Θέματα Σεπτεμβρίου 1995

ΘΕΜΑ 1ο

1. Αν W_1 και W_2 υποχώροι ενός K-χώρου V πεπερασμένης διάστασης, τότε να αποδειχθεί ότι:

$(W_1: K) + (W_2: K) = (W_1 \wedge W_2: K) + (W_1 + W_2: K)$

Λύση

2. Να βρεθεί η γενική μορφή που έχει κάθε εσωτερικό γινόμενο επί ενός πεπερασμένης διάστασης K-χώρου εφοδιασμένου με εσωτερικό γινόμενο. Να δοθεί η σχετική απόδειξη.

Λύση

3.

(α) Να εκφρασθεί και να αποδειχθεί η ανισότητα Cauchy-Schwarz. Πως προκύπτουν και ποιες είναι οι ανισότητες των οποίων αυτή αποτελεί γενίκευση;

(β) Να εκφρασθεί και να αποδειχθεί η τριγωνική ανισότητα σε ένα διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο.

Λύση

ΘΕΜΑ 2ο

1. Έστω $T:R^3 \to R^3$ μια απεικόνιση που ορίζεται από:

$T(x,y,z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$

Να αποδειχθεί ότι ο T είναι γραμμικός μετασχηματισμός και να βρεθεί μια βάση και η διάσταση (α) της εικόνας του T και (β) του πυρήνα της T.

Λύση

2. Έστω ο δ.χ. των πολυωνύμων C[0,1] με εσωτερικό γινόμενο $<f,g> = Int_{(0->1)}[f(t)g(t)dt]$ και $(a_1, a_2, ..., a_n)$ και $(b_1, b_2, ..., b_n)$δύο οποιαδήποτε διανύσματά του. Αποδείξτε ότι το άθροισμα $\Sigma_{(i=1->n)}[a_i b_i]$ συγκλίνει απόλυτα.

<u>Λύση</u>

3. Έστω U και W υποχώροι του R^4 που παράγονται από τα σύνολα: {(1,1,0,1), (1,2,3,0), (2,3,3,-1)} και {(1,2,2,-2), (2,3,2,-3), (1,3,4,-3)} αντίστοιχα. Να βρεθούν (α) η dim(U+W) και (β) η $dim(U \wedge W)$.

<u>Λύση</u>

[Επιστροφή στη λίστα των θεμάτων]