Ονοματεπώνυμο:...................................... Α.Μ:........... Έτος:.. Θέση:..

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ – Ιούνιος 2011 (20/06)

1) Κλειστά και στις άκρες των διαδρόμων βιβλία, Σημ/σεις. Κινητά κλειστά. 2) Οποιαδήποτε συνεργασία ή συμμετοχή σας σ' αυτήν θα έχει ως αποτέλεσμα το μηδενισμό του γραπτού. 3) Δεν επιτρέπεται χειρόγραφη κόλλα Α4. Αντί αυτού διανέμεται με τα θέματα τυπολόγιο για την ύλη. 4) **Για την πλήρη βαθμολόγηση του γραπτού σας πρέπει να παρουσιάσετε όλο σας τον συλλογισμό, επαρκή αιτιολόγηση σε όλες τις απαντήσεις και τα ενδιάμεσα στάδια.** Αν τα αποτελέσματα δεν προκύπτουν από τους υπολογισμούς στο γραπτό (πρόχειρους και μη), δεν βαθμολογείστε για την ερώτηση. **Στις ερωτήσεις Σωστό/Λάθος βαθμολογείστε μόνον αν αιτιολογήσετε την απάντησή σας** (απλό «Ναι» ή «Όχι» δεν λαμβάνεται υπ' όψιν). 5) Η σαφήνεια και ευκρίνεια του γραπτού θα εκτιμηθούν ιδιαίτερα. 6) Μαζί με το γραπτό παραδίδετε και τα θέματα μαζί με τα πρόχειρα. 7)Για συμβολισμούς που υπεισέρχονται στη διατύπωση των θεμάτων βλ. **Υπόμνημα** μετά το τέλος των θεμάτων.

I. [28μ]

1. *Να απαντήσετε τυπικά και περιεκτικά στις παρακάτω ερωτήσεις. Αν είναι Σ/Λ να αιτιολογήσετε/αποδείξετε την απάντησή σας (ένδειξη: αιτ./απ.).*

(α)(Σ/Λ-αιτ.) Αν $A \in \mathrm{R}^{m\times n}$ και U το κλιμακωτό μητρώο που προκύπτει από το A με απαλοιφή, τότε $C(A) = C(U)$.

(β) (Σ/Λ-απ.) Αν $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i \in \mathbf{R}^3$, i=1,2, τότε το $C=\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}$ είναι ιδιάζον.

(γ) (Σ/Λ-απ.) Αν A, $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ είναι συμμετρικά τότε και το AB θα είναι συμμετρικό.

(δ) (Σ/Λ- αιτ.) Έστω A με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda-2)^4$-4 Τότε το A είναι ιδιάζον.

(ε) (απ.) Αν λ είναι ιδιοτιμή ενός διαγωνοποιήσιμου μητρώου A, τότε το $\lambda+\lambda^4$ θα είναι ιδιοτιμή του $A+A^4$.

(ζ) (απ.)Αν $A \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ είναι συμμετρικό και με ιδιοτιμές 1 και 0, τότε θα είναι μητρώο ορθογώνιας προβολής (αρκεί να δείξετε ότι: $A^2=A$).

2. Να αποδείξετε τυπικά (με τη βοήθεια σύνθετου μητρώου και της θεωρίας της απαλοιφής) ότι κάθε μητρώο $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ εκφράζεται $\boldsymbol{A}=\mathbf{C}\ \boldsymbol{L}$, όπου C μητρώο με τις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A και L μητρώο με τις μη μηδενικές γραμμές της αναγμένης κλιμακωτής μορφής R του A.

3. Να αποδείξετε τυπικά ότι αν το $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ έχει γραμμικά ανεξάρτητες στήλες, τότε το μητρώο $A^{\mathrm{T}}A$ είναι αντιστρέψιμο.

II. [16%]

1. Δίνεται το μητρώο A=[2, 3, 0, 0 ; -2, -2, 4, 0; 1, 2, 2, 0; 6, 1, -1, 1]. Χωρίς να υπολογίσετε υπο-ορίζουσες, υπολογίστε την ορίζουσα του A, det(A).

2. Ορίζουμε $B \in \mathbf{R}^{4\times 4}$ με $B=[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \mathbf{0}]A$, όπου $\boldsymbol{e}_i \in \mathbf{R}^4$ και A το μητρώο του ερ. (1). Να υπολογίσετε συστηματικά δύο αντιστρέψιμα μητρώα Q, P τέτοια ώστε: $QBP=N=[\ \boldsymbol{I}_r, \mathbf{0}; \mathbf{0}\ \ \mathbf{0}]$, όπου $N \in \mathbf{R}^{4\times 4}$, r=rank(B).

3. Δίνονται τα μητρώα (α) Χ=[0.3 0.5; 1 0.2] και (β) Υ=[2 1; - 2 -1]. Για κάθε ένα, να εξετάσετε *τυπικά* εάν και σε ποιο μητρώο συγκλίνει η ακολουθία δυνάμεων $\{X^k\}$, $k \in \mathrm{Z}^+$, καθώς αυξάνεται ο εκθέτης k.

III. [16μ]

Θεωρούμε το μητρώο B του ερ. (ΙΙ.2). Ζητούνται:

(α) Να βρεθεί η αναγμένη κλιμακωτή μορφή R του B μετά από εφαρμογή απαλοιφής.
(β)Βάσει της μορφής R, να εκφράσετε κατάλληλα το B ως άθροισμα *εξωτερικών γινομένων* $\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{y}_i^{\mathrm{T}}$, προσδιορίζοντας επακριβώς τα διανύσματα $\boldsymbol{c}_i$ και $\boldsymbol{y}_i$.
(γ) Να βρεθεί ο $N(B)$ (βάση και διάσταση).
(δ) Θεωρούμε τώρα το σύστημα $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$. Για ποια $\boldsymbol{\beta}$ υπάρχει λύση; Να υπολογισθεί συστηματικά η πλήρης λύση για $\boldsymbol{\beta}=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$.

IV. [20%]

1. Δίνονται στον χώρο $\mathbf{R}^3$ *το* διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$ και η ευθεία (E) που ορίζεται από το $\boldsymbol{u}=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$. Θεωρούμε τώρα επίπεδο V ορθογώνιο στο $\boldsymbol{u}$.

(α) Να υπολογισθεί η προβολή του $\boldsymbol{\alpha}$ επί της (E).
(β) Από ποια εξίσωση ορίζεται το V; Προσδιορίστε ορθοκανονική βάση B για το V.
(γ) Με χρήση της B, να υπολογισθεί η *ορθογώνια προβολή* $P\boldsymbol{u}$ του $\boldsymbol{u}$ επί του V.
(δ)Πώς εκφράζεται τώρα το $\boldsymbol{u}$ βάσει των προβολών του (α) και (γ);

2. Θεωρούμε ότι για την προσέγγιση του γραφήματος μιας πραγματικής συνάρτησης $y=f(x)$ γνωρίζουμε τα σημεία $(x_i, f_i(x_i))$ ($i=1,\dots,4$): (-2, 1.0), (0, 1.8), (2, 2.4), (4, 3.2). Για την προσέγγιση χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση $g(t)=c_1+c_2t+c_3t^3$, όπου οι συντελεστές c_i προσδιορίζονται με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

(α) Να δοθεί συναρτήσει των c_i η ποσότητα που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί.

(β) Να δοθεί το γραμμικό σύστημα που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση (να μην γίνει επίλυση).

IV. [20% περ.]

1. Δίνεται το μητρώο: $A=[1, 1, 0; 1, 4, -1 ; 0, -1, 1]$.

(α) Πριν από κάθε πράξη, να εξηγήσετε αν το A διαγωνιοποιείται και γιατί, δίνοντας τον ισχύοντα μετασχηματισμό διαγωνιοποίησης.

(β) Να υπολογίσετε όλες τις ιδιοτιμές του A.

(γ) Να βρείτε μια πλήρη βάση ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων του $C(A)$.

(δ) Εκφράστε τέλος στην τελική του μορφή το μετασχηματισμό διαγωνιοποίησης.

2. Να υπολογίσετε το αντίστροφο του μητρώου A του ερ. (α) χρησιμοποιώντας απαραίτητα και μόνον το θεώρημα *Caylay-Hamilton*.

Καλή Επιτυχία!!

Υπόμνημα και Τυπολόγιο:

- **Σημειολογία:** Όπου δεν αναφέρεται ή δεν φαίνεται από την εκφώνηση το μέγεθος ή το είδος των στοιχείων ενός μητρώου A, θεωρείται ότι είναι τετραγωνικό με $n\times n$ με πραγματικά στοιχεία: $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$. Το σύμβολο «;» σημαίνει αλλαγή γραμμής, π.χ. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ γράφεται και ως [1,2;3,4]., Δ.χ.: διανυσματικός χώρος , $\boldsymbol{I}_n$: ταυτοτικό μητρώο με $\boldsymbol{I}_n\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{e}_i$ = i στοιχείο της τυπικής βάσης του δ.χ. $\mathbf{R}^n$, $N(A)$: μηδενοχώρος του A, $C(A)$: χώρος στηλών του A ($\Rightarrow C(A^T)$: χώρος γραμμών του A), rank(A): τάξη του μητρώου A, trace(A)=ίχνος του A=άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου, diag(A)=$(\alpha_{11}, \alpha_{22},\dots, \alpha_{nn})^T$: διάνυσμα με τα διαγώνια στοιχεία του A., $A(i_1{:}i_2; j_1{:}j_2)$: Υπομητρώο του A με γραμμές και στήλες στο διάστημα δεικτών $i_1{:}i_2$ και $j_1{:}j_2$.
- **Μορφές Πολ/σμού μητρώων:** $AB=(\langle a_i,b_j\rangle)_{ij}=A[b_1 \dots b_n]=[Ab_1 \dots Ab_n] = [a_1^T,\dots, a_m^T]B=[a_1^TB,\dots, a_m^TB]$ = άθροισμα γινομένων (στήλη A)×(στήλη B). Πολ/σμός από αριστερά δρα στις γραμμές, από δεξιά στις στήλες.
- Χρήσιμες ιδιότητες σε πράξεις μητρώων:$(A+B)^T=A^T+B^T$,$(AB)^T=B^TA^T$, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$, αν D διαγώνιο: $DA=[d_{11}\boldsymbol{a}_1, d_{22}\boldsymbol{a}_2, \dots, d_{nn}\boldsymbol{a}_n]$, det(AB)=det(A)det(B), det(A)=det(A^T), det(EA)=det(AC)=det(A), όπου E, D μητρώα μετασχ. γραμμών ή στηλών αντίστοιχα κλπ.,
- **Γραμμοπράξεις - στοιχ. μητρώα απαλοιφής:** Η γραμμοπράξη $r_i\to r_i-ar_j$ αντιστοιχεί με πολ/σμό αριστερά με $E_{ij}=I-ae_ie_j^T$: A μέσω $r_i\to r_i-ar_j\to$ B $\Leftrightarrow$ $B=E_{ij}A$. Η αντίστοιχη στηλο-πράξη, με πολ/σμό δεξιά με $E_{ji}=I-ae_je_i^T$ Μετάθεση γραμμής του A με γραμμή j ισοδυναμεί: $P_jA=B$.
- **Απαλοιφή:** Για κάθε A υπάρχει άνω κλιμακωτό U έτσι ώστε U=EA, όπου E γινόμενο μητρώων απαλοιφής (και μετάθεσης). Ομοίως υπάρχει και ένα R σε αναγμένη κλιμακωτή μορφή: R=HA. Το σύστημα Ax=b είναι ισοδύναμο με το Ux=Ub=c και το Rx=Rb=d: Διαδικασία απαλοιφής με γραμμοπράξεις: [A b] → [U c]. Σημαντική ιδιότητα: A=CL (ανεξ. στήλες× γραμμές του R). Μητρώα τάξης 1: $\boldsymbol{uv}^T$. Διαδιακασία *αντιστροφής Gauss-Jordan* με γραμμοπράξεις: [I|A] → $[A^{-1}|I]$. Μορφή συστήματος με μετασχηματισμούς απαλοιφής: $(\dots{}_{42}E_{32}P_2E_{m1}\dots E_{31}E_{21}P_1)Ax= (\dots{}_{42}E_{32}P_2E_{m1}\dots E_{31}E_{21}P_1)b$. Αν A αντ/μο: A=LU, και A=LDU, L=κάτω τριγ.
- **Γραμμική ανεξαρτησία:** m διαν. $\mathbf{a}_i\in\mathbf{R}^n$ είναι γρ.ανεξ. $\Leftrightarrow$ $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,\dots\mathbf{a}_m]\boldsymbol{x}=0 \Rightarrow \boldsymbol{x}=0$. Αν $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ τότε A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ (rank(A)=n) $\Leftrightarrow$ (στήλες $\mathbf{a}_i$ γ.ανεξ) $\Leftrightarrow$ (det(A)≠0),
- **Λύση γρ. συστήματος *Ax=b* (γενικά):** $x_\pi=x_\mu+c_1\mathbf{S}_1+\dots+c_{n-r}\mathbf{S}_{n-r}$, όπου:$x_\mu$: λύση της $U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ για $\mathbf{x}_F=0$, $\mathbf{S}_i$: στοιχείο βάσης του $N(A)$ (*ειδική λύση*), r=rank(A), $c_i\in\mathbf{R}$. Γενικά ισχύει: dim(N(A))=n-r. *Συνθήκη επιλυσιμότας*: rank(A)=rank([A b]).
- **Εσωτ. Γινόμενο – Ορθογωνιότητα:** Συνθήκη καθετότητας για διαν/τα: $\langle u,v\rangle=u^Tv=0$, διαν/τος επί χώρου A: $A^Tx=0$. Μήκος: $||v||=(\langle v,v\rangle)^{1/2}$, κανονικοποιημένο διάνυσμα v: v/||v||, Ορθογώνια μητρώα: $Q^TQ=I$. *Ορθ/ση Gram-Schmidt:* Αν $\{\boldsymbol{v}_i\}$ μια βάση του δ.χ. V τότε μια ορθογώνια βάση είναι: $\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{v}_2-(\langle\boldsymbol{v}_2\text{-}\boldsymbol{u}_1\rangle/||\boldsymbol{u}_1||^2)\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{v}_3-(\langle\boldsymbol{v}_3\text{-}\boldsymbol{u}_2\rangle/||\boldsymbol{u}_2||^2)\boldsymbol{u}_2-(\langle\boldsymbol{v}_3\text{-}\boldsymbol{u}_1\rangle/||\boldsymbol{u}_1||^2)\boldsymbol{u}_1,\dots$ Καν/με στο τέλος για να πάρουμε ορθοκανονική βάση.
- **Προβολές** (α) **σε ευθεία** διαν. $\boldsymbol{\beta}$ σε ευθεία $\boldsymbol{\alpha}$: $p=Pb=(\boldsymbol{aa}^T/\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{\beta}$. ($P$=μητρώο προβολής). (β) **Προβολές σε χώρους:** Αν $\langle\alpha_1,\dots,\alpha_n\rangle$ είναι ο παραγόμενος χώρος από τα α_i και $A=[\alpha_1\dots\alpha_n]$, η προβολή του $\boldsymbol{\beta}$ στον $\langle\alpha_1,\dots,\alpha_n\rangle$: p=A$c$, όπου $\boldsymbol{c}$ λύση του συστήματος $A^TA\boldsymbol{c}=A^T\boldsymbol{\beta}$. Μητρώα Προβολής: $P^k=P$, $P^T=P$.
- ***Μεθ. Ελαχ. Τετραγώνων – γεν. τύπος:*** $A^TAc= A^Tb$. ($\Leftrightarrow||Ax-b||^2$: ελάχιστο). Απαιτείται προσεκτική χρήση στην πράξη.
- ***Μετασχηματισμός διαγωνιοποίησης*** (γενικά): $A=V\Lambda V^{-1}$ (1), V=βάση ιδιοδ/των, Λ: διαγώνιο μητ. με ιδιοτιμές. Το A είναι *διαγωνοποιήσιμο* αν υπάρχει μια πλήρη βάση ιδιοδιανυσμάτων ώστε να ισχύει η (1). Μερικές ιδιότητες ιδιοτιμών: - Αν λ ιδιοτιμή του A $\Rightarrow$ λ^k ιδιοτιμή του A^k. - $A^k=V\Lambda^kV^{-1}$ (γιατί;), trace(A)=$\lambda_1+\dots+\lambda_n$, det(A)= $\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$. *Ομοιότητα:* A και B όμοια $\Leftrightarrow$ υπάρχει αντ/μος M: $A=M^{-1}AM$.
- Αν **Q συμμετρικό**, έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Μετ. διαγ/σης για συμμετρικά μητρώα: $A=Q\Lambda Q^T$.(2) Από τις (1), (2) μπορούμε να πάρουμε πολλούς χρήσιμους τύπους (εκφράσεις Ax, Λ, v ως προς βάση ιδιοδ/των κλπ.)