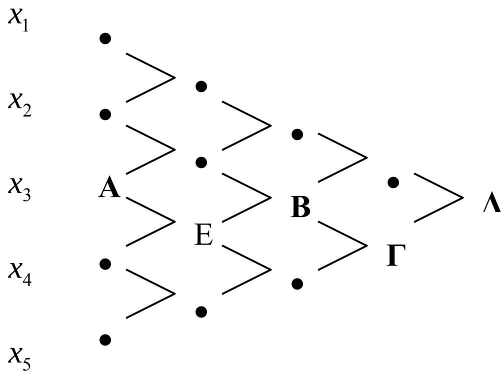
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ & ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

Λύσεις Θεμάτων Ιουνίου 2005

<u>ΘΕΜΑ Ι.</u>

1. Δίνονται πέντε πληροφορίες για την f βάσει των οποίων κατασκευάσθηκε ο διπλανός πίνακας δ.δ.



1.1 Δώστε τις τιμές των Α, Β, Γ, Δ σε μορφή διαιρεμένων διαφορών (π.χ. Ε=$\lceil x_3, x_4 \rceil f$).

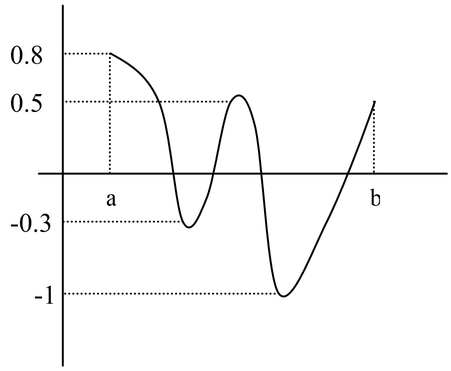
<u>Απάντηση:</u> $A = \lceil x_3 \rceil f$, $B = \lceil x_2, x_3, x_4 \rceil f$,

$\Gamma = \lceil x_2, x_3, x_4, x_5 \rceil f$, $\Delta = \lceil x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rceil f$

1.2 Η τιμή Γ του πίνακα είναι ο συντελεστής του x^k για το πολυώνυμο που παρεμβάλλει την f στα σημεία

<u>Απάντηση:</u> x_2 , x_3 , x_4 , x_5 και $k = 3$ + **αιτιολόγηση** (μόνοι σας!!)

2. Έχουν δοθεί $k+1$ πληροφορίες για την f στο διάστημα $[a,b]$ μέσω των οποίων η f έχει προσεγγισθεί με πολυώνυμο p_{k+1} (βαθμού k). Αν η παράγωγος $f^{(k+1)}$ της f έχει το διάγραμμα του σχήματος για $x \in [a,b]$, τότε:



2.1 Το μέγιστο σφάλμα προσέγγισης φράσσεται από την ποσότητα Γ, δηλαδή $\|f - p\|_\infty \le \Gamma$, όπου

<u>Απάντηση:</u>

Γ=$\dfrac{\left\| f^{(k+1)} \right\|}{(k+1)!} \left| (b-a)^{(k+1)} \right| \le \dfrac{1}{(k+1)!} \left| (b-a)^{(k+1)} \right|$, διότι η μέγιστη κατ'απόλυτο τιμή της $f^{(k+1)}$ στο $[a,b]$ είναι ίση με 1.

2.2 Με τα ίδια δεδομένα, $\|f'' - p''\|_\infty \le \Delta (b-a)^r$, όπου Δ σταθερός αριθμός και

<u>Απάντηση:</u> $r = k - 1$, διότι κάθε φορά που παραγωγίζω η τάξη του σφάλματος πέφτει κατά μία τάξη.

2.3 Με τα ίδια δεδομένα, $\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_{k+1}(x)dx \right| \le E(b-a)^r$, όπου Ε σταθερός αριθμός και

<u>Απάντηση:</u> $r = k + 2$, διότι κάθε φορά που ολοκληρώνω η τάξη του σφάλματος αυξάνεται κατά μία τάξη.

3. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.999 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3.1 Ο δείκτης κατάστασης του A (με χρήση της $\| \ \|_\infty$) είναι

<u>Απάντηση:</u> Είναι $k(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$, όπου $\|A\|_\infty = 2$, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} adj(A) =$

$\dfrac{1}{0.001} \begin{bmatrix} 1 & -0.999 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & -999 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix}$ και $\|A^{-1}\|_\infty = 2000$, άρα $k(A) = 4000$.

3.2 Θεωρώντας μόνο σφάλματα στρογγύλευσης, δώστε τη διπλή ανισότητα που συνδέει τα κατάλληλα **σχετικά** σφάλματα (για το υπόλειμμα και τη διαφορά μεταξύ της θεωρητικής και της υπολογισθείσας λύσης).

Απάντηση: $\frac{1}{k(A)}\|r\|_{\sigma\chi.} \le \|\varepsilon\|_{\sigma\chi.} \le k(A)\|r\|_{\sigma\chi.}$

4. Έστω ότι προσεγγίζεται η f με το πολυώνυμο p_8 στο [1, 3] χρησιμοποιώντας τις τιμές $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$, $f^{(3)}(1)$, $f(3)$, $f'(3)$, $f''(3)$ και $f^{(3)}(3)$.

4.1 Αν γνωρίζουμε ότι $f(x) = 3x^8 + 132x^4 + 1000$, ποιο είναι το φράγμα Β για το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης; Δώστε αριθμό.

Απάντηση: $B = \frac{\|f^{(8)}\|}{8!}|\Psi_8(x)| = \frac{\|3 \cdot 8!\|}{8!}\left|(x-1)^4(x-3)^4\right| = 3$ αφού $f^{(8)}(x) = 3 \cdot 8!$ και η συνάρτηση $\Psi_8(x) = (x-1)^4(x-3)^4$ είναι –κατά τα γνωστά- συμμετρική στο [1,3] και παίρνει απόλυτο μέγιστο στο μέσο του διαστήματος: $\Psi_8(2) = (2-1)^4(2-3)^4 = 1$.

4.2 Αν γνωρίζουμε ότι $f(x) = 6x^7 + 32x^5 + x^3 + 2x^2$, ποιο είναι το φράγμα Β για το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης; Γιατί;

Απάντηση: Το σφάλμα της προσέγγισης είναι 0 διότι προσεγγίζουμε ένα πολυώνυμο βαθμού **7** χρησιμοποιώντας **8** τιμές και –ως γνωστόν- δεν μπορούν να υπάρχουν δύο διαφορετικά πολυώνυμα βαθμού **n** που να συμφωνούν σε **n+1** σημεία!

ΘΕΜΑ ΙΙ. Δίνεται το σύστημα $Ax = b$, όπου $A = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 4 \\ 12 & 34 & 13 \\ 4 & 13 & 14 \end{bmatrix}$ και $b = \begin{bmatrix} 52 \\ 119 \\ 72 \end{bmatrix}$.

2.1 Ελέξτε αν μπορεί να εφαρμοστεί στον A διάσπαση Cholesky.

Απάντηση: Μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι η διάσπαση Cholesky θα επιτύχει αν ο πίνακας A είναι (α) συμμετρικός και (β) θετικά ορισμένος. Ο πίνακας A είναι συμμετρικός. Θέλουμε να ελέγξουμε αν είναι και θ.ο., ή -με άλλα λόγια- αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Gerschgorin παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την θετική ορισιμότητα του πίνακα. Μπορούμε όμως να δοκιμάζουμε τη διάσπαση Cholesky και να δούμε αν γίνεται –οπότε απαντάμε ναι.

2.2 Αν η απάντησή σας στο ερώτημα 2.1 είναι ΝΑΙ, τότε λύστε το σύστημα εφαρμόζοντας **συστηματικά** διάσπαση Cholesky. Διαφορετικά εφαρμόστε **συστηματικά** διάσπαση LU. Δώστε όλα τα ενδιάμεσα αποτελέσματα κατά τα βήματα της επίλυσης.

Απάντηση: Θα εφαρμόσουμε **συστηματικά** διάσπαση Cholesky (η LU εφαρμόζεται με παρόμοιο τρόπο):

$$A = LL^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 16 & 12 & 4 \\ 12 & 34 & 13 \\ 4 & 13 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 16 & 12 & 4 \\ 12 & 34 & 13 \\ 4 & 13 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{31}l_{11} & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix}$$ και εξισώνοντας τα στοιχεία βρίσκουμε ότι

$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Κατά τα γνωστά έχουμε $Ax = b \Rightarrow LL^T x = b$, θέτουμε $L^T x = y$ και λύνουμε με μπρος και πίσω αντικατάσταση –αντίστοιχα- τα συστήματα $Ly = b$ και $L^T x = y$:

$$Ly=b \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 \\ 119 \\ 72 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ 9 \end{bmatrix}$$

και

$$L^T x = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

ΘΕΜΑ ΙΙΙ. Δίνονται έξι πειραματικές μετρήσεις (t_1, f_1), (t_2, f_2), (t_3, f_3), (t_4, f_4), (t_5, f_5), (t_6, f_6). Γνωρίζουμε ότι η f είναι παραβολή και έστω $f(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων στο σύστημα $Ac = b$ που προκύπτει από τα δεδομένα παίρνουμε τις κανονικές εξισώσεις $Bc = d$. Δώστε τα στοιχεία $B(1,1)$, $B(3,2)$, $d(1)$, $d(3)$ συναρτήσει των t_i, f_i ($i = 1,2,3,4,5,6$).

Απάντηση: Στο αρχικό σύστημα $Ac = b$ που προκύπτει από τα δεδομένα εφαρμόζουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και έχουμε:

$$A^T Ac = A^T b \Rightarrow A^T \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_4 & t_4^2 \\ 1 & t_5 & t_5^2 \\ 1 & t_6 & t_6^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & \sum_1^6 t_i & \sum_1^6 t_i^2 \\ \sum_1^6 t_i & \sum_1^6 t_i^2 & \sum_1^6 t_i^3 \\ \sum_1^6 t_i^2 & \sum_1^6 t_i^3 & \sum_1^6 t_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1^6 f_i \\ \sum_1^6 f_i t_i \\ \sum_1^6 f_i t_i^2 \end{bmatrix}$$

.

Άρα, $B(1,1) = 6$, $B(3,2) = \sum_1^6 t_i^3$, $d(1) = \sum_1^6 f_i$, $d(3) = \sum_1^6 f_i t_i^2$.

ΘΕΜΑ ΙV. Δίνεται ο κανόνας

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)[f(a) + f(b)] + \frac{(b-a)^2}{6}[f'(a) - f'(b)].$$

1. Το σφάλμα του κανόνα είναι $O(b-a)^m$, όπου

Απάντηση: $m = 5$, διότι προσεγγίζουμε με τέσσερις τιμές (τιμές και παράγωγοι στα άκρα) – οπότε έχουμε τάξη σφάλματος 4- και ολοκληρώνοντας η τάξη αυξάνεται κατά μία μονάδα.

2. Χωρίζουμε το διάστημα (a,b) σε N ίσα διαστήματα μήκους $h = \dfrac{b-a}{N}$ και έστω ότι μας δίνονται οι τιμές της f στους κόμβους x_i, όπου $i = 0,1,...,N$ ($x_0 = a$ και $x_N = b$). Δώστε το σύνθετο κανόνα.

Απάντηση: Ο σύνθετος κανόνας δίνεται από:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \left[h[f(a+ih) + f(a+(i+1)h)] + \frac{h^2}{6}[f'(a+ih) - f'(a+(i+1)h)] \right]$$

$$= ... = h[f(a) + 2\sum_{i=0}^{N-1} f(a+ih) + f(b)] + \frac{h^2}{6}[f'(a) - f'(b)]$$

3. Το σφάλμα του σύνθετου κανόνα είναι $O(h)^k$, όπου

Απάντηση: $k = 4$. Εφόσον για κάθε επιμέρους ολοκλήρωμα έχουμε σφάλμα τάξης $O(h)^5$ (από ερώτημα 1), συνολικά θα έχουμε σφάλμα $N \cdot O(h)^5 = \dfrac{b-a}{h} \cdot O(h)^5 = O(h)^4$.

<u>ΘΕΜΑ V.</u> Έστω το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών συνθηκών:

$$u''(x) + 2u'(x) - 4u(x) = f(x), \quad x \in [0,1]$$

$$u(0) = 1, \; u(1) = 5$$

Θα προσεγγίσουμε την άγνωστη u με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών. Για την προσέγγιση της $u'(x)$ χρησιμοποιήστε την κεντρική διαφορά. Χωρίζουμε το διάστημα [0, 1] σε N ($N = 20$) υποδιαστήματα μήκους $h = 1/N$, ορίζοντας τα $N+1$ σημεία $x_i = ih$, $i = 0,...,N$. Δώστε τις εξισώσεις στην **τελική τους μορφή** που αντιστοιχούν στα x_i για $i = 1$ και $i = 10$.

<u>Απάντηση:</u> Στο τυχαίο σημείο x_i η εξίσωση γράφεται:

$$u''(x_i) + 2u'(x_i) - 4u(x_i) = f(x_i) \Rightarrow \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2} + 2\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} - 4u(x_i) =$$

$$= f(x_i) \Rightarrow (1-h)u(x_{i-1}) - (2+4h^2)u(x_i) + (1+h)u(x_{i+1}) = h^2 f(x_i)$$

Για $i = 1$ έχουμε

$(1-h)u(x_0) - (2+4h^2)u(x_1) + (1+h)u(x_2) = h^2 f(x_1)$ και μεταφέροντας τους γνωστούς στο δεξί μέλος η **τελική** εξίσωση είναι: $-(2+4h^2)u(x_1) + (1+h)u(x_2) = h^2 f(x_1) - 1 + h$.

Για $i = 10$ έχουμε

$(1-h)u(x_9) - (2+4h^2)u(x_{10}) + (1+h)u(x_{11}) = h^2 f(x_{10})$.

<u>ΘΕΜΑ VI.</u> Έστω το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών συνθηκών:

$$u''(x) + 3u(x) = f(x), \; x \in (0,1)$$

$$u(0) = -4, \; u(1) = 3$$

Θα προσεγγίσουμε την άγνωστη u χρησιμοποιώντας τμηματικά κυβικά πολυώνυμα.

1. Έστω $N = 32$. Ποια η διάσταση n (=αριθμός αγνώστων) του προβλήματος;
2. Δώστε τις τιμές των α, β, γ, δ στον 2x4 πίνακα K που θα προκύψει από τις δύο εξισώσεις στα σημεία Gauss στο τυχαίο διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, συναρτήσει των ϕ, ψ (και των κατάλληλων παραγώγων τους), του σ και του h.
3. Δώστε τις τιμές (συναρτήσει των α, β, γ, δ) των στοιχείων $A(2,1)$, $A(40,40)$, $A(10,60)$, $A(n-1,n)$, $b(1)$, $b(n)$ του **τελικού** συστήματος $Au = b$.
4. Έστω τώρα ότι αλλάζουν οι συνοριακές συνθήκες και δίνονται οι τιμές $u'(0) = 2$ και $u'(2) = 0$. Δώστε τις τιμές (συναρτήσει των α, β, γ, δ) των στοιχείων $A(1,1)$, $A(n,n)$, $b(2)$, $b(n-1)$ του **τελικού** συστήματος $Au = b$.

<u>Αυτή η άσκηση αφήνεται για να τη λύσετε μόνοι σας!!!!</u>

Καλή επιτυχία!!!!