Ονοματεπώνυμο: .... Α.Μ.: ...... Έτος: ......

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ & ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΛΥΣΕΙΣ Ιουνίου 2006

I. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας δ.δ.

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & 1 & & & & & \\
 & & 10 & & & & \\
x_1 & 1 & & -7 & & & \\
 & & 3 & & 3 & & \\
x_2 & 4 & & -1 & & -1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 4 \\
x_3 & 5 & & 3 & & 2 & \\
 & & 7 & & 3 & & \\
x_3 & 5 & & 12 & & & \\
 & & 7 & & & & \\
x_3 & 5 & & & & &
\end{array}$$

(α) Πόσες και ποιες τιμές έχουν δοθεί για την άγνωστη f (π.χ. $f(x_1) = 3$, $f(x_2) = 5$);

ΛΥΣΗ Για την άγνωστη f έχουν δοθεί 6 τιμές: $f(x_1) = 1$, $f'(x_1) = 10 \cdot 1!$, $f(x_2) = 4$, $f(x_3) = 5$, $f'(x_3) = 7 \cdot 1!$ και $f''(x_3) = 12 \cdot 2! = 24$.

(β) Το μέγιστο σφάλμα προσέγγισης της f από το πολυώνυμο παρεμβολής p που προκύπτει από τον πίνακα δ.δ., ικανοποιεί την ανισότητα

$$||f - p||_\infty \leq c||f^{(k)}||_\infty h^m$$

όπου c σταθερά και $h = b - a$ το μικρότερο διάστημα που περιέχει τα σημεία x_1, x_2, x_3. Δώστε τις τιμές των k και m.

ΛΥΣΗ Έχουμε 6 τιμές, άρα το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι 5ου βαθμού. Το σφάλμα είναι μία τάξη μεγαλύτερο από το βαθμό του πολυωνύμου, συνεπώς $k = 6$ και $m = 6$.

(γ) Αν χρησιμοποιήσουμε το p του ερωτήματος (β) για την προσέγγιση της f'', τότε

$$||f'' - p''||_\infty \leq c||f^{(k)}||_\infty h^m$$

Δώστε τις τιμές των k και m.

ΛΥΣΗ Η f'' προσεγγίζεται από το p'' που είναι πολυώνυμο βαθμού 3. Άρα, $m = 4$ και εμπλέκεται η 4 παράγωγος της f'', δηλαδή η έκτη παράγωγος της f, άρα $k = 6$.

(δ) Αν χρησιμοποιήσουμε το p του ερωτήματος (β) για την προσέγγιση του $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, τότε

$$||\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b p(x)\mathrm{d}x||_\infty \leq c||f^{(k)}||_\infty h^m$$

Δώστε τις τιμές των k και m.

ΛΥΣΗ Αντίστοιχα με το παραπάνω ερώτημα, θα ισχύει $k = 6$ και $m = 7$.

(ε) Ποιο πολυώνυμο παρεμβάλλει την f στα σημεία x_1, x_2, x_3, x_3 ; Ποια η προσέγγιση της $f^{(3)}(x)$ σε αυτή την περίπτωση;

ΛΥΣΗ Το πολυώνυμο που παρεμβάλει την f στα σημεία x_1, x_2, x_3, x_3 δίνεται άμεσα από τον παρακάτω πίνακα δ.δ.

$$\begin{array}{ccccc}
x_1 & 1 & & & \\
 & & 3 & & \\
x_2 & 4 & & -1 & \\
 & & 1 & & 2 \\
x_3 & 5 & & 3 & \\
 & & 7 & & \\
x_3 & 5 & & &
\end{array}$$

που εξάγεται άμεσα από τον αρχικό πίνακα δ.δ. ΤΟ πολυώνυμο θα είναι το $p(x) = 1 + 3(x - x_1) - 1(x - x_1)(x - x_2) + 2(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Το p είναι πολυώνυμο βαθμού 3, άρα η προσέγγιση της $f^{(3)}(x)$ σε αυτή την περίπτωση θα ισούται με την δ.δ. τάξης 3 επί 3!, $f^{(3)}(x) \simeq 2 \cdot 3! = 12$.

II. Δίνεται ο παρακάτω κανόνας:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b - a)\Big[f(a) + f(b)\Big] + \frac{(b-a)^2}{8}\Big[f'(a) - f'(b)\Big]$$

(α) Το σφάλμα του κανόνα είναι $\mathrm{O}(b-a)^m$, όπου $m = \ldots\ldots$. Αιτιολογήστε.

ΛΥΣΗ Θα είναι $m = 5$ διότι χρησιμοποιούμε 4 τιμές της άγνωστης f και επείδη προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα της f (σύμφωνα και με το ερώτημα 1δς) η τάξη σφάλματος αυξάνει κατά 1.

(β) Χωρίζουμε το διάστημα $b-a$ σε N ίσα διαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{b-a}{N}$ και έστω ότι μας δίνονται οι τιμές και οι απαραίτητες παράγωγοι της f στους κόμβους x_i, όπου $i = 0, 1, \ldots, N$ ($x_0 = a$ και $x_N = b$). Δώστε το σύνθετο κανόνα.

(α) Το σφάλμα του κανόνα είναι $\mathrm{O}(b-a)^m$, όπου $m = \ldots\ldots$. Αιτιολογήστε.

ΛΥΣΗ Χωρίζουμε το διάστημα $b-a$ σε N ίσα διαστήματα, άρα:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+\Delta x} f(x)\mathrm{d}x + \ldots + \int_{a+(N-1)\Delta x}^{a+N\Delta x} f(x)\mathrm{d}x$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα σε κάθε ένα από τα επιμέρους ολοκληρώματα, κάνουμε τις απαραίτητες απαλοιφές και παίρνουμε το σύνθετο κανόνα:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Delta x\Big[f(a) + 2\sum_{j=1}^{N-1} f(a+j\Delta x) + f(b)\Big] + \frac{(\Delta x)^2}{8}\Big[f'(a) - f'(b)\Big]$$

(γ) Το σφάλμα του σύνθετου κανόνα είναι $\mathrm{O}(\Delta x)^k$, όπου $k = \ldots\ldots$. Αιτιολογήστε.

ΛΥΣΗ Για κάθε επιμέρους ολοκλήρωμα έχουμε σφάλμα $\mathrm{O}(\Delta x)^5$ (σύμφωνα με το ερώτημα α). Συνολικά έχουμε N επιμέρους ολοκληρώματα, άρα το σφάλμα είναι $N\mathrm{O}(\Delta x)^5 = \frac{b-a}{\Delta x}\mathrm{O}(\Delta x)^5 = \mathrm{O}(\Delta x)^4$. Άρα $k = 4$.

III. Έστω το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$u''(x) + 3u'(x) - 2u(x) = f(x), \quad x \in [0, 1]$$

$$u(0) = 2, \;\; u(1) = -1$$

Θα προσεγγίσουμε την άγνωστη u με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών. Για την προσέγγιση της $u'(x)$ χρησιμοποιήστε την κεντρική διαφορά. Χωρίζουμε το διάστημα [0, 1] σε N ($N = 16$) υποδιαστήματα μήκους $h = \frac{1}{N}$, ορίζοντας τα $N+1$ σημεία $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots N$. Δώστε τις εξισώσεις στην **τελική τους μορφή** που αντιστοιχούν στα x_i για $i = 1$ και $i = 10$.

ΛΥΣΗ Αντικαθιστώντας τις παραγώγους με τις προσεγγίσεις τους, η εξίσωση στο τυχαίο σημείο x_j γράφεται:

$$\frac{U_{j-1} - U_j + U_{j+1}}{h^2} + 3\frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h} - 2U_j = f(x_j),$$

όπου U_j η προσέγγιση της άγνωστης τιμής $u(x_j)$. Κάνοντας απλές αλγεβρικές πράξεις παίρνουμε

$$(2-3h)U_{j-1} - 2(1+h^2)U_j + (2+3h)U_{j+1} = 2h^2 f(x_j),$$

Στο σημείο x_1, η εξίσωση γράφεται

$$(2-3h)U_0 - 2(1+h^2)U_1 + (2+3h)U_2 = 2h^2 f(x_1)$$

Όμως, $U_0 = u(0) = 2$ (συνοριακή τιμή) και η **τελική μορφή** της εξίσωσης είναι

$$-2(1+h^2)U_1 + (2+3h)U_2 = 2h^2 f(x_1) - 2(2-3h)$$

Στο σημείο x_10, η **τελική μορφή** της εξίσωσης είναι

$$(2-3h)U_9 - 2(1+h^2)U_{10} + (2+3h)U_{11} = 2h^2 f(x_9)$$

IV. Έστω το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$u''(x) + 5u(x) = f(x), \quad x \in [0, 1]$$

$$u(0) = 1, \;\; u'(1) = -1$$

Θα προσεγγίσουμε την άγνωστη u χρησιμοποιώντας τμηματικά κυβικά πολυώνυμα.

1. Έστω $N = 64$. Ποια η διάσταση n (αριθμός αγνώστων) του προβλήματος;

   ΛΥΣΗ Έχουμε 2 αγνώστους (τιμή και παράγωγο) για κάθε ένα από τους $N-1$ εσσωτερικούς κόμβους και έναν άγνωστο για κάθε άκρο του διαστήματος. Συνολικά ο αριθμός των αγνώστων είναι $n = 2(N-1) + 2 = 2N$.

2. Δώστε τις τιμές των α, β, γ, δ στον 2×4 πίνακα K που θα προκύψει από τις δύο εξισώσεις στα σημεία Gauss στο τυχαίο διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, συναρτήσει των ϕ, ψ (και των κατάλληλων παραγώγων τους), του σ και του h.

   ΛΥΣΗ Από την εξίσωση προκύπτει ότι $\alpha = \phi''(\sigma) + 5h^2\phi(\sigma)$, $\beta = \psi''(\sigma) + 5h^2\psi(\sigma)$, $\gamma = \phi''(1-\sigma) + 5h^2\phi(1-\sigma)$, $\delta = \psi''(1-\sigma) + 5h^2\psi(1-\sigma)$.

3. Δώστε τις τιμές (συναρτήσει των α, β, γ, δ, f, h, σ) των στοιχείων $A(2,1)$, $A(20,21)$, $A(30,40)$, $A(128,127)$, $b(1)$, $b(127)$ του **τελικού** συστήματος $Ax = b$. \ **ΛΥΣΗ** Αφαιρόντας τις συνοριακές συνθήκες (*αφήνεται σαν άσκηση*) προκύπτει ότι $A(2,1) = \delta$, $A(20,21) = -\beta$, $A(30,40) = 0$, $A(128,127) = \beta$, $b(1) = h^2 f(a + h\sigma) - \alpha u(0)$, $b(127) = h^2 f(a + (N-1)h + h\sigma) + \delta h u'(1) = h^2 f(b - h(1-\sigma)) + \delta h u'(1)$.

4. Έστω τώρα ότι αλλάζουν οι συνοριακές συνθήκες και δίνονται οι τιμές $u'(0) = 4$ και $u(1) = 2$. Δώστε τις τιμές (συναρτήσει των α, β, γ, δ, f, h, σ) των στοιχείων $A(1,1)$, $A(19,19)$, $A(40,44)$, $A(127,128)$, $b(2)$, $b(128)$ του τελικού συστήματος .

   ΛΥΣΗ Αφαιρόντας τις νέες συνοριακές συνθήκες (*αφήνεται σαν άσκηση*) προκύπτει ότι $A(1,1) = \alpha$, $A(19,19) = \beta$, $A(40,44) = 0$, $A(127,128) = -\delta$, $b(2) = h^2 f(a + h(1-\sigma) - \delta h u'(0)$, $b(128) = h^2 f(a + (N-1)h + h(1-\sigma) - \alpha u(1) = h^2 f(b - h\sigma) - \alpha u(1)$.

V.

(α) Ποιες τιμές της f ή/και παραγώγων της θα εμφανίζονται στον τύπο για τη δ.δ. $[x-h, x, x, x+h]f$;

ΛΥΣΗ Η δ.δ. $[x-h, x, x, x+h]f$, με μια πρώτη ματιά, προκύπτει από τιμές της f σε 4 σημεία, τα $x-h$, x, x, $x+h$, δηλαδή τις τιμές $f(x-h)$, $f(x)$, $f'(x)$, $f(x+h)$. Αν, όμως, φτιάξουμε τον πίνακα δ.δ. θα δούμε ότι τελικά εμφανίζονται μόνο 3 τιμές, οι $f(x-h)$, $f'(x)$ και $f(x+h)$.

(β) Βρείτε τον τύπο της δ.δ. του ερωτήματος (α).

ΛΥΣΗ Φτιάχνουμε τον πίνακα δ.δ. και μετά από απλές αλγεβρικές πράξεις προκύπτει ότι

$$[x-h, x, x, x+h]f = \frac{f(x+h) - 2f'(x) - f(x-h)}{2h^3}$$

(γ) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β), δώστε την προσέγγιση στην $f^{(3)}(x)$.

ΛΥΣΗ Το πολυώνυμο που προκύπτει από τον πίνακα δ.δ. του ερωτήματος (β) είναι βαθμού 3, οπότε, κατά τα γνωστά, η προσέγγιση στην $f^{(3)}(x)$ θα ισούται με

$$f^{(3)}(x) = 3![x-h, x, x, x+h]f = 3\frac{f(x+h) - 2f'(x) - f(x-h)}{h^3}$$

(δ) Το μέγιστο σφάλμα στην προσέγγιση της παραγώγου του ερωτήματος (γ) αναμένεται να είναι $\mathrm{O}(h^k)$, όπου $k = \ldots\ldots$.

ΛΥΣΗ Το σφάλμα αναμένεται να είναι $\mathrm{O}(h^1)$, δηλαδή $k = 1$, σύμφωνα με τις αντίστοιχες απαντήσεις της άσκησης (I).

VI.

(α) Ποια είναι η ακολουθία Newton-Raphson για την προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας ενός θετικού αριθμού a;

ΛΥΣΗ Βλ. παράδειγμα βιβλίου.

(β) Βρείτε με την παραπάνω μέθοδο μια προσέγγιση της $\sqrt{7}$ με ακρίβεια 5 σημαντικών ψηφίων. Να γραφούν όλες οι ενδιάμεσες προσεγγίσεις και να δικαιολογηθεί το αποτέλεσμα.

ΛΥΣΗ $a = 7$, διαδοχικός υπολογισμός των x_k με έλεγχο πάνω στην ακρίβεια.

(γ) Ποια είναι η τάξη σύγκλισης της παραπάνω μεθόδου· Και ποια η μαθηματική της σημασία στην περίπτωση αυτή·

ΛΥΣΗ Τετραγωνική. Η ακολουθία $\frac{|e_n|}{|e_{n+1}|^2}$ συγκλίνει σε ένα αριθμό.

VII.

(α) Βρείτε το δείκτη κατάστασης του μητρώου $A = [1\ 1\ 0; 0\ 2\ 0; 0\ 1\ 3]$ (να γίνει χρήση της νόρμας 1). (ενδιάμεσες πράξεις στο πρόχειρο)

ΛΥΣΗ Εύρεση του αντιστρόφου και μετά $k(A) = ||A||||A^{-1}|| = 3,2988$

(β) Βρείτε με τη μέθοδο Gauss μια λύση για το σύστημα $Ax = [1\ -5\ 1]^T$, δουλεύοντας με α.κ.υ. 4 σημαντικών ψηφίων και στρογγύλευση.

ΛΥΣΗ Τριγωνοποίηση, εύρεση του U, πίσω αντικατάσταση.

(γ) Θεωρώντας μόνον σφάλματα στρογγύλευσης κατά τους υπολογισμούς, βρείτε φράγματα για το απόλυτο σφάλμα της λύσης του παραπάνω συστήματος.

ΛΥΣΗ Απλή εφαρμογή της διπλής ανισότητας του $k(A)$. Εύρεση residual.

(δ) Εξετάστε αν ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος, χωρίς να γίνει χρήση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

ΛΥΣΗ Εφαρμογή Θεωρήματος κύκλων Gerchgorin, από όπου προκύπτει $\lambda > 0$, άρα ο A είναι θετικά ορισμένος.

VIII.

(α) Θεωρούμε συστήματα της μορφής $Ax = b$, όπου $A = [1\ 6\ 0\ 0;\ 3\ 2\ -2\ 0;\ 0\ 9\ 3\ 4;\ 0\ 0\ 7\ 1]$ και b τυχαίο διάνυσμα. Να προταθεί, να διατυπωθεί τυπικά και να υπολογισθεί η πλέον αποδοτική διάσπαση για το μητρώο A.

ΛΥΣΗ Ο A είναι ταινιακός, άρα εφαρμόζουμε την αντίστοιχη διάσπαση. Τελική διατύπωση $A = LU$, με υπολογισμένα L και U.

(β) Έστω B ένας κάτω τριγωνικός πίνακας $n \times n$, με $B(i,i) = 1/(1+i)$, $i = 1, 2, \ldots n$. Να εξετάσετε αν η επαναληπτική μέθοδος $x_k = Bx_{k-1} + c$, $(c \in \mathbb{R}^n)$, συγκλίνει ή όχι.

ΛΥΣΗ Ο B είναι τριγωνικός πίνακας. Άρα οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία, δηλαδή $\lambda_i = 1/(1+i)$, $i = 1, \ldots, n$. Όμως, $1/(1+i) < 1$ αφού $i \geq 1$, οπότε η επαναληπτική μέθοδος $x_k = Bx_{k-1} + c$, $(c \in \mathbb{R}^n)$, συγκλίνει.