

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ (Εξ. Ιουνίου (19/6/2012))

- Κλειστά όλα τα βοηθήματα, βιβλία και κινητά. Οποιαδήποτε συνεργασία ή συμμετοχή σε συνεργασία, ανεξάρτητα από το ρόλο σας, θα έχει ως αποτέλεσμα το μηδενισμό του γραπτού, κ.λπ.
- Όπου δεν αναφέρεται ή δεν φαίνεται από την εκφώνηση το μέγεθος ή το είδος των στοιχείων ενός μητρώου να υποθέσετε ότι είναι τετραγωνικό μεγέθους n με πραγματικά στοιχεία και ότι τα διανύσματα είναι πραγματικά μεγέθους n σε διάταξη στήλης. Για οικονομία χώρου, χρησιμοποιείται (όπως και στις διαλέξεις) η «οριζόντια» γραφή μητρώων, στην οποία το ερωτηματικό «;» δηλώνει «τέλος γραμμής» του μητρώου, π.χ.

$$A = [1, 2, 3; 4, 5, 6] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$
- Το ταυτοτικό μητρώο συμβολίζεται με I , το A^T είναι το ανάστροφο του A και το A^{-1} το αντίστροφο του A (αν υπάρχει). Όποτε ζητάμε τον υπολογισμό μητρώου ή διανύσματος, πρέπει να δείχνετε το αποτέλεσμα ως πίνακα με όλες τις τιμές των στοιχείων του στη σωστή διάταξη.
- Αν δεν δείχνετε πειστικό συνοπτικό συλλογισμό καθώς και ενδιάμεσα αποτελέσματα δεν βαθμολογείστε. Δεν απαντάμε σε ερωτήσεις. Συμπληρώστε τα στοιχεία σας στα θέματα κ. γραπτό και το παρουσιολόγιο.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

1. (Αιτιολόγηση για Σωστό, αρκεί Αντιπαράδειγμα για Λάθος).
 - α) (Σ/Λ) Αν ένα μητρώο έχει μηδενικά στη κύρια διαγώνιο αποκλείεται να είναι αντιστρέψιμο. β) (Σ/Λ) Αν τα μητρώα A και B είναι αντιστρέψιμα τότε είναι αντιστρέψιμο και το $B^{-1}A$. γ) (Σ/Λ) Αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μη μηδενικές, τότε το μητρώο είναι οπωσδήποτε αντιστρέψιμο. δ) (Σ/Λ) Αν το μητρώο A ικανοποιεί τη σχέση $A^2 - 8I = 0$ τότε το μητρώο A είναι οπωσδήποτε αντιστρέψιμο. ε) (Σ/Λ) Αν το μητρώο A είναι μη αντιστρέψιμο και v το τελευταίο δεξιό ιδιάζον διάνυσμα, δηλ. η τελευταία στήλη του V στην παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών $A = U\Sigma V^T$, τότε $Av = 0$.

2. Δίνεται

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Θέλουμε να υλοποιήσουμε τις παρακάτω διαδοχικούς μετασχηματισμούς πολλαπλασιάζοντας το αρχικό μητρώο διαδοχικά από αριστερά και από δεξιά με κατάλληλα επιλεγμένα μητρώα ή διάνυσματα: α) Διπλασιασμό της 1ης στήλης του A και τριπλασιασμό της 2ης στήλης του A . β) Αφαίρεση της δεύτερης γραμμής του μητρώου που προέκυψε από το (α) από την τρίτη του ιδίου. γ) Ανταλλαγή της 1ης με την 3η γραμμή του μητρώου που προέκυψε από το (β). δ) Επιλογή της 2ης γραμμής του μητρώου που προέκυψε από το (γ). ε) Άθροισμα των στοιχείων του διανύσματος που προέκυψε από το (δ).

Στο τέλος, θα έχετε μία τελική τιμή (βαθμωτός), ας πούμε τ που μπορεί να γραφτεί ως εξής: $\tau = x^T Ay$ όπου x, y είναι διανύσματα. Καθένα από τα x και y μπορούν να εκφραστούν ως το γινόμενο ενός η περισσοτέρων μητρώων και κάποιου διανύσματος (που κωδικοποιούν τους μετασχηματισμούς που έγιναν στα βήματα (α) ως (ε)). Να γράψετε ποιά είναι η τιμή τ και με βάση τα παραπάνω, να βρείτε τα διανύσματα x, y .

3. Δίνονται ο πίνακας μετρήσεων όπου ρ αποτελείται από το πρώτο και τελευταίο ψηφίο του AM σας (π.χ. αν 5432, τότε $\rho = 52$).

$x_1 = -1$	$x_2 = -1/2$	$x_3 = 0$	$x_4 = 1/2$	$x_5 = 1$
$f_1 = 0$	$f_2 = 0$	$f_3 = \rho$	$f_4 = 0$	$f_5 = 0$

και ζητούμενο είναι να προσαρμόσουμε τη συνάρτηση που ορίζεται ως $\phi(x) = \gamma_1 + \gamma_2 \cos(x\pi)$ έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το άθροισμα των τετραγώνων του σφάλματος $\sum_{i=1}^n (f_i - \phi(x_i))^2$. (Για υπενθύμιση $\cos(\pi) = -1, \cos(\pi/2) = 0, \cos(0) = 1, \cos(x) = \cos(-x)$.) *I)* Να δείξετε το 2×2 σύστημα που πρέπει να λυθεί για να υπολογίσετε τις τιμές γ_1, γ_2 και να τις υπολογίσετε. *II)* Ποιό είναι το τετράγωνο, $\sum_{i=1}^n (f_i - \phi(x_i))^2$ του σφάλματος για τη συγκεκριμένη προσέγγιση; *III)* Έστω ότι κατασκευάζουμε το μητρώο $X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; f_1, f_2, f_3, f_4, f_5]$ με τα παραπάνω x_i, f_i . Ονομάζουμε V τον υπόχωρο που παράγεται με γεννήτορες τις στήλες του X . Να εξηγήσετε αν ο V είναι υπόχωρος του \mathbb{R}^2 ή όχι και να εξηγήσετε ποιά είναι η διάσταση του V .

4. Έστω το μητρώο $A = \frac{1}{6}[1, -1, -2; -1, 1, 2; -2, 2, 4]$ που είναι εμφανώς μητρώο ορθογώνιας προβολής επί μονοδιάστατου υπόχωρου \mathcal{S} . *I)* Να υπολογίσετε ένα διάνυσμα x , μήκους 1, που παράγει τον \mathcal{S} . *II)* Ποιά είναι η απόσταση του διανύσματος $b = [1, -1, 1]^T$ από τον υπόχωρο \mathcal{S} (δηλ. το μικρότερο μήκος $\|b - s\|$ όπου $s \in \mathcal{S}$); *III)* Ποιές είναι οι 3 ιδιοτιμές του A και ποιά είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα; *IV)* Αν q είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μέγιστη ιδιοτιμή του A , να υπολογίσετε το $A^\rho (qq^T)^\rho$ όπου ρ αποτελείται από το πρώτο και τελευταίο ψηφίο του AM σας (π.χ. αν 5432, τότε $\rho = 52$). Υπόδειξη: Μπορείτε να το υπολογίσετε πάρα πολύ γρήγορα!

5. Σας δίνονται τα παρακάτω:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ \beta \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I) Για ποιες πραγματικές τιμές των παραμέτρων α, β το σύστημα $Ax = b$: α) έχει άπειρες λύσεις, β) έχει μοναδική λύση, γ) είναι αδύνατο; *II)* Για την περίπτωση με άπειρες λύσεις να υπολογίσετε α) μία βάση για το μηδενόχωρο του A , β) την τάξη του A . *III)* Να υπολογίσετε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A για την περίπτωση $\alpha = 2$ και με βάση αυτό να υπολογίσετε το αντίστροφο A^{-1} .

6. Έστω το μητρώο $A = [-2, 1; 0, -2]$. α) Να εξηγήσετε κατά πόσον ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος. β) Έστω ότι στη θέση (1,1) του A αλλάζει η τιμή από -2 σε 1. Να υπολογίσετε ένα μητρώο S τέτοιο ώστε $S^{-1}AS$ να είναι διαγώνιο. γ) Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός ομοιότητας με το S διαγωνιοποιεί και το A^4 .

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στις απαντήσεις πρέπει να δίνετε σύντομη επαρκή αιτιολόγηση καθώς και τα ενδιάμεσα αποτελέσματα !!! (π.χ. στο πρόχειρο).