαναληπτικές μεθόδους δίνεται από την ανισότητα:

$$\| x - x_k \| \leq \|B\|(1-\|B\|)^{-1} \| x_k - x_{k-1} \| \qquad (2)$$

Στην περίπτωσή μας έχουμε k=1 και B όπως υπολογίστηκε στο ερώτημα (β). Με χρήση της νόρμας «άπειρο» υπολογίζουμε επίσης:

$\|B\|_\infty = 0.6$ και:

$\| x_1 - x_0 \|_\infty = 0.1$.

Επομένως η (2) γίνεται: $\| x - x_k \|_\infty \leq 0.15$

Ασφαλώς δεν περιμέναμε καλύτερο σφάλμα στην πρώτη κιόλας επανάληψη! □

Άσκηση 22

Για τα τριγωνικά nxn μητρώα B, με B(i,i)=1/(1+i), i=1,…n (και τα υπόλοιπα στοιχεία τυχαία), εξετάστε αν η επαναληπτική μέθοδος $\mathbf{x}_k = B\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{c}$, ($\mathbf{c} \in R^n$, δοθέν) συγκλίνει ή όχι.

Απ: Ο B είναι τριγωνικός και άρα οι ιδιοτιμές είναι τα διαγώνια στοιχεία. Επομένως είναι ρ(B)=1/2<1. Συνεπώς – σύμφωνα με την ικανή και αναγκάια συνθήκη σύγκλισης των επαναληπτικών μεθόδων - η επανάληψη συγκλίνει για κάθε c και για κάθε αρχικό διάνυσμα x_0.

Άσκηση 23

Έστω η επαναληπτική μέθοδος $\mathbf{x}_k$=B$\mathbf{x}_{k-1}$+**c**, k=0,1,2,…, με B=[-0.4, 0.5, 1 ; 0.5, 0.2, 1 ; 0, 0, 0.8]. Συγκλίνει για κάθε διάνυσμα **c** και για κάθε αρχικό διάνυσμα $\mathbf{x}_0$ και γιατί?

Απ. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A και από αυτές τη φασματική ακτίνα. Είναι:

$$\det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix}\lambda+0.4 & 0.5 & 1\\ 0.5 & \lambda-0.2 & 0.1\\ 0 & 0 & \lambda-0.8\end{vmatrix}=(\lambda-0.8)[(\lambda-0.2)(\lambda+0.4)-0.25]=$$

$$(\lambda-0.8)(\lambda^2+0.2\lambda-0.330)$$

Οι ρίζες του τριωνύμου $\lambda^2+0.2\lambda-0.330$ είναι λ_2=-0.6831 και λ_3=0.4831. Συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι λ_1=0.8, λ_2=-0.6831 και λ_3=0.4831, με ρ(A)=|λ_{max}|=0.8<1. Συνεπώς η επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει.

Στοιχεία Θεωρίας - Παραπομπές

1. Θετικά Ορισμένα Μητρώα

Δίνονται εδώ μερικά συμπληρωματικά στοιχεία για θ.ο. πίνακες με σύγχρονες παραπομπές στο διδακτικό βιβλίο.

1.1 Ορισμός, Ιδιότητες και Κριτήρια

Οι θετικά ορισμένοι και ημιορισμένοι πίνακες (positive-definite matrices) έχουν μερικές καλές ιδιότητες οι οποίες χρησιμοποιούνται για την εύρεση πλέον αποδοτικών διασπάσεων του πίνακα γραμμικών συστημάτων, από πλευράς μνήμης και υπολογιστικού χρόνου. Ο γενικός ορισμός των πινάκων αυτών είναι:

Ορισμοί:

1. Ένας πίνακας A (nxn) (πραγματικών αριθμών) καλείται θετικά ορισμένος, όταν για κάθε διάνυσμα $x \neq 0$ ισχύει $x^T A x > 0$.

2. Ένας πίνακας A (nxn) πραγματικών καλείται θετικά ημιορισμένος, όταν για κάθε διάνυσμα $x \neq 0$ ισχύει $x^T A x \geq 0$.

Το βασικό γενικό κριτήριο για να είναι ένας συμμετρικός πίνακας θ.ο. δεν είναι (δυστυχώς) πρακτικό για πίνακες μεγάλων μεγεθών και είναι (μόνον) το παρακάτω:

Ένας πίνακας A είναι θ. ο. εάν και μόνον εάν όλοι οι κύριοι (πάνω αριστεροί) υποπίνακες (A[1:i, 1:i], i=1,2,...n) έχουν θετικές ορίζουσες.
Απόδειξη: Βλ. αντίστοιχο κεφ. του βιβλίου «G. Strang: Γραμμική Άλγεβρα».

Γεωμετρική ερμηνεία: Θεωρώντας την ευκλείδια νόρμα («2»), ας δούμε τη τη σημασία του ορισμού 1.

$$\mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}^T, \mathbf{A}\mathbf{v} \rangle = ||\mathbf{v}||_2\, ||\mathbf{A}\mathbf{v}||_2 \cos(\theta) > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos(\theta) > 0 \Rightarrow |\theta| < \pi/2$$

δηλαδή για τη γωνία θ μεταξύ των διανυσμάτων **v** και **Av** θα πρέπει να είναι $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ (στην περίπτωση των θετικά ημιορισμένων πινάκων: $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Αντίστοιχα, για θετικά ημιορισμένους πίνακες ισχύει η πρόταση:

Ένας πίνακας A είναι θ. ημιορισμένος εάν και μόνον εάν όλοι οι κύριοι (πάνω αριστεροί) υποπίνακες (A[1:i, 1:i], i=1,2,...n) έχουν μη αρνητικές ορίζουσες.

Οι ακόλουθες ιδιότητες-προτάσεις συνδέονται με θ.ο. πίνακες (για αποδείξεις βλ. στο διδακτικό βιβλίο):

Π1. Αν ένας πίνακας είναι θ.ο., τότε είναι αντιστρέψιμος.

Π2. Όλες οι πραγματικές ιδιοτιμές ενός θ. ο. πίνακα είναι θετικές.
Απόδειξη: Αν λ είναι μια πραγματική ιδιοτιμή ενός θ.ο. πίνακα A. Τότε μπορούμε να επιλέξουμε ένα ιδιοδιάνυσμα **x** στο R^3, ώστε A**x** = λ**x**. Τότε $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \lambda ||\mathbf{x}||^2 > 0$, οπότε $\lambda > 0$.

Π3. Αν ένας πίνακας είναι θ.ο., τότε τα διαγώνια στοιχεία του είναι θετικά.

Π.4. Αν ένας πίνακας A είναι θ.ο. τότε και ο A^T είναι θ.ο. (και αντιστρόφως).

Απόδειξη: Από την $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ λαμβάνουμε $(\mathbf{x}^T A\mathbf{x})^T = (A\mathbf{x})^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A^T \mathbf{x} > 0$ και άρα ο A^T είναι θ.ο.

Ακόμη, ισχύει και η ακόλουθη πρόταση:

Π.5. Όλα τα μητρώα A^TA είναι θετικά ορισμένα ή θετικά ημιορισμένα. Συγκεκριμένα:
(α) Αν ο A είναι μη ιδιάζων (αντιστρέψιμος), τότε ο A^TA είναι θ.ο.
(β) Αν ο A είναι ιδιάζων (μη αντιστρέψιμος), τότε ο A^TA είναι θετικά ημιορισμένος.

Απόδειξη:

α) Αφού ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε για κάθε $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ θα είναι $A\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Επομένως $\mathbf{v}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{v} = (\mathbf{v}^T\mathbf{A}^T)(\mathbf{A}\mathbf{v}) = \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|^2 > 0$ επειδή $\mathbf{A}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Επομένως $\mathbf{v}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{v} > 0$ για κάθε $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, δηλ. ο A είναι θ.ο. Μια δεύτερη απόδειξη λαμβάνεται κατόπιν της επόμενης παραγράφου: ο $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ είναι προφανώς συμμετρικός και έχει θετικές ιδιοτιμές (τα τετράγωνα των ιδιοτιμών του A). Άρα είναι θ.ο.

β) Αφού ο A είναι μη αντιστρέψιμος, τότε $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ για κάποια $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Επομένως, αν v ένα τυχαίο διάνυσμα, τότε $\mathbf{v}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{v} = (\mathbf{v}^T\mathbf{A}^T)(\mathbf{A}\mathbf{v}) = \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|^2 \geq 0$. Επομένως $\mathbf{v}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{v} \geq 0$ για κάθε $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, δηλ. ο A είναι θετικά ημιορισμένος.

Παρατήρηση 1: Στην περίπτωση των θετικά ημιορισμένων πινάκων ισχύουν ανάλογες προτάσεις με τις Π2, Π3 και Π4, με αντικατάσταση του όρου «θετικός» με τον όρο «θετικός ή 0». Επίσης ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας μπορεί να μην είναι αντιστρέψιμος.

Πόρισμα 1: Όλα τα μητρώα A^TA έχουν ιδιοτιμές θετικές ή 0. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε όλες οι ιδιοτιμές του A^TA είναι θετικές, ενώ αν είναι ιδιάζων, όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές ή 0.

Απόδειξη: Προκύπτει ως συνέπεια του ότι ο A ως συμμετρικό μητρώο έχει πραγματικές ιδιοτιμές και της πρότασης Π2.

Παρατήρηση 2: Οι παραπάνω ορισμοί γενικεύονται στο χώρο C^n. Ισχύουν ανάλογες προτάσεις με τις Π1-Π.5. Η Π5 και το Πόρισμα 1 ισχύουν για τα μητρώα $A^*A = \overline{A}^T A$

Παράδειγμα 1:

Να εξετασθεί για καθένα από τους πίνακες

(α) A=[3 -1 -2; -2 2 0; 1 0 2],
(β) B=[9 4 -4 ; 6 14 8 ; -4 8 2],
(γ) C= [6 -3 2; 3 5 1; 2 -1 4]

αν είναι θετικά ορισμένος. Στη συνέχεια να βρεθούν και να εξετασθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα.

Απάντηση

(α) Για τον A λαμβάνουμε det(A(1:1,1:1))=det([3])=3>0, det(A(1:2,1:2))=4>0 και det(A(1:3,1:3))=12>0, και επομένως ο A είναι θ.ο.

Υπολογίζουμε στη συνέχεια τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A στο Matlab, σύμφωνα από τον τύπο διαγωνοποίησης $A=VDV^{-1}$: (οι στήλες του V περιλαμβάνουν τα ιδιοδιανύσματα, ενώ οι ιδιοτιμές είναι τα διαγώνια στοιχεία του διαγώνιου D)

```
>> [V,D]=eig(A)
V =
   0.4082    0.0000   -0.0000
  -0.8165   -0.8944    0.8944
   0.4082    0.4472   -0.4472
```

```
D =
   3.0000         0         0
        0    2.0000         0
        0         0    2.0000
```

Παρατηρούμε ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές. Θα αρκούσε το γεγονός αυτό για να αποφανθούμε ότι ο A είναι θ.ο.? Η απάντηση είναι αρνητική, η συνθήκη Π3 δεν είναι ικανή, αλλά μόνον αναγκαία! Ισχύει μόνον για συμμετρικούς πίνακες (βλ. §2), ενώ είναι χρήσιμη μόνον η άρνησή της: *«αν μια πραγματική ιδιοτιμή είναι αρνητική, τότε ο πίνακας δεν είναι θ.ο.»*

β) Για τον B: det(B(1:3,1:3))=det([9])=9>0, det(B(1:2,1:2))=102>0 και det(B(1:3,1:3))=-916<0, και επομένως ο A δεν είναι θ.ο.
Όμοια, υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του B:

```
>> [V,D]=eig(B)
V =
   0.3747   -0.8207    0.2135
  -0.4670    0.1821    0.9007
   0.8010    0.5416    0.3784
D =
  -4.5356         0         0
        0   10.7519         0
        0         0   18.7836
```

Παρατηρούμε ότι μια ιδιοτιμή (-4.5356) είναι αρνητική.

γ) Για τον C: det(C(1:1,1:1))=6, det(C(1:2,1:2))=39, det(C(1:3,1:3))=182, άρα ο C είναι θ.ο. Όμοια, υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του B:

```
>> [V,D]=eig(C)
V =
  -0.1778 - 0.5898i  -0.1778 + 0.5898i  -0.4150
  -0.7071            -0.7071             0.1658
  -0.2135 - 0.2736i  -0.2135 + 0.2736i   0.8946
D =
   6.0565 + 2.8894i        0                  0
        0             6.0565 - 2.8894i        0
        0                  0             2.8869
```

Παρατηρούμε ότι η μόνη πραγματική ιδιοτιμή (2.8869) είναι θετική και αντιστοιχεί σε ιδιοδιάνυσμα στο χώρο R^3. Υπάρχουν 2 άλλες ιδιοτιμές μιγαδικές συζυγείς, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στο χώρο C^3.

Παράδειγμα 2.
Για ποια πραγματικά θ είναι θ.ο. ο παρακάτω πίνακας περιστροφής R?

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Απ. Είναι det(A(1:1,1:1))=det([cosθ])=cosθ και det(A(1:2,1:2))= $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$. Επομένως ο R είναι θ.ο. εάν και μόνον εάν $\cos(\theta) > 0$.

Παράδειγμα 3.

Ο πίνακας C= [2 1 1; 1 3 -2; 1 -2 3] είναι θετικά ημιορισμένος. Πράγματι είναι det(C(1:1,1:1))=2, det(C(1:1,1:1))=5 και det(D2(1:3,1:3))=0.
Το φάσμα του A είναι σ(A)={0, 3, 5}. Διαπιστώνουμε επίσης εύκολα ότι ο 3ος οδηγός είναι 0 και οι υπόλοιποι δύο θετικοί.

2. Θετικά ορισμένα και συμμετρικά μητρώα

Την κύρια πρακτική χρησιμότητα όμως έχουν οι συμμετρικοί θ.ο. πίνακες, για τους οποίους ισχύουν απλούστερα κριτήρια και μια οικονομική από πλευράς ταχύτητας-μνήμης διάσπαση, η *διάσπαση Choleski* (βλ. διδακτικό βιβλίο). Συγκεκριμένα ισχύουν τα παρακάτω κριτήρια:

Κριτήρια για συμμετρικούς και θετικά ορισμένους πίνακες

Αν ένας συμμετρικός nxn πραγματικός πίνακας A είναι θετικά ορισμένος, *αν και μόνον εάν* ισχύει μια από τις παρακάτω (ισοδύναμες) προτάσεις:

- **i) Ολες οι n ιδιοτιμές του A είναι θετικές** (υπενθυμίζεται ότι οι συμμετρικοί πίνακες έχουν πραγματικές ιδιοτιμές).
- **ii) Όλες οι άνω αριστερές ορίζουσες (det(A(1:i, 1:i)), i=1,2,…,n) είναι θετικές.**
- **iii) Όλοι οι n οδηγοί είναι θετικοί**

Οι (i), (ii) και (iii) αποτελούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι ένας συμμετρικός πίνακας θ.ο. Ένα πρόσθετο πρακτικό κριτήριο (μόνον ικανό) σχετίζεται με τους *αυστηρά κυρίαρχους πίνακες* και είναι το εξής:

(iv) Ένας συμμετρικός και αυστηρά διαγώνια κυρίαρχος πίνακας, κατά γραμμές ή στήλες με θετικά διαγώνια στοιχεία είναι θετικά ορισμένος (το αντίστροφο δεν ισχύει).
Απόδειξη: Έστω ότι ο A έχει α.δ.κ. κατά γραμμές. Αφού ο A συμμετρικός, θα έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Σύμφωνα τώρα με το θεώρημα των κύκλων Gerschgorin, αν λ_i μια ιδιοτιμή, i=1,2,…,n, αυτή θα ανήκει σε σε ένα κύκλο $C_i=[(a_{ii}, 0), R_i]$, δηλαδή θα ισχύει $|\lambda-a_{ii}|\le R_i]$ ή $\lambda \ge a_{ii} - R_i$. Λόγω α.δ.κ., είναι: $a_{ii} - R_i > 0$, άρα $\lambda>0$, επομένως ο A είναι θ.ο. Αν ο A έχει α.δ.κ. κατά στήλες, τότε ο A^T έχει α.δ.κ. κατά γραμμές και ομοίως θετικά διαγώνια στοιχεία, επομένως είναι θ.ο. Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 4, και ο A θα είναι θ.ο.

Παρατήρηση 1: Για τους θετικά ημιορισμένους συμμετρικούς πίνακες, τα παραπάνω κριτήρια διαμορφώνονται με αντικατάσταση του όρου «θετικός» με «θετικός ή 0». Π.χ. *ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας πίνακας θετικά ημιορισμένος είναι όλες οι ιδιοτιμές του να είναι θετικές ή 0.*

Παραγοντοποίηση ή Διάσπαση Choleski

Για τους θ. ο. και συμμετρικούς πίνακες, ισχύει μια ειδική μορφή διάσπασης, **η διάσπαση Choleski:**

$$\boldsymbol{A}=\mathcal{L}^T\mathcal{L} \ \text{ ή } \ \boldsymbol{A}=\mathcal{U}^T\mathcal{U} \qquad (1)$$

όπου $\mathcal{L}$ ($\mathcal{U}$) κάτω (άνω) τριγωνικός [βλ. διδακτικό βιβλίο]. Ο $\mathcal{L}$ (που δεν περιέχει μονάδες στη διαγώνιο!) μπορεί μοναδικά να προσδιορισθεί από τα στοιχεία του A, όπως φαίνεται και στο Παράδειγμα 2. Η παραπάνω διάσπαση αποδεικνύεται στο Κεφ. III.
Μια άλλη γραφή της (1) είναι (βλ. και G. Strang, «Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα»):

$$\boldsymbol{A = L\,D\,L^T} \qquad (2)$$

όπου $\boldsymbol{L}$ είναι το γνωστό κάτω τριγωνικό μητρώο των πολλαπλασιαστών με 1 στη διαγώνιο και $\boldsymbol{D}$ το διαγώνιο μητρώο με τους (θετικούς) οδηγούς. Η (2) μπορεί να γραφεί και σαν:

$$A = L\sqrt{D}\left(L\sqrt{D}\right)^T \tag{3}$$

Η διάσπαση Choleski είναι η δεύτερη σπουδαία παραγοντοποίηση ενός συμμετρικού (ερμιτιανού) μητρώου μετά από αυτήν της διαγωνοποίησης $A=Q\Lambda Q^T$ η οποία βασίζεται στις ιδιοτιμές.

Παρατήρηση 2: Η αντίστοιχη κατηγορία μητρώων μιγαδικών είναι τα **ερμιτιανά θ.ο. μητρώα**. Ισχύουν γι' αυτά οι ίδιες προτάσεις και κριτήρια με αυτά που αναφέρθηκαν πιο πάνω.
Η διάσπαση Choleski γενικεύεται και για ερμιτιανά θ.ο. μητρώα (βλ. παράδειγμα 2 της παραγράφου 3).

Παρατήρηση 3: Ανάλογη μορφή διάσπασης ισχύει και για τους θετικά ημιορισμένους πίνακες (και μάλιστα υπολογίζεται από μαθηματικά εργαλεία, όπως το Matlab.

Παράδειγμα 1
Αν Α συμμετρικός και θ.ο. πίνακας, τότε και ο A^k θα είναι θ.ο. Περίπτωση k=-1: αν ο A^{-1} είναι θ.ο. τότε και ο Α θα είναι θ.ο.
Απ. Πράγματι, ο A^k θα είναι και αυτός συμμετρικός και επιπλέον θα έχει ως ιδιοτιμές τις k-στές δυνάμεις των ιδιοτιμών του Α. Συνεπώς ο A^k έχει θετικές ιδιοτιμές και άρα είναι θ.ο.

Παράδειγμα 2 – Διάσπαση Choleski
Να εξετασθεί αν ο πίνακας A=[3 -2 1; -2 2 0; 1 0 2] είναι θ.ο. Στη συνέχεια να υπολογισθεί η διάσπαση Choleski, αν αυτή είναι εφικτή.
Απ. Ο Α είναι συμμετρικός. Εξετάζουμε αν είναι και θ.ο. Ο Α δεν έχει α.δ.κ., επομένως δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το ικανό κριτήριο (iv). Από τις υπόλοιπες (ικανές και αναγκαίες συνθήκες) επιλέγουμε την (i), δηλ. την οριοθέτηση των ιδιοτιμών με χρήση του θεωρήματος των κύκλων Gerschgorin. Λαμβάνουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές θα βρίσκονται στο διάστημα όπου συναληθεύουν οι ανισότητες: |λ-3|≤3, |λ-2|≤2, |λ-2|≤1. Επομένως οι ιδιοτιμές βρίσκονται στο διάστημα [0, 6]. Ο Α όμως είναι αντιστρέψιμος (det(A)=2) και συνεπώς η τιμή 0 δεν είναι ιδιοτιμή. Άρα λ>0 και επομένως ο Α είναι συμμετρικός με θετικές ιδιοτιμές, δηλ. θ.ο.
Εναλλακτικά, εξετάζουμε το κριτήριο των οριζουσών (ii) και παίρνουμε: det(A(1:1,1:1))=3>0, det(A(1:2,1:2))= det(A(1:3,1:3))=2>0. Άρα ο Α είναι θ.ο.
Αφού ο Α είναι συμμετρικός και θ.ο., ισχύει η διάσπαση Choleski $\boldsymbol{C^TC=A}$. Εφαρμόζοντας τώρα τον σχετικό αλγόριθμο διάσπασης (Αλγόριθμος Διάσπασης Choleski, σελ. ΙΙΙ.24), υπολογίζουμε τους αγνώστους c_{ij} κατά στήλες και έχουμε:

$$A = C^T C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ 0 & c_{22} & c_{32} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_{11}^2 & c_{11}c_{21} & c_{11}c_{31} \\ c_{21}c_{11} & c_{21}^2 + c_{21}^2 & c_{21}c_{31} + c_{22}c_{32} \\ c_{31}c_{11} & c_{31}c_{21} + c_{32}c_{22} & c_{31}^2 + c_{22}^2 + c_{33}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_{11}^2 & c_{11}c_{21} & c_{11}c_{31} \\ c_{21}c_{11} & c_{21}^2 + c_{22}^2 & c_{21}c_{31} + c_{22}c_{33} \\ c_{31}c_{11} & c_{31}c_{21} + c_{32}c_{22} & c_{31}^2 + c_{22}^2 + c_{33}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1\eta \text{ στήλη}: \; c_{11} = \sqrt{3} = 1.7321, \quad c_{21} = -2/\sqrt{3} = \text{-}1.1547, \quad c_{31} = 1/\sqrt{3} = 0.5774 \\ 2\eta \text{ στήλη}: \; c_{22} = \sqrt{2 - {c_{21}}^2} = 0.8165, \quad c_{32} = (0 - c_{31}c_{21})/\, c_{22} = 0.5774 * 1.1547/0.8165 = 0.8165 \\ \text{κάτω δεξιά διαγώνιο στοιχείο}: c_{33} = \sqrt{2 - 0.5774^2 - 0.8165^2} = \sqrt{0.9999} = 1 \end{cases}$$

Επαληθεύουμε στο Matlab:

```
>> C=chol(A)'
C =
   1.7321        0        0
  -1.1547   0.8165        0
  -0.5774  -0.8165        1
```

Παράδειγμα 3 Ο πίνακας A=[6 -3 2; -3 5 1; 2 1 4] έχει θετικά διαγώνια στοιχεία και α.δ.κ. Άρα είναι θ.ο. Η διάσπαση Choleski είναι εφαρμόσιμη και υπολογίζουμε τον πίνακα L όπως στο Παράδειγμα 2. Επαληθεύοντας στο Matlab, λαμβάνουμε:

```
>> chol(A)
ans =
   2.4495  -1.2247   0.8165
        0   1.8708   1.0690
        0        0   1.4800
```

Παράδειγμα 4 Ο πίνακας B=[6 -3 2; -3 -5 1; 2 1 4] είναι μεν α.δ.κ., αλλά ένα διαγώνιο στοιχείο (-5) είναι αρνητικό. Συνεπώς η αναγκαία συνθήκη της Πρότασης 3 δεν ισχύει ο A δεν είναι θ.ο. και η διάσπαση Choleski δεν είναι εφικτή. Πράγματι, στο Matlab θα λαμβάναμε:

```
>> chol(B)
??? Error using ==> chol
Matrix must be positive definite.
```

Παράδειγμα 5 Ο συμμετρικός πίνακας C= [2 1 1; 1 3 -2; 1 -2 3] έχει 2 ιδιοτιμές θετικές (3 και 5) και μια μηδενική. Άρα είναι θετικά ημιορισμένος. Στο ίδιο συμπέρασμα οδηγεί η διαπίστωση ότι υπάρχουν δύο θετικοί οδηγοί και ένας μηδενικός ή ότι οι δύο πρώτες άνω αριστερές ορίζουσες είναι θετικές, ενώ η τρίτη είναι 0.

Παράδειγμα 6 - Matlab Να δημιουργηθεί ένας θ.ο. πίνακας στο Matlab.
Απ. Η εντολή A=rand(n ,n) δημιουργεί ένα nxn πίνακα M με τιμές που κατανέμονται ομοιόμορφα στο (0, 1). Μπορούμε τώρα να δημιουργήσουμε ένα α.δ.κ. πίνακα A με θετικά διαγώνια στοιχεία, δηλ. ένα θ.ο. πίνακα, προσθέτοντας στα διαγώνια στοιχεία το n-1. Δίνουμε λοιπόν την εντολή:

```
( rand(n, n) + (n - 1)*eye(n) )
```

Έτσι οι εντολές

```
n=4;
A = rand(n, n) + (n - 1)*eye( n )
```

δίνουν:

```
A =

   3.8180   0.3412   0.8385   0.5466
   0.6602   3.5341   0.5681   0.4449
   0.3420   0.7271   3.3704   0.6946
   0.2897   0.3093   0.7027   3.6213
```

Παράδειγμα 7 - Matlab

Ο παρακάτω κώδικας ελέγχει στο Matlab αν ένα πίνακας είναι θ.ο.:

```
M = [...];      % τετραγωνικός  πίνακας
isposdef = true;
for i=1:length(M)
  if ( det( M(1:i, 1:i) ) <= 0 )
    isposdef = false;
    break;
  end
end
isposdef       % 0 if false, 1 if true
```

2. Συμπληρωματικά στοιχεία για τις επαναληπτικές μεθόδους Gauss-Seidel και Jacobi

Στην Άσκηση 17 ζητείται η έκφραση της ακολουθίας Gauss-Seidel υπό τη μορφή πινάκων. Με την έννοια αυτή, η απάντηση που δόθηκε είναι σωστή. Στην πράξη πάντως δεν χρειάζεται καν να υπολογισθεί ο αντίστροφος πίνακας Q^{-1} ούτε και τα γινόμενα $B = Q^{-1}P$ και $B = Q^{-1}b$: κάθε επαναληπτική προσέγγιση x_k προκύπτει από την προηγούμενη x_{k-1} ως η λύση (με εμπρός αντικατάσταση) του κάτω τριγωνικού συστήματος $Qx_k=Px_{k-1}+b$. Στην περίπτωσή μας θα είναι λοιπόν:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \\ x_{4k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{1,k-1} \\ x_{2,k-1} \\ x_{3,k-1} \\ x_{4,k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x_{1k} \\ 8x_{2k} \\ 5x_{2k} + 8x_{3k} \\ 2x_{4k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5x_{3,k-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-5x_{3,k-1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{(πίσω αντικατάσταση)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_{1k} = 1 \\ 8x_{2k} = 1-5x_{3,k-1} \\ 5x_{2k} + 8x_{3k} = 0 \\ 2x_{4k} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1k} = \dfrac{1}{2} \\ x_{2k} = \dfrac{1}{8}(1-5x_{3,k-1}) \\ x_{3k} = \dfrac{-5}{8}x_{2k} \\ x_{4k} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x_k = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \dfrac{1}{8}(1-5x_{3,k-1}) \\ \dfrac{-5}{8}x_{2k} \\ 1/2 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Η (1) δείχνει ότι ο υπολογισμός του διανύσματος της k προσέγγισης εμπλέκει στοιχεία (συνιστώσες) αυτής της ιδίας, τα οποία έχουν ήδη υπολογιστεί (εδώ το x_{2k}), μαζί φυσικά με συνιστώσες της k-1 προσέγγισης (εδώ το $x_{3,k-1}$). Η (1) δείχνει ακόμη ότι μπορεί πρακτικά να ληφθεί άμεσα από την αρχική έκφραση του συστήματος, με συστηματική ομαδοποιήση και μεταφορά στο β′ μέλος όσων όρων μπορούν να ληφθούν από τις προηγούμενα υπολογισθείσες συνιστώσες (i-1 όροι για τη i-συνιστώσα x_{ik}), καθώς και των όρων από την προηγούμενη επανάληψη k-1 (n-i όροι, σύνολο n-1 όροι, και συνολικά -μαζί με το b_i-, n όροι).

Αυτό ακριβώς εκφράζει και ο τύπος (IV.3.2.) (Κεφ. IV), ο οποίος αναλύεται πιο αυστηρά στους:

$$x_{1k} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_{j,k-1}\right),$$

$$x_{ik} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_{jk} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_{j,k-1}\right), i = 2,3,...,n-1$$

$$x_{nk} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_{jk}\right)$$

Δεν πρέπει κανείς να τους κοιτάξει μηχανικά, ούτε να τους αποστηθίσει! Απλούστατα, το πρώτο άθροισμα αντιστοιχεί στους όρους της ίδιας επανάληψης που έχουν ήδη υπολογισθεί, ενώ το δεύτερο αντιστοιχεί στους όρους της προηγούμενης επανάληψης.

Ας ξαναδούμε όμως το παράδειγμα IV.3.1 του βιβλίου. Στο σύστημα

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -21 \\ 15 \end{bmatrix}$$

δουλεύοντας είτε με τον τυπικό τρόπο (με θεμελίωση πινάκων), είτε με τον «εμπειρικό» τρόπο που περιγράφτηκε πιο πάνω, καταλήγουμε στο ίδιο επαναληπτικό σχήμα της Gauss-Seidel:

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(7 + y_{k-1} - z_{k-1}) \\ \frac{1}{8}(21 + 4x_k + z_{k-1}) \\ \frac{1}{8}(15 + 2x_k - y_k) \end{bmatrix}$$

Από την άλλη πλευρά, στη μέθοδο Jacobi η ιδέα είναι διαφορετική και απλούστερη: κάθε επανάληψη προκύπτει μόνον από τα στοιχεία (συνιστώσες) τις προηγούμενης. Αυτό ακριβώς δείχνει και ο τύπος (IV.2.4)

$$x_{ik} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n-1} a_{ij} x_{j,k-1}\right), i = 1,2,\ldots,n \ \ , \ \textit{k=1,2,...}$$

για x_{0k}=δοθέν (i=1,2,…,n).

ο οποίος προκύπτει από το βασικό τύπο με πίνακες (IV.2.3): κάθε συνιστώσα του διανύσματος της k-προσέγγισης εξαρτάται μόνον από τις συνιστώσες της προηγουμένης. Έτσι για τα πιο πάνω παραδείγματα παίρνουμε αντίστοιχα τα παρακάτω επαναληπτικά σχήματα:

$$x_k = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \frac{1}{8}(1 - 5x_{3,k-1}) \\ \frac{-5}{8}x_{2,k-1} \\ 1/2 \end{bmatrix}$$, και:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(7 + y_{k-1} - z_{k-1}) \\ \frac{1}{8}(21 + 4x_{k-1} + z_{k-1}) \\ \frac{1}{8}(15 + 2x_{k-1} - y_k) \end{bmatrix}$$

Στο πνεύμα όσων αναφέρθηκαν πιο πάνω, θα ήταν πολύ ωφέλιμο να κοιτάξει κανείς και να προσπαθήσει να κατανοήσει την αντιστοιχία της υλοποίησης της μεθόδου Gauss-Seidel στην Matlab στον κώδικα της §IV3, σελ. IV-13. Εστιάστε ειδικότερα στο δεύτερο μπλοκ εντολών που υλοποιούν την εμπρός αντικατάσταση, δηλ. τον τύπο (IV.3.2)! Στη συνέχεια επαληθεύστε τα αποτελέσματα της Άσκησης 4.

Θα πρέπει να αναφερθεί ότι γενικά η μέθοδος Gauss-Seidel είναι δύο φορες ταχύτερη της Jacobi. Δοκιμάστε το δεύτερο παράδειγμα με τον κώδικα του βιβλίου και συγκρίνατε τον απαιτούμενο αριθμό επαναλήψεων για την ανοχή σφάλματος ε=10e-7.

3. Νόρμες Μητρώων[1]

Το μέγεθος ενός μητρώου πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών μετράται από τη νόρμα (στάθμη) μητρώου η οποία θεμελιώνεται στον ορισμό του συνήθους εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων πάνω στους δ.χ. R^n και C^n.
Στον (ευκλείδιο) χώρο R^n, το σύνηθες (ή ευκλείδιο) εσωτερικό γινόμενο δύο δυανυσμάτων ορίζεται:

Για $x,y\in R^n$ $<x, y>= x^T y = x_1 y_1+\ldots+x_n y_n$ *(1)*

Το (ευκλείδιο) μέτρο διανύσματος επί του R^n ορίζεται με βάση το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο:

Για $x\in R^n$: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}$ (2)

Ανάλογη και με τις ίδιες ιδιότητες είναι η θεμελίωση του συνήθους εσωτερικού γινομένου και του μέτρου ή νόρμας διανυσμάτων επί του C-χώρου C^n:

$$\text{Για } x,y\in C^n{:} < x, y >= x^* y = \overline{x}^T y = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i \quad \text{(x* είναι ο ανάστροφος συζυγής)} \qquad (3)$$

$$\text{Για } z\in C^n{:}\ \|z\| = \sqrt{z^* z} = \sqrt{\overline{z}^T z} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2} \quad (|z_i| \text{ είναι το μέτρο μιγαδικού}) \qquad (4)$$

Ο παραπάνω ορισμός αποτελεί *γενίκευση του εσωτερικού γινομένου και του μέτρου* πάνω και στους δύο χώρους, αφού οι τύποι (3) και (4) συμπίπτουν με τους (1) και (2) αντίστοιχα, όταν $z\in R^n$. Ο χώρος R^n αποτελεί περίπτωση ενός Ευκλείδιου χώρου, ενώ ο χώρος C^n αποτελεί περίπτωση ενός Unitary χώρου. Η νόρμα (4) ονομάζεται **Ευκλειδια νόρμα**. Η κύρια ιδιότητα της Ευκλειδιας νόρμας είναι:

$\|u\|^2 = z^* z,$ όπου z^* είναι το συζυγές ανάστροφο του z.

Ισχύουν όλες οι γνωστές από τη Γραμμική Άλγεβρα ιδιοτήτες του εσωτερικού γινομένου και του μέτρου επί ενός διανυσματικού R-χώρου ή ενός C-χώρου V. Συγκεκριμένα, αν με K συμβολίσουμε είτε το R είτε το C και με V, είτε το R^n είτε το C^n, τότε ισχύουν τα παρακάτω:

$<x,x>\geq 0$ αν $x\neq 0$
$< x, y >= \overline{< y, x >}$ για κάθε $x,y\in V$ ($<x,y>=<y,x>$ για κάθε $x,y\in R^n$)
$<cx,y>=c<x,y>$ για κάθε $x,y\in V$, $c\in K$ ($<x,cy>=\overline{c}<y,x>$ για κάθε $x,y\in C^n$, $c\in K$)
$<x\pm y, z>=<x,z>\pm<y,z>$ για κάθε $x,y,z\in V$
$<cx+dy, z>=c<x,z>+d<y,z>$ για κάθε $x,y,z\in V$, $c,d\in K$
$< x, cy + dz >= \overline{c} < x, y > + \overline{d} < x, z >$ για κάθε $x,y,z\in V$, $c,d\in K$

[1] Σε συμπλήρωση των όσων αναφέρονται για τις νόρμες πινάκων στο Κεφ. III του διδακτικού βιβλίου

$||x||>0$ για $x\neq 0$ και $||0||=0$
$||\lambda x||=|\lambda|\ ||x||$ για κάθε $x\in V$, $\lambda\in K$
$|<x,y>| \leq ||x||\ ||y||$ για κάθε $x,y\in V$ (ανισότητα Cauchy-Schwarz)
$||x+y|| \leq ||x||+||y||$ για κάθε $x,y\in V$ (τριγωνική ανισότητα)
$||x-y|| \leq |\ ||x||-||y||\ |$ για κάθε $x,y\in V$

Η συνάρτηση $|x|$ είναι είναι η απόλυτη τιμή του x, όταν $x\in R^n$, ή το μέτρο (απόλυτη τιμή) του μιγαδικού $x=a+bi$, με $|x|=(a^2+b^2)^{1/2}$, όταν $\boldsymbol{x}\in C^n$.

Ορισμός 1 - Νόρμα μητρώου
Το «μέγεθος» των πραγματικών ή μιγαδικών τετραγωνικών μητρώων μετράται από τη **νόρμα** ή **στάθμη** ενός μητρώου. Ως νόρμα μητρώου ορίζεται μια συνάρτηση $||\ ||$ από το χώρο των πραγματικών ή μιγαδικών τετραγωνικών nxn πινάκων επί του R:

$||\ ||: M_n(R) \to R$ ή: $||\ ||: M_n(C) \to R$

με τις ακόλουθες ιδιότητες: για κάθε $A,B\in M_n(R)$ (αντίστοιχα για κάθε $A,B\in M_n(C)$) και κάθε $c\in R$ (αντίστοιχα κάθε $c\in C$)

(i) $||A||\geq 0$ και $||A||=0$ εάν και μόνον $A=\mathbf{0}$.
(ii) $||cA||=|c|\ ||A||$
(iii) $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$
(iv) $||AB|| \leq ||A||\ ||B||$

Διάφορες συναρτήσεις μπορούν να ορισθούν με τις παραπάνω ιδιότητες. Οι πλέον εύχρηστες και διαδεδομένες στις εφαρμογές είναι οι λεγόμενες *φυσικές νόρμες*.

Ορισμός 2 – Φυσική Νόρμα (ή στάθμη) μητρώου
Φυσική νόρμα ενός πραγματικού ή μιγαδικού μητρώου A είναι ο μεγαλύτερος λόγος ***||Av||/||v||***:

$$\|A\| = \max_{v\neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} \qquad (5)$$

Ο παραπάνω συνάρτηση ικανοποιεί τις ιδιότητες (i)-(iv) (βλ. αποδείξεις στο διδακτικό βιβλίο) και συνεπώς αποτελεί νόρμα. Επιπλέον, άμεσο αποτέλεσμα του παραπάνω ορισμού είναι ότι για κάθε μητρώο A και κάθε διάνυσμα **x**, ισχύει η ανισότητα:

$||Ax|| \leq ||A||\ ||x||$

Οι πλέον εύχρηστες φυσικές νόρμες βασίζονται στα παρακάτω μέτρα διανυσμάτων στο R^n ή στο C^n:

- $||x|| = \max(|x_i|)$: νόρμα «άπειρο» ή $||\ ||_\infty$
- $||x|| = |x_1|+\ldots+|x_n|$: νόρμα «1» ή $||\ ||_1$
- ευκλείδιο μέτρο: $\|z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}$ **:** νόρμα «2» ή $||\ ||_2$

Η πλέον εύχρηστη φυσική νόρμα μητρώων είναι η ευκλείδια, ή νόρμα 2. Και για τις τρεις πραπάνω φυσικές νόρμες ισχύουν απλοί κανόνες υπολογισμού που αποτελούν αντικείμενο των παρακάτω προτάσεων:

Πρόταση 1. Η νόρμα 2 ενός πραγματικού μητρώου A είναι η τετραγωνική ρίζα της φασματικής ακτίνας του γινομένου A^TA:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^T A)} \tag{6}$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της φυσικής νόρμας είναι:

$$\|A\|_2^{\,2} = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2^{\,2}}{\|x\|_2^{\,2}} = \max_{x\neq 0} \frac{x^T A^T Ax}{x^T x} \tag{7}$$

Το μητρώο A^TA είναι συμμετρικό και επομένως έχει n ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $q_1,\ldots,q_n$ και n πραγματικές ιδιοτιμές. Επιπλέον, σύμφωνα με το Πόρισμα 1 της (§1), ολες οι ιδιοτιμές του θα είναι μη αρνητικές. Κάθε πραγματικό ή μιγαδικό διάνυσμα ***x*** γράφεται $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{q_1}+\ldots+c_n\boldsymbol{q_n}=Q(c_1,\ldots,c_n)^T$, με $c_i\in R^n$. Από τον τύπο διαγωνοποίησης $\boldsymbol{A=Q\Lambda Q^T}$ προκύπτει η γνωστή από τη Γραμμική Άλγεβρα σχέση:

$$A^T Ax = Q\Lambda Q^T x = Q\Lambda Q^T Q\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = [q_1,\ldots,q_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \lambda_1 c_1 q_1 + \lambda_2 c_2 q_2 + \cdots + \lambda_n c_n q_n$$

Βάσει της παραπάνω σχέσης και επειδή $\boldsymbol{q_i q_j}=0$ για $i\neq j$ και $\boldsymbol{q_i q_i}=1$, ο λόγος της (7) γράφεται:

$$\frac{\|Ax\|_2^{\,2}}{\|x\|_2^{\,2}} = \frac{x^T A^T Ax}{x^T x} = \frac{(c_1q_1+\cdots+c_nq_n)^T(\lambda_1c_1q_1+\cdots+\lambda_nc_nq_n)}{(c_1q_1+\cdots+c_nq_n)^T(c_1q_1+\cdots+c_nq_n)} =$$
$$= \frac{(c_1q_1^T+\cdots+c_nq_n^T)(\lambda_1c_1q_1+\cdots+\lambda_nc_nq_n)}{c_1^{\,2}+\cdots+c_n^{\,2}} = \frac{\lambda_1c_1^{\,2}+\cdots+\lambda_nc_n^{\,2}}{c_1^{\,2}+\cdots+c_n^{\,2}}$$

Εύκολα προκύπτει (πως?) ότι ο παραπάνω λόγος μεγιστοποιείται όταν όλα τα c_i είναι 0 εκτός από αυτό που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ιδιοτιμή λ_{max}, έστω το c_k. Στην περίπτωση αυτή θα είναι $\boldsymbol{x}=c_k\boldsymbol{q_k}$, δηλαδή το ***x*** είναι ιδιοδιάνυσμα του A^TA που αντιστοιχεί στην λ_{max}. Συνεπώς το μέγιστο στο λόγο εμφανίζεται για το ιδιοδιάνυσμα του A^TA που αντιστοιχεί στην $\lambda_{max}(A^TA)=\rho(A^TA)$, και είναι ίσο με λ_{max}.

Παρατήρηση 1 – Νόρμες 2 πραγματικών μητρώων

Από τη σχέση (7) προκύπτει ότι:

- Για τα θετικά ορισμένα και ημιορισμένα συμμετρικά μητρώα ισχύει $\|A\|_2^{\,2} = \rho(A^T A) = \rho(A^2) = \lambda_{\max}^2$ και επειδή $\lambda_{max}>0$: $\|A\|_2 = \lambda_{\max}$
- Για τα συμμετρικά μητρώα ισχύει $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}^2} = |\lambda_{\max}|$
- Για οποιαδήποτε μητρώα ισχύει $||A||_2=(|\lambda_{max}(A^TA)|)^{1/2}$

Παρατήρηση 2 - Πηλίκο του Rayleich
Ο λόγος

$$\frac{\lambda_1 c_1^{\ 2} + \cdots + \lambda_n c_n^{\ 2}}{c_1^{\ 2} + \cdots + c_n^{\ 2}}$$

είναι προφανώς πραγματικός αριθμός και καλείται **πηλίκο του Rayleich**. Φράσσεται δε ως εξής:

$$\lambda_{\min}(AA^T) \le \frac{\lambda_1 c_1^{\ 2} + \cdots + \lambda_n c_n^{\ 2}}{c_1^{\ 2} + \cdots + c_n^{\ 2}} \le \lambda_{\max}(AA^T) = \rho(AA^T)$$

Όλα τα διανύσματα $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{q_1}+\ldots+c_n\boldsymbol{q_n}$ ικανοποιούν την παραπάνω ανισότητα.

Παρατήρηση 3 – Νόρμα 2 μιγαδικών μητρώων
Για μιγαδικά μητρώα η Πρόταση 1 διαμορφώνεται:

$$Z \in M_n(C): \|Z\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(Z^* Z)} = \sqrt{\rho(Z^* Z)}$$

- Αν Z είναι ερμιτιανός (Z=Z*), τότε έχουμε πραγματικές ιδιοτιμές και $\|Z\|_2 = \sqrt{\rho(Z^2)} = \sqrt{\lambda_{\max}^2(Z)} = \max_{i=1,\ldots,n}|\lambda_i|$
- Αν Z είναι ερμιτιανός και θ.ο., τότε έχουμε θετικές ιδιοτιμές και $\|Z\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(Z^2)} = \sqrt{\lambda_{\max}^2(Z)} = \lambda_{\max}$

Πρόταση 2. Η νόρμα «άπειρον» ενός πραγματικού ή μιγαδικού μητρώου A είναι το μέγιστο του αθροίσματος των απολύτων τιμών των στοιχείων των γραμμών του.

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

Απόδειξη
Από τον ορισμό της φυσικής νόρμας είναι:

$$\|A\|_\infty = \max_{x \in R^n - \{0\}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

Επιλέγουμε τώρα $x=(1,1,\ldots,1)^T$. Τότε ο λόγος στο β' μέλος γίνεται:

$$\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \|Ax\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| * 1\right) = \max_{i=1,\ldots,n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

Στη συνέχεια δείχνουμε:

$$\max_{i=1,\ldots,n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\right) \geq \max_{\substack{x\neq(1,\ldots,1)^T \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{i=1,\ldots,n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\left|x_j\right|/\left|x_k\right|\right)$$

όπου θεωρούμε ότι $\|x\|_\infty = |x_k|$ με $|x_k| \geq |x_i|, i \neq k$. Επειδή $\frac{|x_j|}{|x_k|} \leq 1$, για κάθε j=1,…,n, θα είναι και $\frac{|x_j|}{|x_k|}|a_{ij}| \leq |a_{ij}|, j \neq k$, οπότε η παραπάνω ανισότητα ισχύει και η απόδειξη είναι πλήρης.

Πρόταση 3. Η νόρμα 1 ενός πραγματικού ή μιγαδικού μητρώου A είναι το μέγιστο του αθροίσματος των απολύτων τιμών των στοιχείων των στηλών του.

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ji}\right|\right)$$

Απόδειξη

Λαμβάνεται με παρόμοιο τρόπο με αυτήν της προηγούμενης πρότασης.

Παρατήρηση 4

Οι τρεις παραπάνω φυσικές νόρμες συμπίπτουν για το μητρώο I, όπως και για τα διαγώνια μητρώα:

$$\|I\|_\infty = \|I\|_1 = \|I\|_2 = 1$$

Αν D ένα διαγώνιο μητρώο με D=diag([a_1, a_2, …., a_n]^T), λαμβάνουμε:

$\|D\|_\infty = \|D\|_1 = \max_{i=1,\ldots,n}\left(|a_i|\right)$ και

$$\|D\|_2 = \sqrt{\rho(D^T D)} = \sqrt{\rho(D^2)} = \rho(D) = \max_{i=1,\ldots,n}\left(|a_i|\right)$$

Παράδειγμα 1 – Νόρμες και σχετιζόμενα μεγέθη πραγματικού μητρώου

Για το παρακάτω πραγματικό μητρώο R υπολογίζουμε στο Matlab τις φυσικές του νόρμες και άλλα σχετιζόμενα μεγέθη.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>> eig(R) % Το R είναι μη αντιστρεπτό και θετικά ημιορισμένο
ans =
   0.0000
   1.5000 + 1.3229i
   1.5000 - 1.3229i
>> chol(R) % Η μέθοδος Choleski αποτυγχάνει
??? Error using ==> chol
Matrix must be positive definite with real diagonal.
```

```
>> R'*R
ans =
     2     4     0
     4    12    -2
     0    -2     1

>> eig(R'*R) % Το R'*R είναι συμμετρικό, μη αντιστρεπτό και θετικά ημιορισμένο
ans =
    0.0000
    1.3153
   13.6847

% Διαγωνοποίηση: μητρώα ιδιοδιανυσμάτων και ιδιοτιμών του R'*R
>> [V,D]=eig(R'*R)
V =
   -0.6667    0.6730   -0.3203
    0.3333   -0.1152   -0.9357
    0.6667    0.7306    0.1475
D =
   -0.0000         0         0
         0    1.3153         0
         0         0   13.6847

U=chol(R'*R)' % Η μέθοδος Choleski επιτυγχάνει!
U =
    1.4142         0         0
    2.8284    2.0000         0
         0   -1.0000    0.0000

>> norm(R'*R,2) % νόρμα θετικά ημιορισμένου μητρώου=φασματική ακτίνα.
ans =
   13.6847
>> norm(R,2) % νόρμα μητρώου R=τετρ. ρίζα φασματικής ακτίνας του R'*R
ans =
    3.6993
>> norm(R,1) % υπολογισμός υπόλοιπων φυσικών νορμών του R
ans =
     6
>> norm(R, inf)
ans =
     3
```

Παράδειγμα 2 – Νόρμες και σχετιζόμενα μεγέθη μιγαδικού μητρώου

Για τα παρακάτω μιγαδικό μητρώο Z υπολογίζουμε στο Matlab τις φυσικές του νόρμες, όπως και άλλα σχετιζόμενα μεγέθη.

$$Z = \begin{bmatrix} 1+i & 2 & 0 \\ -2i & 2 & -1+i \\ 1+2i & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ας σημειώσουμε κατ' αρχή ότι R=real(Z), όπου Z το μητρώο του παραδείγματος 2.

```
% το Z δεν είναι θετικά ορισμένο ούτε θετικά ημιορισμένο
>> det(Z(1:1, 1:1))
ans =
   1.0000 + 1.0000i
>> det(Z(1:2, 1:2))
ans =
   2.0000 + 6.0000i
>> det(Z(1:3, 1:3))
ans =
  -2.0000 - 2.0000i

% το Z είναι αντιστρέψιμο
>>inv(Z)
ans =
   0.0000 + 1.0000i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 1.0000i
   1.0000 - 0.5000i   0.0000            -0.5000 + 0.5000i
   2.5000 + 1.5000i  -0.5000 - 0.5000i  -2.0000 - 1.0000i

% Διαγωνοποίηση του Z: μητρώα με ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές. Μιγαδικές ιδιοτιμές.
>> [V,D]=eig(Z)
V =
   0.2814 + 0.4413i   0.1057 + 0.3268i   0.5439 - 0.0590i
   0.7131             0.0946 - 0.2838i   0.0223 + 0.3638i
   0.0941 + 0.4569i   0.8903             0.7535
D =
   2.4650 - 1.2978i        0                  0
        0            -0.4028 - 0.0330i        0
        0                  0            0.9378 + 2.3308i

>> chol(Z) % Η μέθοδος Choleski αποιτυγχάνει. O Z δεν είναι θετικά ορισμένος.
??? Error using ==> chol
Matrix must be positive definite with real diagonal.

ZZ= Z'*Z  % το Z'*Z είναι ερμιτιανό και θ.ο. μητρώο
ZZ =
  11.0000             4.0000 - 2.0000i  -2.0000 - 2.0000i
   4.0000 + 2.0000i  12.0000            -2.0000 + 2.0000i
  -2.0000 + 2.0000i  -2.0000 - 2.0000i   2.0000

>>eig(ZZ) %αναμένουμε θετικές ιδιοτιμές
ans =
    0.0569
    8.6039
   16.3392

>> [V,D]=eig(ZZ) % Διαγωνοποίηση του Z'*Z: μητρώα με ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές.
V =
   0.1602 + 0.2891i   0.0997 + 0.6710i   0.6347 - 0.1663i
   0.1441 - 0.2730i   0.0283 - 0.5996i   0.7348 + 0.0662i
   0.8919            -0.4236            -0.1586
```

```
D =
    0.0569         0         0
         0    8.6039         0
         0         0   16.3392

>>U=chol(ZZ)  % εφαρμογή μεθόδου Choleski σε θ.ο. ερμιτιανό μητρώο
U =
   3.3166             1.2060 - 0.6030i  -0.6030 - 0.6030i
        0             3.1909            -0.5128 + 0.9687i
        0                  0             0.2673

>>norm(ZZ,2) %νόρμα 2 θετικά ορισμένου μητρώου = ρ(Z'*Z)
ans =
   16.3392

>> norm(Z,2) %νόρμα 2 μιγαδικού μητρώου = τετραγ. ρίζα φασματικής ακτίνας του Z'*Z
ans =
    4.0422

>> norm(Z,1) % φυσικές νόρμες 1 και «άπειρο» του μιγαδικού Z.
ans =
     6

>> norm(Z,inf)
ans =
    5.4142
```

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία και Αναφορές

- **Χ. Αλεξόπουλος, «Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση και Περιβάλλοντα Υλοποίησης», Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, 2007.**

- **Χ. Αλεξόπουλος, «Εισαγωγή στο Matlab», Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, 2002.**

- **Μ. Βραχάτης, «Αριθμητική Ανάλυση», Εκδ. «Ελληνικά Γράμματα», 2002.**

- **G. Strang: «Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα»**

- **A. O. Morris, «Μια Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα»**

- **Γ. Δονάτος, Μ. Αδάμ, «Γραμμική Άλγεβρα, Θεωρία και Εφαρμογές», Gutenberg,**

- **Χ. Αλεξόπουλος, «Εισαγωγή στο Matlab», Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, 2004.**

- **Duane Hanselman, Bruce Littlefield, «Μάθετε το Matlab 7», Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2006, τόμος Α και Β.**