ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ & ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΛΥΜΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

I. Δίνονται οι τιμές $f(1) = 2$, $f'(1) = 4$, $f''(1) = 6$, $f(2) = 8$, $f'(2) = 2$, $f''(2) = 4$.

(α) Να βρείτε το πολυώνυμο παρεμβολής στη μορφή Newton.

Απάντηση. Ο πίνακας δ.δ. γράφεται:

x_j	$\delta.\delta.0$	$\delta.\delta.1$	$\delta.\delta.2$	$\delta.\delta.3$	$\delta.\delta.4$	$\delta.\delta.5$
1	2					
		$\frac{f'(1)}{1!} = 4$				
1	2		$\frac{f''(1)}{2!} = 3$			
		$\frac{f'(1)}{1!} = 4$		$\frac{2-3}{2-1} = -1$		
1	2		$\frac{6-4}{2-1} = 2$		$\frac{-4-(-1)}{2-1} = -3$	
		$\frac{8-2}{2-1} = 6$		$\frac{-2-2}{2-1} = -4$		$\frac{8-(-3)}{2-1} = 11$
2	8		$\frac{4-6}{2-1} = -2$		$\frac{4-(-4)}{2-1} = 8$	
		$\frac{f'(2)}{1!} = 4$		$\frac{2-(-2)}{2-1} = 4$		
2	8		$\frac{f''(2)}{2!} = 2$			
		$\frac{f'(2)}{1!} = 4$				
2	8					

Το πολυώνυμο παρεμβολής γράφεται στη μορφή Newton:

$$\begin{aligned} p_6(x) &= [1]f + [1,1]f(x-1) + [1,1,1]f(x-1)(x-1) + [1,1,1,2](x-1)^3 \\ &\quad + [1,1,1,2,2]f(x-1)^3(x-2) + [1,1,1,2,2,2]f(x-1)^3(x-2)(x-2) \\ p_6(x) &= 2 + 4(x-1) + 3(x-1)^2 - 1(x-1)^3 - 3(x-1)^3(x-2) + 11(x-1)^3(x-2)^2 \end{aligned}$$

$\square$

(β) Να βρείτε μία προσέγγιση της τιμής $f'(1.5)$.

Απάντηση. Η $f'(x)$ προσεγγίζεται από το πολυώνυμο ${p'}_6(x)$. Άρα,

$$\begin{aligned} f'(x) &\simeq {p'}_6(x) \\ f'(x) &\simeq 4 + 6(x-1) - 3(x-1)^2 - 9(x-1)^2(x-2) - 3(x-1)^3 + 33(x-1)^2(x-2)^2 + 22(x-1)^3(x-2) \end{aligned}$$

και για $x = 1.5$ έχουμε

$$f'(1.5) \simeq 4 + 6(0.5) - 3(0.5)^2 - 9(0.5)^2(-0.5) - 3(0.5)^3 + 33(0.5)^2(-0.5)^2 + 22(0.5)^3(-0.5)$$

$\square$

II. Έστω ότι προσεγγίζεται η f με το πολυώνυμο p_8 στο $[1,3]$ χρησιμοποιώντας τις τιμές $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$, $f^{(3)}(1)$, $f(3)$, $f'(3)$, $f''(3)$ και $f^{(3)}(3)$.

(α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(x) = 3x^8 + 10x^5 - 1000$, ποιο είναι το φράγμα E για το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης; Δώστε αριθμό.

Απάντηση. Το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης E δίνεται, κατά τα γνωστά, από

$$E = ||f - p_8||_\infty \leq \frac{||f^{(8)}||_\infty}{8!} ||(x-1)^4(x-3)^4||_\infty$$

Έχουμε $f(x) = 3x^8 + 10x^5 - 1000$, άρα $f^{(8)}(x) = 3 \cdot 8!$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι το άκρο της συνάρτησης $g(x) = (x-a)(x-b)$, $x \in [a,b]$, βρίσκεται στο μέσο του διαστήματος, δηλαδή για $x = \frac{a+b}{2}$. Άρα, το σφάλμα ισούται με

$$E = ||f - p_8||_\infty \leq \frac{||3 \cdot 8!||_\infty}{8!} ||(2-1)^4(2-3)^4||_\infty = 3$$

$\square$

(β) Αν γνωρίζουμε ότι $f(x) = 6x^7 + 100x^4 - 3x + 5$, ποιο είναι το φράγμα B για το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης; Γιατί;

Απάντηση. Η f είναι πολυώνυμο βαθμού 7. Άρα το σφάλμα προσέγγισής σε 8 σημεία θα είναι 0, αφού δεν γίνεται 2 πολυώνυμα βαθμού 7 να είναι διαφορετικά και να συμφωνούν σε 8 σημεία. $\square$

III. Δίνεται ο παρακάτω κανόνας:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\Big[f(a)+f(b)\Big] + \frac{(b-a)^2}{8}\Big[f'(a)-f'(b)\Big]$$

(α) Το σφάλμα του κανόνα είναι $\mathrm{O}(b-a)^m$, όπου $m = \ldots\ldots$. Αιτιολογήστε.

Απάντηση. Θα είναι $m = 5$ διότι χρησιμοποιούμε 4 τιμές της άγνωστης f και επειδή προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα της f η τάξη σφάλματος αυξάνει κατά 1. □

(β) Χωρίζουμε το διάστημα $b-a$ σε N ίσα διαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{b-a}{N}$ και έστω ότι μας δίνονται οι τιμές και οι απαραίτητες παράγωγοι της f στους κόμβους x_i, όπου $i = 0, 1, \ldots, N$ ($x_0 = a$ και $x_N = b$). Δώστε το σύνθετο κανόνα.

Απάντηση. Χωρίζουμε το διάστημα $b-a$ σε N ίσα διαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{b-a}{N}$, άρα:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+\Delta x} f(x)\mathrm{d}x + \ldots + \int_{a+(N-1)\Delta x}^{a+N\Delta x} f(x)\mathrm{d}x$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα σε κάθε ένα από τα επιμέρους ολοκληρώματα, κάνουμε τις απαραίτητες απαλοιφές και παίρνουμε το σύνθετο κανόνα:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad &= \quad (\Delta x)\Big[f(a)+f(a+\Delta x)\Big] + \frac{(\Delta x)^2}{8}\Big[f'(a)-f'(a+\Delta x)\Big] \\
&\quad +(\Delta x)\Big[f(a+\Delta x)+f(a+2\Delta x)\Big] + \frac{(\Delta x)^2}{8}\Big[f'(a+\Delta x)-f'(a+2\Delta x)\Big] \\
&\quad +\ldots \\
&\quad +(\Delta x)\Big[f(a+(N-2)\Delta x)+f(a+(N-1)\Delta x)\Big] + \frac{(\Delta x)^2}{8}\Big[f'(a+(N-2)\Delta x)-f'(a+(N-1)\Delta x)\Big] \\
&\quad +(\Delta x)\Big[f(a+(N-1)\Delta x)+f(a+N\Delta x)\Big] + \frac{(\Delta x)^2}{8}\Big[f'(a+(N-1)\Delta x)-f'(a+N\Delta x)\Big] \\
&= \quad \Delta x\Big[f(a)+2\sum_{j=1}^{N-1} f(a+j\Delta x)+f(b)\Big] + \frac{(\Delta x)^2}{8}\Big[f'(a)-f'(b)\Big]
\end{aligned}$$

□

(γ) Το σφάλμα του σύνθετου κανόνα είναι $\mathrm{O}(\Delta x)^k$, όπου $k = \ldots\ldots$. Αιτιολογήστε.

Απάντηση. Για κάθε επιμέρους ολοκλήρωμα έχουμε σφάλμα $\mathrm{O}(\Delta x)^5$ (σύμφωνα με το ερώτημα α). Συνολικά έχουμε N επιμέρους ολοκληρώματα, άρα το σφάλμα είναι $N \cdot \mathrm{O}(\Delta x)^5 = \frac{b-a}{\Delta x}\mathrm{O}(\Delta x)^5 = \mathrm{O}(\Delta x)^4$. Άρα $k = 4$. □

IV. Έστω το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$u''(x) + 3u'(x) - 2u(x) = f(x), \quad x \in [0,1]$$

$$u(0) = 2, \;\; u(1) = -1$$

Θα προσεγγίσουμε την άγνωστη u με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών. Για την προσέγγιση της $u'(x)$ χρησιμοποιήστε την **κεντρική** διαφορά. Χωρίζουμε το διάστημα [0, 1] σε N ($N = 16$) υποδιαστήματα μήκους $h = \frac{1}{N}$, ορίζοντας τα $N+1$ σημεία $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots N$. Δώστε τις εξισώσεις στην **τελική τους μορφή** που αντιστοιχούν στα x_i για $i = 1$ και $i = 10$.

Απάντηση. Αντικαθιστώντας τις παραγώγους με τις προσεγγίσεις τους, η εξίσωση στο τυχαίο σημείο x_j γράφεται:

$$\frac{U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}}{h^2} + 3\frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h} - 2U_j = f(x_j),$$

όπου U_j η προσέγγιση της άγνωστης τιμής $u(x_j)$. Κάνοντας απλές αλγεβρικές πράξεις παίρνουμε

$$(2-3h)U_{j-1} - 4(1+h^2)U_j + (2+3h)U_{j+1} = 2h^2 f(x_j),$$

Στο σημείο x_1, η εξίσωση γράφεται

$$(2-3h)U_0 - 4(1+h^2)U_1 + (2+3h)U_2 = 2h^2 f(x_1)$$

Όμως, $U_0 = u(0) = 2$ (συνοριακή τιμή) και η **τελική μορφή** της εξίσωσης είναι

$$-4(1+h^2)U_1 + (2+3h)U_2 = 2h^2 f(x_1) - 2(2-3h)$$

Στο σημείο x_{10}, η **τελική μορφή** της εξίσωσης είναι

$$(2-3h)U_9 - 4(1+h^2)U_{10} + (2+3h)U_{11} = 2h^2 f(x_9)$$

□