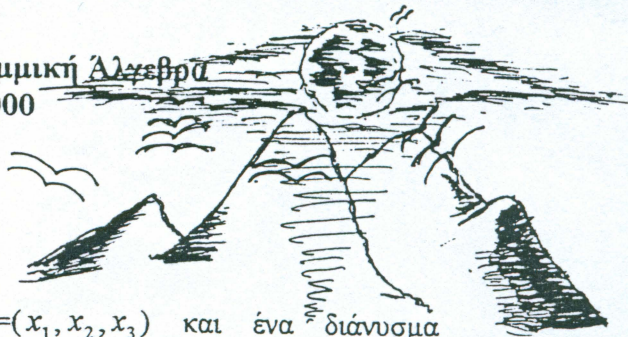
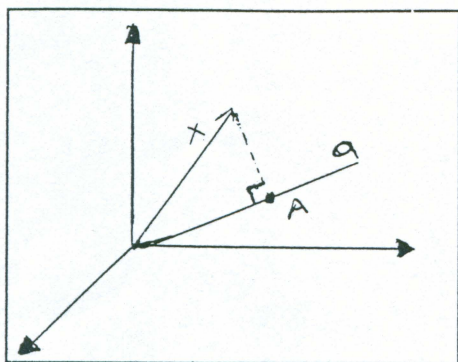


Τμηματικές Εξετάσεις στην Γραμμική Άλγεβρα
Περίοδου Ιουνίου 2000
9-6-2000



[25%]

1. Θεωρούμε στο χώρο R^3 ένα διάνυσμα $x=(x_1, x_2, x_3)$ και ένα διάνυσμα $a=(a_1, a_2, a_3)$ όπως στο σχήμα 1. Θεωρούμε την προβολή του x πάνω στην ευθεία που ορίζει το διάνυσμα a .



- α) Βρείτε τον πίνακα P του γραμμικού μετασχηματισμού που ορίζει την προβολή πάνω στην ευθεία η οποία ορίζεται από το διάνυσμα a . Δικαιολογείστε.
β) Αν $a=(1,1,1)$ ποιά είναι η προβολή και πώς υπολογίζεται;
γ) Τι βασικές ιδιότητες έχει ο P και γιατί;
δ) Ποιά είναι η τάξη του P και γιατί;
ε) Ποιός είναι ο χώρος στηλών του P και γιατί;
ζ) Ποιός είναι ο μηδενικός χώρος του P και γιατί;
η) Ορίζει ο P ισομορφισμό και γιατί;

[15%]

2. Παραγοντοποιείται ο πίνακας (διάσπαση LU) και γιατί;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

σε μορφή: $PA = LU$.

Παραγοντοποιείται ;

Υπολογίστε με συστηματικό τρόπο τους L και U που προκύπτουν.

[20%]

3. Να υπολογιστούν όλα τα διανύσματα που είναι κάθετα στα διανύσματα $x_1=(1,2,0,1)$ και $x_2=(0,3,1,2)$. Ποιά είναι η διάσταση του χώρου που ορίζεται; Είναι αυτός δ.χ. και γιατί; Βρείτε μια βάση του.

[40%]

4. Δίνεται ο γ.μ. $T(x,y,z)=(x+y-z, 2x+y+z, x+y+2z)$
α) Είναι γ.μ. και γιατί; Αν στη θέση των συντεταγμένων του $T(x,y,z)$ υπήρχαν οποιοδήποτε άλλοι γραμμικοί συνδιασμοί των x,y,z θα ήταν γ.μ. και γιατί; Αποδείξτε τυπικά την απάντησή σας.
β) Βρείτε τον μηδενικό χώρο (Kernel) και την εικόνα του T . Επίσης τις διαστάσεις τους και δύο βάσεις τους.
γ) Βρείτε τον πίνακα του T ως προς τις τυποποιημένες βάσεις.
δ) Έστω ότι θεωρούμε αλλαγή βάσης : $\{ (1,1,2), (1,3,1), (0,1,2) \}$. Υπολογίστε συστηματικά το νέο πίνακα του T με το αν μετασχηματισμού ομοιότητας.

