

M. K.

Τμηματικές Εξετάσεις στην Γραμμική Άλγεβρα
Περίοδος Σεπτεμβρίου 2001
29-9-2001

(15%) Δίνονται τα διανύσματα $(1,2,0)$ και $(2,0,1)$.

(α) να επεκταθεί (και να δικαιολογηθεί τυπικά η επέκταση αυτή) το σύνολο των διανυσμάτων αυτών σε μια βάση του \mathbb{R}^3 .

(β) Να ορθοκανονικοποιηθεί στη συνέχεια (μέθοδος Gram-Schmidt) η βάση αυτή.

(γ) Ποιός είναι ο πίνακας που μετασχηματίζει τη πρώτη βάση στη δεύτερη και ποιά η βασική ιδιότητά του;

2. (10%) Έστω S ο υποχώρος που περιέχει τα διανύσματα με $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Βρείτε μια βάση του συνόλου S^\perp (ορθογώνιο συμπλήρωμα του S), το οποίο περιέχει όλα τα διανύσματα τα ορθογώνια στον S .

3. (15%) Γράψτε ένα πίνακα - αν υπάρχει - με την ζητούμενη πιο κάτω ιδιότητα και εξηγήστε γιατί υπάρχουν ή δεν υπάρχουν τέτοιοι πίνακες.

(α) (5) Ο χώρος στηλών περιέχει τα $(1,0,0)^t$, $(0,0,1)^t$ και ο χώρος γραμμών τα $(1,1)^t$, $(1,2)^t$.

(β) (5) Χώρος στηλών = \mathbb{R}^1 και χώρος γραμμών = $\langle (1,0,0)^t, (0,0,1)^t \rangle$ ($\langle v,u \rangle$ = όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων v,u).

(γ) (5) Ο χώρος στηλών έχει βάση το $(1,0,2)^t$ και ο μηδενοχώρος το $(3,1,1)^t$.

4. (30%) Θεωρούμε στο χώρο \mathbb{R}^2 ένα διάνυσμα $x = (x_1, x_2)$ και τον εξής γ.μ:

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2 + 1).$$

α) (5) Βρείτε τον πίνακα A του γ.μ. T ως προς την τυποποιημένη βάση $E = \{e_1, e_2\}$.

β) (5) Ποιός είναι ο μηδενοχώρος του T και γιατί; Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του.

γ) (5) Υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός του T και γιατί; Αν ναι ποιός είναι (σε μορφή πινάκων);

δ) (10) Να διαγωνοποιηθεί ο πίνακας A , εφ' όσον αυτό είναι δυνατόν. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα να αναφερθούν αναλυτικά τα απαιτούμενα βήματα καθώς και ο μετασχηματισμός διαγωνοποίησης.

(ε) (5) Ποιός είναι ο ιδιοχώρος του A και ποια η διάστασή του; Δικαιολογήστε.

5. (30%) Για τον γρ. μετασχηματισμό T του θέματος (4) θεωρούμε τώρα το σύνολο $B = \{(1,2), (1,3)\}$ που προφανώς αποτελεί βάση του δ.χ. \mathbb{R}^2 .

(α) (4) Ποιοί είναι οι πίνακες μετασχηματισμού (μετάβασης) από τη βάση E στην B και από την B στην E αντίστοιχως;

(β) (10) Εφαρμόζοντας αναλυτικά τον μετασχηματισμό ομοιότητας, να βρεθεί ο πίνακας C του T ως προς τη νέα βάση B (σε μορφή πινάκων).

(γ) (4) Πώς εκφράζεται τώρα ο μετασχηματισμός διαγωνοποίησης για τον C ; Ποιές είναι οι ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, ιδιοχώρος του C ; Δικαιολογήστε.

(δ) (4) Θεωρούμε τα σύνολα $T(E)$, $T(B)$. Αποτελούν αυτά βάσεις του \mathbb{R}^2 και γιατί;

(ε) (4) Αν H είναι μια οποιαδήποτε βάση, ισχύει η απάντηση που δώσατε στο (δ), στην περίπτωση του συγκεκριμένου μετασχηματισμού T , και γιατί;

(ζ) (4) Μπορεί να γενικευτεί η απάντηση που δώσατε στο (ε) στην περίπτωση οποιουδήποτε γρ. μετασχηματισμού; Αν όχι, ισχύει για κάποια κατηγορία μετασχηματισμών και ποιά είναι αυτή;

Καλή επιτυχία!