Ονοματεπώνυμο:...................................... Α.Μ:........... Έτος:.... Θέση:............

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ - Πρόοδος, Μάιος 2011

Διαβάστε προσεκτικά τις εκφωνήσεις. ***Για την πλήρη βαθμολόγηση του γραπτού σας πρέπει να παρουσιάσετε όλο σας τον συλλογισμό, επαρκή αιτιολόγηση σε όλες τις απαντήσεις σας και όλα τα ενδιάμεσα στάδια.*** *Αν τα αποτελέσματα δεν προκύπτουν από τους υπολογισμούς στο γραπτό (πρόχειρους και μη), δεν βαθμολογείστε για την ερώτηση.* ***Στις ερωτήσεις Σωστό/Λάθος βαθμολογείστε μόνον αν αιτιολογήσετε/αποδείξετε την απάντησή σας.*** *Η σαφήνεια και η ευκρίνεια του γραπτού σας θα εκτιμηθούν ιδιαίτερα! Σε όλες τις ερωτήσεις, όπου δεν αναφέρεται ή δεν φαίνεται από την εκφώνηση το μέγεθος ή το είδος των στοιχείων ενός μητρώου, θεωρείται ότι είναι τετραγωνικού μεγέθους με n με πραγματικά στοιχεία. Όπως και στην τάξη, το σύμβολο «;» σημαίνει αλλαγή γραμμής,*

π.χ. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ *γράφεται και ως [1,2;3,4]. Επίσης* e_i *είναι το i στοιχείο της τυπικής βάσης του χώρου* R^n.

I. [25μ]

1. Να απαντήσετε σύντομα και περιεκτικά στις παρακάτω ερωτήσεις (αν είναι Σ/Λ να αιτιολογήσετε την απάντησή σας)

α) Αν $A\in R^{n\times n}$, $\boldsymbol{e}=[1,1,\ldots 1]^T$, $\boldsymbol{e}_i=i$ γραμμή του I_n, να εκφράσετε με γινόμενα των A, $\boldsymbol{e}$ και $\boldsymbol{e}_i$ τα: (*i*) αθροίσματα γραμμών του A, (*ii*) αθροίσματα στηλών του A, (*ii*) μέσο όρο όλων των στοιχείων του.

β)(Σ/Λ - απόδειξη) Οι στήλες οδηγών του κλιμακωτού μητρώου U που προκύπτει από την απαλοιφή ενός μητρώου $A\in R^{m\times n}$ αποτελούν βάση του χώρου στηλών του A.

γ) Έστω A τετραγωνικό και διανύσματα $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ τέτοια ώστε $A\boldsymbol{x}=0$ και $A^T\boldsymbol{y}=c\boldsymbol{y}$, όπου $c\in R-\{0\}$. Τότε τα $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

δ) (Σ/Λ - απόδειξη) Για κάθε $A\in R^{m\times n}$, υπάρχουν αντιστρέψιμοι $Q\in R^{n\times n}$, $G\in R^{m\times m}$, τέτοιοι ώστε $QAG=N$, όπου $N=[\boldsymbol{I}_r\ 0;\ 0\ 0]$ (*κανονική μορφή* του A,).

2. Έστω $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & b & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ a & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,όπου a,b πραγματικοί. Χωρίς να υπολογίσετε το A:

(α) να εξετάσετε πότε είναι αντιστρέψιμο, (β) Να υπολογίσετε το A^T, (β) Να υπολογίσετε το A^{-1}.

3. Δίνεται $A=[2,2,-1;0,1,4;1,3,1]$. Εφαρμόζουμε στο A διαδοχικά τους εξής μετασχηματισμούς (σε κάθε βήμα, θεωρούμε τα στοιχεία του μητρώου αποτελέσματος που δεν αναφέρονται ίδια με τα αντίστοιχα στοιχεία του μητρώου ορίσματος):

a. Διπλασιασμός της 2ης στήλης του A.
b. Διαγραφή της 3ης γραμμής του αποτελέσματος του (a).
c. Πρόσθεση της 1ης γραμμής στη 2η γραμμή του αποτελέσματος του (b).
d. Εναλλαγή των στηλών 1 και 3 του αποτελέσματος του (c).
e. Αφαίρεση της 2ης στήλης από την 1η του αποτελέσματος του (d).

Έστω T το μητρώο που αναπαριστά τον τελικό μετασχηματισμό. Να εκφράσετε το T ως γινόμενο $T=BAC$, όπου B, C κατάλληλα μητρώα τα οποία πρέπει να υπολογίσετε. (Υπόδειξη: να εκφράσετε πρώτα τα B, C ως γινόμενα μητρώων που προκύπτουν από το μετασχηματισμό που πραγματοποιούν).

II. [30μ]

1. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$, με $A=[2,\ 1,\ 3;\ 2,\ 2,\ \alpha;\ 4,\ 2,\ 10]$ και $\boldsymbol{b}=(2,\ c,\ 0)^T$, όπου a, c πραγματικές παράμετροι. Για την επίλυσή του εφαρμόζουμε τυπικά απαλοιφή *Gauss*.

(α) Για ποιές τιμές των a, c υπάρχουν λύσεις?

(β) Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση rank(A)≠3:

(i) δώστε το μηδενοχώρο N(A)

(ii) Υπολογίστε με τυπικό τρόπο τις λύσεις του συστήματος.

(iii) Εξηγείστε πως το A μπορεί να εκφρασθεί ως άθροισμα *εξωτερικών γινομένων* $\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{y}_i^T$ όπου $\boldsymbol{c}_i$ είναι οι στήλες οδηγών του A. Να δώσετε την έκφραση αυτή προσδιορίζοντας επακριβώς τα $\boldsymbol{c}_i$ και $\boldsymbol{y}_i$.

2. Στο μητρώο A του ερ. (1) θέτουμε α=0. Εκφράστε το A στη μορφή $A=LU$, όπου L κάτω τριγωνικό με μονάδες στη διαγώνιο και U άνω τριγωνικό.

III. [20μ]

1. Δίνεται το σύστημα [-1, 2;-2,2] [x_1; x_2] = [1; -1]. Στο επίπεδο (x_1, x_2) να σχεδιάσετε και να εξηγήσετε τη λύση μέσω α) της γεωμετρικής ερμηνείας γραμμών και β) της γεωμετρικής ερμηνείας στηλών (να σημειωθούν καθαρά όλες οι απαραίτητες συντεταγμένες).

2. Δίνεται $V=\text{span}((1,1,2)^T, (3,1,4)^T)$. Αν $v=(a, 1, b)^T$, ποια σχέση πρέπει να συνδέει τα a και b, ώστε $v \in V$;

3. Δίνεται $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \mu & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Εφαρμόζοντας <u>απαραίτητα</u> πράξεις σύνθετων (block) μητρώων, να υπολογίσετε το μητρώο A^{-1}. Για ποιά τιμή του μ αυτό δεν ορίζεται? (Υπόδ.: διαχωρίστε κατάλληλα το A και υπολογίστε το AA).

4. Να δείξετε ότι αν $A \in R^{m\times n}$, $B \in R^{n\times k}$, τότε ισχύει $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$.

IV. [25μ]

(α) Ζητείται η προβολή του διανύσματος $w=(1,2,3,4)^T$ στον χώρο που παράγεται από τα διανύσματα $v_1=(1,1,1,1)^T$, $v_2=(1,2,2,1)^T$, $v_3=(2,1,1,3)^T$.

(β) Έστω ότι η προβολή είναι $u=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3$. Για να βρούμε τα a_1, a_2, a_3, ποιο σύστημα πρέπει να λύσουμε; (να μη λύσετε το σύστημα).

Καλή Επιτυχία!