

Θέματα Φεβρουαρίου 1996

1. Δίνεται το σύνολο $A = \{a+b \sqrt{2}/a, b \text{ ανήκει } Q\}$.

α) Να δείξετε ότι το σύνολο A είναι αντιμεταθετικός και μοναδιαίος δακτύλιος.

β) Τι πρέπει να ισχύει ώστε το A να είναι σώμα (βρείτε μια συνθήκη ως a και b)

Λύση

2. Αν V είναι ένας ευκλείδειος χώρος και u, v ανήκουν στο V , να αποδειχθεί ότι:

$$\|u-v\|^2 + \|u+v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

Λύση

3. Να επεκταθεί σε μια ορθοκανονική βάση το σύνολο: $\{1/2(1, i, 1, i), 1/2(i, 1, i, 1)\}$ για το διανυσματικό χώρο $V_4(C)$.

Λύση

4. Δίνονται οι R -βάσεις $\{u_1, u_2\}$ και $\{v_1, v_2, v_3\}$ των δ.χ. $V_2(R)$ και $V_3(R)$ αντίστοιχα. Έστω ένας γραμμικός μετασχηματισμός T από τον $V_2(R)$ στον $V_3(R)$ που ορίζεται ως εξής:

$$T(u_1) = v_1 + 2v_2 - v_3,$$

$$T(u_2) = v_1 - v_2$$

Να βρεθεί ο πίνακας του T ως προς αυτές τις βάσεις. Να βρεθεί επίσης ο πίνακας του T ως προς τις R -βάσεις $\{-u_1+u_2, 2u_1-u_2\}$ και $\{v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3\}$ του $V_2(R)$ και $V_3(R)$ αντίστοιχα. Ποια σχέση συνδέει τους δύο παραπάνω πίνακες; (κάνετε όλους τους απαραίτητους υπολογισμούς).

Λύση

5. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός του \mathbb{R} -χώρου C ορίζεται από τη σχέση $T(z) = (1-i)z$ για όλα τα z που ανήκουν στο C . Ναδειχθεί ότι ο T είναι μη ιδιάζων. Ποιος ο βαθμός του T ;

Λύση

6. Αποδείξτε ότι κάθε K -βάση ενός πεπερασμένα παραγόμενου K -χώρου έχει τον ίδιο αριθμός στοιχείων.

Λύση

[Επιστροφή στη λίστα των θεμάτων](#)