ΜΕΡΟΣ Β

Β1. [10] Σύντομες ερωτήσεις που απαντώνται αμέσως «με το μάτι». Δεν θέλουμε πράξεις.

α) Δίνεται ότι $f(0) = f(1/2) = f(1) = 1821$ και $f^{(k)}(x) = 0$ για όλα τα k = 1,…,6 και x = 0, ½, 1. Ποιο το πολυώνυμο παρεμβολής; Γιατί:

$p_{21}(x) =$ ....1821..
Το p_{21} ικανοποιεί όλες τις συνθήκες και αφού μόνο ένα είναι το πολυώνυμο παρεμβολής αυτό είναι το p_{21}.

β) Πώς θα υπολογίζατε **ακριβώς** το

$$\int_{-1}^{1} (x+3)(x-121)(x+1700)dx$$

χωρίς να κάνετε τον πολλαπλασιασμό των τριών όρων εντός του ολοκληρώματος.
(μόνο εξήγηση, όχι υπολογισμός).

Με τον κανόνα του Simpson που είναι ακριβής για πολυώνυμα βαθμού 3 και απαιτεί τους υπολογισμούς των τιμών στα σημεία -1,0 και 1.

γ) Χρησιμοποιώντας Ν υποδιαστήματα, προσεγγίσατε το ολοκλήρωμα της f με το σύνθετο κανόνα του διορθωμένου τραπεζίου και το σφάλμα προσέγγισης ήταν 0.128. Πόσα διαστήματα (συναρτήσει του Ν) θα ελπίζατε ότι θα είναι αρκετά για να επιτύχετε σφάλμα περίπου 0.0005; Γιατί;

Το σφάλμα στον σύνθετο κανόνα του διορθωμένου τραπεζίου είναι της τάξης του h^4, όπου $h = \frac{b-a}{N}$. Άρα κάθε φορά που διπλασιάζουμε το Ν υποδεκαεξαπλασιάζουμε το σφάλμα προσέγγισης. Για να πετύχουμε σφάλμα περίπου ίσο με 0.0005 όταν για Ν έχουμε σφάλμα 0.128 θα πρέπει να πάρουμε 4Ν υποδιαστήματα (αφού $(0.128/16)/16 = 0.0005$).

δ) Θεωρείστε ένα κανόνα ολοκλήρωσης για την προσέγγιση του $\int_a^b f(x)dx$ που χρησιμοποιεί μονό αριθμό σημείων στο [a, b]

$$\int_a^b f(x)dx = w_1 f(x_1) + \ldots + w_{2k+1} f(x_{2k+1})$$

Τότε, για να είναι δεκτός αυτός ο κανόνας:

$x_{k+1} = \frac{[a+b]}{2}$

Στον προηγούμενο κανόνα, πόσα και ποια από τα βάρη w_j μπορούν αμέσως να αντικατασταθούν από τα υπόλοιπα βάρη και από ποια;

Για $i = 1 \ldots k$ θα έχω $w_i = w_{2k+2-i}$.

ε) Δίνονται: $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$, $f(1)=3$, $f'(1)=6$, $f''(1)=6$

Με αυτά τα δεδομένα, ποιος είναι ο πιο σύντομος τρόπος υπολογισμού του πολυωνύμου παρεμβολής και γιατί.

Το 0 είναι τριπλή ρίζα. Άρα το πολυώνυμο μπορεί να γραφτεί στη μορφή $p_6(x)=x^3\cdot q(x)$ όπου q ένα πολυώνυμο βαθμού 2. Οπότε τώρα χρειάζεται να υπολογιστούν μόνο τρεις άγνωστοι, οι συντελεστές του q, που θα βρεθούν χρησιμοποιώντας τις τρεις συνθήκες $f(1)=3$, $f'(1)=6$, $f''(1)=6$.

B2.[10] Να προσεγγιστεί η τιμή $\sin(\frac{\pi}{3})$, με χρήση των τιμών και των παραγώγων της $f(x)=\sin(x)$ στα σημεία $x=\frac{\pi}{4}$ και $x=\frac{\pi}{2}$.

A) Πολυώνυμο προσέγγισης:

Ο πίνακας διαιρεμένων διαφορών είναι:

$\frac{\pi}{4}$......$\frac{\sqrt{2}}{2}$

........................$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{4}$......$\frac{\sqrt{2}}{2}$..$\frac{16-8\sqrt{2}-2\pi\sqrt{2}}{\pi^2}$

........................$\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4-2\sqrt{2}}{\pi}$..$\frac{4(16\sqrt{2}-32+2\pi\sqrt{2})}{\pi^3}$

$\frac{\pi}{2}$.........1..$\frac{8\sqrt{2}-16}{\pi^2}$

........................0

$\frac{\pi}{2}$.........1

$$p_4(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})+\frac{16-8\sqrt{2}-2\pi\sqrt{2}}{\pi^2}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{4(16\sqrt{2}-32+2\pi\sqrt{2})}{\pi^3}(x-\frac{\pi}{4})^2(x-\frac{\pi}{2})$$

B) Η ζητούμενη τιμή είναι: $\sin(\frac{\pi}{3})=p_4(\frac{\pi}{3})=\ldots$

B3.[10] Έχουμε το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών συνθηκών:

$$\left\{\begin{array}{c} u''(x)-\frac{1}{1+x}u(x)=x^5+10x^4-5x^3-20x^2, \quad x\in[0,1] \\ u(0)=0,\ u(1)=4 \end{array}\right\}$$

Χωρίζουμε το διάστημα [0, 1] σε 20 ίσα υποδιαστήματα μήκους h = 1/20, ορίζοντας τα 21 σημεία $x_i = ih$, i=0,…,20, εκ των οποίων, προφανώς, τα x_0 = 0, x_{20} = 1 είναι τα άκρα του [0,1] ενώ τα υπόλοιπα είναι εσωτερικά σημεία. Θεωρώντας τις προσεγγίσεις $U_i \approx u(x_i)$ γράφουμε μία εξίσωση για κάθε εσωτερικό σημείο x_i, i=1,…,19, ενώ οι τιμές $U_0 = u(0)$ και $U_{20} = u(1)$ είναι γνωστές. Ποια είναι η εξίσωση που αντιστοιχεί στο x_i για

α) i = 13 : $U_{12} - (2 + \frac{1}{1+13h} \cdot h^2) U_{13} + U_{14} = h^2[(13h)^5 + 10(13h)^4 - 5(13h)^3 - 20(13h)^2]$

β) i = 19 : $U_{18} - (2 + \frac{1}{1+19h} \cdot h^2) U_{18} = h^2[(19h)^5 + 10(19h)^4 - 5(19h)^3 - 20(19h)^2] - U_{20}$

(οι εξισώσεις πρέπει να περιλαμβάνουν μερικούς από τους **αγνώστους** U_i, i=1,…,19 (στο **αριστερό** μέλος), το γνωστό h και συγκεκριμένους αριθμούς)

B4.[10] α) Ποια ήταν τα δεδομένα του προβλήματος από τα οποία κατασκευάσθηκε ο παρακάτω πίνακας δ.δ.;

2	4					
		5				
2	4		5			
		5		5		
2	4		5		*	
		5		*		*
2	4		-1		*	
		4		*		
3	8		-7			
		-3				
3	8					

Τα δεδομένα ήταν: $f(2) = 4$ $\quad f'(2) = 5$ $\quad f''(2) = 10$ $\quad f'''(2) = 30$ $\quad f(3) = 8$ $\quad f'(3) = -3$

β) Ο τύπος για το μέγιστο σφάλμα είναι:

$$\varepsilon_6(x) = \frac{g(\xi)}{r}(x-\beta)^{k_1}(x-\gamma)^{k_2}$$

όπου η συνάρτηση g είναι ίση με τη συνάρτηση $f^{(6)}(x)$
και r = ...6!.., β = ...2...., γ = ...3......, k_1 = ...4......., k_2 = ...2........

γ) Δίνεται επίσης ότι $f^{(6)} = (x-2)^2(x-3)^4$. Να βρεθεί το φράγμα Β για το μέγιστο σφάλμα.

$$\|\varepsilon_6\|_\infty \le B = \frac{\|f^{(6)}\|}{6!}\left\|(x-2)^4(x-3)^2\right\| = \frac{\left\|((x-2)(x-3))^6\right\|}{6!} = \frac{1}{4^6 \cdot 6!}$$

B5.[10] α) Να βρεθεί προσέγγιση της $f^{(3)}(x)$ συναρτήσει των $f(x_1)$, $f'(x_1)$, $f(x_2)$, $f'(x_2)$, όπου $x_1 = x - \Delta x$, $x_2 = x + \Delta x$.

$$f^{(3)}(x) = 6 \cdot [x_1, x_1, x_2, x_2] f = \frac{6}{4(\Delta x)^2}[f'(x_2) + f'(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}]$$

β) Το σφάλμα θα είναι $O((\Delta x)^k)$, όπου:

$k = 1$