Μερικές απαντήσεις στα θέματα της Προόδου της Αριθμ. Ανάλυσης και Περιβ. Υλοποίησης (2010)

Θέμα V

1. *Με χρήση μιας επαναληπτικής μεθόδου χαρακτηριζόμενης από τετραγωνική σύγκλιση, υπολογίστε την προσέγγιση της πραγματικής ρίζας της εξίσωσης $2x^3-3x^2+2x-9=0$ με ακρίβεια 3 σημαντικών ψηφίων. Σε ένα πρώτο βήμα να γίνει χρήση της μεθόδου διχοτόμησης. Επίσης να γραφούν συστηματικά όλες οι ενδιάμεσες προσεγγίσεις.*

Απάντηση

Αναζητούμε πρώτα περιοχή της πραγματικής ρίζας r. Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι f(2)*f(3)=(-1)*24=-24<0, άρα r∈(2, 3). Επί πλέον, είναι f'(x)=6x(x-1)+2>0 για κάθε x∈[2, 3] και συνεπώς υπάρχει μια μοναδική πραγματική ρίζα στο [2, 3]. Αυτή και θα προσεγγίσουμε. Θα χρησιμοποιήσουμε γι' αυτό τη μέθοδο Newton-Raphson, η οποία ως γνωστόν παρουσιάζει τετραγωνική σύγκλιση. Μπορούμε να ξεκινήσουμε διχοτομώντας το [2, 3]: x_0=(2+3)/2=2.5. Επειδή f(2.5)=8.5>0 ένα στενότερο διάστημα για τη ρίζα είναι το [2, 2.5]. Έτσι παίρνουμε x_0=(2+2.5)/2=2.250 ως (μια καλύτερη) αρχική προσέγγιση της επανάληψης N-R:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{3x_{n-1}^3 - 2x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} - 9}{6x_{n-1}(x_{n-1}-1)+2}, \quad n = 1,2,\ldots$$
$$x_0 = 2.25$$

Λαμβάνουμε διαδοχικά τις επαναλήψεις και τις προσεγγίσεις των σχετικών σφαλμάτων:

Για k=1:

x_1=2.25-3.0938/18.8750=2.25-0.1639=<u>2.0861</u>

με σχετικό σφάλμα |e_1|=|(2.0861-2.25)/ 2.25|=0.0728>0.5*10e-3

Για k=2:

x_2=2.0861-0.2734/15.5943=2.25-0.0175=<u>2.0686</u>,

με |e_2|=|(2.0686-2.0861)/2.0861|=0.0084>0.5*10e-3

Για k=3:

x_3=2.0686-0.0034/15.2630=2.25-0.0175=<u>2.0684</u>

με |e_3|=|(2.0684-2.0686)/2.0686|=9.6684e-005<0.5*10e-3

Η $\boldsymbol{x_3}$ αποτελεί τη ζητούμενη προσέγγιση.

2. *Δίνεται ο πίνακας A = [11, 0, 0; 0, -2, 10; 0, 10, -2] $\in \boldsymbol{R}^{3x3}$ και θεωρούμε $B=A^TA$, b=[20; 40; 60] και το σύστημα B**x**=**b**. Επίσης θεωρούμε σφάλματα οφειλόμενα σε ανακριβείς πράξεις.*

α) Είναι ο B θετικά ορισμένος και γιατί;

Απ.

Είναι $B = A^T A = \begin{bmatrix} 121 & 0 & 0 \\ 0 & 104 & -40 \\ 0 & -40 & 104 \end{bmatrix}$

Ο *B* είναι συμμετρικός, έχει αυστηρή διαγώνια κυριαρχία και θετικά διαγώνια στοιχεία. Συνεπώς, σύμφωνα με γνωστή πρόταση είναι θετικά ορισμένος.

*β) Προκειμένου να λύσουμε το B**x**=b, δώστε με κατάλληλη αιτιολόγηση και <u>υπολογίστε</u> την <u>αποδοτικότερη</u> διάσπαση του B.*

Απ. Αφού ο B είναι θετικά ορισμένος, επιδέχεται *διάσπαση Choleski*: $B=LL^T$, με:

$$B = L^T L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & l_{22}^2 & l_{22}l_{32} \\ 0 & l_{22}l_{32} & l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Για τον υπολογισμό του L, εξισώνουμε συστηματικά:

$$l_{11} = \sqrt{121} = 11$$
$$l_{22} = \sqrt{104} = 10.1980$$
$$l_{22}l_{32} = -40 \Rightarrow l_{32} = -40/10.1980 = \text{-}3.9223$$
$$l_{33} = \sqrt{104 - l_{32}^2} = \sqrt{104 - 15.3844} = 9.4136$$

Συνεπώς $L = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 10.1980 & 0 \\ 0 & \text{-}3.9223 & 9.4136 \end{bmatrix}$

γ) Με βάση το (β) υπολογίστε την προσεγγιστική λύση x του B**x**=b <u>χρησιμοποιώντας ακρίβεια 4 σημαντικών ψηφίων</u>.*

Απ. Από τις $B=LL^T$ και $B\mathbf{x}=\mathbf{b}$ λαμβάνουμε $LL^T\mathbf{x}=\mathbf{b}$, από όπου η λύση $\mathbf{x}$ προκύπτει από την επίλυση των συστημάτων: $L\mathbf{y}=\mathbf{b}$ και $L^T\mathbf{x}=\mathbf{y}$:
$L\mathbf{y}=\mathbf{b}$ $\Rightarrow$ (εμπρός αντικατάσταση) $\mathbf{y}$ =[1.818; 3.922; 8.008]
$L^T\mathbf{x}=\mathbf{y} \Rightarrow$ (πίσω αντικατάσταση) <u>$\mathbf{x}^*=\mathbf{x}$ =[0.1653; 0.7118; 0.8507]</u>

δ) Υπολογίστε τη νόρμα 2 του B (||B||₂). (<u>Υπόδειξη:</u> οι απαιτούμενες ιδιοτιμές υπολογίζονται εύκολα).

Απ. Προφανώς $A=A^T$ και $B^TB=B^2=(A^TA)^TA^TA=A^4$. Άρα η φασματική ακτίνα $\rho(B^TB)=\lambda_{max}(B^2)= \lambda_{max}(A^4)=(\rho(A))^4$ (λόγω γνωστής ιδιότητας). Άρα $\|B\|_2 = \sqrt{\rho(B^T B)} = (\rho(A))^2$. Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε την $\varrho(A)$. Οι ιδιοτιμές του A προφανώς είναι η λ_1=11 και οι 2 ιδιοτιμές του block C=A(2:3, 2:3). Οι τελευταίες προκύπτουν από την χαρ. εξίσωση: det(C-λI)=0, δηλ. $(\lambda+2)^2-10^2=0$ ή $(\lambda-8)(\lambda+12)=0$, απ' όπου λ_2=8 και λ_3=-12. Συνεπώς $\varrho(A)$=12 και <u>$\|B\|_2$=144</u>.

ε) Υπολογίστε το δείκτη κατάστασης k(B) του B με χρήση της νόρμας 2. (<u>Υπόδειξη</u>: εφαρμόστε γνωστή ιδιότητα για εύκολη αντιστροφή πίνακα)

Απ. Θα είναι $k(B)= \|B\|_2\|B^{-1}\|_2$. Μπορούμε να αποφύγουμε τον υπολογισμό αντιστρόφου για την εύρεση του $\|B^{-1}\|_2$. Πράγματι:

$$(\|B^{-1}\|_2)^2=\varrho((B^{-1})^TB^{-1})=\rho((B^T)^{-1}B^{-1})=\rho(B^{-1}B^{-1})=\varrho(B^{-2})= \varrho((A^2)^{-2}) = \varrho(A^{-4}) =\varrho^4(A^{-1})=(1/\lambda_{min}(A))^4$$

όπου $\lambda_{min}(A)$ είναι η κατ' απόλυτη τιμή μικρότερη ιδιοτιμή του A. Άρα:

$$\left\|B^{-1}\right\|_2 = \frac{1}{(\lambda_{\min}(A))^2}$$

Εδώ είναι $\lambda_{min}(A)=min(12, 8\ 11)=8$ και άρα: $\|B^{-1}\|_2=1/8^2=1/64$ και <u>$k(B)$=144/64=2.250</u>

Σημείωση: Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού - και αυτός αποδεκτός - εμπλέκει την αντιστροφή του *B* που εδώ είναι εύκολη: B^{-1}= [1/121 $\mathbf{0}^T$; $\mathbf{0}$ D^{-1}], όπου D=[104 40 ; 40 104]). Βρίσκουμε (π.χ. με τον τύπο των αλγεβρικών συμπληρωμάτων): D^{-1} = [0.0113, -0.0043; -0.0043, 0.0113].

*ζ) Υπολογίστε φράγματα για το σχετικό σφάλμα της λύσης του συστήματος B**x**=**b**. Να γίνει όπου χρειάζεται χρήση της νόρμας 2. Ποια τα συμπεράσματά σας;*

Απ. Τα ζητούμενα φράγματα προκύπτουν από την ανισότητα:

$$\frac{\|R\|_2}{k(B)} \leq \|e\|_\sigma \leq k(B)\|R\|_2 \qquad (1)$$

όπου $\|R\|_2$ το σχετικό υπόλοιπο του B, $\|e\|_\sigma$ το σχετικό σφάλμα και $k(B)$ ο δείκτης κατάστασης του B. Υπολογίζουμε:

$$\|R\|_2 = \frac{\|r\|_2}{\|b\|_2} = \frac{\|b - Bx^*\|_2}{\|b\|_2}$$

b-$B\boldsymbol{x}$*= [20; 40; 60]- $\begin{bmatrix} 121 & 0 & 0 \\ 0 & 104 & -40 \\ 0 & -40 & 104 \end{bmatrix}$ [0.1653; 0.7118; 0.8507] (*από ερώτημα γ*) =

= [20; 40; 60] - [19.9980 ; 39.9967 ; 60.0006]=

= [0.0020 ; 0.0033 ; -0.0006]

$\|b - Bx^*\|_2$ = $(0.0020^2+0.0033^2+0.0006^2)^{1/2}$ = 0.0039

$\|b\|_2$ = $(20^2+40^2+60^2)^{1/2}$=$5600^{1/2}$=74.8331

$\|R\|_2$ =0.0039/74.8331=5.2116e-005

Έτσι η (1) διαμορφώνεται:

$$5.2116\text{e-}005/2.250 \leq \|e\|_\sigma \leq 2.250 * 5.2116\text{e-}005 \Rightarrow$$

$$2.3163\text{e-}005 \leq \|e\|_\sigma \leq 1.1726\text{e-}004 \qquad (2)$$

Ο B έχει καλή κατάσταση όπως προκύπτει από την (ε). Αυτό αντανακλάται στη στενότητα του διαστήματος όπου κυμαίνεται το σχετικό σφάλμα, όπως φαίνεται στην (2). Μπορούμε συνεπώς να χρησιμοποιήσουμε το $\|R\|_2$ σαν εκτίμηση για το $\|e\|_\sigma$.