Λύσεις επιλεγμένων θεμάτων προόδου ΓΑ (2008)

Χ. Αλεξόπουλος

Σύντομες απαντήσεις

Θέμα 1

1. a) $e2^TAe3 = ¼$,
b) ο A είναι συμμετρικός, επομένως: $A^TA-AA^T=0$
c) $Ae = (1+1/2+1/3, ½+1/3+1/4, 1/3+1/4+1/5)^T$
d) $e^TA=(A^Te)^T=(Ae)^T$
e) e^TAe

2. Ο A είναι γινόμενο αντιστρέψιμων μητρώων και συνεπώς αντιστρέψιμος.
Πράγματι, ο πρώτος, έστω B, προκύπτει από μετάθεση των γραμμών 1 και 3 ενός διαγώνιου μητρώου, άρα αντιστρέψιμος. Οι υπόλοιποι δύο, έστω C και D είναι τριγωνικοί: είναι μητρώο απαλοιφής και ένας διαγώνιος αντίστοιχα. άρα αντιστρέψιμοι.
Θα είναι λοιπόν
$A=(BCD)^{-1}= D^{-1}C^{-1}B^{-1}=$
[1 0 0 ; 0 ½ 0 ; 0 0 1/3] * [1 1 0 ; 0 1 0; -1 0 1] * [0 0 1 ; 0 -1/2 0; 1 0] =
[1 0 0 ; 0 ½ 0; -1/3 0 1/3] * [0 0 1; 0 -1/2 0 ; 1 0 0] =
[0 0 1 ; 0 -1/4 0 ; 1/3 0 -1/3]

3. Είναι A=B+C (1) και $A=B^T- C^T$ => $A=(B-C)^T$ δηλ. $A^T=B-C$ (2). Από το σύστημα των (1), (2) υπολογίζουμε εύκολα τα $A=1/2(A^T+A)$, $C=1/2(A-A^T)$

4(α), (β): Τα γινόμενα είναι έγκυρα σαν γινόμενα 2 μητρώων διατάσεων mxn και nxm και nxm και mxn, αντίστοιχα. Εξάλλου, επειδή $(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$ και $(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$ το προκύπτον μητρώο είναι συμμετρικό.
(γ): Οι όροι έχουν μεγέθη mxm και nxn και προφανώς πρέπει να συμφωνούν για την πράξη της πρόσθεσης: m=n.
(δ) Θα είναι $A^3=(P^{-1}SP)(P^{-1}SP)(P^{-1}SP) = P^{-1}S(PP^{-1})S(PP^{-1})SP = P^{-1}S\,S\,S\,SP = P^{-1}S^3P$

5 Παρατηρούμε ότι στήλη 2 = ½ x στήλη 1 και στήλη 3 = 3/2 x στήλη 1 (αντίστοιχα για τις γραμμές: γραμμή 2= 2 x γραμμή 1, γραμμή 3= 3 x γραμμή 1). Συνεπώς το A γράφεται:

$A=xy^T=[1\ 2\ 3]^T\ [1\ ½\ 1/3]$

Τάξη είναι αριθμός των οδηγών που προκύπτουν κατά την απαλοιφή. Συμπίπτει – κατά τα γνωστά – με τη διάσταση του χώρου γραμμών και στηλών.
Ο A είναι τάξης 1, αφού εύκολα από τον A προκύπτει με απαλοιφή ο $U=R=[1\ 2\ 3\ ;\ \mathbf{0}_{2x3}]$. Εξ' άλλου, όλα τα μητρώα τάξης 1 είναι τη μορφής xy^T.

Σημείωση: Η μορφή αυτή του A είναι ειδική περίπτωση διάσπασης ενός μητρώου τάξης r σε μητρώα τάξης 1:

$A= x_1y_1^T + x_2y_2^T + … + x_ny_n^T$

με $x_i \in R^{3x1}$, $y_i \in R^{1x3}$. Τα x είναι οι **στήλες οδηγών του A** ενώ τα y τις μη μηδενικές γραμμές της αναγμένης μορφής R: x =$[1\ 2\ 3]^T$ και y = $[1\ ½\ 1/3]^T$ στην περίπτωσή μας. Δίνουμε μια σύντομη απόδειξη του αποτελέσματος αυτού:

Απόδειξη: Από τον μετασχηματισμό $A=E^{-1}R$ προκύπτει ότι για k=1,…r(=αριθμός οδηγών):

k-στήλη οδηγού του A = $c_k = E^{-1}$ * k-στήλη του R = $E^{-1} * [e_k\ \mathbf{O}_k] = \mathbf{R}_k$

Επομένως οι πρώτες r στήλες του R περιέχουν τις στήλες οδηγών του A, έστω μπλόκ C.

Σύμφωνα τώρα με τη γνωστή «μπλόκ» μορφή του γινομένου, αν F είναι οι γραμμές οδηγών του R (r πρώτες γραμμές), θα είναι:

$A=E^{-1}R=[C\ D]\ [\mathbf{F}\ \mathbf{O}]'=C*F=D*\mathbf{O}=C*F=$ στήλες οδηγών του A * γραμμές οδηγών του R.

Εφαρμόζοντας τώρα τη γνωστή έφραση γινομένου (στήλες x γραμμές):

$A=E^{-1}R=CF= c_1F_1^T + c_2F_2^T + \ldots + c_nF_n^T$

6. Βλ. βιβλίο. Η γεωμετρική ερμηνεία κατά γραμμές βασίζεται στη θεώρηση κάθε εξίσωσης ξεχωριστά ως ενός «επιπέδου» το οποίο ορίζουν οι συντεταγμένες της. Μιας ευθείας στην περίπτωσή μας. Η τομή των «επιπέδων» συνιστά τη γραφική ερμηνεία, η οποία όμως πρέπει να γίνει…

Η γεωμετρική ερμηνεία κατά στήλες βασίζεται στη θεώρηση στηλών, δηλ. στη διανυσματική εξίσωση:

X1*[3,1]′ +X2[1 -1]′=[2 -1]′

Δηλ. στο προσδιορισμό των καταλλήλων συντελεστών X1, X2, (λύση) προκειμένου να παραχθεί το γνωστό διάνυσμα του β′ σκέλους (ποιος γ.σ. των στηλών δίνει το γνωστό διάνυσμα). Και εδώ απαιτείται γράφημα…

7. (α) <u>Απ.</u> Είναι dim(N(A)=n-rank(A) = n-0 =n, αφού dim({0})=0.

(β) <u>Απ.</u> [π4] Έστω ένας γ.σ. των Avi είναι 0:

[Av1, Av2,…, Avn, Avn]x= x1Av1+x2Av2+…+xnAvn = 0 που γράφεται και A[v1,v2,…vn]x=0. (1). Επειδή A αντιστρέψιμος η (1) θα ισχύει μόνον αν [v1,v2,…vn]x=0 (2). Επειδή τα v1,v2,…vn = γ.α., η (2) θα έχει σαν μοναδική λύση την x=0, και άρα τα Avi είναι γ.α.

<u>Εναλλακτική απάντηση</u> 1: Ο πίνακας των Avi είναι [Av1 Av2 …. Axn]= A[v1 v2 … vn] και ως γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων (τα γ.α. vi ορίζουν ως γνωστόν αντιστρέψιμο πίνακα) θα είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς τα Avi είναι γ.α. Επειδή μάλιστα είναι στο πλήθος n = $\dim R^n$ θα ορίζουν μια βάση του $\dim R^n$.

<u>Εναλλακτική απάντηση</u> 2: Έστω ότι είναι γ. εξαρτημένα. Συνεπώς υπάρχει γ.σ. [Av1 … Avn]x=0 για κάποιο x<>0. Η ισοδύναμα: A[v1, …, vn]x=0. Αλλά επειδή ο είναι A αντιστρέψιμος θα είναι x=0, άτοπο. Συνεπώς τα Avi είναι γ.α.

8. Προφανώς όλα τα xi είναι μη μηδενικά. Θα είναι <xi, xj> = 0 για i<>j.

Λαμβάνουμε ένα γ.σ. των xi ίσο με 0: c1x1+ …+cnxn=0.

Πολλαπλασιάζοντας αριστερά με ένα τυχαίο xj, παίρνουμε για j=1,…,k,:

c1<xj, x1>+…+cj<xj, xj>+…+ck<xk, xk>=0, απ′ όπου προκύπτει: cj<xj,xj>=0 και επειδή <xj,xj><>0, cj=0. Συνεπώς όλα τα cj=0 και απομένως τα xi είναι ανεξάρτητα.

<u>Εναλλακτική διατύπωση:</u>

Έστω ένας γραμμικός συνδυασμός [x1 x2 … xk]c=**0**, $c \in R^{3x1}$. Πολλαπλασιάζουμε επί ένα τυχαίο $(xj)^t \in R^{1x3}$, j=1,…k:

$(xk)^t$[x1 x2 … xk]c=$(xk)^t$ **0 =** 0 =>

$[(xj)^t x1 \ldots (xj)^t xj \ldots (xj)^t xk]c = [0 \ldots ||xj||^2 \ldots 0]c=0 \Rightarrow cj||xj||^2 \Rightarrow cj=0$. Επομένως για όλα τα j είναι cj=0 και άρα x1,…,xn γ.α.

9. Αφού v, z, w βάση και y =αv+βz+γz το σύστημα [v, z, w][α,β,γ] έχει μια και μοναδική λύση και συνεπώς τα α,β και γ είναι μοναδικά. Προκύπτουν ακριβώς από την επίλυση αυτού του συστήματος.

10. Ως γνωστόν το μητρώο L ενός γ.μ. ως προς μια βάση e1,…en ορίζεται:

L = [Lv1 Lv2 … Lvn] = [37 3 -4 ; 33 18 8; 30 -3 15]

Και η εικόνα του v θα είναι

Lv = L * v = L(1e1-1e2+2e3)=1 Le1 - 1 Le2 + 2 Le3 = αριθ. αποτέλεσμα.

11. Είναι w=Pv=a1u1+a2u2+…+anun, δηλαδή τα ai προκύπτουν σαν λύση του συστήματος:

$[u1\ u2\ \dots\ un]\ [a1, a2, \dots\ an]^T = w$

Για την προβολή ισχύει $P^2 = P$ ή και $P^n = P$, οπότε $P^{20}u = Pu = w$ (περαιτέρω εφαρμογή προβολής στο u δεν μεταβάλλει την προβολή Pu).

Θέμα 3

Δίνεται το μητρώο A = [1 2 2 1; 2 3 0 1 ; 1 2 1 c], όπου c πραγματική σταθερά.
1 . Βρείτε τη μορφή αναγμένων γραμμών R (συναρτήσει του c) και την τάξη r του A. Στα επόμενα ερωτήματα να βασισθείτε απαραίτητα στη μορφή R.
2. Εκφράστε με σαφήνεια το R σαν γινόμενο στοιχειωδών μητρώων επί το A, και δώστε τα μητρώα αυτά.
3. Βρείτε (α) το χώρο στηλών του A (β) μια βάση του και (γ) μια βάση του χώρου γραμμών.
4. Αποφανθείτε για την επιλυσιμότητα του συστήματος Ax=b για τις διάφορες τιμές των c και b.
5. Βρείτε μια βάση του μηδενοχώρου του A
6. Δίδεται **{c=0/c=1/c=3/c=0.5}** και $b=(1, 2, -1)^T$. Βρείτε τώρα με συστηματικό τρόπο και με βάση τα παραπάνω τη γενική λύση του Ax=b.

(2)

(3) Απ. Εξετάζουμε αν τα {u1, v1, v2}, {u2, v1, v2} είναι γ.α. εφαρμόζοντας απαλοιφή (τριγωνοποίηση) στα μητρώα [u1, v1, v2] και [u2, v1, v2] αντίστοιχα. Βρίσκουμε σε κάθε περίπτωση ότι ένα σύνολο από τα παραπάνω είναι γ.α. ενώ το άλλο όχι.

Θέμα 3
1. A=> … U=[1 2 2 1; 0 -1 -4 -1; 0 0 -1 c-1]
=>R=[1 0 0 -6c+5 ; 0 1 0 4c-3 ; 0 0 1 1-c] και επομένως r=3 (το c δεν επηρεάζει την τάξη).
2. Ισχύει: R=EA. Βάσει του τρόπου υπολογισμού του R, το E δίνεται από το γινόμενο στοιχειωδών μητρώων:

E=D2*D3*E12*E13*E23*E31*E21

όπου Eij μητρώο απαλοιφής (αφαίρεση πολ/σίου γραμμής j από γραμμή i) και Di μητρώο διαίρεσης γραμμής i δια του οδηγού της, για να δημιουργηθούν μονάδες. Συγκεκριμένα είναι

E21 = [1 0 0 ; -2 1 0 ; 0 0 1]
E31 = [1 0 0 ; 0 1 0 ; -1 0 1]
E23 = [1 0 0 ; 0 1 -4 ; 0 0 1]

E13 = [1 0 2 ; 0 1 0 ; 0 0 1]
E12 = [1 2 0 ; 0 1 0 ; 0 0 1]
D3 = [1 0 0 ; 0 1 0 ; 0 0 -1]
D2 = [1 0 0 ; 0 -1 0 ; 0 0 1]

3. (α) Προφανώς C(A) = R^3. (β) Μια βάση του C(A) αποτελούν οι 3 πρώτες στήλες του A που αντιστοιχούν στις στήλες οδηγών (ομοίως και οι 3 στήλες οδηγών του A) . (γ) Οι τρείς γραμμές του A αποτελούν μια βάση του χ.γ. (ομοίως και οι αντ. γραμμές του R)

4. Αφού r=3=m<n=4 για κάθε c, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, για κάθε c και b.

5. Είναι dim(N(A))=4-3=1. Άρα το μοναδικό διάνυσμα s της βάσης (ειδική λύση) βρίσκεται θέτοντας x4=1 στο Rx=0. Υπενθυμίζεται ότι το αποτέλεσμα βρίσκεται απ' ευθείας, λόγω της ειδικής μορφής του R (μονάδες στη «διαγώνιο» και 0 στις στήλες των οδηγών): Οι θέσεις οδηγών στο διάνυσμα μιας ειδικής λύσης συμπληρώνονται από τα αντίθετα στοιχεία της στήλης της ελεύθερης μεταβλητής (της $4^{ης}$ στήλης στην περίπτωσή μας). Πράγματι, αν θεωρήσουμε την ελεύθερη στήλη x_k και θέσουμε x_k=1 και x_i=0 για τις υπόλοιπες n-r-1 ελεύθερες μεταβλητές, παίρνουμε

i-γραμμή του R * x = R[i,:] * x = 1*x_i+R(i,k) = 0, ή x_i=-R(i,4)

s=[-R(:,4) ; 1] = (6c-5, 3-4c, c-1, 1)^T.

6. Για την επίλυση του Ax=b, υπολογίζουμε στο προκύπτον σύστημα Rx=d για δοθέν c το διάνυσμα d=Eb, εκτελώντας τους ίδιους μετασχηματισμούς με αυτούς που πήραμε το R.
Έτσι, για c=0 παίρνουμε:

R= [1 0 0 5 ; 0 1 0 -3 ; 0 0 1 1]

Και

b=(1, 2, -1)^T -> (1, 0, -2) -> (5, 8, -2) -> (16, 8, -2) -> d=(13, -8, 2)^T.

Βρίσκουμε τώρα τη μερική λύση του Rx=d, θέτοντας x_4=0:

x_ειδική = [d ; 0] (λόγω της ειδικής μορφής του R) = (13, -8, 2, 0)^T

Η ειδική λύση του μηδενοχώρου :

x_ειδική = λ(-5, 3, -1, 1)^T , με λ$\in$R

Συνεπώς

x_πλήρης= x_μερική + x_ειδική = (13, -8, 2, 0)^T + λ(-5, 3, -1, 1)^T, με λ$\in$R

Θέμα 2

Θέμα 3

1. Θα πρέπει το b να ανήκει στο χώρο στηλών του B. Μετατρέπουμε το διευρυμένο πίνακα [A|b] σε κλιμακωτό, απ’ όπου καταλήγουμε σε δύο εξισώσεις ως προς b1, b2, b3, b4 (ποιες?). Αυτές αποτελούν τις συνθήκες.

2. Είναι r=Ac-b. Χρησιμοποιείται το ευκλείδιο μέτρο (νόρμα) ||r||. Το c=(c1,c2) (στο παράδειγμα) είναι η ζητούμενη προσέγγιση, δηλαδή το διάνυσμα-«λύση» που ελαχιστοποιεί το ||r||. Το ||r|| ελαχιστοποιείται στα σημεία που μηδενίζουν τις μερικές παραγώγους: $\{\partial\|r\|^2/\partial c1 = 0$, $\{\partial\|r\|^2/\partial c2 = 0\}$. Το σύστημα αυτό συμπίπτει με το $A^TAc=A^Tb$.

3. Το σύστημα των παραπάνω καν. εξισώσεων ταυτίζεται με το $A^TAc=A^Tb$ (πολ/ζουμε την (αδύνατη) Ax=b επί A^T…). Επομένως:

$B=A^TA=$

$$\begin{matrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{matrix}$$

και $d=A^Tb$ =

$$\begin{matrix} 9 \\ 13 \end{matrix}$$

Λύνοντας το Bc=d, βρίσκουμε

c =[1.6667, 1.3333]’