4. α) Δίνεται ένα μητρώο $C \in R^{2\times4}$. Να βρείτε διανύσματα z, w τέτοια ώστε το $z^T C w$ να είναι το στοιχείο στη θέση $(2,4)$ του C.

β) Για το ίδιο C, να βρείτε διανύσματα z, w τέτοια ώστε $\dfrac{z^T C w}{(z^T z)(w^T w)}$ να είναι ο μέσος όρος των στοιχείων του C, δηλ. $\frac{1}{8} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} \gamma_{i,j}$ όπου $\gamma_{i,j}$ συμβολίζει το στοιχείο στη θέση (i,j) του C.

5. Για το σύστημα $(2x+3y=-1,\ x-y=2)$ να ερμηνευθεί γεωμετρικά τη λύση α) με τη θεωρία κατά γραμμές, β) με τη θεωρία κατά στήλες (να σχεδιάσ. ότι χρειάζεται για τις 2 περιπτώσ. σε 2 σχήματα στο καρτεσιανό σύστημα

6. Δίνεται το γραμμικό σύστημα: $3x+2y+z=6$, $-y-z+2x=1$, $-y+x=-1$

α) Να το ξαναγράψετε με μητρώα και διανύσματα, $A \in R^{3\times3}$ και $g, h \in R^3$ ως $Ag=h$. Ποια είναι τα A, g, h β) Να βρείτε κάτω τριγωνικά μητρώα L_1, L_2, με μονάδες στη διαγώνιο, τέτοια ώστε το $L_2 L_1 A = U$ να είναι άνω τριγωνικό

γ) Να βρείτε τα διανύσματα u, v τέτοια ώστε $L_2 = I - uv^T$.

7. α) Αν τα $v_1, \ldots, v_n$ ($v_i \in R^n$) είναι ανεξάρτητα, τί πρέπει να συμβαίνει για να είναι και τα $Av_1, \ldots Av_n$ ανεξ.

β) Ένας υποχώρος παράγεται από τα διαν. $v_1 = (-1,1)^T$, $v_2 = (4,2)^T$, $v_3 = (2,3)^T$, $v_4 = (6,2)^T$

Βρείτε μία βάση του

8. Σε ένα γραμμικό χώρο S έχει οριοθεί εσωτερικό γινόμενο και k στοιχεία του $v_1, v_2, .. v_k$ είναι ανά δύο κάθετα. Είναι και γραμμικώς ανεξαρτ.; Αποδείξ.

9. Έστω $v = [v_1, v_2, v_3]^T$, $z = [z_1\ z_2\ z_3]^T$ $w = [w_1\ w_2\ w_3]^T$ μία βάση του R^3 διαφορετ. από τη γνωστή τυπική βάση.
Έστω $y = [y_1\ y_2\ y_3]^T$ ένα τυχαίο διάνυσμα του R^3
Τότε $y = \alpha v + \beta z + \gamma w$

a) Αποδ. ότι οι συντελεστές α, β, γ είναι μοναδ.

β) Ποιο σύστημα εξισώσεων πρέπει να λύσεις για να βρείς τους α, β, γ;

10. Έστω $L: R^3 \to R^3$ γραμμικός μετασχημ. και έστω οι εικόνες της τυπικής βάσης $e_1 = [1, 0, 0]^T$ $e_2 = [0, 1, 0]^T$, $e_3 = [0, 0, 1]^T$ είναι αντίστοιχα $Le_1 = [30, 32, 30]^T$, $Le_2 = [3, 16, -2]^T$ και $Le_3 = [4, -8, 10]^T$.

a) Ποιος ο πίνακας αντιπρόσωπος του L για την τυπική βάση β) Ποιά η εικόνα του $v = [2, -1, 1]^T$

11. Έστω $Pv = a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n$ η προβολή του v σε χώρο που έχει βάση τα $u_1, \ldots u_n$

a) Ποιο σύστημα πρέπει να λυθεί για να βρεθούν οι συντελ. $a_1, .., a_n$ αν δίνονται το v και τα $u_1, \ldots u_n$

β) Ποιο είναι το διάνυσμα $P^{20} v$ και γιατί;

II. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$

1. Τι σχέση πρέπει να ισχύει μεταξύ των b_1, b_2, b_3, b_4 για να έχει λύση το σύστημα $Ac = b$;
2. Έστω ότι το σύστημα δεν έχει λύση. Για να βρούμε μια προσεγγιστική λύση θα ~~...~~ ελαχιστοποιούμε την ποσότητα $\|r\|^2$ όπου (συναρτήσει των A, c, b) $r = \ldots$
κ' όπου $\|.\|$ είναι το Ευκλείδειο μέτρο. Για να βρεθούν οι τιμές των c_1, c_2 με ελαχιστοποίηση της ποσότητας $\|r\|^2$, θα χρησιμοποιηθούν 2 εξισώσεις. Πώς θα βρεθούν οι εξισώσεις αυτές?
3. Έστω ότι $b = [1 \ 2 \ 3 \ 4]^T$. Εφαρμόστε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και δώστε τις τιμές των c_1 κ' c_2

III. Δίνεται το μητρώο $A = [1 \ 3 \ 8 \ 0; \ 2 \ -1 \ 2 \ 7; \ 2 \ 4 \ 12 \ 2]$

α) Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R και την τάξη του A.

β) Ποιος είναι ο χώρος γραμμών κ' ποιος ο χώρος στηλών του A;

γ) Με τη βοήθεια του R διασπάστε κατάλληλα το A σε άθροισμα μητρώων τάξης 1: $u_1 v_1^T + u_2 v_2^T + \ldots$

δ) Ποιος ο μηδενικός χώρος του A; (Βρείτε διάσταση και βάση)

ε) Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ με $b = (b_1, b_2, b_3)^T$. Δέχεται το σύστημα πάντοτε λύση; Αν όχι βρείτε συγκεκριμένη συνθήκη για την ύπαρξη λύσεων.

στ) Αν δοθεί $b = (0, 7, 2)^T$, βρείτε την πλήρη λύση του συστήματος.