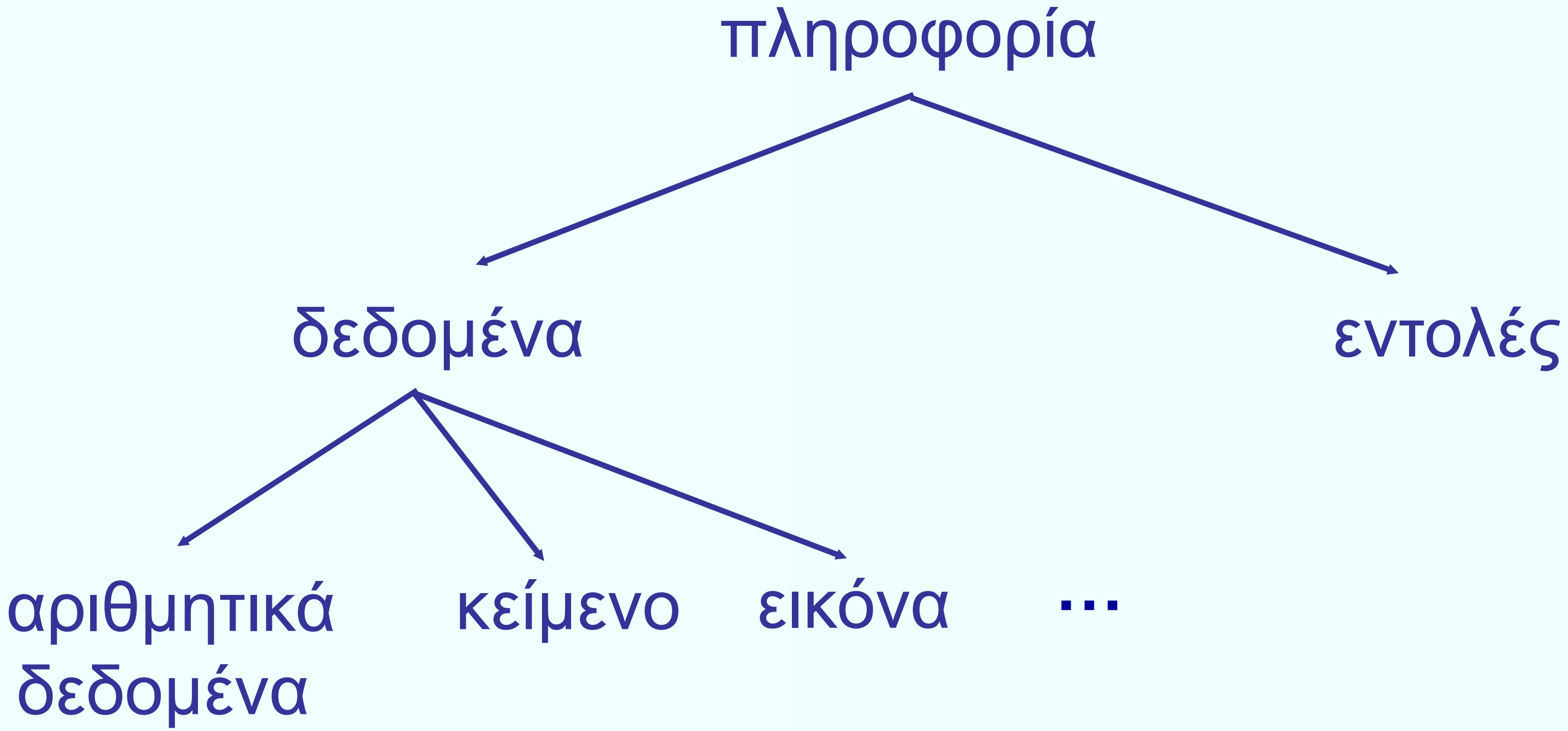
ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Κεφάλαιο 2

Οργάνωση και διαχείριση της Πληροφορίας στον Υπολογιστή

Δεδομένα και Εντολές



Επιλογή Αναπαράστασης Αριθμών

- Τα είδη των αριθμών που θα πρέπει να μπορούν να παρασταθούν, π.χ. ακέραιοι ή και πραγματικοί αριθμοί
- Τα μεγέθη των αριθμών που θα μπορούν να παρασταθούν
- Η ακρίβεια με την οποία θα μπορούν να παρασταθούν οι αριθμοί
- Το κόστος υλοποίησης αυτών των παραστάσεων

Αναπαράσταση Αριθμών στον Υπολογιστή

- Αναπαράσταση σταθερής υποδιαστολής (fixed point representation)
- Αναπαράσταση κινητής υποδιαστολής (floating point representation)

Αναπαράσταση σταθερής υποδιαστολής

Θετικός αριθμός σε παράσταση σταθερής υποδιαστολής και σε σύστημα αρίθμησης με βάση το β :

$$\alpha_{\nu\text{-}1}\alpha_{\nu\text{-}2}\ \ldots\ \alpha_1\alpha_0, \quad \text{με } \alpha_{\nu\text{-}1}, \alpha_{\nu\text{-}2}, \ldots, \alpha_0 < \beta$$

Που είναι η υποδιαστολή;

Ακέραιοι αριθμοί

$$\alpha_{\nu\text{-}1}\alpha_{\nu\text{-}2} \ldots \alpha_1\alpha_0$$

Υποδιαστολή δεξιά του λιγότερο σημαντικού ψηφίου α_0

↓

Ελάχιστος αριθμός: 0

Μικρότερος μη μηδενικός: 1

Παράσταση μέγιστου αριθμού:

$$(\beta\text{-}1)\beta^{\nu\text{-}1} + \ldots + (\beta\text{-}1)\beta^1 + (\beta\text{-}1)\beta^0$$

Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός;

Ακέραιοι αριθμοί

$$(\beta\text{-}1)\beta^{\nu-1} + \ldots + (\beta\text{-}1)\beta^{1} + (\beta\text{-}1)\beta^{0}$$

άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου $\Sigma = (\alpha_\nu \omega - \alpha_1)/(\omega - 1)$

με $\omega = \beta$, $\alpha_1 = (\beta\text{-}1)\beta^0$ και $\alpha_\nu = (\beta\text{-}1)\beta^{\nu-1}$

→ μέγιστος αριθμός: $\beta^\nu - 1$

Οι αριθμοί που μπορούν να παρασταθούν είναι ακέραιοι και βρίσκονται στην περιοχή:

$$0 \leq N \leq \beta^\nu - 1$$

Κλασματικοί αριθμοί

$$\alpha_{\nu\text{-}1}\alpha_{\nu\text{-}2}\ \ldots\ \alpha_1\alpha_0$$

Υποδιαστολή πριν το πιο σημαντικό ψηφίο, $\alpha_{\nu\text{-}1}$:

↓

Οι αριθμοί που μπορούν να παρασταθούν είναι κλασματικοί

Κλασματικοί αριθμοί

$$\alpha_{\nu-1}\alpha_{\nu-2}\ \dots\ \alpha_1\alpha_0$$

Υποδιαστολή πριν το πιο σημαντικό ψηφίο, $\alpha_{\nu-1}$:

↓

Ελάχιστος αριθμός: 0

Μικρότερος μη μηδενικός αριθμός:

$$\beta^{-\nu}$$

Παράσταση μέγιστου αριθμού:

$$(\beta-1)\beta^{-1} + (\beta-1)\beta^{-2} + \dots +(\beta-1)\beta^{-\nu}$$

Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός;

Κλασματικοί αριθμοί

$$(\beta-1)\beta^{-1} + (\beta-1)\beta^{-2} + \ldots +(\beta-1)\beta^{-\nu}$$

άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου $\Sigma = (\alpha_\nu\, \omega - \alpha_1)/\ \omega-1$

με $\omega = 1/\beta$, $\alpha_1 = (\beta-1)\ \beta^{-1}$ και $\alpha_\nu = (\beta-1)\ \beta^{-\nu}$

→ μέγιστος αριθμός: $1-\beta^{-\nu}$

Οι αριθμοί που μπορούν να παρασταθούν είναι κλασματικοί και βρίσκονται στην περιοχή:

$$0 \le N \le 1-\beta^{-\nu}$$

Ακέραιο και κλασματικό μέρος

$$\alpha_{\nu\text{-}1}\alpha_{\nu\text{-}2}\ldots\alpha_{\lambda+1}\,\alpha_{\lambda}\ldots\alpha_{1}\alpha_{0}$$

Δεκαδικό σημείο αριστερά του ψηφίου α_λ, με $0 \leq \lambda \leq \nu\text{-}1$

Οι αριθμοί που μπορούν να παρασταθούν βρίσκονται στην περιοχή:

$$0 \leq N \leq \beta^{\nu-(\lambda+1)}-\beta^{-(\lambda+1)}$$

Ελάχιστος μη μηδενικός αριθμός: $\beta^{-(\lambda+1)}$

Αναπαράσταση σταθερής υποδιαστολής
Επίδραση της θέσης της υποδιαστολής

	Ακέραιοι αριθμοί των 4 δυαδικών ψηφίων	Αριθμοί με 3 ακέραια δυαδικά ψηφία και 1 κλασματικό	Αριθμοί με 2 ακέραια δυαδικά ψηφία και 2 κλασματικά	Κλασματικοί αριθμοί των 4 δυαδικών ψηφίων
Αναπαράσταση μέγιστης τιμής	1111	111,1	11,11	0,1111
Μέγιστη τιμή στο δεκαδικό	15	7,5	3,75	0,9375
αναπαράσταση του μικρότερου μη μηδενικού αριθμού	0001	000,1	00,01	0,0001
τιμή του μικρότερου μη μηδενικού αριθμού στο δεκαδικό	1	0,5	0,25	0,0625

Αναπαράσταση σταθερής υποδιαστολής

Οι αριθμοί που μπορούν να παρασταθούν είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι στην περιοχή των αριθμών που μπορούν να παρασταθούν

Αναπαράσταση Αριθμών στον Υπολογιστή

Είναι δυνατόν όλοι οι αριθμοί να παρασταθούν ακριβώς εντός του υπολογιστή;

Περικοπή και στρογγυλοποίηση

Περικοπή (truncation)

» Σφάλματα περικοπής

Στρογγυλοποίηση (rounding)

» Σφάλματα στρογγυλοποίησης (round-off errors)

Περικοπή και στρογγυλοποίηση

Έχει νόημα η περικοπή και η στρογγυλοποίηση στην περίπτωση ακέραιων αριθμών;

Σφάλματα στρογγυλοποίησης

Αριθμητική πολλαπλής ακρίβειας

Δύο θέματα προς συζήτηση

- Μη δυαδικό αριθμητικό σύστημα
- Αναπαράσταση αρνητικών αριθμών

Αριθμητικά Συστήματα

- Δυαδικό αριθμητικό σύστημα
- Οκταδικό αριθμητικό σύστημα
- Δεκαεξαδικό αριθμητικό σύστημα
- Δεκαδικό αριθμητικό σύστημα

Δεκαδικοί αριθμοί

Κωδικοποίηση μέσω του δυαδικού

- Δυαδικά κωδικοποιημένοι δεκαδικοί αριθμοί (Binary Coded Decimal, BCD)

Δυαδική αναπαράσταση των δεκαδικών ψηφίων από 0 έως και 9

Δεκαδικό ψηφίο	Δυαδική παράσταση
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Δυαδικά κωδικοποιημένοι δεκαδικοί αριθμοί, BCD

- **Πλεονεκτήματα**

  Εύκολη μετατροπή από το δεκαδικό σε BCD και αντίστροφα

- **Μειονεκτήματα**

  απαιτούνται:

  ✓ περισσότερα δυαδικά ψηφία για την αναπαράσταση του ίδιου πλήθους αριθμών

  ✓ ειδικά κυκλώματα εκτέλεσης πράξεων ή διόρθωση αποτελεσμάτων με εκτέλεση εντολών

Πράξεις μεταξύ αριθμών σε BCD μορφή

- εντολές μετατροπής από BCD σε δυαδικό
- εντολές για επεξεργασία δεδομένων σε BCD μορφή
  - Υλοποίηση με ειδικά κυκλώματα
  - Υλοποίηση με κυκλώματα για δυαδικούς αριθμούς

Προσθέτοντας BCD αριθμούς ως δυαδικούς

	0 0 1 0	1 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 1	→	2809
+	0 0 0 1	0 1 1 1	0 0 1 0	1 0 0 1	→	1729

----

	0 0 1 1	1 1 1 1	0 0 1 1	0 0 1 0	→	; BCD

Πρόσθεση BCD αριθμών ως δυαδικών και διόρθωση αποτελέσματος

	0 0 1 0	1 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 1	→	2809
πρόσθ	+ 0 0 0 1	0 1 1 1	0 0 1 0	1 0 0 1	→	1729
	----------	----------	----------	----------		
	0 0 1 1	1 1 1 1	0 0 1 1	0 0 1 0	→	; BCD
διόρθ	+ 0 0 0 0	0 1 1 0	0 0 0 0	0 1 1 0		
	----------	----------	----------	----------		
	0 1 0 0	0 1 0 1	0 0 1 1	1 0 0 0	→	4538

Αναπαράσταση θετικών και αρνητικών αριθμών

Προσημασμένοι αριθμοί
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Αναπαράσταση με Πόλωση

Προσημασμένοι αριθμοί	Αναπαράσταση με πόλωση
-7	0000
-6	0001
-5	0010
-4	0011
-3	0100
-2	0101
-1	0110
0	0111
1	1000
2	1001
3	1010
4	1011
5	1100
6	1101
7	1110
8	1111

Αναπαράσταση με Πόλωση

- Βάση αριθμητικού συστήματος $\beta=2^{\tau}$
- Χρησιμοποιούμε ν δυαδικά ψηφία
- Πόλωση $\Pi=\beta^{\nu-1}-1$

➔ το πιο σημαντικό δυαδικό ψηφίο της παράστασης δηλώνει το πρόσημο του αριθμού

1: θετικός αριθμός

0: αρνητικός αριθμός

Αναπαράσταση με Πόλωση

- Πρόσθεση
- Αφαίρεση
- Πολλαπλασιασμού
- Διαίρεσης

Αναπαράσταση θετικών και αρνητικών αριθμών

- Αναπαράσταση προσημασμένου μεγέθους (sign-magnitude representation)
- Αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς μειωμένη βάση ή αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς β-1 (diminished - radix complement representation)
- Αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς βάση ή αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς β (radix complement representation)

Αναπαράσταση θετικών και αρνητικών αριθμών

- Αναγνώριση θετικών και αρνητικών αριθμών

Αναπαράσταση θετικών και αρνητικών αριθμών

$$N_{(\beta)} = \alpha_{v\text{-}1}\ \alpha_{v\text{-}2}\alpha_{v\text{-}3}\ \ldots\ \alpha_1\alpha_0,$$

- $\alpha_{v\text{-}1} < \beta/2 \Rightarrow$ θετικός αριθμός
- $\alpha_{v\text{-}1} \geq \beta/2 \Rightarrow$ αρνητικός αριθμός

Αναπαράσταση θετικών και αρνητικών αριθμών

Βάση αριθμητικού συστήματος $\beta=2^{\tau}$

- $\alpha_{\nu\text{-}1} = 0 \;\Rightarrow$ θετικός αριθμός
- $\alpha_{\nu\text{-}1} = 1 \;\Rightarrow$ αρνητικός αριθμός

Αναπαράσταση θετικών και αρνητικών αριθμών I

Αναπαράσταση προσημασμένου μεγέθους (sign-magnitude representation)

$N_{(\beta)} = \alpha_{\nu\text{-}1}\ \alpha_{\nu\text{-}2}\alpha_{\nu\text{-}3}\ \ldots\ \alpha_1\alpha_0,$

- $\alpha_{\nu\text{-}1} < \beta/2 \Rightarrow$ θετικός αριθμός
- $\alpha_{\nu\text{-}1} \geq \beta/2 \Rightarrow$ αρνητικός αριθμός
  - $|N_{(\beta)}| = \alpha_{\nu\text{-}1}\ \alpha_{\nu\text{-}2}\alpha_{\nu\text{-}3}\ \ldots\ \alpha_1\alpha_0 - (\beta/2)00\ldots0$

Αναπαράσταση θετικών και αρνητικών αριθμών I

Η πρόσθεση αριθμών σε παράσταση προσημασμένου μεγέθους απαιτεί:

- τη σύγκριση των προσήμων,
  εάν έχουν διαφορετικά πρόσημα:
  - Σύγκριση μεγεθών

Αναπαράσταση θετικών και αρνητικών αριθμών II

Αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς μειωμένη βάση ή αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς β-1 (diminished - radix complement representation)

$$N_{(\beta)} = \alpha_{\nu\text{-}1}\ \alpha_{\nu\text{-}2}\alpha_{\nu\text{-}3}\ \ldots\ \alpha_1\alpha_0,$$

$$\alpha_{\nu\text{-}1} \geq \beta/2 \ \Rightarrow \text{αρνητικός αριθμός} \Rightarrow$$

$$|N_{(\beta)}| = \bar{\alpha}_{\nu-1}\ \bar{\alpha}_{\nu-2}\bar{\alpha}_{\nu-3}\ \ldots \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_0,$$

όπου $\bar{\alpha}_\lambda = (\beta\text{-}1) - \alpha_\lambda$ για $0 \leq \lambda \leq \nu\text{-}1$

Αναπαράσταση θετικών και αρνητικών αριθμών

Αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς βάση ή αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς β (radix complement representation)

$$N_{(\beta)} = \alpha_{\nu\text{-}1}\ \alpha_{\nu\text{-}2}\alpha_{\nu\text{-}3}\ \ldots\ \alpha_1\alpha_0,$$

$\alpha_{\nu\text{-}1} \geq \beta/2 \ \Rightarrow$ αρνητικός αριθμός $\Rightarrow$

$$|N_{(\beta)}| = \ \bar{\alpha}_{\nu-1}\ \bar{\alpha}_{\nu-2}\bar{\alpha}_{\nu-3}\ \ldots\ \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_0 + [1]$$

όπου $\bar{\alpha}_\lambda = (\beta\text{-}1) - \alpha_\lambda$ για $0 \leq \lambda \leq \nu\text{-}1$

Αναπαράσταση θετικών και αρνητικών αριθμών

Αν σας δώσω ένα δεκαδικό αριθμό με πρόσημο και σας ζητήσω να τον γράψετε στο δυαδικό σε

- ✓ αναπαράσταση προσημασμένου μεγέθους
- ✓ αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς 1 και
- ✓ αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς 2

όλες οι παραστάσεις θα είναι οι ίδιες ;

Αναπαράσταση θετικών και αρνητικών αριθμών

Σύγκριση αθροιστών για αριθμούς σε

- ✓ αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς 1 και
- ✓ αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς 2

Περιοχές ακεραίων και αναπαραστάσεις του μηδενός για δυαδική αριθμητική

Σύστημα Αναπαράστασης Προσημασμένων Αριθμών	Περιοχή Ακεραίων	Παραστάσεις Μηδενός
Προσημασμένου μεγέθους	$-(2^{v-1} - 1) \leq A \leq 2^{v-1} - 1$ $111\ldots1 \leq A \leq 011\ldots1$	00…0 και 100…0
Συμπληρώματος ως προς 1	$-(2^{v-1} - 1) \leq A \leq 2^{v-1} - 1$ $100\ldots0 \leq A \leq 011\ldots1$	00…0 και 11…1
Συμπληρώματος ως προς 2	$-2^{v-1} \leq A \leq 2^{v-1} - 1$ $100\ldots0 \leq A \leq 011\ldots1$	00…0

Ακέραιοι αριθμοί των 10 δυαδικών ψηφίων σε διάφορες αναπαραστάσεις

Αριθμός	Δυαδικό αριθμητικό σύστημα				Δεκαδικό αριθμητικό σύστημα			
	προσημα-σμένου μεγέθους	συμπλη-ρώματος ως προς 1	συμπληρώ-ματος ως προς 2	με πόλωση το 511	προσημα σμένου μεγέθους	συμπλη-ρώματος ως προς 9	συμπλη-ρώματος ως προς 10	με πόλω-ση το 500
+512	-	-	-	1111111111				
+511	0111111111	0111111111	0111111111	1111111110				
+499	0111110011	0111110011	0111110011	1111110010	499	499	499	999
+498	0111110010	0111110010	0111110010	…	498	498	498	998
…	…	…	…	…	…	…	…	…
+1	0000000001	0000000001	0000000001	1000000000	001	001	001	501
0	0000000000 1000000000	0000000000 1111111111	0000000000	0111111111	000 500	000 999	000	500
-1	1000000001	1111111110	1111111111	0111111110	501	998	999	499
…	…	…	…	…	…	…	…	…
-498	1111110010	1000001101	1000001110	0000001101	998	501	502	002
-499	1111110011	1000001100	1000001101	0000001100	999	500	501	001
-500	1111110100	1000001011	1000001100	…			500	000
-511	1111111111	1000000000	1000000001	0000000000				
-512			1000000000					

Σφάλμα αναπαράστασης

Αναπαράσταση σταθερής υποδιαστολής

- Οι αριθμοί είναι ισοκατανεμημένοι στην περιοχή των αριθμών που μπορούν να παρασταθούν

➔ Μέγιστο σφάλμα αναπαράστασης λόγω περικοπής σταθερό: $\beta^{-\lambda}$, όπου λ το πλήθος των ψηφίων δεξιά της υποδιαστολής

Σχετικό σφάλμα αναπαράστασης =
σφάλμα αναπαράστασης/τιμή αριθμού

Σφάλμα αναπαράστασης

X=0000 0000. 0000 1001

Y=1001 0000. 0000 0000

$$ΣΦ(X)= 2^{-8}/(9\times 2^{-8}) \cong 1/9$$

$$ΣΦ(Y)= 2^{-8}/(9\times 2^{4}) \cong 1/(9\times 2^{12})$$

Αναπαράσταση πολύ μεγάλων και πολύ μικρών αριθμών

X=0000 0000. 0000 1001

Y=1001 0000. 0000 0000

$X^2 = (9 \times 2^{-8})^2 = 81 \times 2^{-16}$

$Y^2 = (9 \times 2^{4})^2 = 81 \times 2^{8}$

Δυναμική περιοχή

Λόγος μεταξύ μεγαλύτερου και μικρότερου, μη μηδενικού αριθμού, που μπορεί να παρασταθεί

Μεγάλη δυναμική περιοχή σημαίνει ότι μπορούμε να παραστήσουμε πολύ μεγάλους και πολύ μικρούς αριθμούς

Δυναμική περιοχή

- Αναπαράσταση σταθερής υποδιαστολής ν+1 δυαδικών ψηφίων
- 1 δυαδικό ψηφίο για το πρόσημο
- λ δυαδικά ψηφία δεξιά της υποδιαστολής

$$\Delta\Pi_{\Sigma\Upsilon} = \frac{(2^{\nu}-1)\cdot 2^{-\lambda}}{1\cdot 2^{-\lambda}} = 2^{\nu}-1$$

Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής

Απαίτηση

Μικρό σχετικό σφάλμα αναπαράστασης για όλους τους αριθμούς που μπορούν να παρασταθούν

Μεγάλη δυναμική περιοχή

➔ Αναπαράσταση κινητής υποδιαστολής

Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής

Μορφή : $\alpha_{\nu-1}\alpha_{\nu-2} \ldots \alpha_1\alpha_0$

Ερμηνεία

Τρεις συνιστώσες:

πρόσημο π

συντελεστής Σ

εκθέτης Ε

τιμή: $Z = (-1)^{\pi} \times \Sigma \times B^{E}$,

όπου Β μία προκαθορισμένη βάση

Δυναμική περιοχή

- Αναπαράσταση ν+1 δυαδικών ψηφίων
- 1 δυαδικό ψηφίο για το πρόσημο
- μ δυαδικά ψηφία για το μέγεθος του συντελεστή, κ' αριστερά και λ' δεξιά της υποδιαστολής
- ν-μ δυαδικά ψηφία για τον εκθέτη

$$\Delta\Pi_{\mathrm{K\Upsilon}} = \frac{(\mu\acute{\varepsilon}\gamma\iota\sigma\tau\eta\,\tau\iota\mu\acute{\eta}\,\sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta})\cdot B^{\mu\acute{\varepsilon}\gamma\iota\sigma\tau\eta\ \tau\iota\mu\acute{\eta}\ \varepsilon\kappa\theta\acute{\varepsilon}\tau\eta}}{(\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau\eta\,\tau\iota\mu\acute{\eta}\,\sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta})\cdot B^{\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau\eta\ \tau\iota\mu\acute{\eta}\ \varepsilon\kappa\theta\acute{\varepsilon}\tau\eta}} =$$

$$= \frac{(2^{\mu}-1)\cdot 2^{-\lambda'}\cdot 2^{2^{\nu-\mu}-1}}{1\cdot 2^{-\lambda'}\cdot 2^{0}} = (2^{\mu}-1)\cdot 2^{2^{\nu-\mu}-1}$$

Δυναμική περιοχή

- Αναπαράσταση ν+1 δυαδικών ψηφίων
- 1 δυαδικό ψηφίο για το πρόσημο
- μ δυαδικά ψηφία για το μέγεθος του συντελεστή, κ' αριστερά και λ' δεξιά της υποδιαστολής
- ν-μ δυαδικά ψηφία για τον εκθέτη

$$\Delta\Pi_{\mathrm{K\Upsilon}} = (2^{\mu} - 1) \cdot 2^{2^{\nu-\mu}-1}$$

Επίδραση της θέσης της υποδιαστολής;

Επίδραση του πλήθους των ψηφίων του εκθέτη;

Δυναμική περιοχή

$$\Delta\Pi_{\Sigma\Upsilon} = 2^{\nu} - 1$$

$$\Delta\Pi_{K\Upsilon} = (2^{\mu} - 1) \cdot 2^{2^{\nu-\mu} - 1}$$

$\Delta\Pi_{\Sigma\Upsilon} = (2^{32} - 1) \approx 4{,}3 \times 10^{9}$

$\Delta\Pi_{K\Upsilon} = (2^{24} - 1) 2^{256-1} \approx 9{,}7 \times 10^{83}$

Περισσότερες από μία παραστάσεις

Ένας αριθμός μπορεί να έχει περισσότερες από μία παραστάσεις στο ίδιο αριθμητικό σύστημα σε παράσταση κινητής υποδιαστολής

Παράδειγμα

$0.000003706 \times 10^{3}$,

0.0003706×10^{1}

0.3706×10^{-2}

Κανονικοποιημένη (normilized) παράσταση

Εάν θεωρήσουμε ότι ο συντελεστής είναι σε αναπαράσταση προσημασμένου μεγέθους τότε ο αριθμός είναι σε κανονικοποιημένη μορφή εάν το πιο σημαντικό ψηφίο του μεγέθους του συντελεστή είναι διάφορο του μηδενός (εκτός βέβαια της περίπτωσης της αναπαράστασης του αριθμού 0)

Παράδειγμα

$.000003706 \times 10^{3}$,

$.0003706 \times 10^{1}$

$.3706 \times 10^{-2}$

Κανονικοποιημένοι αριθμοί

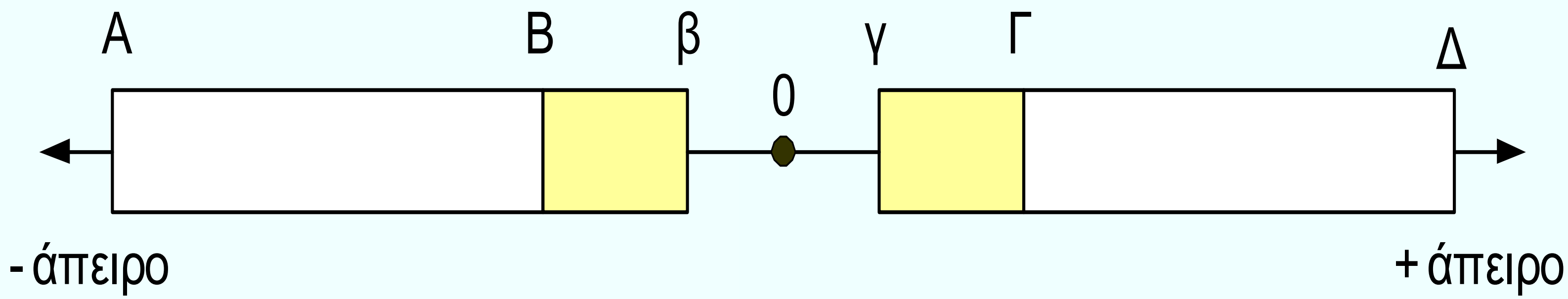
Μικρότερη τιμή του συντελεστή:

$$\overbrace{10 \ldots 0\,,\,\underbrace{00 \ldots 0}_{\lambda}}^{\kappa} \quad = \quad \beta^{\kappa-1}/2^{\lambda} = \beta^{\kappa-\lambda-1}$$

και η μικρότερη τιμή του αριθμού κινητής υποδιαστολής θα είναι:

$\beta^{\kappa-\lambda-1} \times B$ (ελάχιστη τιμή εκθέτη)

Περιοχές στην αναπαράσταση κινητής υποδιαστολής



[A, B] αρνητικοί αριθμοί κινητής υποδιαστολής κανονικοποιημένοι

[Γ, Δ] θετικοί αριθμοί κινητής υποδιαστολής κανονικοποιημένοι

(B, β] και [γ, Γ) μη κανονικοποιημένοι αριθμοί κινητής υποδιαστολής

<A ή > Δ υπερχείλιση

(β, 0) ή (0, γ) υπερχείλιση

Διερεύνηση της επίδρασης του μεγέθους των πεδίων

Σταθερό πλήθος δυαδικών ψηφίων

Επίδραση:

- της τιμής της βάσης
- πλήθος δυαδικών ψηφίων του συντελεστή
- πλήθος δυαδικών ψηφίων του εκθέτη

Διερεύνηση της επίδρασης της τιμής της βάσης

Θεωρούμε

συντελεστής: 4 κλασματικά ψηφία

εκθέτης: 2 δυαδικά ψηφία σε παράσταση με πόλωση

➔ πόλωση $=2^{2-1}-1=1$ οπότε εκθέτης = - 1, 0, 1 ή 2

Αναπαραστάσεις κινητής υποδιαστολής, μόνο οι θετικοί αριθμοί (συντελεστής 4 κλασματικά ψηφία, εκθέτης 2 ψηφία, B=2)

	2^E			
αναπαράσταση συντελεστή	1/2	1	2	4
0,0000	0	0	0	0
0, 0001	1/32	1/16	1/8	1/4
0,0010	2/32	2/16=1/8	2/8=1/4	2/4
0,0011	3/32	3/16	3/8	3/4
0,0100	4/32	4/16=2/8=1/4	4/8	4/4=1
0,0101	5/32	5/16	5/8	5/4
0,0110	6/32	6/16	6/8	6/4
0,0111	7/32	7/16	7/8	7/4
0, 1000	8/32	8/16=4/8=2/4	8/8=1	8/4
0,1001	9/32	9/16	9/8	9/4
0, 1010	10/32	10/16	10/8	10/4
0, 1011	11/32	11/16	11/8	11/4
0, 1100	12/32	12/16	12/8	12/4
0, 1101	13/32	13/16	13/8	13/4
0, 1110	14/32	14/16	14/8	14/4
0, 1111	15/32	15/16	15/8	15/4

Αναπαραστάσεις κινητής υποδιαστολής, μόνο οι θετικοί αριθμοί (συντελεστής 4 κλασματικά ψηφία, εκθέτης 2 ψηφία, B=4)

	4^E			
παράσταση συντελεστή	1/4	1	4	16
0,0000	0	0	0	0
0, 0001	1/64	1/16	1/4	1
0,0010	2/64	2/16	2/4	2
0,0011	3/64	3/16	3/4	3
0,0100	4/64	4/16=1/4	4/4=1	4
0,0101	5/64	5/16	5/4	5
0,0110	6/64	6/16	6/4	6
0,0111	7/64	7/16	7/4	7
0, 1000	8/64	8/16=2/4=1/2	8/4=2	8
0,1001	9/64	9/16	9/4	9
0, 1010	10/64	10/16	10/4	10
0, 1011	11/64	11/16	11/4	11
0, 1100	12/64	12/16	12/4=3	12
0, 1101	13/64	13/16	13/4	13
0, 1110	14/64	14/16	14/4	14
0, 1111	15/64	15/16	15/4	15

Αναπαραστάσεις κινητής υποδιαστολής, μόνο οι θετικοί αριθμοί (συντελεστής 4 κλασματικά ψηφία, εκθέτης 2 ψηφία, B=8)

	8^E			
παράσταση συντελεστή	1/8	1	8	64
0,0000	0	0	0	0
0, 0001	1/128	1/16	1/2	4
0,0010	2/128	2/16	2/2	8
0,0011	3/128	3/16	3/2	12
0,0100	4/128	4/16	4/2	16
0,0101	5/128	5/16	5/2	20
0,0110	6/128	6/16	6/2	24
0,0111	7/128	7/16	7/2	28
0, 1000	8/128	8/16=1/2	8/2	32
0,1001	9/128	9/16	9/2	36
0, 1010	10/128	10/16	10/2	40
0, 1011	11/128	11/16	11/2	44
0, 1100	12/128	12/16	12/2	48
0, 1101	13/128	13/16	13/2	52
0, 1110	14/128	14/16	14/2	56
0, 1111	15/128	15/16	15/2	60

Διερεύνηση της επίδρασης του πλήθους δυαδικών ψηφίων του συντελεστή

Θεωρούμε

συντελεστής: 3 κλασματικά ψηφία

εκθέτης: 3 δυαδικά ψηφία σε παράσταση με πόλωση

➔ πόλωση $=2^{3-1}-1=3$

οπότε εκθέτης = - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 και 4

Αναπαραστάσεις κινητής υποδιαστολής, μόνο οι θετικοί αριθμοί (συντελεστής 3 κλασματικά ψηφία, εκθέτης 3 ψηφία, B=2)

	2^E							
αναπαράσταση συντελεστή	1/8 (E = -3)	1/4 (E = -2)	1/2 (E = -1)	1 (E = 0)	2 (E = 1)	4 (E = 2)	8 (E = 3)	16 (E = 4)
0, 000	0	0	0	0	0	0	0	0
0, 001	1/64	1/32	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2
0, 010	2/64= 1/32	2/32= 1/16	2/16= 1/8	2/8= 1/4	2/4= 1/2	2/2=1	2	4
0, 011	3/64	3/32	3/16	3/8	3/4	3/2	3	6
0, 100	4/64= 2/32	4/32= 2/16	4/16= 2/8	4/8= 2/4	4/4= 1	4/2=2	4	8
0, 101	5/64	5/32	5/16	5/8	5/4	5/2	5	10
0, 110	6/64= 3/32	6/32= 3/16	6/16= 3/8	6/8= 3/4	6/4= 3/2	6/2=3	6	12
0, 111	7/64	7/32	7/16	7/8	7/4	7/2	7	14

Παραστάσεις Κινητής Υποδιαστολής, μόνο οι θετικοί αριθμοί (συντελεστής 4 κλασματικά ψηφία, εκθέτης 2 ψηφία, Β=2)

	2^E			
παράσταση συντελεστή	1/2	1	2	4
0,0000	0	0	0	0
0, 0001	1/32	1/16	1/8	1/4
0,0010	2/32	2/16=1/8	2/8=1/4	2/4
0,0011	3/32	3/16	3/8	3/4
0,0100	4/32	4/16=2/8=1/4	4/8	4/4=1
0,0101	5/32	5/16	5/8	5/4
0,0110	6/32	6/16	6/8	6/4
0,0111	7/32	7/16	7/8	7/4
0, 1000	8/32	8/16=4/8=2/4	8/8=1	8/4
0,1001	9/32	9/16	9/8	9/4
0, 1010	10/32	10/16	10/8	10/4
0, 1011	11/32	11/16	11/8	11/4
0, 1100	12/32	12/16	12/8	12/4
0, 1101	13/32	13/16	13/8	13/4
0, 1110	14/32	14/16	14/8	14/4
0, 1111	15/32	15/16	15/8	15/4

Παραστάσεις Κινητής Υποδιαστολής, μόνο οι θετικοί αριθμοί (συντελεστής 4 κλασματικά ψηφία, εκθέτης 2 ψηφία, B=2)

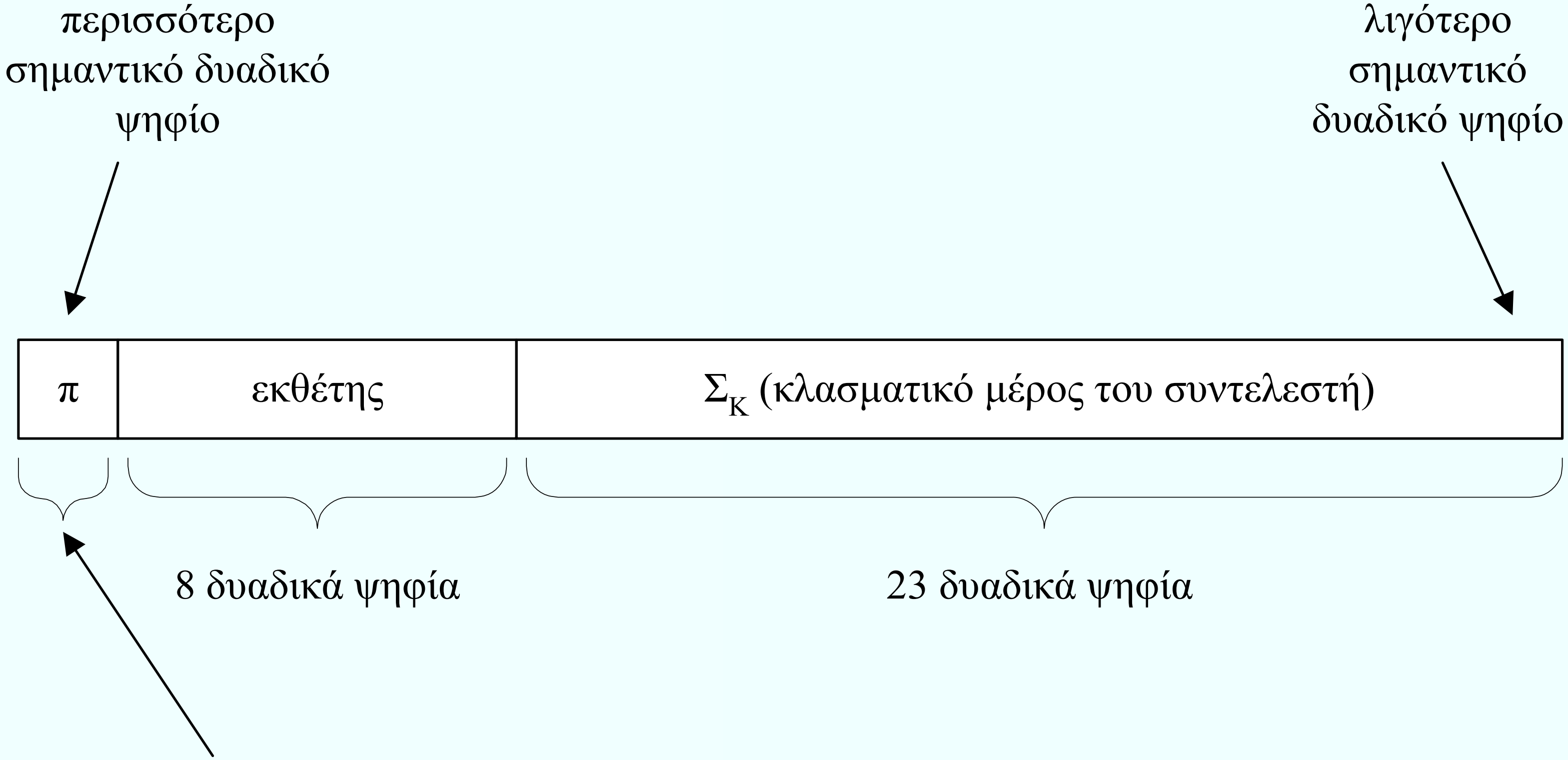
<table>
<tr><td colspan="3">Συντελεστής:
4 κλασματικά δυαδικά ψηφία
εκθέτης: 2 δυαδικά ψηφία
B=2</td><td colspan="3">Συντελεστής:
3 κλασματικά δυαδικά ψηφία
εκθέτης: 3 δυαδικά ψηφία
B=2</td></tr>
<tr><td>Περιοχή αριθμών</td><td>Πλήθος αριθμών</td><td>Τιμή του εκθέτη</td><td>Περιοχή αριθμών</td><td>Πλήθος αριθμών</td><td>Τιμή του εκθέτη</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>-3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1/32 ≤ X < 1/4</td><td rowspan="3">7</td><td rowspan="3">-1</td><td>1/64 ≤ X <1 /16</td><td>3</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>1/16 ≤ X < 1/8</td><td>4</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>1/8 ≤ X < 1/4</td><td>4</td><td>-2</td></tr>
<tr><td>1/4 ≤ X < 1/2</td><td>8</td><td>-1</td><td>1/4 ≤ X < 1/2</td><td>4</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>1/2 ≤ X < 1</td><td>8</td><td>0</td><td>1/2 ≤ X < 1</td><td>4</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1 ≤ X < 2</td><td>8</td><td>1</td><td>1 ≤ X < 2</td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2 ≤ X < 4</td><td>8</td><td>2</td><td>2 ≤ X < 4</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>4 ≤ X < 8</td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>8 ≤ X =14</td><td>4</td><td>4</td></tr>
</table>

Αναπαραστάσεις κινητής υποδιαστολής, μόνο οι θετικοί αριθμοί (συντελεστής 3 κλασματικά ψηφία, εκθέτης 3 ψηφία, B=2)

	2^E							
αναπαράσταση συντελεστή	1/8 (E = -3)	1/4 (E = -2)	1/2 (E = -1)	1 (E = 0)	2 (E = 1)	4 (E = 2)	8 (E = 3)	16 (E = 4)
0, 000	0	0	0	0	0	0	0	0
0, 001	1/64	1/32	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2
0, 010	2/64= 1/32	2/32= 1/16	2/16= 1/8	2/8= 1/4	2/4= 1/2	2/2=1	2	4
0, 011	3/64	3/32	3/16	3/8	3/4	3/2	3	6
0, 100	4/64= 2/32	4/32= 2/16	4/16= 2/8	4/8= 2/4	4/4= 1	4/2=2	4	8
0, 101	5/64	5/32	5/16	5/8	5/4	5/2	5	10
0, 110	6/64= 3/32	6/32= 3/16	6/16= 3/8	6/8= 3/4	6/4= 3/2	6/2=3	6	12
0, 111	7/64	7/32	7/16	7/8	7/4	7/2	7	14

4,5: δεν μπορεί να παρασταθεί

Πρότυπο κινητής υποδιαστολής IEEE 754

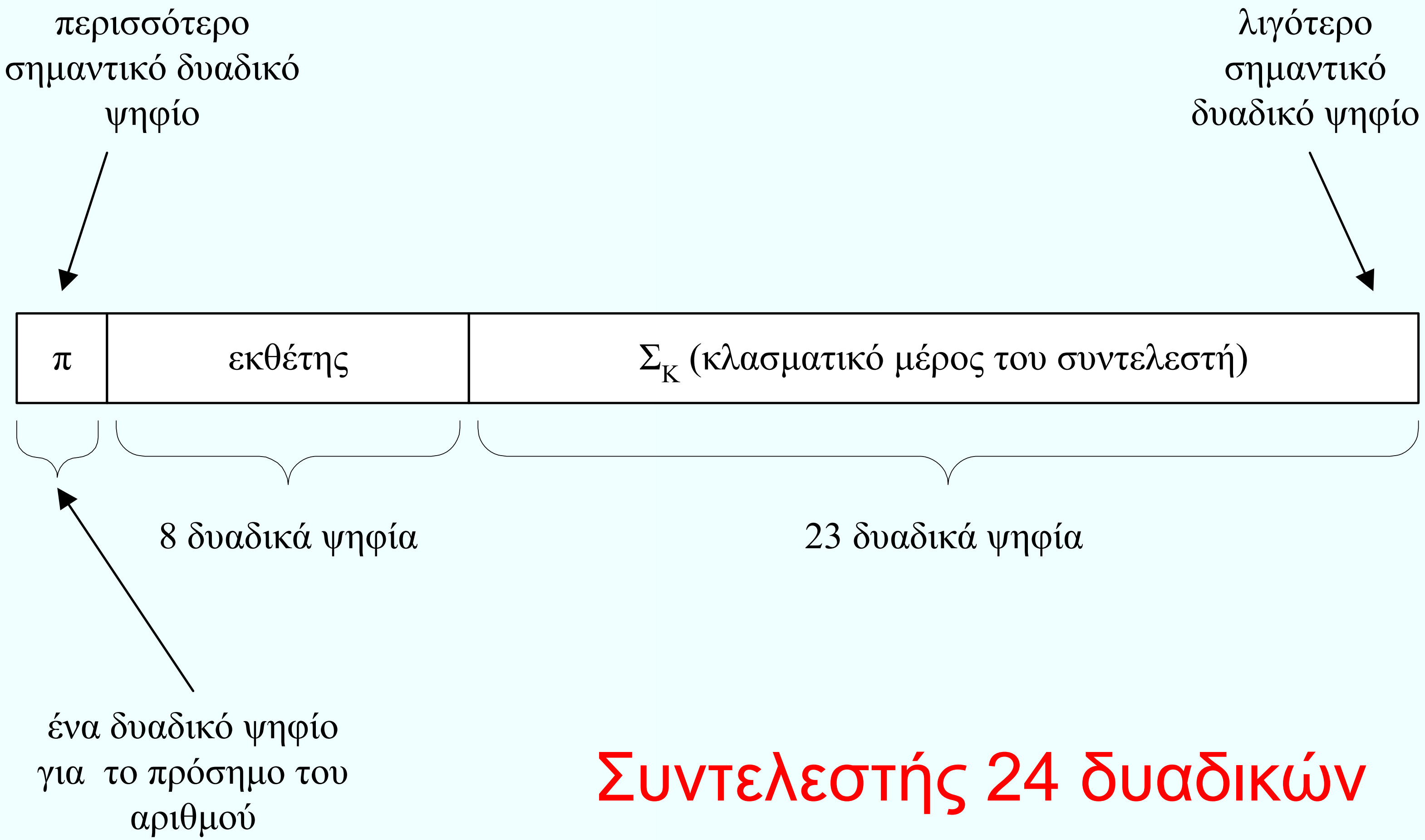


ένα δυαδικό ψηφίο για το πρόσημο του αριθμού

Δυαδικό σύστημα αρίθμησης

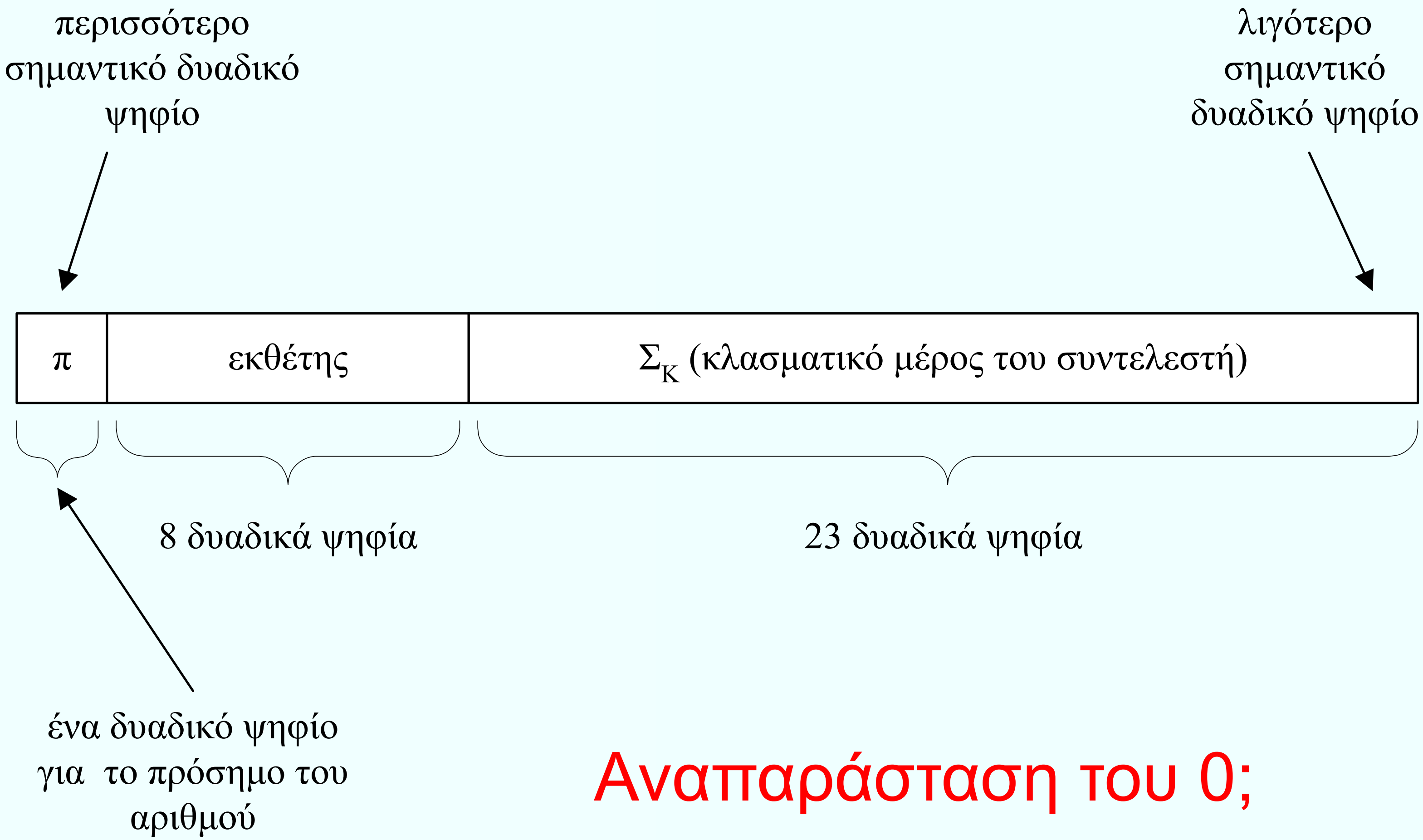
B = 2

Πρότυπο κινητής υποδιαστολής IEEE 754



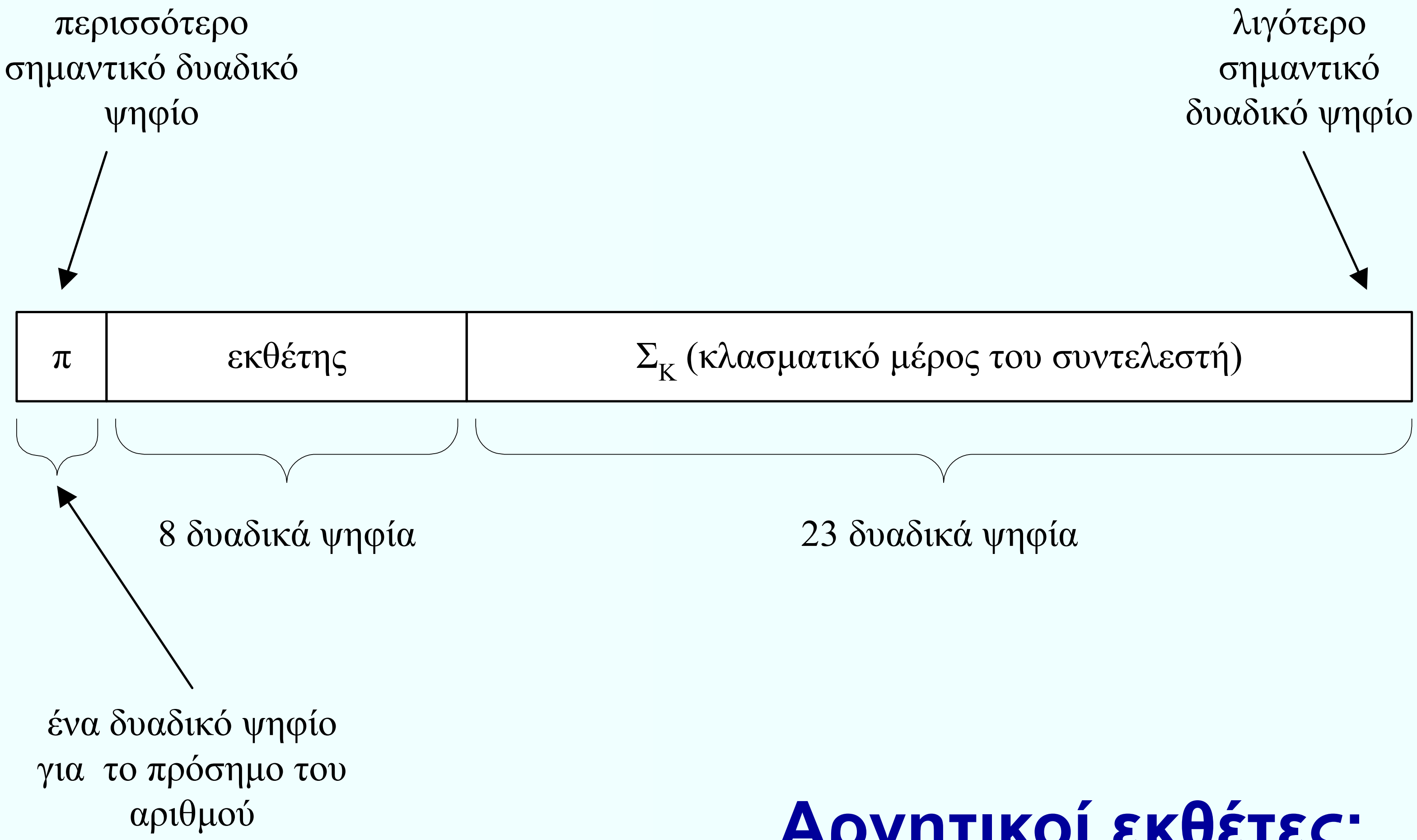
Συντελεστής 24 δυαδικών ψηφίων

Πρότυπο κινητής υποδιαστολής IEEE 754



Αναπαράσταση του 0;

Σύγκριση αριθμών κινητής υποδιαστολής



Αρνητικοί εκθέτες;

Εκθέτης
σε μορφή συμπληρώματος ως προς δύο;

<u>Παράδειγμα</u>

Τότε οι αριθμοί 1.0×2^{-1} και $1.0 \times 2^{+1}$ θα είχαν αντίστοιχα τις ακόλουθες δύο παραστάσεις :

0	1 1 1 1 1 1 1 1	0 0 0 0 . . .

0	0 0 0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 . . .

Πόλωση εκθέτη

Προσθέτουμε στην τιμή του εκθέτη το 127 και μετά λαμβάνουμε την αναπαράστασή του

Παράδειγμα

Θεωρούμε τους αριθμούς 1.0×2^{-1} και $1.0 \times 2^{+1}$.

Για να πάρουμε την παράσταση κάθε εκθέτη προσθέτουμε στο –1 και στο +1 τον αριθμό 127 οπότε παίρνουμε αντίστοιχα τους αριθμούς $126_{(10)} = 01111110_{(2)}$ και $128_{(10)} = 10000000_{(2)}$.

Επομένως η παράσταση των αριθμών 1.0×2^{-1} και $1.0 \times 2^{+1}$ σύμφωνα με το στάνταρτ είναι :

0	0 1 1 1 1 1 1 0	0 0 0 0 . . .

0	1 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 . . .

Στάνταρτ κινητής υποδιαστολής IEEE 754

$N = (-1)^{\Pi} \times 2^{E-127} \times (1.\ \Sigma_K)$ $0 < E < 255$ (κανονικ.) ,

$N = (-1)^{\Pi} \times 2^{-126} \times (0.\ \Sigma_K)$ εάν $E = 0$ και $\Sigma_K \neq 0$ (μη καν.),

$N = NaN$ εάν $E = 255$ και $\Sigma_K \neq 0$,

$N = (-1)^{\Pi}\ \infty$ εάν $E = 255$ και $\Sigma_K = 0$,

$N = (-1)^{\Pi}\ 0$ εάν $E = 0$ και $\Sigma_K = 0$ (διπλή αναπαράσταση

του μηδενός).

Αριθμητική κινητής υποδιαστολής διπλής ακρίβειας

π	11 bit εκθέτης	20 bit κλασμ. συντελεστής

32 bit συντελεστής συνεχίζεται

πόλωση = 1023

Στάνταρτ κινητής υποδιαστολής IEEE 754 διπλής ακρίβειας

$N = NaN$ εάν $E = 2047$ και $\Sigma_K \neq 0$,

$N = (-1)^{\Pi} \infty$ εάν $E = 2047$ και $\Sigma_K = 0$,

$N = (-1)^{\Pi} \times 2^{E-1023} \times (1.\ \Sigma_K)$ $0 < E < 2047$ (κανονικ.) ,

$N = (-1)^{\Pi} \times 2^{-1022} \times (0.\ \Sigma_K)$ εάν $E = 0$ και $\Sigma_K \neq 0$ (μη καν.),

$N = (-1)^{\Pi}\ 0$ εάν $E = 0$ και $\Sigma_K = 0$ (διπλή αναπαράσταση του μηδενός).

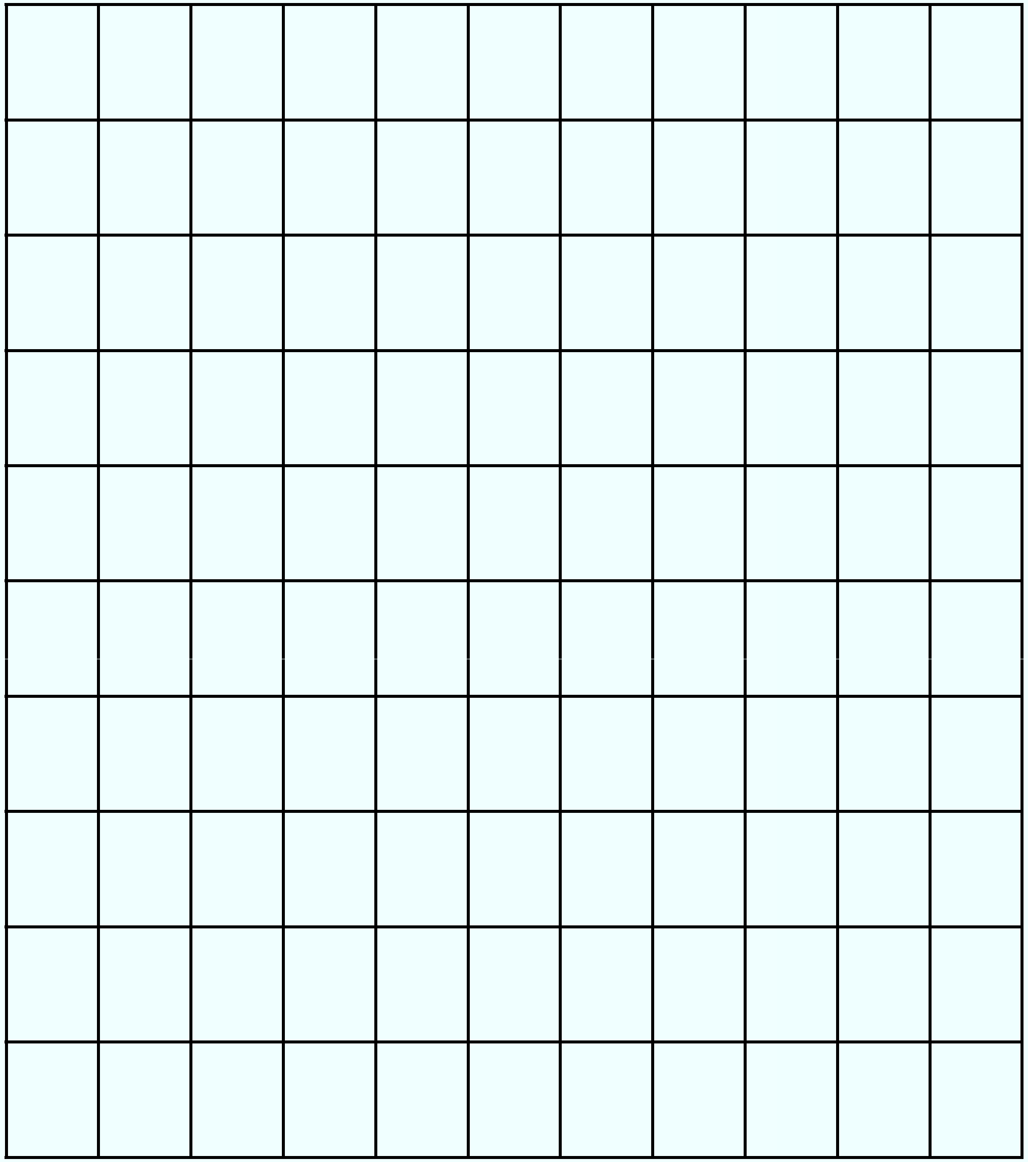
Αλφαριθμητικά σύμβολα

- Αριθμοί
- Γράμματα του αλφάβητου
- Σημεία στίξης
- Ειδικά σύμβολα

ASCII κώδικας

Bits	b7 b6 b5	000	001	010	011	100	101	110	111
b4 b3 b2b1	HEX	0	1	2	3	4	5	6	7
0 0 0 0	0	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0 0 0 1	1	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0 0 1 0	2	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0 0 1 1	3	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0 1 0 0	4	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0 1 0 1	5	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0 1 1 0	6	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0 1 1 1	7	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1 0 0 0	8	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1 0 0 1	9	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1 0 1 0	A	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1 0 1 1	B	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1 1 0 0	C	FF	FS	´	<	L	\	l	|
1 1 0 1	D	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1 1 1 0	E	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1 1 1 1	F	SI	US	/	?	O	-	o	DEL

Αναπαράσταση ψηφιακής εικόνας



ψηφίδες,
εικονοστοιχεία,
pixels

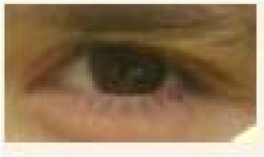
Αναπαράσταση ψηφιακής εικόνας

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

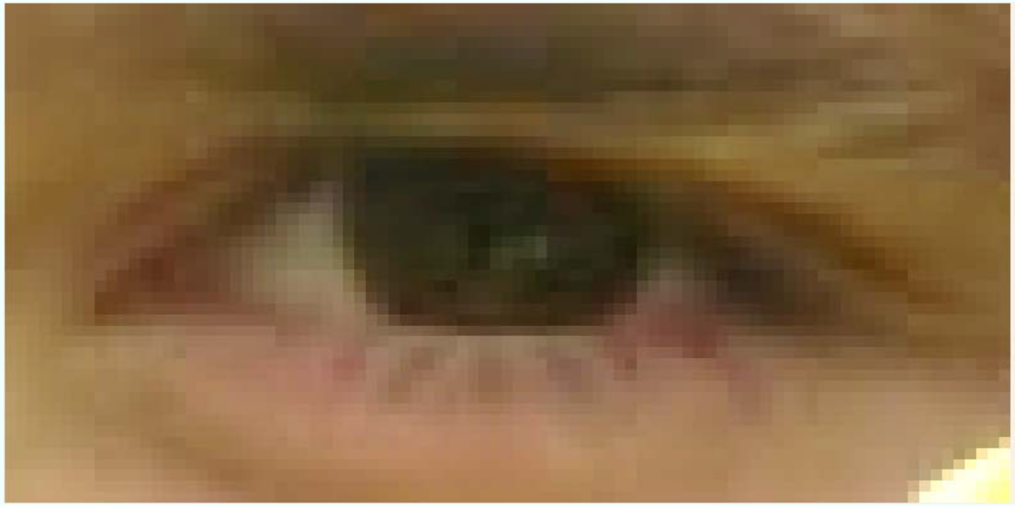
Ευκρίνεια (resolution)

ψηφίδες ανά τετραγωνικό εκατοστό

Ευκρίνεια ψηφιακής εικόνας



κανονικό μέγεθος



μεγέθυνση

Ασπρόμαυρες και Έγχρωμες ψηφιακές εικόνες

Ασπρόμαυρες 2 - 8 bit /pixel (bit depth=2 - 8)

Έγχρωμες 8 - 24 bit /pixel

κόκκινο - πράσινο - μπλέ

(16,7 εκατομμύρια χρώματα)

RGB(Red, Green, Blue)

CMYK(Cyan, Mangenta, Yellow, blacK)

Μέγεθος αρχείου εικόνας

για μία φωτογραφία των 2.048 x 3.072 ψηφίδων που

για τη δήλωση του χρώματος κάθε ψηφίδας

χρησιμοποιούνται 24 δυαδικά ψηφία απαιτούνται

(24 x 2.048 x 3.072)/8 = 18. 874.368 ψηφιολέξεις =

18 MB

τεχνικές συμπίεσης: (ITU-T.6 (lossless scheme)

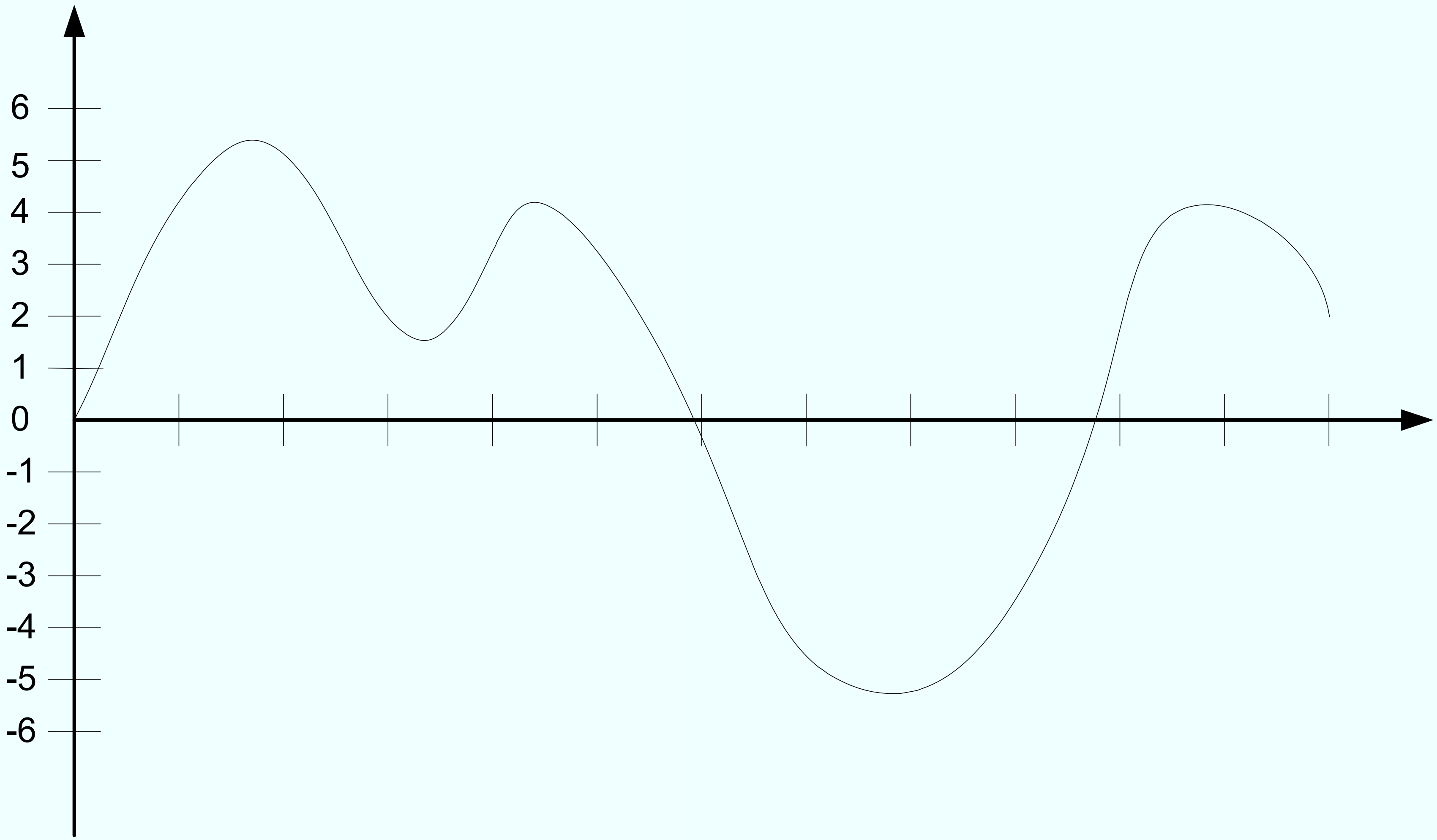
JPEG (lossy scheme) κλπ.)

Βίντεο

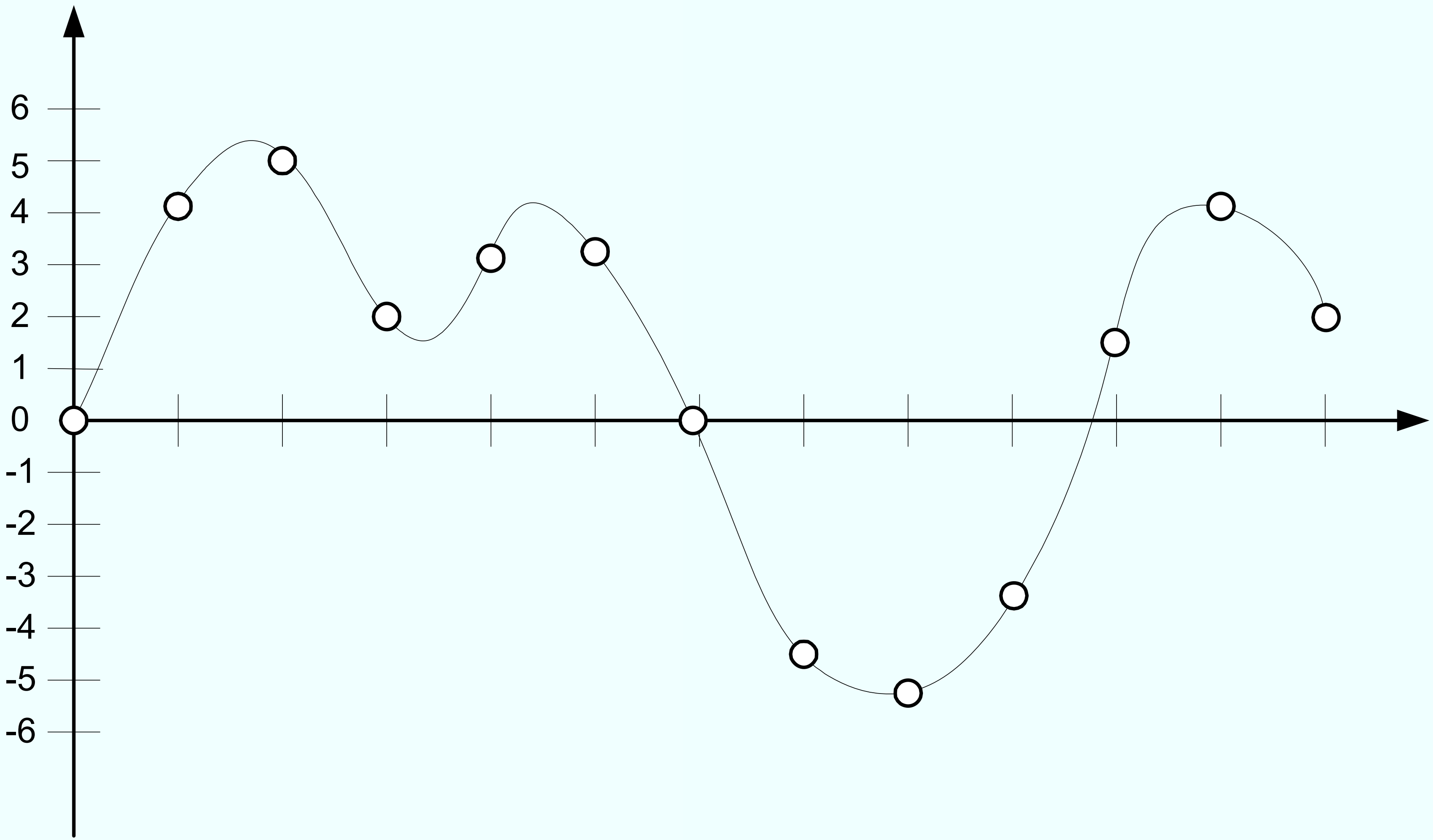
Σύγχρονα φιλμς:

24 frames / second

Ήχος

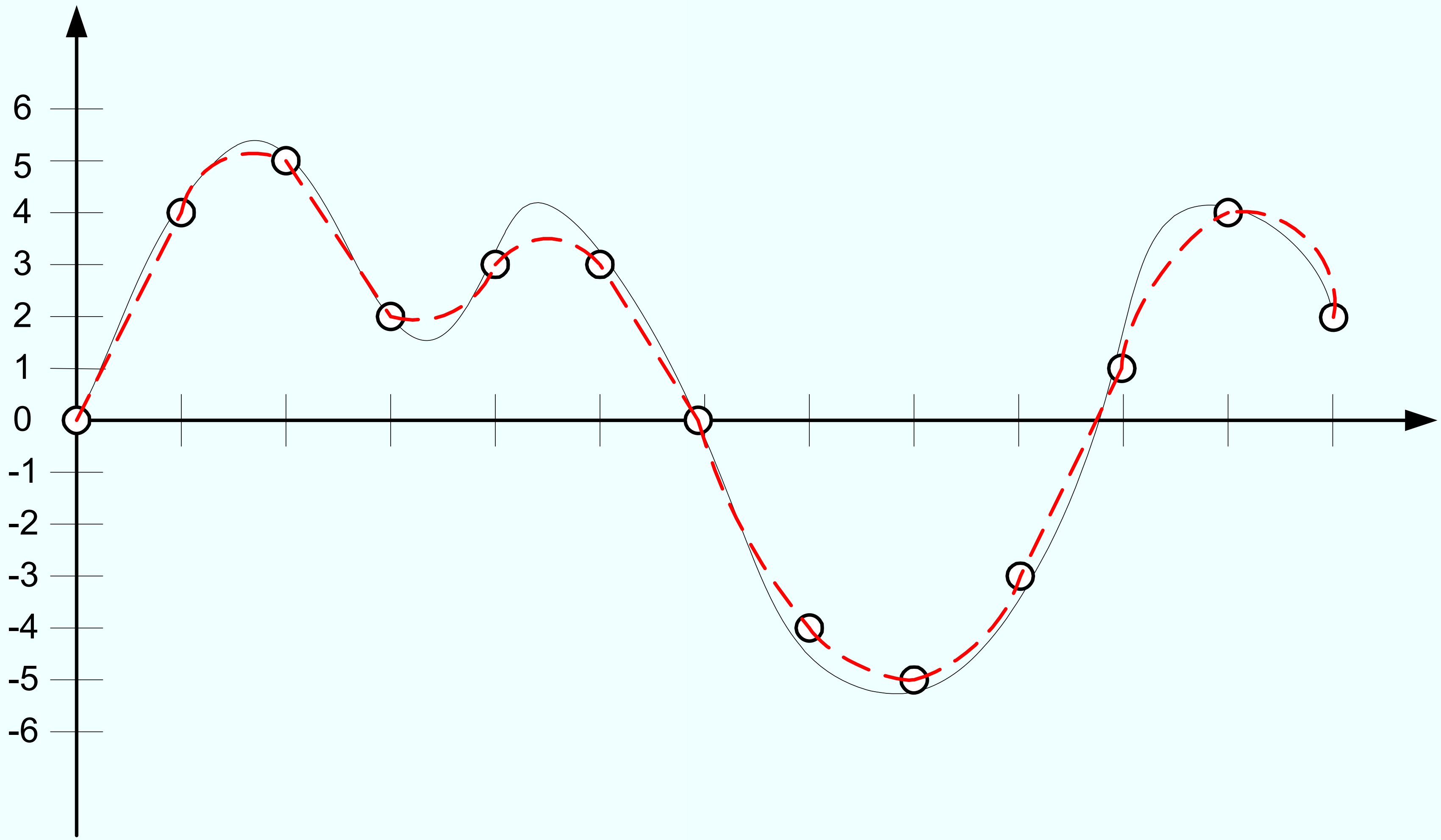


Δειγματοληψία αναλογικού σήματος



0, 4, 5, 2, 3, 3, 0, -4, -5, -3, 1, 4, 2

Δειγματοληψία αναλογικού σήματος



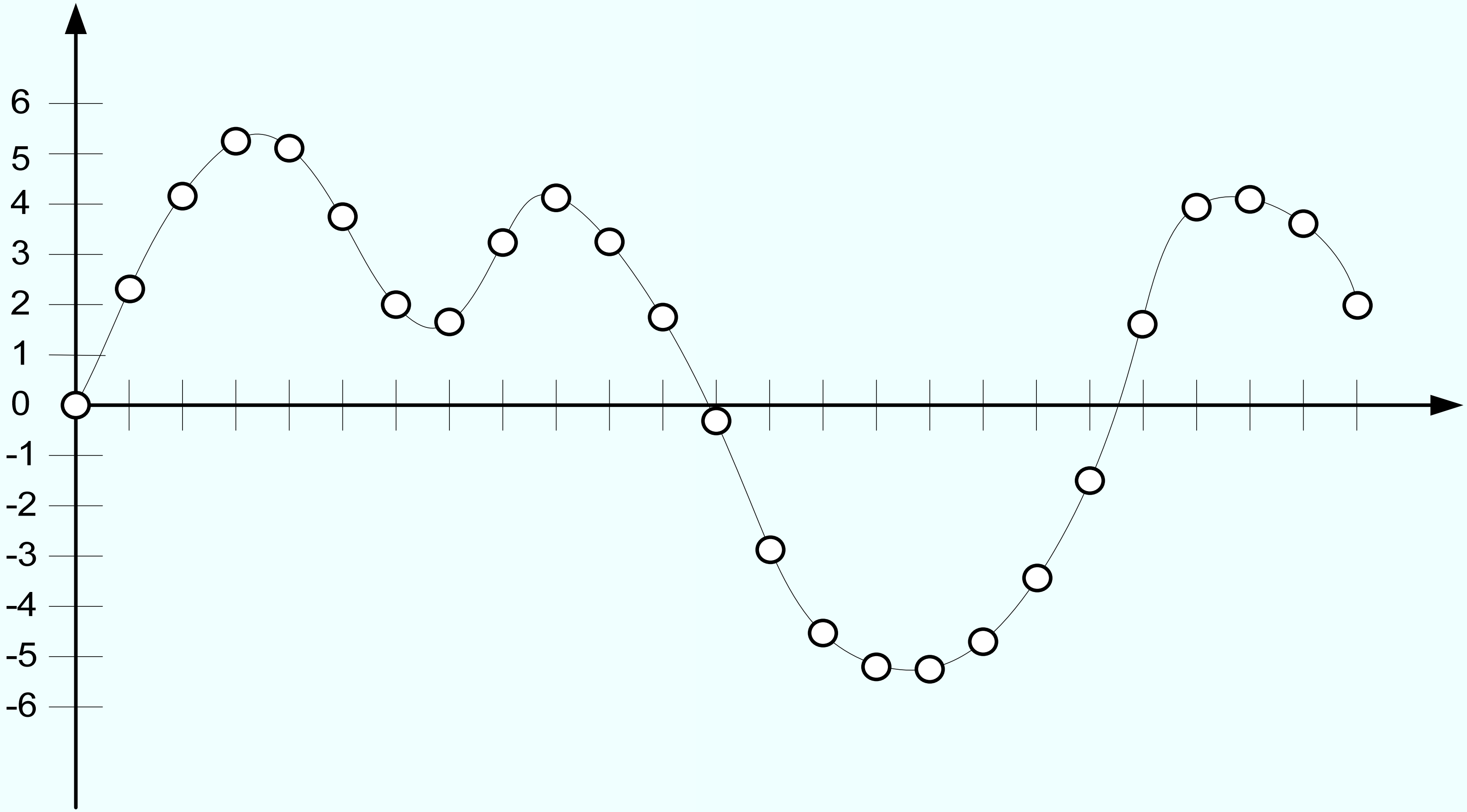
Δειγματοληψία αναλογικού σήματος

Η ακρίβεια του σήματος που αναπαράγεται σε σχέση με το αρχικό εξαρτάται από δύο παραμέτρους:

- τη συχνότητα της δειγματοληψίας,

  δηλαδή πόσο συχνά δειγματοληπτούμε
- την ακρίβεια της τιμής που καταγράφουμε

Δειγματοληψία αναλογικού σήματος



Δειγματοληψία αναλογικού σήματος

Θεώρημα δειγματοληψίας του Nyquist

Δειγματοληψία αναλογικού σήματος

Το ανθρώπινο αυτί ακούει από 20 Hz έως και 22 KHz

↓

συχνότητα δειγματοληψίας 44 KHz

(δηλαδή 44.000 δείγματα το δευτερόλεπτο)

Η μουσική ποιότητας CD παράγεται με συχνότητα δειγματοληψίας 44,1 KHz.

Μέγεθος αρχείου ήχου

Το πλήθος των δυαδικών ψηφίων που αποθηκεύονται για κάθε δευτερόλεπτο (bit rate) εξαρτάται από:

- το ρυθμό, συχνότητα δειγματοληψίας
- το πλήθος των δυαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση κάθε δειγματοληπτούμενης τιμής (bit resolution)

CD-ποιότητα ➔ 16 δυαδικά ψηφία ανά δείγμα

Μέγεθος αρχείου ήχου

1 δευτερόλεπτο CD-ποιότητας απαιτεί:

44.100 δείγματα ανά δευτερόλεπτο × 16 δυαδικά ψηφία ανά δείγμα =

705.600 δυαδικά ψηφία ή 705.600/8 ψηφιολέξεις = 88.200 ψηφιολέξεις = 86,1 KB.

Μέγεθος αρχείου ήχου

Στερεοφωνική μουσική (2 κανάλια):

Για ένα δευτερόλεπτο : 86,1 KB x 2 =172,2 KB.

Μία ώρα CD-ποιότητας στερεοφωνικής μουσικής απαιτεί :

172,2 KB x 3600 δευτερόλεπτα = 619.920 KB

περίπου 620 MB

↓

τεχνικές συμπίεσης της πληροφορίας

(RealAudio, MP3 κλπ.)