Αριθμητική Ανάλυση και Περιβ. Υλοποίησης

Απαντήσεις στα Θέματα Ιουνίου 2012 (3 και 4)

Θέμα 3 [260μ]

Θεωρούμε ότι κατά την επίλυση ενός προβλήματος προσέγγισης προέκυψε ένα γραμμικό σύστημα $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, με 100 αγνώστους, όπου $\boldsymbol{b}=[1,1\ldots1]^T$ και το μητρώο συντελεστών A, με $A\in\mathrm{R}^{100\times100}$, είναι ένα σύνθετο διαγώνιο κατά μπλοκ μητρώο, αποτελούμενο από τα υπομητρώα B, C και D:

$$A=\begin{bmatrix} B & & 0 \\ & C & \\ 0 & & D \end{bmatrix},\ \text{όπου: } C=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ \text{και } D=\begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Το μπλοκ B είναι 95×95, <u>συμμετρικό</u> και οι ακραίες ιδιοτιμές του είναι: $\lambda_{max}(\mathrm{B})=4.65$ και $\lambda_{\min}(\mathrm{B})=0.025$.

α) [20μ] Χωρίς να κάνετε κανένα υπολογισμό απαντήστε: πως συσχετίζεται το $\lambda_{max}(A)$ (μέγιστη ιδιοτιμή του A), με τα μέτρα $\|A\|_2$ και $\|A^{-1}\|_2$;

Απ.

Ως γνωστόν, για κάθε φυσική νόρμα ισχύει [*βλ. σχέση 5.28, σελ. V-6, διδακτικό βιβλίο*]. :

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|}\le|\lambda_i|\le\|A\|\ ,\ \acute{\eta}\ \ \frac{1}{\|A^{-1}\|}\le\rho(A)\le\|A\|$$

Επομένως η παραπάνω ανισότητα ισχύει και για τη νόρμα 2.

β) [50μ] Τα C και D δεν είναι βέβαια συμμετρικά. Είναι όμως θετικά ορισμένα και γιατί; Κατόπιν αυτού, είναι το A θετικά ορισμένο και γιατί;

Απ. .

Το συμμετρικό μέρος του μητρώου

$$C=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

είναι

$$S=Sym(C)=\frac{1}{2}\left(C+C^T\right)=\begin{bmatrix} 3 & -1.5 & 0 \\ -1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Εξετάζουμε τις κύριες ορίζουσες (ισοδύναμα θα μπορούσαμε να εξετάσουμε τις ιδιοτιμές ή τους οδηγούς). Για να είναι το S θ.ο., αρκεί (και πρέπει) όλες οι κύριες υπο-ορίζουσες $\det(\underline{S}_i)$ να είναι >0. Πράγματι είναι

$\det(\underline{S}_1) = \det([3]) = 3 > 0$,
$\det(\underline{S}_2) = \det([3\ -1.5;\ -1.5\ 1]) = 0.75 > 0$,
$\det(\underline{S}_3) = \det(S) = 2.25 > 0$

Συνεπώς το S είναι θ.ο., άρα και το C είναι θ.ο.

Για το μητρώο

$$D = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

είναι

$$T = \mathrm{Sym}\left(D\right) = (D + D^{\mathrm{T}})\,/\,2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

και

$\det(\underline{T}_1) = \det([2]) = 0.2 > 0,$
$\det(\underline{T}_2) = \det(T) = -0.15 < 0$

Άρα, αφού $\det(T)<0$ το T δεν είναι θ.ο., επομένως και το D δεν είναι θ.ο. Εξ' άλλου το B είναι θ.ο. ως συμμετρικό και με θετικές ιδιοτιμές: $0.025 \le \lambda \le 4.65$. Όμως, για να είναι το A θ.ο. θα πρέπει και τα τρία μπλοκ B, C, D, να είναι θ.ο. Πράγματι, το $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$ γράφεται

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} &= [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}]\,[B\ \mathbf{0}\ \mathbf{0};\ \mathbf{0}\ C\ \mathbf{0};\ \mathbf{0}\ \mathbf{0}\ D]\,[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}]^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}D\boldsymbol{w} \end{aligned} \tag{1}$$

και η συνθήκη $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}>0,\ \forall \boldsymbol{x}\neq 0$ μπορεί να εξασφαλισθεί μόνον όταν ισχύει και $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}D\boldsymbol{w} >0,\ \forall \boldsymbol{w}\neq 0$ (αν π.χ. επιλέξουμε $\boldsymbol{x}=[\mathbf{0}, \mathbf{0}, 1, -1]^{\mathrm{T}}$, είναι $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=-0.3$). Επομένως το A δεν είναι θ.ο.

Σημείωση:

1. Απαντήσεις της μορφής «*για να είναι τα C, D θ.ο., αρκεί οι ιδιοτιμές των C και D να είναι θετικές κ.λ.π.*» είναι λανθασμένες και δεν βαθμολογούνται. Για τα μη συμμετρικά μητρώα, η παραπάνω πρόταση είναι λανθασμένη: είναι αναγκαία, άλλά <u>όχι</u> ικανή (βλ. βιβλίο κεφ. IV). Επίσης λανθασμένη είναι και η: «*για να είναι τα C, D θ.ο., αρκεί να έχουν θετικούς οδηγούς*». Και αυτή ισχύει <u>μόνον για συμμετρικά μητρώα</u>. Π.χ., το μη συμμετρικό μητρώο A=[1, 10; 1, 11] έχει θετικούς οδηγούς (1, 1), αλλά δεν είναι θ.ο.:

   $[-2\ 1]\ A\ [-2\ 1]^{\mathrm{T}} = -7$!

   Επαληθεύουμε παίρνοντας το <u>συμμετρικό μέρος</u> του A: $S=(A+A^{\mathrm{T}})/2$ = [1, 5.5; 5.5, 11]. Είναι $\det(\underline{S}_1)=1>0$, ενώ $\det(\underline{S}_2)=\det(S) < 0$!
2. Βλ. (α) *κριτήρια για θ.ο. μητρώα*, Κεφ. IV, σελ. 23, Θ. 4.4.1, (β) Γενικό Κριτήριο για μη συμμετρικά θ.ο. μητρώα, IV-12 (δ) τεύχος Ασκήσεων και (γ) παραδείγματα-ασκήσεις στις παραδόσεις του μαθήματος.

γ) [70μ]Υπολογίστε συστηματικά τη <u>νόρμα 2</u> του A, $\|A\|_2$. (τυπική Ευκλείδεια νόρμα)

Απ.

Είναι

$$\left\|A\right\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^T A\right)} = \sqrt{\lambda_{max}\left(A^T A\right)} = \max\sigma\left(A\right)$$

όπου $\sigma(A)$ ιδιάζουσα τιμή του A. Οι ιδιοτιμές του A, λόγω της διαγώνιας κατά μπλοκ δομής του, είναι προφανώς οι ιδιοτιμές των B, C και D. Το ίδιο ισχύει και για τις ιδιάζουσες τιμές του, δηλ. τις ιδιοτιμές του $A^{\mathrm{T}}A$ [*βλ. Σημείωση,(2)*]. Επομένως:

$$\max\sigma\left(A\right) = \max\left(\max\sigma\left(B\right),\ \max\sigma\left(C\right),\ \max\sigma\left(D\right)\right), \text{ ή:}$$

$$\left\|A\right\|_2 = \max\left(\left\|B\right\|_2, \left\|C\right\|_2, \left\|D\right\|_2\right) \tag{2}$$

• Για το B είναι:

$$\sigma(B)= \sigma\left(B\right) = \sqrt{\rho\left(B^T B\right)} = \sqrt{\rho\left(B^2\right)} = \sqrt{\rho^2\left(B\right)} = \rho\left(B\right) = 4.65$$

• Για το C είναι:

$$C^{\mathrm{T}}C = \begin{bmatrix} 13 & -5 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του $C^{\mathrm{T}}C$ (ιδιάζουσες του C) είναι η λ_1=9 και οι ιδιοτιμές του μπλοκ [13, -5; -5, 2]:

det([13-λ, -5; -5, 2-λ] = (13 - λ)(2 - λ) - 25 = λ^2 - 15λ + 1 = 0 $\Rightarrow$

$$\lambda_2 = \frac{15+\sqrt{225-4}}{2} = \frac{15+\sqrt{221}}{2} \simeq \frac{15+14.86}{2} = \frac{29.86}{2} = 14.93$$

$$\lambda_3 \simeq \frac{15-14.86}{2} = 0.07$$

Συνεπώς το φάσμα του $C^{\mathrm{T}}C$ είναι {14.93, 0.07, 9}, επομένως

$$\|C\|_2 = \max\sigma(C) \simeq \sqrt{14.93} \simeq 3.864$$

• Τέλος, για το D είναι:

$$D^T D = \begin{bmatrix} 1.04 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του $D^{\mathrm{T}}D$ (ιδιάζουσες του D) είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

det([1.04-λ, 0.5; 0.5, 0.25-λ] = (1.04 - λ)(0.25 - λ) – 0.25 = λ^2 - 1.29λ + 0.01 = 0 $\Rightarrow$

$$\lambda_1 = \frac{1.29+\sqrt{1.29^2-4\times 0.01}}{2} = \frac{1.29+\sqrt{1.624}}{2} \simeq \frac{1.29+1.274}{2} = 1.282$$

$$\lambda_2 \simeq \frac{1.29-1.274}{2} = 0.008$$

Συνεπώς το φάσμα του $D^{\mathrm{T}}D$ είναι {1.282, 0.008}, επομένως

$$\|D\|_2 = \max\sigma(D) = \sqrt{1.282} = 1.132$$

Συνοψίζοντας, από την (2) έχουμε:

$$\boxed{\|A\|_2 = \max\left(\|B\|_2, \|C\|_2, \|D\|_2\right) = \max(4.65,\ 3.864,\ 1.132) = 4.65 = \|B\|_2}$$

Σημείωση:

1. Απαντήσεις της μορφής «*για να βρούμε το* $\|A\|_2$ βρίσκουμε τις *ιδιοτιμές των C και D…*», είναι λανθασμένες και δεν βαθμολογούνται. Τα C και D <u>δεν</u> είναι συμμετρικά, επομένως οι ιδιοτιμές τους λ <u>δεν ταυτίζονται</u> με τις ιδιάζουσες τιμές $\sigma(C) = \sqrt{\rho(C^{\mathrm{T}}C)}$, $\sigma(D) = \sqrt{\rho(D^{\mathrm{T}}D)}$ αντίστοιχα.
2. *Βλ. Παρατηρήσεις και σχετικά Λήμματα που παρουσιάσθηκαν στις διαλέξεις.* Αλλά διαπιστώνεται άμεσα: είναι $A^{\mathrm{T}}A$=[$B^{\mathrm{T}}B$, **0**, **0**; **0**, $C^{\mathrm{T}}C$, **0**; **0** **0** $D^{\mathrm{T}}D$], δηλ. οι ιδιάζουσες τιμές του A, είναι αυτές των B, C, D.

δ) [50μ] Υπολογίστε <u>επακριβώς</u> το δείκτη κατάστασης Κ(A) του A ως προς την νόρμα 2..

Απ.

Ο δείκτης κατάστασης σύμφωνα με τη νόρμα 2 είναι:

$$\mathrm{K}_2(A) = \frac{\max\sigma(A)}{\min\sigma(A)}$$

Από το ερώτημα (γ) είναι $\max\sigma(A) = 4.65$, και η μικρότερη ιδιάζουσα τιμή:

$$\min\sigma(A) = \min(0.025,\ \sqrt{0.07},\ \sqrt{0.008}) = 0.025$$

Συνεπώς

$$\boxed{\mathrm{K}_2(A) = \frac{4.65}{0.025} = 186}$$

ε) [70μ] Έστω τώρα ότι κάποιος αλγόριθμος επίλυσης έδωσε μια προσεγγιστική λύση $\boldsymbol{x}^*=[x_1^*;x_2^*]$ για την οποία γνωρίζουμε το *υπόλοιπο* του B, $r(B) \simeq 10^{-3}\times[1,\ldots,1]^T \in \mathbf{R}^{95}$ και $\boldsymbol{x}_2^* \simeq [-2.999, -4.999, 0.3343, 5, -8]^T$. Να υπολογίσετε αριθμητικά φράγματα για το σχετικό σφάλμα της λύσης πάντα με χρήση νόρμας 2 [*δεν λαμβάνεται υπ' όψιν «γενική απάντηση»…*].

Απ.

Ως γνωστόν, το σχετικό σφάλμα $\boldsymbol{\delta}=||\boldsymbol{\varepsilon}||/||\boldsymbol{x}||$ της λύσης ενός γραμμικού συστήματος φράσσεται μέσω του *σχετικού υπολοίπου* $||r||_R$ ως εξής:

$$\frac{1}{K(A)}\|\boldsymbol{r}\|_R \le \delta \le K(A)\|\boldsymbol{r}\|_R$$

Το σχετικό υπόλοιπο δίνεται:

$$\|\boldsymbol{r}\|_R = \frac{\|A\boldsymbol{\varepsilon}\|}{\|A\boldsymbol{x}\|} = \frac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{\|\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x}^*\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

Υπολογίζουμε το *υπόλοιπο* (residual) $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b} - \begin{bmatrix} B & & 0 \\ & C & \\ 0 & & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}^* \\ \boldsymbol{z}^* \\ \boldsymbol{w}^* \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{1:95} \\ \boldsymbol{b}_{1:3} \\ \boldsymbol{b}_{1:2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B\boldsymbol{y}^* \\ C\boldsymbol{z}^* \\ D\boldsymbol{w}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{1:95} - B\boldsymbol{y}^* \\ \boldsymbol{b}_{1:3} - C\boldsymbol{z}^* \\ \boldsymbol{b}_{1:2} - D\boldsymbol{w}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(B) \\ r(C) \\ r(D) \end{bmatrix}$$

Όπου τα διανύσματα $\boldsymbol{b}_{1:i}$=ones(i,1) (διάνυσμα με i “1”) Προφανώς είναι $[\boldsymbol{y}^*;\ \boldsymbol{z}^*;\ \boldsymbol{w}^*]= \boldsymbol{x}^*= [\boldsymbol{x}_1^*;\ \boldsymbol{x}_2^*]$, και $\boldsymbol{y}^*=\boldsymbol{x}_1^*$. Τα $\boldsymbol{r}(B)$, $\boldsymbol{r}(C)$ και $\boldsymbol{r}(D)$ είναι τα *υπόλοιπα* των μητρώων B, C, D. Το $\boldsymbol{r}(B)$ δίνεται, ενώ τα $\boldsymbol{r}(C)$, $\boldsymbol{r}(D)$ μπορούν να υπολογισθούν εφ' όσον δίνονται τιμές για τα $\boldsymbol{z}^*$ και $\boldsymbol{w}^*$:

$\boldsymbol{z}^* \simeq [-2.999, -4.999, 0.3343]^T$,
$\boldsymbol{w}^* \simeq [5, -8]^T$

Υπολογίζουμε:

$$r(C) = \boldsymbol{b}_{1:3} - C\boldsymbol{z}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2.999 \\ -4.999 \\ 0.3343 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3.998 \\ 0.999 \\ 1.003 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.998 \\ 0.001 \\ -0.003 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{r}(D) = \boldsymbol{b}_{1:2} - D\boldsymbol{w}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας λαμβάνουμε:

$$\boldsymbol{r} = \left[10^{-3}\left[1,\ldots,1\right],\ 4.998,\ \ 0.001,\ \ \text{-}0.003,\ \ 0,\ \ 0\right]^{\mathrm{T}} \Rightarrow$$

$$\|\boldsymbol{r}\|_2 = \sqrt{95\times\left(10^{-3}\right)^2 + 4.998^2 + 0.001^2 + 0.003^2}$$
$$= \sqrt{95\times10^{-6} + 24.98 + 1\text{e-}6 + 9\text{e-}6}$$
$$\simeq 4.999$$

Είναι $\|\boldsymbol{b}\|_2=\sqrt{100} = 10$. Επομένως:

$$\|\boldsymbol{r}\|_R = 4.999/10 = 0.4999 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{186}\times 0.4999 \le \delta \le 186\times 0.4999 \Rightarrow 0.0027 \le \delta \le 92.9814} \qquad (1)$$

Σημείωση Οι μεγάλες τιμές φράγματος στην (1), οφείλονται ακριβώς στην λανθασμένη προσέγγιση $x^*_{96} \simeq -2.999$ που έδωσε ο αλγόριθμος επίλυσης (ο οποίος προφανώς εξόκειλε στη συγκεκριμένη περίπτωση…).

Θέμα 4 **[240μ]**

1.[60μ] Θεωρούμε το συμμετρικό μητρώο B του Θέματος 3, για το οποίο όμως είναι: λ_{min}(B)=0.025 και λ_{max}(B)=$10^3\times4.65$. Τότε ποια μέθοδο οδήγησης θα επιλέγατε προκειμένου να λύσετε με απαλοιφή ένα τετραγωνικό σύστημα B$\boldsymbol{x}$=$\boldsymbol{c}$, και για ποιον ακριβώς λόγο; Εξηγείστε τη μέθοδο αυτή με χρήση μετασχηματισμών μητρώων.

Απ [*Συνοπτικά σχετικά με το ερώτημα: βλ. Σημείωση, (1), (4)*]

Το μητρώο B είναι συμμετρικό και θετικά ορισμένο και εμφανώς έχει δραματικά κακή κατάσταση:

$$K(B) = \lambda_{max}/\lambda_{min} = (10^3\times4.65)/0.025 = 186000\ !!!$$

Εξ' άλλου, τα θετικά ορισμένα μητρώα είναι γνωστό ότι έχουν την ιδιότητα να συγκεντρώνουν μεγάλες τιμές στην κύρια διαγώνιο. Συγκεκριμένα η κύρια διαγώνιος υπερέχει της δευτερεύουσας κ.ο.κ., και το *μέγιστο κατ' απόλυτη τιμή στοιχείο του A εμφανίζεται στη διαγώνιό του*: [*βλ. Σημείωση,* (3)]

$$max(diag(A)) = |max(abs(A))|$$

Ταυτόχρονα, η διαίρεση με μικρές τιμές οδηγών (ή πολ/σμός με μεγάλους πολλαπλασιαστές) δημιουργεί συσσώρευση σφαλμάτων στρογγύλευσης, απώλεια σ.ψ., και ως εκ τούτου προβλήματα ευστάθειας. Από τα παραπάνω λοιπόν, για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού θα επιλέγαμε **οδήγηση κατά μήκος της διαγωνίου.** Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, σε κάθε βήμα k της απαλοιφής επιλέγεται ως οδηγός d_k το μεγαλύτερο κατ' απόλυτο τιμή στοιχείο της κύριας διαγωνίου:

$$d_k = \max_{k\le i\le \min(m,n)}\left(|a_{ii}|\right)$$

Αυτό επιτυγχάνεται [*βλ. Σημείωση*, (1)] στα θ.ο. μητρώα με *συμμετρικές αντιμεταθέσεις γραμμών και στηλών*. Σε κάθε βήμα το A πολλαπλασιάζεται από αριστερά και δεξιά με μεταθετικά μητρώα P_i (αριστερά) και Q_i (δεξιά), ώστε να παραχθεί το άνω τριγωνικό U:

$$U = E_{r-1}P_{r-1}\ldots E_2P_2E_1P_1A\ Q_1Q_2\ldots Q_{r-1} = EAQ \Rightarrow$$
$$UQ^{-1} = EA \Rightarrow UQ^{-1}\mathbf{x} = EA\mathbf{x} = E\mathbf{b} = \mathbf{c}\ \Rightarrow U\mathbf{y} = \mathbf{c}$$

Τελικά, λύνεται με αλλαγή μεταβλητής το σύστημα $U\boldsymbol{y}$=$\boldsymbol{c}$ ως προς $\boldsymbol{y}$. Το $\boldsymbol{y}$ είναι μετάθεση των συντεταγμένων του $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{y}=Q^{-1}\boldsymbol{x}=Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$. Στο τέλος αναδιατάσσονται οι άγνωστοι: $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$.

Σημείωση Σχετικές αναφορές στο διδακτικό βιβλίο και άλλού:

1. *Παρατήρηση 4.5.1, IV-32, Οδήγηση κατά την κύρια διαγώνιο,*
2. *Οδήγηση κατά μήκος της διαγωνίου, §3.3.2,III-12*],
3. *§4.4.1, IV-27, ιδιότητες θ.ο. μητρώων, σχέσεις (4.4.4), (4.4,6).*
4. *Διαλέξεις του μαθήματος, σχετική Άσκηση-συζήτηση…*

2.[100μ] Θεωρούμε την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης $f(x) = x^3+x^2-2x+2=0$.
(α) [15] Εξηγείστε γιατί η εξίσωση αυτή έχει μια μόνον πραγματική λύση.

Απ.

Είναι $f'(x)=3x^2+2x-2$ και $\Delta=28>0$. Ισχύει $f'(x)=0$ στα σημεία $x_1, x_2 = \frac{1}{3}(-1\pm\sqrt{7})$. Επομένως είναι $f'(x) > 0$, για $x \le x_1$, $x \ge x_2$, και $f'(x) < 0$, $\forall x\in(x_1, x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,x_1]\cup[x_2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$. Επίσης ισχύει και $f(x_1) > 0$, $f(x_2) > 0$, συνεπώς υπάρχει μοναδική πραγματική ρίζα, έστω ξ, και δύο μιγαδικές συζυγείς.

(β) [15] Εντοπίστε ένα διάστημα αρκούντως μικρό που περιέχει την πραγματική λύση.

Απ.

Αν ξ η πραγματική ρίζα, διαπιστώνουμε $f(-3)f(-2)=-20$, άρα $\xi\in(-3, -2)$. Με μια ακόμα διχοτόμηση του διαστήματος είναι $f(-2.5)f(-2)=-4.75$, συνεπώς $\xi\in(-2.5, -2)$. Ως αρχικό σημείο για όποιον επαναληπτικό αλγόριθμο εφαρμοσθεί επιλέγεται το μέσον του διαστήματος:

$x_0 = -(2.5+2)/2 = -2.25$.

(γ) [70] Να εφαρμόσετε την επαναληπτική μέθοδο Newton Raphson για την προσέγγιση της παραπάνω λύσης με ακρίβεια 3 σημαντικών ψηφίων. Να γίνει απαραίτητα χρήση κριτηρίου σχετικού σφάλματος [*η απάντηση δεν βαθμολογείται διαφορετικά*]. Πόσες επαναλήψεις χρειάστηκαν;

Απ.

[*βλ. σχετικά Παραδείγματα στο διδακτικό βιβλίο και στο τεύχος Ασκήσεων, στις διαλέξεις και Φροντιστήρια*]

Η επανάληψη *Newton-Raphson*

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \text{αρχικό σημείο} \\
x_n &= x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\ n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

για τη δοθείσα συνάρτηση είναι:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= -2.25 \\
x_n &= x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 + x_{n-1}^2 - 2x_{n-1} + 2}{3x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} - 2},\ n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Υπολογίζουμε τις διαδοχικές επαναλήψεις της ακολουθίας (1), εφαρμόζοντας εκτίμηση σχετικού σφάλματος για τον προσδιορισμό της ακρίβειας κάθε προσέγγισης:

Επανάληψη x_k	**Εκτίμηση σχετικού σφάλματος** $\lvert x_k-x_{k-1}/x_{k-1}\rvert$	**Ακριβή σ.ψ.**
$x_1 = -2.2698$	$\lvert(x_1-x_0)/x_0\rvert = 0.0088 < 5e-2$	2
$x_2 = -2.2695$	$\lvert(x_2-x_1)/x_1\rvert = \lvert-1.1159e-004\rvert < 5e-4$	4

Επομένως, μόλις στην 2η επανάληψη επιτεύχθηκε η προσέγγιση $\mathbf{x_2=-2.2695}$ με ακρίβεια 4 σ.ψ. (ακόμα καλύτερη!).

[Εκδοχή 1: $f(x)$ $x^3-2x^2+2x+1 =0$: Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το **R**, αφού $f'(x)=3x^2-4x+2>0$, $\forall x\in\mathbf{R}$ ($\Delta=-8<0$). Επίσης είναι $f(0)f(-1)=-4<0$, $f(0)f(-0.5)=-0.625<0$, οπότε λαμβάνουμε $x_0 = -2.5$. Τελικά βρίσκουμε $x = -0.353$ με ακρίβεια 3 σ.ψ. ή $x = -0.3532$ με ακρίβεια 4 σ.ψ.

3. **[50]** Μπορεί να εφαρμοσθεί η μέθοδος Choleski στο συμμετρικό μέρος Sym(C) του μητρώου C του Θέματος 3 και γιατί; Αν ναι, υπολογίστε <u>τυπικά</u> τον παράγοντα Choleski F.

Απ [*«Συμμετρικό Μέρος»: σε πληθώρα Παρ/των στο διδακτικό βιβλίο και στις διαλέξεις…*]

Στο Θέμα 3(β) διαπιστώσαμε ότι το συμμετρικό μέρος του C

$$S = Sym(C) = \frac{1}{2}\left(C + C^T\right) = \begin{bmatrix} 3 & -1.5 & 0 \\ -1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένο. Συνεπώς δέχεται διάσπαση Choleski. Την εφαρμόζουμε τυπικά, σύμφωνα με τον αλγόριθμο *Grout*:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1.5 & 0 \\ -1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = FF^T = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε:

$l_{11}=\sqrt{3} = 1.732$

$l_{21}l_{11}=-1.5 \Rightarrow l_{21}=-1.5/\sqrt{3}= -0.866$,

$l_{21}^2+ l_{22}^2=1 \Rightarrow l_{22} = \sqrt{1-l_{21}^2} = \sqrt{1-0.866^2} = 0.5$

$l_{33}^2 = 3 \Rightarrow l_{33}= \sqrt{3} = 1.732$

Επομένως ο παράγων Choleski *F* είναι:

$$F = \begin{bmatrix} 1.732 & 0 & 0 \\ -0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.732 \end{bmatrix}$$

4. **[30]** Θεωρούμε τώρα το μητρώο G=(1/4)C, όπου C το μητρώο του Θέματος 3. Μπορεί το G να είναι μητρώο επανάληψης μιας <u>συγκλίνουσας</u> γενικής επαναληπτικής μεθόδου επίλυσης συστημάτων, και γιατί;

Απ.
Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του C: Η $\lambda_3=3$ είναι προφανής, ενώ από το μπλοκ H=[3, -1; -2, 1] υπολογίζουμε εύκολα τις υπόλοιπες:

$$\det(H-\lambda I) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow$$

$\lambda_1 = 3.7321$, $\lambda_2 = 0.2679$, $\lambda_3 = 3$

Επομένως το φάσμα του G είναι {3.7321/4, 0.2679/4, 3/4}. Παρατηρούμε ότι η φασματική ακτίνα είναι ρ(G)=3.7321/4<1, επομένως, σύμφωνα με το γνωστό βασικό κριτήριο [*βλ. Κεφ. VI*], το G μπορεί να είναι μητρώο επανάληψης μιας συγκλίνουσας γενικής επαναληπτικής μεθόδου επίλυσης συστημάτων (το G τείνει στο **0**).

Σημείωση: Αποδεκτή είναι και η απάντηση με βάση το Θ. των *κύκλων Gerschgorin*: οι ιδιοτιμές του C βρίσκονται στην ένωση των κύκλων $|\lambda - 3| \le 1$, $|\lambda - 1| \le 2$ και $|\lambda - 3| \le 0$, απ' όπου εξάγουμε:

$2 \le \lambda \le 4$, $-1 \le \lambda \le 3$ ή $1/2 \le \lambda/4 \le 1$, $-1/4 \le \lambda/4 \le 3/4$
$\Rightarrow \lambda(G) < 1 \Rightarrow \rho(G) < 1$