Φροντιστήριο 24-2-2017

Άσκηση 5, κεφάλαιο 1.1

$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, Να βρείτε: α) $u+v$

β) $u+v+w$

γ) $2u+2v+2w$

α) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

β) $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

γ) $2u+2v+2w = 2(u+v+w) = 2 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$

Άσκηση

Να ελέγξετε αν γίνονται οι πολλαπλασιασμοί.

A 3×5, B 5×3, Γ 5×1, Δ 3×1

BA $\rightarrow (5\times3)(3\times5) = 5\times5$

AB $\rightarrow (3\times5)(5\times3) = 3\times3$

ABΔ $\rightarrow (3\times3)(3\times1) = 3\times1$

ΔBA $\rightarrow (3\times1)(5\times5)$ Δεν Γίνεται

A(B+Γ) = AB + AΓ $= (3\times3) + (3\times1)$ Δεν είναι σύμμορφα

Άσκηση 3, Κεφάλαιο 2.4

$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Gamma = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times0+5\times0 & 1\times2+5\times1 \\ 2\times0+3\times0 & 2\times2+3\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

$A\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

$A(B+\Gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

Άσκηση, Κεφάλαιο 2.4

Να ελέγξετε αν $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2AB = 2 \times \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

Οπότε προκύπτει ότι $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
Αυτό συμβαίνει γιατί $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

Άσκηση 5, κεφάλαιο 2.4

$A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Να υπολογιστεί: α) $A^2, A^3, \ldots$
β) $A, B^3, \ldots$

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Γενικά $A^n = \begin{bmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $B^n = \begin{bmatrix} 2^n & 2^n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ή $B^n = 2^{n-1} B$

Άσκηση 7, Κεφάλαιο 2.4

Έχουμε 3 μητρώα A, B, C

α) Αν οι στήλες 1, 3 του B είναι ίδιες, τότε και οι στήλες 1, 3 του AB είναι ίδιες. ΣΩΣΤΟ

πχ. $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1a_1 + y_1a_2 + z_1a_3 & \dots & x_1a_1 + y_1a_2 + z_1 \\ & \dots & \end{bmatrix}$

β) Αν οι γραμμές 1, 3 του B είναι ίδιες, τότε και οι γραμμές 1, 3 του AB είναι ίδιες. ΛΑΘΟΣ

Θα ίσχυε για το BA.

γ) Αν οι γραμμές 1, 3 του A είναι ίδιες, τότε και οι γραμμές 1, 3 του ABC είναι ίδιες. ΣΩΣΤΟ

δ) $(AB)^2 = A^2B^2$ ΛΑΘΟΣ

$(AB)^2 = AB \times AB$

Άσκηση

Να υπολογίσετε τα μητρώα.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{4\times4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{4\times2} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 6 \\ 4 & 16 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}_{4\times2}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times5} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{5\times2} = \begin{bmatrix} 6 & 19 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.2 3-3-2017

3)

$$u = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad w = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$v_\mu = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{9+16}} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$w_\mu = \frac{w}{\|w\|} = \frac{1}{\sqrt{9+16}} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\cos\theta = \frac{vw}{\|v\|\|w\|} = \frac{3\cdot4 + 4\cdot3}{3\cdot5} = \frac{24}{25}$$

$w \xrightarrow{0} w$

$\xrightarrow{\pi} -w$

$\xrightarrow{\pi/4} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Άσκηση 8

$R^3 \quad u \perp w \quad u \perp v \quad w // v$

β) $u \perp v, w \Rightarrow u \perp v + 2w$

Πρέπει $u(v+2w) = 0 \Rightarrow \overset{0}{\cancel{uv}} + 2\overset{0}{\cancel{uw}} = 0$

γ) $u \perp v \quad \|u-v\| = \sqrt{2} \quad u, v$ μοναδιαίοι $\Rightarrow \|u\| = \|v\| = 1$

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \overset{0}{\cancel{2\|u\|\|v\|\cos\theta}} = 1+1 \Rightarrow \sqrt{u-v\|} = \sqrt{2}$$

$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad w - cv \perp v$

$$(w-cv)v = 0 \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} - c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-c \\ 5-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - c + 5 - c = 0 \Rightarrow c = 3$$

Γενικός τύπος

$$(w-cv)v = \vec{O} \Rightarrow \vec{w}\vec{v} - c\vec{v}\vec{v} = \vec{O} \Rightarrow \vec{w}\vec{v} = c\vec{v}\vec{v} \Rightarrow c = \frac{\vec{w}\vec{v}}{\vec{v}\vec{v}}$$

25)

$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad |uw| \leq \|v\|\|w\|$

$$(v_1 w_1 + v_2 w_2)^2 \leq (v_1^2 + v_2^2)(w_1^2 + w_2^2) \Rightarrow$$
$$\cancel{v_1^2 w_1^2} + \cancel{v_2^2 w_2^2} + 2 v_1 w_1 v_2 w_2 \leq \cancel{v_1^2 w_1^2} + v_1^2 w_2^2 + v_2^2 w_1^2 + \cancel{v_2^2 w_2^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_1^2 w_2^2 + v_2^2 w_1^2 - 2 v_1 w_1 v_2 w_2 \geq 0 \Rightarrow (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 \geq 0$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.4

Άσκηση 9

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & b+c \end{bmatrix}$

$(EA)F = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+b \\ a+c & a+b+c+d \end{bmatrix}$

$AF = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix}$

$E(AF) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+b \\ a+c & a+b+c+d \end{bmatrix}$

Άσκηση 11

Επιλέξτε τον μοναδικό B ώστε για κάθε πίνακα A: (3x3)

a) $BA = 4A \Rightarrow B = 4I$

β) $BA = 4B \Rightarrow B = 0$

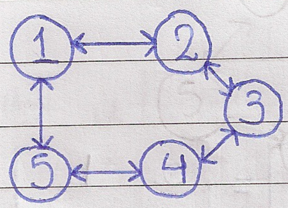
γ) Ο BA να έχει τις γραμμές 1,3 του A αντεστραμμένες.

$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

δ) Όλες οι γραμμές του BA να είναι ίδιες με την γραμμή 1 του A.

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Άσκηση 37



$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Μητρώο Γειτνίασης

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

k διάμετρος

A^k να μην περιέχει μηδενικά

$A^k \Rightarrow k-1$ ακριβώς στάσεις

$A^{k-1} + A^k$ το πολύ $k-1$ στάσεις

$A^2 + A^3 = [\text{No zeros}] \Rightarrow k=3$, διάμετρος

10-3-2017

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.1

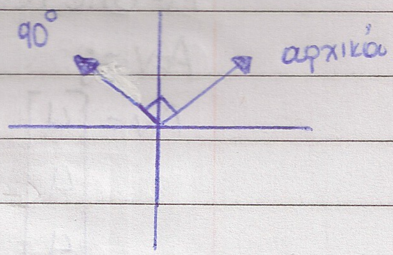
Άσκηση 16.

$$A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$P\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix} \Rightarrow P=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

Άσκηση 17

α) $R\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\-x\end{bmatrix} \Rightarrow R=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$



β) Ποιος 2x2 πίνακας R περιστρέφει κάθε διάνυσμα κατά 180°;

$$z=R^2=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

Άσκηση 25

$A=eye(3) \rightarrow A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\quad V=(3:5)^T=\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$

$$AV=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$$

$$v^T v = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \end{bmatrix}$$

$$VA = \underset{3x1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}} \underset{3x3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \text{Δεν Γίνεται}$$

Άσκηση 2.6

A= ones(4,4), v= ones(4,1)

Av =;

$$Av = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$B = eye(4) + ones(4,4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$w = zeros(4,1) + 2ones(4,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Bw = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 30

$u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$u_1 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} u_0 = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix}$

$u_2 = \begin{bmatrix} 8/10 & 3/10 \\ 2/10 & 7/10 \end{bmatrix} u_1 = \begin{bmatrix} 70/100 \\ 30/100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{bmatrix}$

$u_3 = \begin{bmatrix} 8/10 & 3/10 \\ 2/10 & 7/10 \end{bmatrix} u_2 = \begin{bmatrix} 65/100 \\ 35/100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,65 \\ 0,35 \end{bmatrix}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.4

Άσκηση 28

A 2×3 , B 3×4

1) A x (στήλες B) = $A \begin{bmatrix} | & | & | \end{bmatrix}$

2) (γραμμές A) x B = $\begin{bmatrix} — \end{bmatrix} B$

3) (γραμμές A) x (στήλες B) = $\begin{bmatrix} — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \end{bmatrix}$

4) (στήλες A) x (γραμμές B) = $\begin{bmatrix} | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} — \\ — \end{bmatrix}$

Αναστροφές

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ K & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ z & y \end{bmatrix} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} Ax & 0 \\ Kx+Bz & By \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Ax = 1 \Rightarrow x = A^{-1}$

$By = 1 \Rightarrow y = B^{-1}$

$Kx + Bz = 0 \Rightarrow A^{-1} + Bz = 0 \Rightarrow z = -B^{-1}KA^{-1}$

$$z = -\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 30

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$L_3 L_2 L_1 A = U \quad A = L^{-1} U \Rightarrow A = LU \quad L_3 L_2 L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

17-3-2017

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.2

Άσκηση 3

$$\begin{aligned} 2x-4y&=6 \quad l_1 \\ -x+5y&=0 \quad l_2 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$l_2 = l_2 + \frac{l_1}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$ 2 οδηγοί

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 5 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} 2x-4y&=6 \Rightarrow x=9 \\ 3y&=3 \Rightarrow y=3 \end{aligned}$$

Άσκηση 4

$$\begin{aligned} ax+by&=f, \quad a\neq 0 \\ cx+dy&=g \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} a & b & f \\ c & d & g \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & f \\ 0 & -\frac{cb}{a}+d & -\frac{cf}{a}+g \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$ax + \left(d - \frac{cb}{a}y\right) = g - \frac{cf}{a} \Rightarrow y = \left(g - \frac{cf}{a}\right) / \left(d - \frac{cb}{a}\right)$$

Άσκηση 7

$$\begin{aligned} ax+3y&=-3 \\ 4x+6y&=6 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} a & 3 & -3 \\ 4 & 6 & 6 \end{array}\right]$$

Αν $\alpha=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -3 \\ 4 & 6 & 6 \end{array}\right]$ Δεν γίνεται

Αν $\alpha=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & -3 \\ 4 & 6 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 4 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} 4x+6y=6 \Rightarrow x=3 \\ 3y=-3 \Rightarrow y=-1 \end{array}$

Άσκηση 11

$$\begin{array}{l} 2x+3y+z=8 \\ 4x+7y+5z=20 \\ -2y+2z=0 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 7 & 5 & 20 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 2x+3y+z=8 \Rightarrow x=2 \\ y+3z=4 \Rightarrow y=1 \\ 8z=8 \Rightarrow z=1 \end{array}$$

Άσκηση 13

$$\begin{array}{l} 2x+5y+z=0 \\ 4x+dy+z=2 \\ y-z=3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & d & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & d-10 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

Αν $d=10$, τότε εναλλαγή, αν $d=11$, τότε ιδιάζον

Άσκηση 18

$$\begin{array}{l} x+4y-2z=1 \\ x+7y-6z=6 \\ 3y+qz=t \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -6 & 6 \\ 0 & 3 & q & t \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -6 & 6 \\ 0 & 3 & q & t \end{array}\right] =$$

$q=;$ ⇒ ιδιάζον, $t=;$ ⇒ άπειρες λύσεις

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & | & 1 \\ 0 & 3 & -4 & | & 5 \\ 0 & 3 & q & | & t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & | & 1 \\ 0 & 3 & -4 & | & 5 \\ 0 & 3 & q & | & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & | & 1 \\ 0 & 3 & -4 & | & 5 \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

Για $q=4$ και $t\neq 5$, τότε ιδιάζον και αδύνατο σύστημα

$$\begin{aligned} x+4y-2z&=1 \\ 3y-4z&=1 \\ (q+4)z&=t-5 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x=9 \quad y=3 \quad z=1$

Άσκηση 2.1

$$\begin{aligned} 2x+y&=0 \\ x+2y+z&=0 \\ y+2z+t&=0 \\ z+2t&=5 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 & 5 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} 2x+y=0 &\Rightarrow x=-1 \\ \tfrac{3}{2}y+z=0 &\Rightarrow y=2 \\ \tfrac{4}{3}z+t=0 &\Rightarrow z=-3 \\ \tfrac{5}{4}t=5 &\Rightarrow t=4 \end{aligned}$$

Άσκηση 28

$3x=3$
$6x+2y=8$
$9x-2y+z=9$

$$\begin{bmatrix}3&0&0\\6&2&0\\9&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\8\\9\end{bmatrix}=(Ax)^T=b^T$$

$$\begin{bmatrix}3&6&9\\0&2&-2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&8&9\end{bmatrix}$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

$$A=\begin{bmatrix}1&3\\2&5\end{bmatrix}\rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&5&0&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{c|c}I&A^{-1}\end{array}\right]$$

Εφαρμόζω Gauss
$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&-1&-2&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&1&2&-1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&-5&3\\0&1&2&-1\end{array}\right]$$
A^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&3&0&1&0&0\\1&-2&-1&0&1&0\\2&0&-1&0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&3&0&1&0&0\\0&-7/2&-1&-1/2&1&0\\2&0&-1&0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&3&0&1&0&0\\0&-7/2&-1&-1/2&1&0\\0&-3&-1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&3&0&1&0&0\\0&-7/2&-1&-1/2&1&0\\0&0&-1/7&-4/7&-6/7&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3/2&0&1/2&0&0\\0&1&2/7&1/7&-2/7&0\\0&0&1&4&6&-7\end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-3/7&2/7&3/7&0\\0&1&2/7&1/7&-2/7&0\\0&0&1&4&6&-7\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&3&-3\\0&1&0&-1&-2&2\\0&0&1&4&6&-7\end{array}\right]$$

Άσκηση

$(1,-6)\quad P(1)=a_0+1a_1+a_2=-6$

$(2,2)\quad P(2)=a_0+2a_1+4a_2=2$

$(4,12)\quad P(4)=a_0+4a_1+16a_2=12$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 16 & 12 \end{array}\right]$$

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 12 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 15 & 18 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right]$$

$a_0+a_1+a_2=-6 \Rightarrow a_0=-16$

$a_1+3a_2=8 \Rightarrow a_1=11$

$6a_2=-6 \Rightarrow a_2=-1$

Άρα $P(x)=-16+11x-x^2$

24-3-2017

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.2.

Άσκηση 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_A$$

pivot ελεύθερες

Για να βρω τον χώρο στηλών, βρίσκω τις στήλες με τους οδηγούς στο τελικό U_A και παίρνω τις αντίστοιχες στο αρχικό μητρώο

$$\text{range}(A) = \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}_{\text{βάση}}$$

Για να βρω τον χώρο γραμμών, βρίσκω τις γραμμές με τους οδηγούς στο τελικό U_A και τις παίρνω απευθείας

$$\text{range}(A^T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Μηδενόχωρος $Ax=0$

Εντοπίζω τις ελεύθερες μεταβλητές και τους δίνω 1 εναλλάξ

Όσες ελεύθερες μεταβλητές, τόση και η διάσταση του Μηδενόχωρου.

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0 \quad (2)$$
$$x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \quad (1)$$

Για $x_2 = 1$, $(1) \Rightarrow x_3 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$, $(2) \Rightarrow x_1 = -2$

Για $x_4 = 1$, $(1) \Rightarrow x_3 + 2 + 3\cdot 0 = 0 \Rightarrow x_3 = -2$, $(2) \Rightarrow x_1 = 0$

Για $x_5 = 1$, $(1) \Rightarrow x_3 + 2\cdot 0 + 3 = 0 \Rightarrow x_3 = -3$, $(2) \Rightarrow x_1 = 0$

Άρα $N(A) = c\begin{bmatrix}0\\0\\-3\\0\\1\end{bmatrix}, c\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\1\\0\end{bmatrix}, c\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

Για βάση Μηδενοχώρου βγάζω το c.

β)

$$B = \begin{bmatrix}2 & 4 & 2\\0 & 4 & 4\\0 & 8 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 4 & 2\\0 & 4 & 4\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$rank(B)=2$ Όσοι είναι οι οδηγοί, τόση και η τάξη.

$$range(B) = \left\{\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\4\\8\end{bmatrix}\right\}$$

$$range(B^T) = \left\{\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\4\\4\end{bmatrix}\right\}$$

$Bx=0$ Μηδενόχωρος

$2x_1+4x_2+2x_3=0 \ (2)$

$4x_2+4x_3=0 \ (1)$

Άρα $N(B) = \left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$

Για $x_3=1$, $(1) \Rightarrow x_2=-1$

$(2) \Rightarrow x_1 = 1$