<u>Λύση της 1ης άσκησης</u>

Έστω $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ένα ορθογώνιο υποσύνολο μη μηδενικών διανυσμάτων του V.

Υποθέτουμε ότι: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$, όπου το α_i ανήκει στο K (i=1, 2, ..., n).

Τότε, για $1 <= k <= n$ έχουμε

$$0 = \{\Sigma_{(i=1->n)} \alpha_i \, v_i \, , v_k \} = \Sigma_{(i=1->n)} \alpha_i \, (v_i \, , v_k) = \alpha_k \, (v_k \, , v_k)$$

Αλλά, εφόσον $v_k <> 0$, $(v_k , v_k) <> 0$, πρέπει $\alpha_k = 0$

Άρα το $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο πάνω στο K.

Επιστροφή στις εκφωνήσεις των ασκήσεων

<u>Λύση της 3ης άσκησης του 1ου θέματος</u>

(α)

Αν u,v ανήκουν στο V και το α ανήκει στο K, τότε: $|(u,v)| <= ||u||\ ||v||$.

K: είτε το σώμα των πραγματικών αριθμών R, είτε το σώμα των μιγαδικών αριθμών C

V: K-χώρος με εσωτερικό γινόμενο

- Αν $u = 0$, τότε και τα δύο μέλη είναι μηδέν και συνεπώς ισχύει
- Αν $u <> 0$, θέτουμε $w = v - \{[(v,u) / ||u||^2]u\}$, τότε $(w,u) = (v,u) - \{[(v,u) / ||u||^2]\ (u,v)\} = 0$

και $0 <= ||w||^2 = (w,w)$

$= (w,v - \{[(v,u) / ||u||^2]u\}$

$= (w,v)$

$= (v,v) - \{[(v,u) / ||u||^2](u,v\}$

$= ||u||^2 - (|(u,v)|^2 / ||u||^2)$

δηλαδή

$|(u,v)|^2 <= ||u||^2\ ||v||^2$

ή $|(u,v)| <= ||u||\ ||v||$

(β)

Από το (α) έχουμε $||u+v||^2 = (u+v,\ u+v) = ||u||^2 + (u,v) + (v,u) + ||v||^2$

$<= ||u||^2 + |(u,v) + (v,u)| + ||v||^2$

$<= ||u||^2 + |(u,v)| + |(v,u)| + ||v||^2$

$<= ||u||^2 + 2||u||\ ||v|| + ||v||^2$

$$= (||u|| + ||v||)^2$$

και άρα $||u+v|| <= ||u|| + ||v||$

Επιστροφή στις εκφωνήσεις των ασκήσεων