ΙΟΥΝΙΟΣ 99

$aA'+B'$, aA_2+B_2 $(A_1,A_2)\to(A_1',A_2')$ $(B_1,B_2)(B_1',B_2')$ $aA'+B'$ $(aA+B)$ $T(A)\to A^2$ $aA+B\to(aA+B)^2$ $aA+B$ 90-0

1. Θεωρούμε την απεικόνιση $T: R\circ S: R^2\to R^2$, όπου R = στροφή διανύσματος κατά γωνία φ και S = ανάκλαση ως πρός ενθεία διερχόμενη από τό κέντρο των αξόνων, εκκινώτιμενη γ. [70%] ε με τον κέρνα

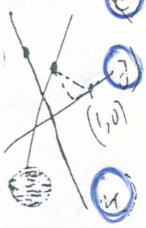
(α) Δείξτε ότι ο T είναι γ. μετ/σμός $aT(A)+T(B)=T(aA+B)$ $aT_A+\Delta=T(aF+\Delta)$ $R\to T(e_A)\to S_A$ $A\to F$ $B\to\Delta$ $a(T(v)+T(w))$ $T(aw+v)$

(β) Ποιός είναι ο μηδενοχώρος (kernel) του T και γιατί; Είναι ο T ισομορφισμός και γιατί;

(γ) Αφού βρείτε τούς πίνακες των R και S ως πρός τήν τυποποιημένη βάση $\{e_1,e_2\}$, βρείτε τον πίνακα A_T του T. $T(\text{ανω}, \text{ανω})\to(\text{ανω}, \text{ανω})$ $TR=S$ $T=SR^{-1}$

(δ) Δώστε μιά αναλυτική (αλγεβρική) έκφραση του T, και του $T(v)$, $v\in R^2$.

(ε) Ποιά είναι η διάσταση (βάθμος) του $\operatorname{im}T=T(R^2)$ και γιατί,



(ζ) Θεωρούμε την προβολή P διανύσματος πάνω στην "θ-ενθεία". Βρείτε τον πίνακα του P, του μηδενοχώρου του και τη διάσταση του. Είναι ο P αντιστρέψιμος και γιατί; Τι ιδιότητες έχει;

(η) Υπάρχει ο T^{-1}; Αν ναι βρείτε τον πίνακα του και την αναλυτική του έκφραση.

(θ) Θεωρούμε τώρα αλλαγή βάσης για του T: $\{e_1,e_2\}\to\{2e_1,3e_2\}$. $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $T=T\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ Βρείτε τούς πίνακες του T και του P ως πρός τη νέα βάση $B=\{2e_1,3e_2\}$. (χρήση τίνακα)

(ι) Θεωρούμε τον πίνακα A_P του P. Είναι ορθογώνια όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα και γιατί, Αν ναι να διαγωνοποιήσετε του A_P.

(κ) Νά διαγωνοποιηθεί ο πίνακας A_S του μετ/σμού S. Ποιά είναι η βάση πού αντιστοιχεί στον διαγώνιο πίνακα και γιατί; Ποιοί είναι οι ιδιοχώροι του A_S και ποιοί οι διαστάσεις τους;

2. (α) Αποδείξτε ότι δύο βάσεις δ.χ. έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. (15%) $\{u_1,\dots,u_n\}$ $\{w_1,\dots,w_n\}$ $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $bcd=\begin{matrix}ab&ac&ad\\bb&bc&bd\\cb&cc&cd\end{matrix}$

(β) Βρείτε την τάξη του πίνακα uv^t, όπου $u(m\times1)$ και $v^t(1\times n)$ (5%)

(γ) Να επεκταθεί σε μία ορθοκανονική βάση για το χώρο $\mathbb{C}^4$, τό ενιόλο: (10%)

$$\left\{\tfrac{1}{2}(1,i,1,i),\ \tfrac{1}{2}(i,1,i,1)\right\}$$

με εφαρμογή του σχήματος Gram-Schmidt.

(δ) Δείξτε ότι όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. (10%)

$\vartheta=30$ $\varphi=30$ $\vartheta=45$ $\varphi=30$ $\vartheta=45$ $\varphi=30$ $\frac{\sqrt3}{2}$ $\frac{\sqrt3}{2}$ $\frac{\sqrt3}{2}$

Καλή Επιτυχία!

$\boxed{\sigma\omega(a+b)}=\frac{\sqrt3}{4}$ $=\sigma\omega a\,\sigma\omega b-\text{ημ}a\,\text{ημ}b$ $-\sigma\omega(a-b)$ $=(\sigma\omega a\,\sigma\omega b-\text{ημ}a\,\text{ημ}b)$ $=\text{ημ}a\,\text{ημ}b-\sigma\omega a\,\sigma\omega b$ $\text{ημ}a\,\sigma\omega b+\sigma\omega a\,\text{ημ}b$

$60-30=\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}\text{ημ}(a+b)$