Λύσεις θεμάτων προόδου
Αριθμητική Ανάλυση & Περιβάλλοντα Υλοποίησης

1. Δίνονται: $f(3)=0$, $f'(3)=0$, $f''(3)=0$, $f(5)=3$, $f'(5)=6$, $f''(5)=6$
Με αυτά τα δεδομένα, ποιος είναι ο πιο σύντομος τρόπος υπολογισμού του πολυωνύμου παρεμβολής;

Αφού το 3 είναι τριπλή ρίζα, το πολυώνυμο παρεμβολής γράφεται και $p(x)=(x-3)^3 q(x)$, όπου $q(x)$ πολυώνυμο βαθμού 2 (έχουμε 6 τιμές άρα το πολ. παρεμβολής θα είναι 5^{ου} βαθμού).

Για να βρω τα a, b και c του $q(x)=ax^2+bx+c$ έχω τρεις εξισώσεις:

$p(5)=3$	$(5-3)^3(25a+5b+c)=3$	$a=...$
$p'(5)=6$	$3(5-3)^2(25a+5b+c)+(5-3)^3(10a+b)=6$	$b=...$
$p''(5)=6$	$6(5-3)(25a+5b+c)+3(5-3)^2(12a+2b)+(5-3)^3 2a=6$	$c=...$

Ποιο είναι το πολυώνυμο παρεμβολής;

$p_5(x)=(x-3)^3(ax^2+bx+c)$

2. Δίνεται $f(x)=x^7$ και 8 σημεία τ_1, τ_2,…, τ_8 στο διάστημα [3, 4]. Ποιο το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία αυτά.

$p(x)=x^7$. Μας δίνονται 8 σημεία και γνωρίζουμε ότι η f είναι πολ. βαθμού 7. Άρα θα πρέπει να συμπίπτει με το πολυώνυμο παρεμβολής (από θεωρία).

3. Έστω ότι προσεγγίζεται η f με το πολυώνυμο p_8 στο [1, 3] χρησιμοποιώντας τις τιμές $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$, $f^{(3)}(1)$, $f^{(4)}(1)$, $f(3)$, $f'(3)$ και $f''(3)$. Ο τύπος για το μέγιστο σφάλμα είναι:

$$\varepsilon_8(x)=\frac{g(\xi)}{r}(x-\beta)^{k_1}(x-\gamma)^{k_2}$$

Όπου η συνάρτηση g είναι $f^{(8)}$ και $r=8!$, $\beta=1$, $\gamma=3$, $k_1=5$, $k_2=3$

Δίνεται επίσης ότι $f^{(8)}=(x-1)^3(x-3)^5$. Να βρεθεί το φράγμα B για το μέγιστο σφάλμα.

$$\|\varepsilon_8\|_\infty \le B=\frac{\|(x-1)^3(x-3)^5\|}{8!}\|(x-1)^5(x-3)^3\| \le \frac{\|((x-1)(x-3))^8\|}{8!}=\frac{\|((2-1)(2-3))^8\|}{8!}=\frac{1}{8!}$$

(Προσοχή! Η συνάρτηση $f(x)=((x-a)(x-b))^k$, για $k=1,\ldots$, στο διάστημα $[a,b]$ παίρνει μέγιστο στο μέσο του διαστήματος. Για την συνάρτηση $f(x)=(x-a)^c(x-b)^d$ με $c\neq d$ δεν ισχύει το ίδιο!!!)

4. Να λυθεί το πρόβλημα της παρεμβολής με τις συνθήκες f(1)=3, f(2)=6, f(3)=8, f(4)=10 και f΄(4)=5.

Ο πίνακας διαιρεμένων διαφορών είναι:

1	3				
		3			
2	6		-1/2		
		2		1/6	
3	8		0		4/9
		2		3/2	
4	10		3		
		5			
4	10				

Το πολυώνυμο προσέγγισης είναι το:

$$p_5(x) = 3 + 3(x-1) - 1/2(x-1)(x-2) + 1/6(x-1)(x-2)(x-3) + 4/9(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Έστω τώρα ότι έχουμε τις συνθήκες f(2)=6, f(3)=8, f(4)=10. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω πίνακα δ.δ. δώστε το πολυώνυμο προσέγγισης.

$p_?(x) = 6 + 2(x-2)$, όπου ?=3 (Θα χρησιμοποιήσω τις τιμές του πίνακα που περιορίζονται στα νέα δεδομένα (φαίνονται από τις γραμμές στον παραπάνω πίνακα δ.δ.).)

5. Να βρεθεί προσέγγιση στην τιμή f ΄΄(x) με χρήση των τιμών f(x-2Δx), f(x-Δx), f(x), f(x+Δx), f(x+2Δx).

Αναπτύσσετε τις f(x-2Δx), f(x-Δx), f(x+Δx), f(x+2Δx) γύρω από το x (Taylor) και προσθέτετε κατά μέλη. Οι πρώτες παράγωγοι απαλείφονται και λύνοντας ως προς f ΄΄(x) παίρνετε τελικά:

F ΄΄ (x) ≈ $\dfrac{f(x-2\Delta x) + f(x-\Delta x) - 4f(x) + f(x+\Delta x) + f(x+2\Delta x)}{5(\Delta x)^2}$

6. Βρείτε προσεγγιστικό τύπο για τον υπολογισμό του

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

που να είναι ακριβής για πολυώνυμα όσο γίνεται μεγαλύτερου βαθμού. Τα x_1, x_2, x_3 είναι εσωτερικά σημεία στο (-1,1). Δώστε τις τιμές των w_i και x_i με $i = 1,2,3$ καθώς και το μέγιστο βαθμό πολυωνύμου n για τα οποία ο τύπος είναι ακριβής.

Θεωρώ $x_2 = 0$ και x_1, x_3 συμμετρικά ως προς το κέντρο. Έστω $x_1 = -k$ και $x_3 = k$, όπου $0 < k < 1$ αφού τα x_1, x_2, x_3 είναι εσωτερικά σημεία στο (-1,1). Όποτε, (λόγω συμμετρίας) θα είναι και $w_1 = w_3 = w$. Οι άγνωστοι μου είναι 3: k, w και w_2. Εφαρμόζω τον Αλγόριθμο 2:

- για $f(x) = 1$ έχω: $2 = 2w + w_2$ (1)
- για $f(x) = x$ έχω: $0 = 0$
- για $f(x) = x^2$ έχω: $\dfrac{2}{3} = 2wk^2$ (2)
- για $f(x) = x^3$ έχω: $0 = 0$
- για $f(x) = x^4$ έχω: $\dfrac{2}{5} = 2wk^4$ (3)

Από (2) και (3) παίρνω $k = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$ και $w = \dfrac{5}{9}$. Από (1) παίρνω τελικά $w_2 = \dfrac{8}{9}$. Παρατηρώ ότι για $f(x) = x^5$ έχω: $0 = 0$ και ισχύει ο κανόνας μου. Για $f(x) = x^6$ έχω $\dfrac{2}{7} = \dfrac{6}{25}$ που προφανώς δεν ισχύει. Οπότε ο κανόνας είναι ακριβής για πολυώνυμα μέχρι βαθμού 5.

Άρα,

$w_1 = \dfrac{5}{9}$, $w_2 = \dfrac{8}{9}$, $w_3 = \dfrac{5}{9}$, $x_1 = -\sqrt{\dfrac{3}{5}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$, $n = 5$

7. Έστω ότι ο κανόνας της προσεγγιστικής ολοκλήρωσης της f στο $[a,b]$ είναι ο

$$\int_a^b f(x)dx \approx w_1(f(a)+f(b))+w_2(f'(a)-f'(b)).$$

α) Το σφάλμα είναι της τάξης $O(b-a)^k$. Δώστε την τιμή του k.

$k=5$ (Χρησιμοποιώ 4 τιμές για να προσεγγίσω την f(x) άρα έχω σφάλμα $O(b-a)^4$. Ολοκληρώνοντας και μία φορά, το σφάλμα μου αυξάνεται κατά μία τάξη.)

β) Χωρίζουμε το $[a,b]$ σε N ίσα διαστήματα μήκους Δx. Ποιος είναι ο σύνθετος κανόνας;

$$\int_a^b f(x)dx \approx w_1(f(a)+2\sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih)+f(b))+w_2(f'(a)-f'(b))$$

(Σπάω το $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+\Delta x} f(x)dx + \int_{a+\Delta x}^{a+2\Delta x} f(x)dx + ... + \int_{a+(N-1)\Delta x}^{b} f(x)dx$ και χρησιμοποιώ τον κανόνα που μου δίνεται για κάθε ολοκλήρωμα. Κάνοντας τις κατάλληλες απαλοιφές παίρνω τον σύνθετο κανόνα.)

γ) Το σφάλμα του σύνθετου κανόνα είναι της τάξης $O(\Delta x)^k$. Δώστε την τιμή του k.

$k=4$ (Για κάθε επιμέρους ολοκλήρωμα έχω σφάλμα $O(\Delta x)^5$ σύμφωνα με το ερώτημα α.

Συνολικά, λοιπόν, το σφάλμα μου είναι $N\cdot O(\Delta x)^5 = \dfrac{b-a}{\Delta x} O(\Delta x)^5 : O(\Delta x)^4$)

8. Έστω το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών συνθηκών:

$$u''(x)+u'(x)-u(x) = -4x^4+2x^3-x^2, \quad x\in[0,1]$$
$$u(0)=0,\ u(1)=-1$$

Θα προσεγγίσουμε την άγνωστη u με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών. Για την προσέγγιση της $u'(x)$ χρησιμοποιήστε την κεντρική διαφορά. Χωρίζουμε το διάστημα [0, 1] σε N υποδιαστήματα μήκους $h=1/N$, ορίζοντας τα $N+1$ σημεία $x_i = ih$, $i=0,...,N$ (εκ των οποίων, προφανώς, τα x_i για $i=1,...,N-1$ είναι εσωτερικά ενώ τα $x_0=1$, $x_N=1$ είναι τα άκρα του [0,1]). Θεωρώντας τις προσεγγίσεις $U_i \approx u(x_i)$ γράφουμε μία εξίσωση για κάθε εσωτερικό σημείο x_i, $i=1,...,N-1$, ενώ οι τιμές $U_0=u(0)$ και $U_N=u(1)$ είναι γνωστές. Ποια είναι η εξίσωση που αντιστοιχεί στο x_i για

α) $i=3$: $(2-h)u_2-(4+2h^2)u_3+(2+h)u_4 = 2h^2(-4(3h)^4+2(3h)^3-(3h)^2)$

β) $i=N-1$:
$(2-h)u_{N-2}-(4+2h^2)u_{N-1} = 2h^2(-4((N-1)h)^4+2((N-1)h)^3-((N-1)h)^2)-(2+h)u(1)$

Στο τυχαίο σημείο έχω: $\dfrac{u(x_{i-1})-2u(x_i)+u(x_{i+1})}{h^2}+\dfrac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{2h}-u(x_i) = -4x_i^4+2x_i^3-x_i^2$.
Κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις έχω τελικά:
$(2-h)u(x_{i-1})-(4+2h^2)u(x_i)+(2+h)u(x_{i+1}) = -4x_i^4+2x_i^3-x_i^2$

9. Έστω το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών συνθηκών:

$$u''(x) - 7u(x) = x^2 - 3x + 4, \; x \in (3,4)$$
$$u(3) = 10, \; u'(4) = 20$$

Θα προσεγγίσουμε την άγνωστη u χρησιμοποιώντας τμηματικά κυβικά πολυώνυμα.
α) Έστω $N = 64$. Ποια η διάσταση n (=αριθμός αγνώστων) του προβλήματος;

$n = 128$ (Έχω δύο αγνώστους (τιμή-παράγωγο) για κάθε εσωτερικό κόμβο, άγνωστη παράγωγο στο 3 και άγνωστη τιμή στο 4, άρα έχω 2(N-1)+2 αγνώστους.

β) Δώστε τις τιμές α, β, γ, δ στον 2X4 πίνακα K που θα προκύψει από τις δύο εξισώσεις στα σημεία Gauss στο τυχαίο διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$.

$K = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & -\delta \\ \gamma & \delta & \alpha & -\beta \end{bmatrix}$, όπου

$\alpha = \phi''(\sigma) - 7h^2\phi(\sigma)$, $\beta = \psi''(\sigma) - 7h^2\psi(\sigma)$,
$\gamma = \phi''(1-\sigma) - 7h^2\phi(1-\sigma)$, $\delta = \psi''(1-\sigma) - 7h^2\psi(1-\sigma)$

γ) Ποιες οι τιμές (συναρτήσει των α, β, γ, δ) για τα παρακάτω στοιχεία του συντελεστή πίνακα A του τελικού* συστήματος $Au = b$

$A(1,3) =$ -δ $A(20,21) =$ -β $A(80,90) = 0$ $A(n-1,n) =$ γ

δ) Για το δεξί μέλος b, ποιες οι τιμές

$b(5) = h^2 f(\xi_3) = h^2 f(3 + 2h + \sigma h)$,
$b(n) = h^2 f(\eta_N) + \beta h u'(4) = h^2 f(3 + (N-1)h + (1-\sigma)h) + 20\beta h$

(Προσοχή! Τώρα μου δίνεται η παράγωγος στο δεξί άκρο, άρα από το συντελεστή πίνακα δεν απαλείφω την n-1 στήλη αλλά την n:

$$\begin{bmatrix} \beta & \gamma & -\delta & & & & & \\ \delta & \alpha & -\beta & & & & & \\ & \alpha & \beta & \gamma & -\delta & & & \\ & \gamma & \delta & \alpha & -\beta & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \alpha & \beta & \gamma \\ & & & & & \gamma & \delta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} hu'(3) \\ \\ \vdots \\ \\ \\ \vdots \\ \\ hu'_N \\ u(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f(\xi_1) - \alpha u(3) \\ h^2 f(\eta_1) - \gamma u(3) \\ h^2 f(\xi_2) \\ h^2 f(\eta_2) \\ \\ \vdots \\ \\ h^2 f(\xi_N) + \delta h u'(4) \\ h^2 f(\eta_N) + \beta h u'(4) \end{bmatrix}$$
)