Θέματα Σεπτεμβρίου 1996

1.

i) Να αποδειχτεί ότι το σύνολο {(3+SQRT(2), 1+SQRT(2)), (7, 1+2SQRT(2)} είναι γραμμικά εξαρτημένα πάνω στο R, αλλά γραμμικά ανεξάρτητο πάνω στο Q.

ii) Να εξεταστεί αν το υποσύνολο {A ανήκει M_2(R) | detA = 0}

Λύση

---

2. Αν V είναι ένας ευκλείδιος χώρος και u, v ανήκουν στο V, να αποδειχθεί ότι:

$$||u-v||^2 + ||u+v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$$

Λύση

---

3. Να επεκταθεί σε μια ορθοκανονική βάση το σύνολο: {1/2(1, i, 1, i), 1/2(i, 1, i, 1)} για το διανυσματικό χώρο V_4(C).

Λύση

---

4. Δίνονται οι R-βάσεις {u_1, u_2} και {v_1, v_2, v_3} των δ.χ. V_2(R) και V_3(R) αντίστοιχα. Έστω ένας γραμμικός μετασχηματισμός T από τον V_2(R) στον V_3(R) που ορίζεται ως εξής:

$T(u_1) = v_1 + 2v_2 - v_3$,

$T(u_2) = v_1 - v_2$

Να βρεθεί ο πίνακας του T ως προς αυτές τις βάσεις. Να βρεθεί επίσης ο πίνακας του T ως προς τις R - βάσεις {$-u_1+u_2$, $2u_1-u_2$} και {v_1, v_1+v_2, $v_1+v_2+v_3$} του V_2(R) και V_3(R) αντίστοιχα. Ποια σχέση συνδέει τους δύο παραπάνω πίνακες; (κάνετε όλους τους απαραίτητους υπολογισμούς). Βρείτε τους εμπλεκόμενους πίνακες με συστηματικό τρόπο.

Λύση

---

5. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός του R-χώρου C ορίζεται από τη σχέση T(z) = (1-i)z για όλα τα z που ανήκουν στο C. Να δειχθεί ότι ο T είναι μη ιδιάζων. Ποιος ο βαθμός του T, δικαιολογήστε;

Λύση

---

6. Αποδείξτε ότι κάθε K-βάση ενός πεπερασμένα παραγόμενου K-χώρου έχει τον ίδιο αριθμός στοιχείων.

Λύση

Επιστροφή στη λίστα των θεμάτων

Λύση της 1ης άσκησης

i)

Εξετάζουμε την τιμή της ορίζουσας με γραμμές τις συντεταγμένες του κάθε διανύσματος.

Επομένως έχουμε:

det| 3+SQRT(2), 1+2SQRT(2), 7, 1+2SQRT(2)| = (3+SQRT(2))(1+2SQRT(2)) - 7(1+SQRT(2))

= (7+7SQRT(2)) (7+7SQRT(2)) = 0

Άρα τα 2 διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα στο R. Όσον αφορά στη γραμμική ανεξαρτησία στο Q, προχωρούμε σύμφωνα με τον ορισμό. Θεωρούμε 2 ρητούς αριθμούς k, l. Τότε:

{k(3+SQRT(2))+l(1+SQRT(2)) = 0 <=> (3k+1) + (k+lSQRT(2) = 0 + 0SQRT(2) <=> k = 0

{7k+l(1+SQRT(2)) = 0 <=> (7k+1) + lSQRT(2) = 0 + 0SQRT(2) <=> l = 0

Σύμφωνα με τον ορισμό τα 2 διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα πάνω στο σύνολο Q.

ii)

Έστω V = {A ανήκει M_2(R): det(A) = 0}, A, B ανήκουν στο V με A(πίνακας) = (1, 1, 1, 1), B(πίνακας) = (1,2,2,4). Τότε είναι λA+B=πίνακας (λ+1, λ+2, λ+2, λ+4) = (λόγω λ=1) πίνακας (2,3,3,5) με det(A+B)=1<>0. Άρα το V δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και συνεπώς δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.

Επιστροφή στις εκφωνήσεις των ασκήσεων

Λύση της 2ης άσκησης

$||u-v||^2 + ||u+v||^2 = (u-v, u-v) + (u+v, u+v)$

$= ||u||^2 - (u,v) - (v,u) + ||v||^2 + ||u||^2 + (u,v) + (v,u) + ||v||^2$

$= ||u||^2 + ||v||^2 + ||u||^2 + ||v||^2$

$=2 (||u||^2 + ||v||^2)$

Επιστροφή στις εκφωνήσεις των ασκήσεων