ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2000.

1 θ. (α) Έστω δύο δ.χ. V και W με ίδια διάσταση n και ένας ισομορφισμός T του V στον W. Δείξτε ότι η εικόνα μιας βάσης του V είναι βάση του W.

(β) Το αντίστροφο ισχύει; Δηλαδή αν η εικόνα μιας βάσης του V είναι βάση του W, είναι ο T ισομορφισμός. Αποδείξτε το.

3. (α) Ο πολλαπλασιασμός διανύσματος x με ορθογώνιο πίνακα Q διατηρεί τα μήκη (νόρμα) και γιατί;

(β) Ο πολλαπλασιασμός διανύσματος x με ορθογώνιο πίνακα Q διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα και γιατί;

(γ) Δίνεται ένας ορθογώνιος πίνακας Q και ένα διάνυσμα a (σε οποιαδήποτε βάση). Εκφράστε το a σαν γραμμικό συνδυασμό των στηλών του Q. (να γίνει απαραίτητα χρήση πινάκων).

$$x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_2 - x_4 = 0$$

$\boxed{x_2 = x_4}$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

35% : Ορισμός: Αν $S \subseteq V$ όπου V είναι δ.χ. με εσωτερικό γινόμενο ($\langle\,\rangle$), τότε το σύνολο:

$$S^{\perp} = \{x \in V \,/\, \langle x, s\rangle = 0 \text{ για όλα τα } s \in S\}$$

λέγεται ορθογώνιο συμπλήρωμα του S

(α) Αποδείξτε ότι το $S^{\perp}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V

(β) -11- ότι ο αριστερός μηδενοχώρος (ο μηδενοχώρος του A^T) είναι ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου στηλών του A

(γ1) Δίνεται το σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^4$

$$S = \{(1,0,2,3), (0,1,0,1), (-1,1,-2,-4), (1,1,2,2)\}$$

Βρείτε το $S^{\perp}$ (εκφράζοντας το σαν σύνολο), όπως και μια ορθοκανονική του βάση.

(γ2) Επεκτείνετε τη βάση του $S^{\perp}$ που βρήκατε στο (γ1) σε μια βάση του $\mathbb{R}^4$

(γ3) Στη συνέχεια της (γ1), ποια σχέση συνδέει τα σύνολα S, $S^{\perp}$ και $\mathbb{R}^4$;

σον ιψ

4. Αν S είναι γ.α. στροφής διανύσματος του R^2 κατά γωνία θ, να βρεθούν

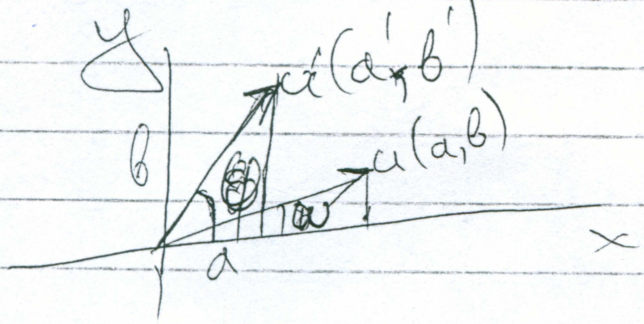
α ο πίνακας A του S ως προς την τυποποιημένη βάση

β βάσεις για τον μηδενοχώρο του (kerS) και η εικόνα του (ImS)

γ ο πίνακας B του S ως προς την βάση $\{(2,1),(1,2)\}$ σε σχέση με τον πίνακα A.

δ οι ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του A και

ε η διαγώνια μορφή του A (δηλαδή να διαγωνοποιηθεί)



$S(a,b) = S($

$\sigma\upsilon\nu\theta = \cancel{\frac{u'}{b}} = \frac{b}{u}$

$u = \frac{b}{\sigma\upsilon\nu\theta}$

$\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{b'}{u'} \Rightarrow \phi = \cos^{-1}\left(\frac{b'}{u'}\right.$

$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{b}{u} \Rightarrow \omega = \cos^{-1}\left(\frac{b}{u}\right.$

$\theta = \phi - \omega = \cos^{-1}\left(\frac{b'}{u'}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{b}{u}\right)$

$\cos\theta = \frac{b'}{u'} - \frac{b}{u} \Rightarrow u'.u\cos\theta = ub' - bu'$

$u.(a',b')\cos\theta = ub' - b(a',b')$

$u(a'\cos\theta, b'\cos\theta) = ub' - (a'b, bb')$

$u\,a' = \frac{(-a'b, -bb')}{(a'\cos\theta, b'\cos\theta) - b'}$