

Μάθημα: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Απαντήσεις στα Θέματα της γραπτής εξέτασης Ιουνίου 2011

Οι ενδείξεις Π, Α, Μ στην αρχή των ερωτήσεων σημαίνουν:

- **Π:** Το θέμα έχει επακριβώς και αυτούσιο απαντηθεί/λυθεί στις Παραδόσεις/Φροντιστήρια του μαθήματος.
- **Α:** Ακριβώς το ίδιο ή εντελώς παρόμοιο ερώτημα/άσκηση είναι αναρτημένο στην ιστοσελίδα του μαθήματος (κλειδιά θεμάτων περασμένων περιόδων και προόδων).
- **Μ:** Η Μεθοδολογία ή το θεωρητικό πλαίσιο για την απάντηση στην άσκηση-ερώτημα έχει καλυφθεί/τονισθεί στις παραδόσεις με παρόμοια θέματα ή παραδείγματα. Επίσης, αντίστοιχα θέματα είναι αναρτημένα στην ιστοσελίδα του μαθήματος (κλειδιά θεμάτων περασμένων περιόδων και προόδων).

Ορισμένες από τις απαντήσεις που υπάρχουν αυτούσιες στις ιστοσελίδες του μαθήματος, παραλείπονται. Οι ενδιαφερόμενοι μπορούν να τις αναζητήσουν εκεί.

I.

I.1

α) (Π) (Σ/Λ) Αν $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και U το κλιμακωτό μητρώο που προκύπτει από το A με απαλοιφή, τότε $C(A^T) = C(U^T)$. ($C(A^T)$, $C(U^T)$ είναι οι χώροι γραμμών των A και U αντίστοιχα).

Απ. Το βασικό αποτέλεσμα της απαλοιφής είναι ότι για κάθε μητρώο A υπάρχει αντιστρέψιμο μητρώο E τέτοιο ώστε $U = EA$, όπου U κλιμακωτό μητρώο. Από τη σχέση αυτή έπεται άμεσα: χώρος γραμμών του $U = C(U^T) =$ χώρος γραμμών του $A = C(A^T)$. (σωστό)

α) (Π,Α) (Σ/Λ) Αν $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και U το κλιμακωτό μητρώο που προκύπτει από το A με απαλοιφή, τότε $C(A) = C(U)$. ($C(A)$, $C(U)$ είναι οι χώροι στηλών των A και U αντίστοιχα).

Απ. Το βασικό αποτέλεσμα της απαλοιφής είναι ότι για κάθε μητρώο A υπάρχει αντιστρέψιμο μητρώο E τέτοιο ώστε $U = EA$, όπου U κλιμακωτό μητρώο. Αυτή είναι και η μόνη σχέση που συνδέει τα A και U . Άμεσα προκύπτει: χώρος γραμμών του $U = C(U^T) =$ χώρος γραμμών του $A = C(A^T)$ και όχι $C(A) = C(U)$ (τότε θα έπρεπε: $U = AE$ που δεν ισχύει στην απαλοιφή με μετασχηματισμούς γραμμών!). Άρα λάθος.

Ισοδύναμη απάντηση: Στη γενική περίπτωση οι ανεξάρτητες στήλες του κλιμακωτού U που προκύπτει από το A περιέχουν 0 στις τελευταίες $m - \text{rank}(A)$ γραμμές. Όμως οι αντίστοιχες (ανεξάρτητες) στήλες του A δεν περιέχουν κατ' ανάγκη μηδενικά στις αντίστοιχες θέσεις και άρα δεν μπορούν να παραχθούν από τις ανεξάρτητες στήλες του U , δηλ. $C(A) \neq C(U)$.

α) (Π,Α) (Σ/Λ) Αν V είναι δ.χ., $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ μια βάση του και $u \in V$, τότε το u μπορεί να παραχθεί από διαφορετικούς γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων της.

Απ. Λάθος: Το u δίνεται από ένα μοναδικό γραμμικό συνδυασμό $[v_1, v_2, \dots, v_n]x$ των διανυσμάτων της βάσης: το σύστημα $u = [v_1, v_2, \dots, v_n]x$ έχει μοναδική λύση x αφού τα v_1, v_2, \dots, v_n είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

β1) (Π,Μ) (Σ/Λ) Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι συμμετρικό και αντιστρέψιμο, τότε και το A^{-1} είναι συμμετρικό.

Απ. Από την ιδιότητα $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ έχουμε $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A^{-1}$, δηλ. το A είναι συμμετρικό. (σωστό).

β2) (Π,Α) (Σ/Λ) Αν $x_1, y_1 \in \mathbb{R}^3$, $i=1,2$, τότε το $C = x_1 y_1^T + x_2 y_2^T$ είναι ιδιάζον.

Απ. Η σχέση γράφεται: $C = x_1 y_1^T + x_2 y_2^T = [x_1, x_2] [y_1^T; y_2^T]$. Είναι $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ και $\text{rank}([x_1, x_2]) \leq 2$, $\text{rank}([y_1^T; y_2^T]) \leq 2$. Επομένως για το γινόμενο C θα είναι $\text{rank}(C) \leq 2 < 3$, συνεπώς το C είναι ιδιάζον. (σωστό).

β3) (Π,Α) Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε ισχύει $\det(A) = (-1)^k u_1 u_2 \dots u_n$, όπου τα u_i είναι τα στοιχεία της διαγωνίου του άνω τριγωνικού μητρώου U που προέκυψε από την απαλοιφή. Αποδείξτε άμεσα τη σχέση αυτή.

Απ. Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ιδιάζον, τότε $\det(A) = 0$ και η σχέση ισχύει, αφού ένα από τα u_i θα είναι υποχρεωτικά 0. Αν A αντιστρέψιμο, τότε υπάρχουν P μεταθετικό, U άνω τριγωνικό και L κάτω τριγωνικό με $\text{diag}(A) = (1, \dots, 1)^T$ ώστε $PA = LU$, απ' όπου προκύπτει: $\det(PA) = \det(LU) \Rightarrow \det(P)\det(A) = \det(L)\det(U) \Rightarrow (-1)^k \det(A) = 1 \times u_1 u_2 \dots u_n \Rightarrow \det(A) = (-1)^k u_1 u_2 \dots u_n$.

β4) (Μ) Σε ένα μητρώο $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ οι κύριες (αριστερές) υπο-ορίζουσες $D_k = \det(A(1:k; 1:k))$, $k=1, \dots, 4$, είναι $D_1=2$, $D_2=-10$, $D_3=25$, $D_4=40$. Θεωρούμε ότι κατά την απαλοιφή στο A δεν έγινε καμιά εναλλαγή γραμμών. Τότε, να υπολογισθούν οι οδηγοί.

Απ. Με την υπόθεση ότι δεν γίνονται εναλλαγές γραμμών, για τους οδηγούς u_i ισχύει: $u_1 = D_1$, $u_i = D_i / D_{i-1}$: $u_1 = D_1 = 2$, $u_2 = D_2 / D_1 = -10 / 2 = -5$, $u_3 = D_3 / D_2 = 25 / (-10) = -2.5$, $u_4 = D_4 / D_3 = 40 / 25 = 8/5$.

γ1) (Π,Α) (Σ/Λ) Έστω ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός μητρώου A είναι $\varphi(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^4-2\lambda^2-3\lambda+16$. Τότε το A είναι αντιστρέψιμο.

Απ. Προφανώς ο σταθερός όρος του $\varphi(\lambda)$ είναι $-2^4+16=0$, και συνεπώς το 0 είναι μια ρίζα του, άρα και ιδιοτιμή. Επομένως το A είναι ιδιάζον. (λάθος)

γ2) (Π,Α) (Σ/Λ) Αν $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ είναι συμμετρικά τότε και το AB θα είναι συμμετρικό.

Απ. Δεν προκύπτει από τις γνωστές ιδιότητες πράξεων σε μητρώα τέτοια ιδιότητα. *Αντιπαράδειγμα:* Αν $A=[1 \ 1; 1 \ 0]$, $B=[0 \ 0; 0 \ 1]$ δύο συμμετρικά μητρώα, τότε $AB=[0 \ 1; 0 \ 0]$, μη συμμετρικό. (λάθος)

γ3) (Σ/Λ) Αν τα διανύσματα $u_1, u_2 \in \mathbf{R}^2$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους, τότε το μητρώο $u_1 u_1^T + u_2 u_2^T$ είναι ιδιάζον.

Απ.: παρόμοια με το (β2).

γ4) (Σ/Λ-απ.) Αν τα διανύσματα $u_1, u_2, u_3 \in \mathbf{R}^4$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους, τότε το μητρώο $u_1 u_1^T + u_2 u_2^T + u_3 u_3^T$ είναι ιδιάζον. (Απ. παρόμοια με το (β2)).

δ) (Μ) (Σ/Λ) Όλα τα ιδιάζοντα μητρώα $A \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ με $\text{diag}(A) \neq \mathbf{0}$ διαγωνιοποιούνται.

Απ. Αφού A ιδιάζον ή μια ιδιοτιμή, έστω λ_1 , είναι 0. Η συνθήκη $\text{diag}(A) \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$ δεν εξασφαλίζει ότι η άλλη ιδιοτιμή λ_2 είναι $\neq 0$ (τότε το A θα ήταν διαγωνοποιήσιμο, ως έχον δύο διαφορετικές ιδιοτιμές). Πράγματι είναι $\lambda_2 = \text{trace}(A) = a_{11} + a_{22}$. Αν $a_{11} \neq -a_{22}$, τότε $\lambda_2 \neq 0$ και το A διαγωνοποιήσιμο. Αν $a_{11} = -a_{22}$, τότε $\lambda_2 = 0$ με $\text{rank}(A) = 1$ ($\text{rank}(A) \neq 0$, αφού είναι $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$). Αυτό σημαίνει ότι στη διπλή ιδιοτιμή 0 αντιστοιχεί ο ιδιοχώρος $V(0)$ με $\dim(V(0)) = \dim(N(A)) = 2 - \text{rank}(A) = 1$, δηλ. θα υπάρχει μόνον ένα ιδιοδιάνυσμα. Άρα το A μη διαγωνοποιήσιμο. Επομένως λάθος.

2^ο απάντηση (ισοδύναμη). Το μητρώο $A = [2, -4; 1, -2]$ είναι ιδιάζον και ισχύει $\text{diag}(A) = [2, -2] \neq \mathbf{0}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Υπάρχει όμως μόνον ένα ιδιοδιάνυσμα, το $v = (2, 1)$.

δ) (Μ) Δίνεται $A \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ με $\text{diag}(A) = (1, 1, 1)^T$. Αν είναι γνωστό ότι το A έχει μια διπλή ιδιοτιμή $\mu = 2$, τότε να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές του μητρώου $(A + 5I)^{-1}$.

Απ. Αν λ ιδιοτιμή του A , τότε η $\lambda + p$ είναι ιδιοτιμή του $A + pI$ και η $1/(\lambda + p)$ ιδιοτιμή του $(A + pI)^{-1}$. Αφού $\mu (= \mu_1 = \mu_2)$ διπλή, τότε η τρίτη ιδιοτιμή του A είναι: $\mu_3 = \text{trace}(A) - 2\mu = 3 - 2\mu$. Επομένως οι ιδιοτιμές του $(A + 5I)^{-1}$ είναι: $1/(\mu + p) = 1/(2 + 5) = 1/7$ (διπλή), $1/(3 - 2\mu + p) = 1/(3 - 4 + 5) = 1/4$.

ε) (Α) Το σύνολο T_n όλων των τετραγωνικών μητρώων $C \in \mathbf{R}^{n \times n}$ με $\text{trace}(C) = 0$ είναι διαν. υπόχωρος του δ.χ. $M_n(\mathbf{R})$ των $n \times n$ μητρώων. Ποια είναι η διάσταση? Να δοθεί μια βάση.

Απ. Σωστό αφού: (i) Το ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση μητρώων $\mathbf{0}_{n \times n} \in M_n(\mathbf{R})$ (μηδενικό $n \times n$ μητρώο) ανήκει στο T_n αφού $\text{trace}(\mathbf{0}_{n \times n}) = 0$ ($T_n \neq \emptyset$). (ii) Αν $X, Y \in T_n$ και $c \in \mathbf{R}$, τότε $\text{trace}(X + cY) = \text{trace}(X) + c \text{trace}(Y) = 0 + 0 = 0$, δηλ. $X + cY \in T_n$ (πράξη κλειστή). Από (i) και (ii) έπεται ότι το T_n είναι υπόχωρος του δ.χ. $M_n(\mathbf{R})$. Προφανώς είναι $\dim(T_n) = \dim(M_n(\mathbf{R})) - n = n^2 - n$ και μια βάση: $B = \{e_i e_j^T / e_i, e_i \in \mathbf{R}^n, 1 \leq i, j \leq n \text{ με } i \neq j\}$, δηλαδή όλα τα $n \times n$ (πλήθους $n^2 - n$) μητρώα με 0 παντού και 1 σε μια θέση εκτός διαγωνίου.

ε2) (Μ,Α) Αν λ είναι ιδιοτιμή ενός διαγωνοποιήσιμου μητρώου A , τότε το $\lambda + \lambda^4$ θα είναι ιδιοτιμή του $A + A^4$.

Απ. Αν A διαγωνοποιήσιμο, τότε υπάρχει αντιστρέψιμο V (με τα ιδιοδιανύσματα) τέτοιο ώστε $A = V S V^{-1}$, όπου $S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ και λ_i ιδιοτιμή του A . Για τη δοθείσα δύναμη του A λαμβάνουμε άμεσα $A^4 = V S^4 V^{-1} \Rightarrow A^4 + A = V S^4 V^{-1} + V S V^{-1} = V(S^4 + S)V^{-1} = V(\text{diag}(\lambda_1^4 + \lambda_1^4, \dots, \lambda_n^4 + \lambda_n^4))V^{-1}$, δηλ. οι $\lambda_i + \lambda_i^4$ είναι ιδιοτιμές του $A^4 + A$. *Σχόλιο:* Η πρόταση ισχύει και για μη διαγωνοποιήσιμα μητρώα: Αν A μη διαγωνοποιήσιμο και λ μια ιδιοτιμή του, τότε $A v = \lambda v$ για $v \neq 0$ (1). Πολλαπλασιάζοντας αριστερά με A παίρνουμε $A A v = A \lambda v = \lambda^2 v, \dots, A^4 v = \lambda^4 v$ (2). Συνδυάζοντας τις (1), (2): $A^4 v + A v = \lambda^4 v + \lambda v$ ή $(A^4 + A)v = (\lambda^4 + \lambda)v$ δηλ. το $\lambda + \lambda^4$ είναι ιδιοτιμή του $A + A^4$.

ε) (Π,Α,Μ) (Σ/Λ) Όλα τα αντιστρέψιμα μητρώα διαγωνιοποιούνται.

Απ: Είναι φυσικά λάθος και μάλιστα ...σοβαρό!. Σκόπιμα, δεν δίνεται εδώ πλήρης απάντηση. Διαγωνιοποίηση και αντιστρεψιμότητα δεν συσχετίζονται. Η πρώτη διέπεται από δύο βασικά θεωρήματα, βλ. παρ/φο διδ. βιβλίου...

ζ) (Α) (Σ/Λ) Αν $AB = BA$, τότε θα είναι $\text{trace}(A) = \text{trace}(B)$.

Απ: Αν λάβουμε $A = I_n$, τότε για τυχαίο B είναι $B I_n = I_n B = B$. Όμως γενικά ισχύει $\text{trace}(B) \neq \text{trace}(I_n) = n$. Άρα λάθος.

ζ) (Α) Αν $A \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ είναι συμμετρικό και με ιδιοτιμές 1 και 0, τότε θα είναι μητρώο ορθογώνιας προβολής (αρκεί να δείξετε ότι: $A^2 = A$).

Απ. Αφού A συμμετρικό, ισχύει το φασματικό θεώρημα: $A = Q \Lambda Q^T \Rightarrow A^2 = Q(\text{diag}(0, 1))^2 Q^T = Q(\text{diag}(0, 1)) Q^T = A$.

ζ) (Σ/Λ) Αν για ένα μητρώο $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ισχύει $\forall x \neq 0 \ x^T A x > 0$, τότε όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές.

Απ. (δεκτή η υπόθεση ότι το A έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Στην περίπτωση αυτή η πρόταση είναι σωστή, διαφορετικά λάθος. Και οι δύο απαντήσεις λαμβάνονται ως σωστές). Έστω ότι το A έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Αν λ ιδιοτιμή, τότε $A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$ για $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ (ιδιοδιάνυσμα) $\Rightarrow \mathbf{v}^T A\mathbf{v}=\mathbf{v}^T \lambda\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}^T \mathbf{v}=\lambda\|\mathbf{v}\|^2>0\Rightarrow\lambda>0$ (σωστό). Αν $\lambda\in\mathbf{C}$, τότε η συνθήκη $\lambda\mathbf{v}^T \mathbf{v}>0$ δεν εξασφαλίζει ότι $\lambda>0$, αφού το \mathbf{v} , άρα και το $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$, είναι γενικά μιγαδικό (λάθος) (Σημ. στο χώρο \mathbf{C}^n το μέτρο ορίζεται ως $\|\mathbf{v}\|=(\mathbf{v}^* \mathbf{v})^{1/2}$, όπου \mathbf{v}^* συζυγές ανάστροφο, και όχι από το $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$ που γενικά είναι μιγαδικός).

ζ) Αν λ είναι ιδιοτιμή ενός όχι απαραίτητα διαγωνοποιήσιμου μητρώου A , τότε το $1+\lambda^8$ θα είναι ιδιοτιμή του $I+A^8$. Απ.: Όμοια με το (ε2).

I.2

I2-α. (Π,Α) Να αποδείξετε τυπικά (με τη βοήθεια σύνθετου μητρώου και της θεωρίας της απαλοιφής) ότι κάθε μητρώο $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ εκφράζεται $A=C L$, όπου C μητρώο με τις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A και L μητρώο με τις μη μηδενικές γραμμές της αναγμένης κλιμακωτής μορφής R του A . [Απ.: βλ. αναρτημένα κλειδιά θεμάτων & ασκήσεις ενότητας «Τάξη και Αναγμένη Κλιμακωτή Μορφή» στο διδ. βιβλίο]

I2-β. Να αποδείξετε τυπικά (με τη βοήθεια σύνθετου μητρώου και της θεωρίας της απαλοιφής) ότι αν $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$, τότε $A=\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1^T+\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2^T+\dots+\mathbf{x}_r\mathbf{y}_r^T$, όπου \mathbf{x}_i οι γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A , \mathbf{y}_i οι μη μηδενικές γραμμές του αναγμένου κλιμακωτού μητρώου R που αντιστοιχεί στο A και $r=\text{rank}(A)$. (Απ.: Όμοια με το (2α))

I.3

I3-α. (Π,Α) Να αποδείξετε ότι αν $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbf{R}^{n\times k}$, τότε ισχύει $\text{rank}(AB)\leq\min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$.

Απ. Δίνουμε εδώ μια πιο σύντομη απόδειξη, την ίδια που δόθηκε στο μάθημα (ασκήσεις επανάληψης):

Αρκεί να δείξουμε σε δύο βήματα ότι $\text{rank}(AB)\leq\text{rank}(A)$ και $\text{rank}(AB)\leq\text{rank}(B)$. Θεωρούμε τους υποχώρους $C(A)$, $C(AB)$ του δ.χ. \mathbf{R}^m . Ο $C(AB)$ είναι υποχώρος του $C(A)$ ($C(AB)=\text{span}(A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{b}_k)\subseteq C(A)=\text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)$), συνεπώς θα ισχύει $\dim(C(AB))\leq\dim(C(A))\Rightarrow\text{rank}(AB)\leq\text{rank}(A)$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα αυτό για το μητρώο $B^T A^T=(AB)^T$ λαμβάνουμε: $\text{rank}(B^T A^T)=\text{rank}((AB)^T)=\text{rank}(AB)\leq\text{rank}(B^T)=\text{rank}(B)$ και η απόδειξη είναι πλήρης.

I-3β. (Μ) Έστω $F\in\mathbf{R}^{m\times n}$ με $\text{rank}(F)=n$ και $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\in\mathbf{R}^n$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Τότε ομοίως και τα $F\mathbf{u}_1, F\mathbf{u}_2, \dots, F\mathbf{u}_n$ θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απ. Επειδή $\text{rank}(F)=n$, οι στήλες του F είναι γ.α., άρα $n\leq m$. Επίσης είναι: $[F\mathbf{u}_1, F\mathbf{u}_2, \dots, F\mathbf{u}_n]=F[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$. Άρα $\text{rank}([F\mathbf{u}_1, F\mathbf{u}_2, \dots, F\mathbf{u}_n])=\text{rank}(F[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n])\leq\text{rank}([\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n])=n\leq m$, απ' όπου προκύπτει $\text{rank}([F\mathbf{u}_1, F\mathbf{u}_2, \dots, F\mathbf{u}_n])=n$, δηλ. τα $F\mathbf{u}_i$ είναι γ.α.

Ισοδύναμη απάντηση: Αρκεί να δείξουμε: $[F\mathbf{u}_1, F\mathbf{u}_2, \dots, F\mathbf{u}_n]\mathbf{x}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Είναι $[F\mathbf{u}_1, F\mathbf{u}_2, \dots, F\mathbf{u}_n]\mathbf{x}=F[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]\mathbf{x}=\mathbf{0}\Rightarrow[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]\mathbf{x}=\mathbf{0}$, διότι $\dim(N(F))=n-\text{rank}(F)=0$. Αλλά τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ είναι γ.α., και άρα είναι $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

I-3γ. (Μ, Α) Να αποδείξετε τυπικά ότι αν το $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ έχει γραμμικά ανεξάρτητες στήλες, τότε το μητρώο $A^T A$ είναι αντιστρέψιμο.

Απ. Αρκεί να δείξουμε τη συνεπαγωγή: $A^T A\mathbf{x}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Αν \mathbf{x} τέτοιο ώστε $A^T A\mathbf{x}=\mathbf{0}$, τότε θα ισχύει και $\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}=(A\mathbf{x})^T A\mathbf{x}=\|A\mathbf{x}\|^2=0\Rightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Όμως το A έχει γραμμικά ανεξάρτητες στήλες, δηλ. θα είναι $\text{rank}(A)=n$ και $\dim(N(A))=n-\text{rank}(A)=0$, επομένως $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

I-3δ. (Α, Μ) Να υπολογισθούν οι ιδιάζουσες τιμές του μητρώου $A=[1, 3; -1 -3]$.

Απ. Είναι $A^T A=[2, 6; 6, 18]$ με $\text{rank}(A^T A)=1$. Επομένως $\lambda_1=0$ και $\lambda_2=\text{trace}(A^T A)=20$, δηλ. $\sigma_1=\sqrt{20}=4.4721$ και $\sigma_2=0$.

Π.

1. **(Π,Α,Μ)** Δίνεται $A=[2, 3, 0, 0; -2, -2, 4, 0; 1, 2, 2, 0; 6, 1, -1, 1]$. Χωρίς να υπολογίσετε καθόλου υπο-ορίζουσες, υπολογίστε την ορίζουσα του A , $\det(A)$.

Απ. Μετατρέπουμε το A σε κάτω τριγωνικό (αφού δεν απέχει πολύ από το να είναι) και έχουμε:

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & -8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = L$$

Έπεται $\det(A)=\det(L)=0$, διότι ο κάτω τριγωνικός L έχει έναν μηδενικό οδηγό.

2. **(Π,Μ)** Ορίζουμε $B \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$ με $B=[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{0}]A$, όπου $\mathbf{e}_i \in \mathbf{R}^4$ και A το μητρώο του ερ. (1). Να υπολογίσετε συστηματικά δύο αντιστρέψιμα μητρώα Q, P τέτοια ώστε: $QBP=N=[\mathbf{I}_r, \mathbf{0}; \mathbf{0}, \mathbf{0}]$, όπου $N \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$, $r=\text{rank}(B)$.

Απ. Είναι:

$$B=[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{0}]A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Αφού από το (Π.1) είναι $\det(A)=0$, γνωρίζουμε από τώρα (χωρίς απαλοιφή!) την τάξη του B : $r=\text{rank}(B)=2$. (διαφορετικά - δεν χάθηκε ο κόσμος - το διαπιστώνουμε ευθύς μετά...)

Από τη θεωρία: το $N=[\mathbf{I}_2, \mathbf{0}; \mathbf{0}, \mathbf{0}] \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$ είναι η **κανονική μορφή** του B (ως προς την τάξη) και προκύπτει από το μετασχηματισμό γραμμών στο B : $R=PB$ (όπου R η αναγμένη κλιμακωτή μορφή) και το μετασχηματισμό στηλών στο R : $N=RQ=PBQ$. Τα P, Q είναι τα ζητούμενα μητρώα, των οποίων η ύπαρξη και αντιστρεψιμότητα είναι δεδομένη από τη θεωρία της απαλοιφής. Το P υπολογίζεται από το μετ/σμό γραμμών $P[B|I_4] = [R|P]$, ενώ το Q από το μετ/σμό στηλών $[R|I_4]Q = [N|Q]$. Παίρνουμε λοιπόν (Σημ: ισοδύναμα, τα P και Q θα μπορούσαν να ληφθούν και ως γινόμενα στοιχειωδών μητρώων απαλοιφής γραμμών και στηλών αντίστοιχα):

• **$[B|I_4] \rightarrow [R|P]$:**

$$[B|I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r1=r1-3r2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & -12 & 0 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -6 & 0 & -1 & -3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [R|P]$$

• **$[R|I_4] \rightarrow [N|Q]$:**

$$[R|I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{c3=c3+6c1 \\ c3=c3-4c2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [N|Q]$$

3. **(Μ,Α)** Δίνονται τα μητρώα (α) $X=[0.4, 0.5; 1, 0.1]$, (β) $Y=[2, 1; -4, -2]$. Για το καθένα, να εξετάσετε τυπικά εάν και σε ποιο μητρώο συγκλίνει η ακολουθία δυνάμεων $\{X^k\}$, $k \in \mathbf{Z}^+$, καθώς αυξάνεται ο εκθέτης k .

Απ. α) Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του X :

$$\varphi_X(x) = \det(X-\lambda I) = \begin{vmatrix} 0.4-\lambda & 0.5 \\ 1 & 0.1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0.5\lambda + 0.04 - 0.5 = \lambda^2 - 0.5\lambda - 0.46 = 0$$

απ' όπου: $\lambda_1=0.9728 < 1$, $\lambda_2=-0.4728 < 1$. Από τον τύπο της διαγωνιοποίησης έχουμε:

$$X^k = V \Lambda^k V^{-1} = V \text{diag}(0.9728, -0.4728)^k V^{-1} \rightarrow V \mathbf{0} V = \mathbf{0} \text{ του } k \text{ τείνοντος στο } \infty.$$

β) Εύκολα διαπιστώνουμε: $Y^2=[2, 1; -4, -2]*[2, 1; -4, -2]=\mathbf{0}_{2 \times 2}$ δηλ. $Y^k=\mathbf{0}$, για $k \geq 2$. (Πιο τυπικά: άμεσα προκύπτει ότι $\lambda_1=0, \lambda_2=0$, άρα $\Lambda=\mathbf{0}$, δηλ. $Y^k=\mathbf{0}, k \geq 2$).

III. [M,A]

Θεωρούμε το μητρώο B του ερ. (II.2). Ζητούνται:

(α) Να βρεθεί η αναγμένη κλιμακωτή μορφή R του B μετά από εφαρμογή απαλοιφής. (β) Βάσει της μορφής R , να εκφράσετε κατάλληλα το B ως άθροισμα εξωτερικών γινομένων $\mathbf{c}_i \mathbf{y}_i^T$, προσδιορίζοντας επακριβώς τα διανύσματα \mathbf{c}_i και \mathbf{y}_i . (γ) Να βρεθεί ο $N(B)$ (βάση και διάσταση). (δ) Θεωρούμε τώρα το σύστημα $B\mathbf{x}=\boldsymbol{\beta}$. Για ποια $\boldsymbol{\beta}$ υπάρχει λύση; Να υπολογισθεί συστηματικά η πλήρης λύση για $\boldsymbol{\beta}=(1,0,1,0)^T$.

(α) Απ. Είναι:

$$B=[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{0}], A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εύκολα βρίσκουμε (αν δεν το βρήκαμε ήδη στο ερ. II2) την αναγμένη κλιμακωτή μορφή R :

$$[B | \boldsymbol{\beta}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 & \beta_1 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & \beta_2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & \beta_1 + \beta_2 \\ 0 & 1/2 & 2 & 0 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & \beta_1 + \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 - \beta_1 - \beta_2 / 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_4 \end{array} \right] \xrightarrow[r1=r1/2]{r1=r1-3r2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & -(2\beta_1 + 3\beta_2)/2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & \beta_1 + \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 - \beta_1 - \beta_2 / 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_4 \end{array} \right] = [R | \mathbf{d}] \quad (1)$$

Είναι $\text{rank}(B)=\text{rank}(R)=2$.

(β) Από τη διάσπαση $B=CL$ (C με τις ανεξάρτητες στήλες του B και L με τις μη μηδενικές γραμμές του R) βρίσκουμε άμεσα:

$$B=(2,-2,1,0)^T(1,0,-6,0) + (3,-2,2,0)^T(0,1,4,0) \quad (\text{II})$$

(γ) Είναι $\dim(N(B))=n-\text{rank}(B)=4-2=2$. Βρίσκουμε τώρα μια βάση από τις ειδικές λύσεις $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ του ομογενούς συστήματος $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$ ή του ισοδύναμου $R\mathbf{x}=\mathbf{0}$: Για $x_3=1, x_4=0 \Rightarrow x_2=-4, x_1=6 \Rightarrow \mathbf{s}_1=[6, -4, 1, 0]^T$. Για $x_3=0, x_4=1 \Rightarrow x_2=0, x_1=0 \Rightarrow \mathbf{s}_2=[0, 0, 0, 1]^T$, δηλαδή μια βάση του $N(B)$ είναι η \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \{ [6, -4, 1, 0]^T, [0, 0, 0, 1]^T \}$$

(δ) Απ. Για να υπάρχει λύση πρέπει $\text{rank}(B | \boldsymbol{\beta})=\text{rank}(R | \mathbf{d})=\text{rank}(\mathbf{d})$, δηλαδή (από την (1)) θα ισχύει:

$$\beta_3 - \beta_1 + \beta_2 / 2 = 0, \beta_4 = 0$$

Για $\boldsymbol{\beta}=(1,0,1,0)^T$ παίρνουμε $\mathbf{d}=(-1,1,0,0)^T$, οπότε το προς επίλυση σύστημα είναι το $R\mathbf{x}=\mathbf{d}$. Η μερική του λύση λαμβάνεται για $x_3=x_4=0$: $\mathbf{x}_\mu=(-1,1,0,0)^T$. Οι άπειρες λύσεις του (πλήρης λύση) δίνονται:

$$\mathbf{x}_\pi = (-1,1,0,0)^T + c_1 (6, -4, 1, 0)^T + c_2 (0, 0, 0, 1)^T, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

IV. [M,A]

1. Δίνονται στον χώρο \mathbf{R}^3 το διάνυσμα $\alpha=(1,1,0)^T$ και η ευθεία (E) που ορίζεται από το $\mathbf{u}=(1,2,1)^T$. Θεωρούμε τώρα επίπεδο V ορθογώνιο στο \mathbf{u} . (α) Να υπολογισθεί η προβολή του α επί της (E). (β) (II) Από ποια εξίσωση ορίζεται το V ; Προσδιορίστε ορθοκανονική βάση B για το V . (γ) Με βάση την B , να υπολογισθεί η ορθογώνια προβολή $P\mathbf{u}$ του \mathbf{u} επί του V . (γ) Με βάση την B , να υπολογισθεί η ορθογώνια προβολή $P\mathbf{u}$ του \mathbf{u} επί του V . (δ) Πώς εκφράζεται τώρα το \mathbf{u} βάσει των προβολών των (α) και (γ);

Απ. (α) Αν p προβολή του α επί της ευθείας (E) και P το μητρώο προβολής:

$$p=P\alpha=(\mathbf{u}\mathbf{u}^T/(\mathbf{u}^T\mathbf{u}))\alpha=1/6\times(1,2,1)^T(1,2,1)(1,1,0)^T=1/6(1,2,1)^T\times3=1/2\times(1,2,1)^T=(0.5, 1, 0.5)^T$$

(β) Είναι $A=[1, 2, 1]^T$ και το V ορίζεται από το μηδενικό χώρο του A^T (αριστερός μηδενικό χώρος $V=N(A^T)$): $[1, 2, 1] [x, y, z]^T=0 \Rightarrow x+2y+z=0$. Προφανώς $\dim(V)=2$.

Βρίσκουμε μία βάση S του V : για $y=1, z=0 \Rightarrow x=-2$ $\mathbf{s}_1=[-2, 1, 0]^T$ και για $y=0, z=1 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow \mathbf{s}_2=[-1, 0, 1]^T$. Επομένως μία βάση είναι η $S=\{-2, 1, 0\}^T, [-1, 0, 1\}^T$. Από αυτήν μπορούμε τώρα να βρούμε μία ορθοκανονική βάση B . Βρίσκουμε πρώτα δύο ορθογώνια διανύσματα:

$$\mathbf{q}_1=\mathbf{s}_1=[-2, 1, 0]^T \\ \mathbf{q}_2=\mathbf{s}_2-(\mathbf{s}_2^T\mathbf{q}_1/\mathbf{q}_1^T\mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1=\dots=1/5[-1, -2, 5]^T$$

και στη συνέχεια κανονικοποιούμε: $B_1=\mathbf{q}_1/\|\mathbf{q}_1\|, B_2=\mathbf{q}_2/\|\mathbf{q}_2\|$. Τα μέτρα είναι $\|\mathbf{q}_1\|=\sqrt{5}, \|\mathbf{q}_2\|=\sqrt{30}/5$. Συνεπώς η ορθοκανονική βάση θα είναι η $B=\{B_1, B_2\}$, με:

$$B_1=\mathbf{q}_1/\|\mathbf{q}_1\|=1/\sqrt{5}[-2, 1, 0]^T \\ B_2=\mathbf{q}_2/\|\mathbf{q}_2\|=1/\sqrt{30}[-1, -2, 5]^T$$

(γ) Το \mathbf{u} προφανώς είναι κάθετο στο V , επομένως: $P\mathbf{u}=BB^T\mathbf{u}=0$

(δ) Προφανώς το \mathbf{u} είναι συγγραμμικό με την προβολή $P\alpha$: $\mathbf{u}=[1, 2, 1]^T=2P\alpha+0=2P\alpha$

2. Θεωρούμε ότι για την προσέγγιση του γραφήματος μιας πραγματικής συνάρτησης $y=f(x)$ γνωρίζουμε τα σημεία $(x_i, f_i(x_i))$ ($i=1, \dots, 4$): $(0, 1.0), (1, 1.8), (2, 2.4), (3, 3.2)$. Για την προσέγγιση χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση $g(t)=c_1+c_2t^2+c_3t^3$, όπου οι συντελεστές c_i προσδιορίζονται με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. (α) Να δοθεί συναρτήσε των c_i η ποσότητα που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί. (β) Να δοθεί το γραμμικό σύστημα που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση (να μην γίνει επίλυση).

Απ. (α) Το αρχικό (ασυμβίβαστο) σύστημα που προκύπτει από τα δεδομένα του προβλήματος είναι το $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, με:

$$A=[1 \ 0 \ 0; 1 \ 1 \ 1; 1 \ 4 \ 8; 1 \ 9 \ 27], \quad \mathbf{b}=[1.0, 1.8, 2.4, 3.2]^T$$

Η ποσότητα που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί είναι το μέτρο $\|A\mathbf{c}-\mathbf{b}\|$ της απόκλισης του A από το \mathbf{b} . Η απόκλιση είναι συνάρτηση 3 μεταβλητών, των c_1, c_2, c_3 , και δίνεται ως εξής:

$$\|A\mathbf{c}-\mathbf{b}\|^2 = 1 + (c_1+c_2+c_3-1.8)^2 + (c_1+4c_2+8c_3-2.4)^2 + (c_1+9c_2+27c_3-3.2)^2$$

(β) Το σύστημα που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της παραπάνω ποσότητας $\|A\mathbf{c}-\mathbf{b}\|^2$ είναι το:

$$A^T A\mathbf{c}=A^T \mathbf{b},$$

όπου:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 14 & 36 \\ 14 & 98 & 276 \\ 36 & 276 & 794 \end{bmatrix} \quad A^T \mathbf{b} = [8.4, 40.2, 107.4]$$

(Προαιρετικά) λύνοντας βρίσκουμε:

$$\mathbf{c} = (1.1287, 0.5774, -0.1166)^T$$

V.

1. [M, Π, A] Δίνεται το μητρώο $A=[2, 1, 0; 1, 3, -1; 0, -1, 2]$.

α) Πριν από κάθε πράξη, να εξηγήσετε αν το A διαγωνιοποιείται και γιατί, δίνοντας τον ισχύοντα μετασχηματισμό διαγωνιοποίησης. **β)** Να υπολογίσετε όλες τις ιδιοτιμές του A . **γ)** Να βρείτε μια πλήρη βάση ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων του A . **δ)** Εκφράστε τέλος στην τελική του μορφή το μετασχηματισμό διαγωνιοποίησης.

Απ. α) Το μητρώο A είναι συμμετρικό και επομένως ισχύει γι' αυτό το **φασματικό θεώρημα για τα συμμετρικά μητρώα**: υπάρχουν μια πλήρης ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων Q και $\Lambda=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ διαγώνιο μητρώο με τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ του A (οι οποίες για συμμετρικά μητρώα είναι πραγματικές), τέτοια ώστε να ισχύει ο μετασχηματισμός $A=Q\Lambda Q^T$. Το Q περιέχει την ορθοκανονική βάση των ιδιοδιανυσμάτων.

β) Βρίσκουμε τώρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A :

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & -4+\lambda \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda)(4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) \end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του $\phi(\lambda)$: $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=4$ (πραγματικές, όπως αναμενόταν).

γ) Βρίσκουμε τους ιδιοχώρους $V(\lambda_i)=N(A-\lambda_i I)$, $i=1,2,3$, (λύνοντας τα αντίστοιχα ομογενή συστήματα) και κανονικοποιούμε (παραλείπονται οι πράξεις, αλλά προσοχή: για την εύρεση του ελάχιστου μηδενωχώρου, πρέπει να μετατρέπεται το A σε U και μετά να τίθενται τιμές στις ελεύθερες μεταβλητές – μία κάθε φορά):

$$\text{Για } \lambda_1=1: (A-I)\mathbf{x}=0 \Rightarrow \mathbf{u}_1=(-1,1,1)^T \Rightarrow \mathbf{q}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^T$$

$$\text{Για } \lambda_2=2: (A-2I)\mathbf{x}=0 \Rightarrow \mathbf{u}_2=(1,0,1)^T \Rightarrow \mathbf{q}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T$$

$$\text{Για } \lambda_3=4: (A-4I)\mathbf{x}=0 \Rightarrow \mathbf{u}_3=(-1,-2,1)^T \Rightarrow \mathbf{q}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-2,1)^T$$

δ) Από τα παραπάνω λαμβάνουμε $Q=[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]$ και $Q^T=[\mathbf{q}_1^T; \mathbf{q}_2^T; \mathbf{q}_3^T]$, δηλ.:

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \Rightarrow Q^T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ A &= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. [M, A] Να υπολογίσετε το αντίστροφο του μητρώου A του ερ. (1α) χρησιμοποιώντας απαραίτητα και μόνον το θεώρημα Cayley-Hamilton.

Απ. Σύμφωνα με το Θ. το θεώρημα Cayley-Hamilton, κάθε μητρώο A επαληθεύει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Είναι:

$$\phi(\lambda)=(2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda)=(8-2\lambda-4\lambda+\lambda^2)(1-\lambda)=(\lambda^2-6\lambda+8)(1-\lambda)=\lambda^2-6\lambda+8-\lambda^3+6\lambda^2-8\lambda=-\lambda^3+6\lambda^2-14\lambda+8$$

Επομένως θα ισχύει: $\phi(A)=-A^3+6A^2-14A+8=0$, απ' όπου διαιρώντας με A :

$$-A^2+6A-14I+8A^{-1}=0 \Rightarrow A^{-1}=1/8(A^2-6A+14I)$$

$$\text{Υπολογίζουμε: } A^2 = [5, 5, -1; 5, 11, -5; -1, -5, 5] \text{ και τελικά: } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.25 & -0.125 & 0.125 \\ -0.125 & 1 & -0.125 \\ 0.125 & -0.125 & 1.25 \end{bmatrix}$$