Τμηματικές εξετάσεις περιόδου Σεπτεμβρίου
στη Γραμμική Άλγεβρα
Εξεταστής: Χ. Αλεξόπουλος Ημ/νία: 23-1-98 Διάρκεια: 2.30'

1. (20%) (α) 'Εστω δύο δ.χ V και W με ίδια διάσταση και ένας ισομορφισμός T του V στον W.
Δείξτε ότι η εικόνα μιας βάσης του V είναι βάση του W.
(β) Το αντίστροφο ισχύει; Δηλαδή αν η εικόνα μιας βάσης του V είναι βάση του W, είναι ο T ισομορφισμός; (Αποδείξτε το)

2. (15%) Αποδείξτε ότι ένας ορθογώνιος πίνακας A έχει ορθογώνιες στήλες και αντίστροφα, αν ο A έχει ορθογώνιες στήλες, τότε είναι ορθογώνιος. Ισχύει η ίδια πρόταση και για τις γραμμές;

3. (15%) Αν u=x και v=συνπx είναι στοιχεία του δ.χ. C[0,1] εφοδιασμένου με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, να υπολογισθούν (α) τα μήκη $\|u\|$, $\|v\|$, $\|u+v\|$, (β) η τιμή (u,v) και η γωνία μεταξύ των u και v και (γ) να διαπιστωθεί αν ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwarz και η τριγωνική ανισότητα.

4. (15%) 'Εστω V υποχώρος του C[0,1] που περιέχει τα πολυώνυμα βαθμού το πολύ 2. Να εφαρμοσθεί η μέθοδος Gram-Schmidt στη βάση $\{1, x, x^2\}$ του V.

5. (15%) Αν $S=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, να βρεθούν βάσεις για τον μηδενεχώρο (KerT) και την εικόνα (ImT) του γραμμικού μετασχηματισμού T που ορίζεται από τη σχέση T(A)=SA.

6. (20%) Να διαγωνιοποιηθεί ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}2-i & 0 & i\\ 0 & 1+i & 0\\ i & 0 & 2-i\end{bmatrix}$$

Ποιά η σημασία αυτής της διαγωνιοποίησης;

Γραπτές εξετάσεις στη Γραμμική Άλγεβρα
περιόδου Φεβρουαρίου 1997
Εξεταστής: Χ. Αλεξόπουλος Ημ/νία: 25-2-97 Διάρκεια: 2.30'

1. (10%) Έστω ένα ορθογώνιο υποσύνολο $\{v1, v2, ..., v_n\}$ ενός δ.χ. V εφοδιασμένου με εσωτερικό γινόμενο. Είναι γραμμικά ανεξάρτητο και γιατί;

2. (15%) (2.1) 'Εστω δ.υο δ.χ V και W με dimV=dimW=n και ένας ισομορφισμός T του V στον W. Έστω $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ μια βάση του V. Αποδείξτε ότι τότε και το σύνολο $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ είναι μια βάση του W.
(2.2) Το αντίστροφο ισχύει; Δηλαδή, αν $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ βάση του V και $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ βάση του W, είναι ο T ισομορφισμός; Αποδείξτε το.

3. (45%) Έστω οι γραμμικοί μετασχηματισμοί συμμετρίας (ανάκλασης) s ως προς ευθεία του R^2, διερχόμενη από την αρχή των αξόνων και σχηματίζουσα γωνία φ με τον άξονα των x, και περιστροφής r γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία θ.

(3.1) Δώστε τους πίνακες A_s και A_r των παραπάνω μετασχηματισμών (θεωρώντας την τυποποιημένη βάση του R^2 $\{ e_1=(1,0), e_2=(0,1) \}$)
(3.2) Υπολογίστε τους πυρήνες (μηδενοχώρους) ker(s) και ker(r).
(3.3) Υπάρχουν οι αντίστροφοι των παραπάνω μετασχηματισμών, γιατί και ποιοί είναι; Αν ναι δώστε τους πίνακές τους.
(3.4) Θεωρείστε τώρα τη βάση $\{ v_1=(1,2)$, και $v_2=(1,1) \}$ του R^2. Πώς μετασχηματίζονται τώρα οι πίνακες των s και r; Δώστε με τυπικό τρόπο τις νέες μορφές τους A_s' και A_r' υπό τη μορφή γινομένου πινάκων.
(3.5) Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων A_s και A_r.
(3.6) Ποιές είναι οι ιδιοτιμές και ποιά τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων A_s' και A_r' και γιατί;
(3.7) Ποιές είναι οι ιδιοτιμές των αντιστρόφων μετασχηματισμών; (εφ' όσον υπάρχουν).
(3.8) Θεωρούμε τη σύνθεση $T=s \circ r$. Είναι ο T γραμμικός μετασχηματισμός και γιατί; Είναι επίσης ο T ισομορφισμός και γιατί;
(3.9) Ποιός είναι ο πίνακας του T και γιατί; Υπολογίστε την εικόνα T(1,2).

4. (15%) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου W του C3 ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $v_1=(1, i, 0)$, $v_2=(1, 2, 1-i)$.

5. (20%) Να διαγωνιοποιηθεί ο συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Συγκεκριμένα να βρεθεί ένας ορθογώνιος πίνακας U τέτοιος ώστε ο U^tAU να είναι ένας διαγώνιος πίνακας.

Τμηματικές εξετάσεις στη Γραμμική Άλγεβρα
Πάτρα, 24-9-1996

1. (20%) i) Να αποδειχτεί ότι το σύνολο $\{ (3+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}), (7, 1+2\sqrt{2}) \}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο πάνω στο R, αλλά γραμμικά ανεξάρτητο πάνω στο Q.
ii) Να εξεταστεί αν το υποσύνολο $\{ A \in M_2(R) \mid \det A=0 \}$ είναι υπόχωρος του $M_2(R)$.

2. (10%) Αν V είναι ένας ευκλείδιος χώρος και $u, v \in V$, να αποδειχθεί ότι
$$\|u-v\|^2+\|u+v\|^2=2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$$

3. (20%) Να επεκταθεί σε μια ορθοκανονική βάση το σύνολο : { 1/2(1, i, 1, I), 1/2(i, 1, i, 1) } για τον διανυσματικό χώρο $V_4(C)$.

4. (20%) Δίνονται οι R-βάσεις $\{u_1, u_2\}$ και $\{v_1, v_2, v_3\}$ των δ.χ. $V_2(R)$ και $V_3(R)$ αντίστοιχα. Έστω ένας γραμμικός μετασχηματισμός T από τον $V_2(R)$ στον $V_3(R)$ που ορίζεται ως εξής:

$T(u_1)=v_1+2v_2-v_3$
$T(u_2)=v_1-v_2$

Να βρεθεί ο πίνακας του T ως προς αυτές τις βάσεις. Να βρεθεί επίσης ο πίνακας του T ως προς τις R-βάσεις $\{ -u_1+u_2, 2u_1-u_2\}$ και $\{v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3\}$ του $V_2(R)$ και $V_3(R)$ αντίστοιχα. Ποιά σχέση συνδέει τους δύο παραπάνω πίνακες; (κάνετε όλους τους απαραίτητους υπολογισμούς).

5. (10%) Ένας γραμμικός μετασχηματισμός του R-χώρου C ορίζεται από τη σχέση $T(z)=(1-i)z$ για όλα τα $z \in C$. Να δειχθεί ότι ο T είναι μη ιδιάζων. Ποιός είναι ο βαθμός του T.

6. (20%) Αποδείξτε ότι κάθε K-βάση ενός πεπερασμένα παραγόμενου K-χώρου έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων.

Τμηματικές εξετάσεις στη Γραμμική Άλγεβρα
Πάτρα, 9-2-1995
Διάρκεια: 2.30 ώρες

1. (20%) Αν V ένας πεπερασμένος δ.χ αποδείξτε ότι (α) κάθε σύνολο που παράγει τον V περιέχει μια βάση του V και (β) κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V μπορεί να επεκταθεί για να δώσει μια βάση του V, δηλαδή αν $\{y_1 \ldots., y_m\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο σε ένα σώμα K, τότε υπάρχουν διανύσματα $x_1, \ldots y_{n-m}$ του V τέτοια ώστε το σύνολο $\{y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, y_{n-m}\}$ είναι μια βάση του V.

2. (15%) Να βρεθούν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q τέτοιοι ώστε ο PAQ να είναι η κανονική μορφή για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ποιά είναι η κανονική μορφή αυτή και ποιός ο βαθμός του πίνακα A;

3. (10%) Να εξετάσετε αν το σύνολο $\{ A \in M_3(R) / a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \}$ είναι υποχώρος του $M_3(R)$ (=δ.χ των πινάκων 3x3).

4. (25%) Αν S και T είναι υπόχωροι του $V_3(C)$ παραγόμενοι από τα σύνολα { (1,1,0), (i, 1+i, 1), (1+i, 1+i, 0) }και { (1,0,1), (i,-i,0), (0,i,i) }, αντίστοιχα, να βρεθούν οι βάσεις των S+T και $S \cap V$.

5. (20%) ‘Εστω T ένας γραμμικός μετασχηματισμός που ορίζεται
$$T(x, y, z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$$
Βρείτε μια βάση και διάσταση (α) της εικόνας και (β) του πυρήνα του T. Είναι ο T K-ισομορφισμός και γιατί;

6. (25%) Μπορεί να επεκταθεί σε μια ορθοκανονική βάση για τον χώρο $V_3(C)$ το σύνολο
$\{ 1/2(1, i, 1, i), 1/2(i, 1, i, 1) \}$
και αν ναι, υπολογίστε τη βάση αυτή.

Γραπτές εξετάσεις στη Γραμμική Άλγεβρα
Περίοδος Σεπτεμβρίου 1994
Πάτρα, 20-9-94, Διάρκεια: 2.30 ώρες
Διδάσκων: Χρ. Αλεξόπουλος

ΘΕΜΑ 1ο (30%)
1. (10%) Πώς μπορούμε να δικαιολογήσουμε ότι όλοι οι K-χώροι V πεπερασμένης διάστασης $n \in N$ μπορούν να θεωρηθούν σαν χώροι της μορφής $V_n(K)$; Δώστε μερικά παραδείγματα σχετικά με αυτή τη θεώρηση.

2. (10%) Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα γραμμικό μετ/σμό T: V->W, τέτοιο ώστε $T(v_i)=w_i$ (i=1,2,...,n), όπου V,W είναι K-χώροι όπου ο V πεπερασμένης διάστασης, $\{v_1, \ldots , v_n\}$ μια βάση του V και w_i (i=1, ... ,n) τυχαία διανύσματα του W; Είναι ο T μοναδικός και γιατί;

3. (10%) Ποιά γενική μορφή έχει κάθε εσωτερικό γινόμενο επί ενός πεπερασμένης διάστασης K-χώρου εφοδιασμένου με εσωτερικό γινόμενο και γιατί; (να δοθεί απόδειξη)

ΘΕΜΑ 2ο (70%)
1. (20%) (α) ‘Εστω T ένας γραμμικός μετασχηματισμός που ορίζεται ως εξής:

$$T(x,y,z)= (x-y,\ x+2y-z,\ 2x+y+z),\ \text{όπου } x,y,z \in R.$$

Να βρεθεί ο πίνακας του T ως προς την standard βάση και την βάση { $v_1=(1,0,1)$, $v_2=(-2,1,1)$, $v_3=(1,-1,1)$ } του $V_3(R)$.
(β) Είναι ο T K-ισομορφισμός και γιατί; Δικαιολογείστε.

2. (30%) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του διανυσματικού χώρου που περιέχει όλα τα πολυώνυμα βαθμού το πολύ 2. Να εκφρασθεί επίσης το πολυώνυμο x2-2x-1 ως προς τη βάση αυτή.

3. (20%) Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

βρείτε όλες τις ιδιοτιμές καθώς και μια βάση για κάθε ιδιοχώρο. Μπορεί να διαγωνιοποιηθεί ο A και γιατί;

Γραπτές εξετάσεις στη Γραμμική Άλγεβρα
Περίοδος Ιανουαρίου 1994
Πάτρα, 10-2-94, Διάρκεια: 2.30 ώρες
Διδάσκων: Χρ. Αλεξόπουλος

ΘΕΜΑ 1ο (50%)

1. (20%) Αποδείξτε ότι όλες οι βάσεις ενός πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων.

2. (10%) Ποιά γενική μορφή έχει το εσωτερικό γινόμενο επί ενός πεπερασμένης διάστασης K-χώρου και γιατί;

<u>Απάντηση</u>

Ως γνωστόν, κάθε χώρος V πεπερασμένης διάστασης εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο έχει μια ορθοκανονική βάση (θεώρημα Gram-Schmidt). Επομένως αν $u,v \in V$ με

$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, όπου { v_1, ... , v_n} ορθοκανονική βάση τότε,

εκμεταλευόμενοι τις γνωστές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, θα έχουμε:

$$(u,v) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i , \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_j (u_i, v_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_i \partial_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_i \quad (1)$$

Επομένως η γενική μορφή του εσωτερικού γινομένου είναι η (1).

3. (20%) Έστω $A,B \in M_n(K)$ όπου A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε να αποδειχθεί ότι Βαθμός$_{\text{στήλες}}$(AB)=Βαθμός$_{\text{στήλες}}$(BA)=Βαθμός$_{\text{στήλες}}$(B).

<u>Απόδειξη</u> (Βλ. και βιβλίο, σελ 125)

Αν A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, θεωρούμε τον αντίστοιχό του γραμμικό μετασχηματισμό $T \in L?(V_n(K))$ ως προς την standard βάση του $V_n(k)$, e:

T: $V_n(K)$ -> $V_n(K)$ με

T: (x_1, ... , x_n) -> (y_1, ... , y_n) όπου $y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$ (I=1, ... ,n)

Αφού ο A είναι αντιστρέψιμος, βαθμός$_\sigma$(A)=n και άρα βαθμός(T)=n, δηλαδή ο T είναι μη ιδιάζων. ‘Εστω τώρα S ο αντίστοιχος μετασχηματισμός του B προς την standard βάση του Vn(K).

Από γνωστό θεώρημα είναι:

B(TS)=B(S)=B(ST) (1)

Εξ’ άλλου ισχύει:

B(TS)=Bσ(AB), B(S)=Bσ(B), B(ΣT)=Bσ(BA) (2)

αφού AB=(TΣ)e, B=(S)e, BA=(ST)e.

Επομένως, λόγω των (2), η (1) γίνεται:

Bσ(AB)=Bσ(B)=Bσ(BA)

ΘΕΜΑ 2ο (60%)

1. (25%) Έστω οι εξής βάσεις του $V_3(R)$: $e=\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$ και $f=\{f_1=(1,1,1), f_2=(1,1,0), f_3=(1,0,0)\}$.

(i) Δείξτε ότι η f είναι βάση.

(ii) Επαληθεύσατε ότι $Q=P^{-1}$, όπου P είναι ο πίνακας περάσματος από τη βάση e στην f και ο πίνακας περάσματος από την f στην e.

(iii) Επαληθεύστε ότι $[v]_f=P^{-1}[v]_e$, (όπου τα $[v]_f$, $[v]_e$ είναι στήλες) για κάθε $v\in V_3(R)$.

(iv) Αφού δείξετεε ότι η απεικόνιση T(x,y,z) = (2y+z, x-4y, 3x) είναι γραμμικός μετασχηματισμός επί του $V_3(R)$, αποδείξτε ότι $(T)_f=P^{-1}(T)_eP$.

2. (20%) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου W του V3(C) ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $v_1=(1,i,0)$, $e_2=(1,2,1-i)$.

3. (15%) ‘Εστω ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί, αν είναι δυνατό, ένας αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

<u>Λύση</u>

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A:

$$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{bmatrix} = (2-i-\lambda)\,[(2-i-\lambda)(1+i-\lambda)] - i^2(1+i-\lambda) =$$

$$=(1+i-\lambda)\,[(2-i-\lambda)^2-i^2] = (1+i-\lambda)\,(2-2i-\lambda)\,(2-\lambda)$$

και άρα οι διοτιμές είναι $\lambda_1=1+i$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=2(1-i)$. Επειδή είναι διακεκριμένες σύμφωνα με το γνωστό θεώρημα ο A διαγωνοποιείται, δηλαδή υπάρχει $P\in M_3(C)$ ώστε:

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-i) \end{bmatrix}$$

Για την εύρεση του P προχωρούμε στον υπολογισμό των ιδιοδιανυσμάτων u_1, u_2, u_3, οπότε θα είναι $P=[\,u_1, u_2, u_3\,]$. Τα u_i, φυσικά αναμένονται γραμμικά ανεξάρτητα. Για την $\lambda_1=1+i$ λαμβάνουμε:

$$\begin{bmatrix} 2-i-1-i & 0 & i \\ 0 & 1+i-1-i & 0 \\ i & 0 & 2-i-1-i \end{bmatrix} X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-2i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1-2i \end{bmatrix} X = 0$$

από όπου $u_1=\alpha(0,1,0)$.
Ομοία για $\lambda_2=2$ λαμβάνουμε $u_2=\alpha(1,0,1)$ και για $\lambda_3=2(1-i)$, $u_3=\alpha(1,0,-1)$, όπου α αυθαίρετη σταθερά. Τα $u_1'=(0,1,0)$, $u_2'=(1,0,1)$, $u_3'=(1,0,-1)$ είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητες και δίνουν τον πίνακα P:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$