Τμηματικές Εξετάσεις στην Αριθμητική Ανάλυση & Περιβ. Υλοποίησης
Περιόδου Ιουνίου 2004 - 29/6/2004

Ονοματεπώνυμο:..……………………………………………………………………
Α.Μ. : ………………………………………….. **Έτος**: ………………………………..

Οι τυπικές απαντήσεις μόνο πάνω στο παρόν! Ο ελεύθερος χώρος έχει σχεδιασθεί ώστε να επαρκεί. Σε αντίθετη περίπτωση χρησιμοποιείστε το ***πίσω μέρος*** με σαφείς παραπομπές. Η κόλλα αναφοράς χρησιμεύει **μόνον** σαν πρόχειρο όπου υποχρεωτικά καταχωρούνται οι πράξεις. **Μην τη χρησιμοποιείτε σαν παραπομπή!**

1. α) Δίνεται ο πίνακας A=[5 3 0;3 4 0;0 0 -15]. Χωρίς να αποπειραθείτε να προσεγγίσετε/υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του, διαπιστώσατε αν έχει πραγματική ιδιοτιμή μεγαλύτερη του 13. Αιτιολογήστε.

β) Τώρα δίνεται ο πίνακας B=[12 3 1;3 14 2;4 4 -15]. Γιατί ο B δεν μπορεί να έχει μηδενική ιδιοτιμή;

γ) Κατασκευάστε ένα συμμετρικό πίνακα διάστασης $n \times n$ του οποίου όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές.

2. Να λυθεί το σύστημα $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 3 & 3 \\ 6 & -5 & -19 & 7 \end{array}\right]$ εφαρμόζοντας συστηματικά διάσπαση LU (τα βήματα στο πρόχειρο).

$$L = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}$$

3. Δίνονται τέσσερις πειραματικές μετρήσεις (t_1, f_1), (t_2, f_2), (t_3, f_3), (t_4, f_4). Γνωρίζουμε ότι η f είναι ευθεία και έστω $f(t) = c_1 + c_2 t$. Εφαρμόστε τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων στο σύστημα $Ac = b$ που προκύπτει από τα δεδομένα και δώστε τις κανονικές εξισώσεις $Bc = d$ συναρτήσει των c_j, t_i, f_i ($j = 1,2$, $i = 1,2,3,4$).

$$B = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}$$

4. Έστω ότι προσεγγίζεται η f με το πολυώνυμο p_8 στο [1, 3] χρησιμοποιώντας τις τιμές $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$, $f^{(3)}(1)$, $f(3)$, $f'(3)$, $f''(3)$ και $f^{(3)}(3)$.

α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(x) = 2x^8 + 132x^4 + 1000$, ποιο είναι φράγμα Β για το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης; Δώστε αριθμό.

B=..

β) Έστω τώρα ότι $f(x) = 6x^7 + 32x^5 + x^3 + 2x^2$. Ποιο είναι φράγμα Β για το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης; Γιατί;

B=.............................., διότι

5. Να λυθεί το πρόβλημα της παρεμβολής με τις συνθήκες $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, $f''(1) = 8$, $f(2) = 2$ και $f'(2) = 3$.

Ο πίνακας διαιρεμένων διαφορών είναι:

Το πολυώνυμο προσέγγισης είναι το:

$p_5(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

6. Να βρεθεί προσέγγιση στην τιμή $f''(x)$ με χρήση των τιμών $f(x-4\Delta x)$, $f(x-2\Delta x)$, $f(x)$, $f(x+2\Delta x)$ και $f(x+4\Delta x)$.

$f''(x) \approx$ ....

Το σφάλμα είναι $O(\Delta x)^n$, όπου $n = \ldots\ldots\ldots$

7. Δίνεται ο 2×2 πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2,001\end{bmatrix}$. Έστω το σύστημα $Ax=b$. Θεωρούμε ότι έχουμε μόνο σφάλμα στρογγύλευσης ε και έστω r το «υπόλειμμα».

α) Υπολογίστε το δείκτη κατάστασης του A. Χρησιμοποιήστε για μέγεθος την $\| \ \|_\infty$ (για απλότητα γράφουμε $\| \ \|$).

$k(A)=$ ……...

β) Δίνεται $\|r\|=0.01$. Δώστε ένα άνω φράγμα για το $\|\varepsilon\|$.

$\|\varepsilon\|\le$ ……………

γ) Δίνεται $\|\varepsilon\|=0.008$. Δώστε ένα άνω φράγμα για το $\|r\|$.

$\|r\|\le$ ……………

δ) Δώστε τη σχέση ανισότητας που συνδέει τα σχετικά σφάλματα $\|\varepsilon\|_{\sigma\chi}$ και $\|r\|_{\sigma\chi}$.

8. α) Δίνονται δύο διπλά σημεία: 1 και 2. Βρίσκουμε το πολυώνυμο παρεμβολής $p_4(x)$ στο $[1,2]$. Τι από τα παρακάτω ισχύει (Σωστό/Λάθος);

I. $p_4'(2)=f'(2)$, Σ/Λ:.......
II. $p_4''(1)=f''(1)$, Σ/Λ:.......
III. $p_4^{(3)}(x)=f^{(3)}(x)$ για κάθε $x\in(1,2)$, Σ/Λ:.......

β) Τώρα δίνεται ένα τετραπλό σημείο: το 1.

I. $p_4'(1)=f(1)$, Σ/Λ:.......
II. $p_4''(1)=f''(1)$, Σ/Λ:.......
III. $p_4^{(3)}(1)=f^{(3)}(1)$, Σ/Λ:.......

γ) Αιτιολογήστε (σύντομα!) τη σχέση $\underbrace{\left[\tau,\tau,\ldots,\tau\right]}_{n+1} f=\dfrac{f^{(n)}(\tau)}{n!}$.

9. Έστω το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών συνθηκών:

$$u''(x)+u'(x)-2u(x)=-4x^4+2x^3-x^2,\quad x\in[0,1]$$
$$u(0)=1,\ u(1)=5$$

Θα προσεγγίσουμε την άγνωστη u με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών. Για την προσέγγιση της $u'(x)$ χρησιμοποιήστε την κεντρική διαφορά. Χωρίζουμε το διάστημα [0, 1] σε N ($N > 10$) υποδιαστήματα μήκους $h = 1/N$, ορίζοντας τα $N+1$ σημεία $x_i = ih$, $i = 0,...,N$. Ποια είναι η εξίσωση (τελική μορφή εξισώσεων που οδηγούν στο γνωστό σύστημα $Au = b$) που αντιστοιχεί στο x_i για:

α) $i = 1$:

β) $i = 10$:

10. Έστω το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών συνθηκών:

$$u''(x) - 7u(x) = x^2 - 3x + 4\,,\ x \in (1,2)$$
$$u(1) = 4\,,\ u(2) = 6$$

Θα προσεγγίσουμε την άγνωστη u χρησιμοποιώντας τμηματικά κυβικά πολυώνυμα.

α) Έστω $N = 32$. Ποια η διάσταση n (=αριθμός αγνώστων) του προβλήματος;

$n =$ ....

β) Δώστε τις τιμές α, β, γ, δ στον 2X4 πίνακα K που θα προκύψει από τις δύο εξισώσεις στα σημεία Gauss στο τυχαίο διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, συναρτήσει των ϕ, ψ και h.

$$K = \begin{bmatrix} \cdots & ... & ... & ... \\ \cdots & ... & ... & ... \end{bmatrix}$$

όπου α =……...............…….., β =…….........……., γ =……..........……, δ =………..........…

γ) Ποιες οι τιμές (συναρτήσει των α, β, γ, δ) για τα παρακάτω στοιχεία του συντελεστή πίνακα A του τελικού συστήματος $Au = b$ (αφού έχετε μεταφέρει τις συνοριακές συνθήκες στο δεξί μέλος):

$A(2,1) = \dots\dots\dots$	$A(40,40) = \dots\dots\dots$	$A(10,60) = \dots\dots\dots$	$A(n-1,n) = \dots\dots\dots$

δ) Για το δεξί μέλος b, ποιες οι τιμές:

$b(1) = \dots\dots\dots$	$b(n) = \dots\dots\dots$

Έστω τώρα ότι αλλάζουν οι συνοριακές συνθήκες και δίνονται οι τιμές $u'(1) = 2$ και $u'(2) = 4$:

ε) Ποιες οι τιμές (συναρτήσει των α, β, γ, δ) για τα παρακάτω στοιχεία του συντελεστή πίνακα A του τελικού* συστήματος $Au = b$:

$A(1,1) = \dots$............	$A(n,n) = \dots$.......

στ) Για το δεξί μέλος b, ποιες οι τιμές:

$b(2) = \dots$.........	$b(n-1) = \dots$........

Καλή επιτυχία!!!!