ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΟΔΟΥ Απριλίου 2006

I. Να απαντήσετε σύντομα στις παρακάτω ερωτήσεις.

1. Έστω $C = AB$, όπου $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}, B \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$.

   (α) Πότε ορίζεται η παραπάνω πράξη;

   (β) Ποιές είναι οι διαστάσεις του αποτελέσματος;

   (γ) Δώστε τα m_1, n_1, m_2, n_2 ώστε η παραπάνω πράξη να αντιστοιχεί σε (i) ένα εσωτερικό γινόμενο και (ii) γινόμενο μητρώου-διανύσματος. Ποιός είναι ο αριθμός των πράξεων σε κάθε περίπτωση; (Υπόδειξη: Σε κάθε περίπτωση κάποια από τα m_i, n_i είναι ίσα με 1 και κάποια πρέπει να είναι ίσα.)

   Απάντηση.

   (α) Πρέπει το πλήθος των στηλών του A να είναι ίδιο με το πλήθος γραμμών του B, άρα $n_1 = m_2$.

   (β) Θα έχουμε $C \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$.

   (γ) i) $m_1 = 1, n_1 = m_2 > 1, n_2 = 1$. Το πλήθος των πράξεων θα είναι $2n_1 - 1$. ii) $m_1 > 1, n_1 = m_2, n_2 = 1$. (Οι ανισότητες εξσαφαλίζουν ότι δεν πρόκειται για εκφυλισμένες πράξεις, π.χ. αντί για μητρώο να έχουμε διάνυσμα και αντί για διάνυσμα βαθμωτό). Το πλήθος των πράξεων θα είναι $m_1(2n_1 - 1)$.

   □

2. Έστω γραμμικό σύστημα $Ax = b, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$, που έχει μία μοναδική λύση x. Συμπληρώστε τα παρακάτω:

   (α) Η λύση είναι το *κοινό σημείο (ή σημείο τομής)* n επιπέδων. (Σημ. εννοούνται υπερεπίπεδα στον $\mathbb{R}^n$.)

   (β) Το δεξιό μέλος είναι *στο χώρο* των στηλών του A.

3. Δίνονται:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 9 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & -9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}$$

   Ποιές από τις παρακάτω πράξεις ορίζονται; Δώστε το αποτέλεσμα.

$$DC, DC_{2:3}, AB, A_{:,1:2}B, BA^\top, AB^\top, BCD$$

   Απάντηση.

   DC Δεν είναι έγκυρη γιατί το πλήθος γραμμών του D (2) είναι διαφορετικό του πλήθους στηλών του C (4).

   $DC_{2:3}$ Είναι έγκυρη γιατί το πλήθος στηλών του D (2) είναι ίδιο με το πλήθος γραμμών του $C_{2:3}$.

   AB Δεν είναι έγκυρη γιατί το πλήθος γραμμών του B (2) είναι διαφορετικό από το πλήθος στηλών του A (4).

   $A_{:,1:2}B$ Το υπομητρώο $A_{:,1:2}$ έχει 2 στήλες, όσες και οι γραμμές του B, επομένως η πράξη είναι έγκυρη.

   $BA^\top$ Είναι έγκυρη γιατί το πλήθος γραμμών του $A^\top$ είναι ίσο με το πλήθος στηλών του B (4).

   $AB^\top$ Είναι έγκυρη γιατί το πλήθος γραμμών του $B^\top$ είναι ίσο με το πλήθος στηλών του A (4). Εναλλακτικά, ακολουθεί από την προηγούμενη ερώτηση καθώς $AB^\top = (BA^\top)^\top$.

BCD Επιλέγουμε να εξετάσουμε την εγκυρότητα των πράξεων από τα δεξιά προς τα αριστερά (εναλλακτικά θα μπορούσαμε να ελέγξουμε από αριστερά προς τα δεξιά). Το γινόμενο CD είναι έγκυρο και είναι ένα μητρώο 4×2. Το γινόμενο $B(CD)$ είναι επίσης έγκυρο καθώς το πλήθος των στηλών του B είναι 4, ίσο με το πλήθος των γραμμών του CD. Επομένως η πράξη είναι έγκυρη.

□

4. Σωστό ή Λάθος: Ισχύει $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

   Απάντηση. Γενικά λάθος. Ισχύει μόνον κάτω από ειδικές περιπτώσεις, π.χ. A και B διαγώνια ή $A = B$ ή ένα από τα A, B είναι ταυτοτικό. □

5. Έστω V ένα υποσύνολο ενός γραμμικού χώρου X. Για να είναι ο V γραμμικός υποχώρος του X, ποια από τα παρακάτω θα πρέπει να ισχύουν (τουλάχιστον);

   (α) Να περιέχει το 0.

   (β) Να είναι κλειστό ως προς το άθροισμα (δηλ. για κάθε $v_1, v_2 \in V$ να ισχύει $v_1 + v_2 \in V$).

   (γ) Να είναι κλειστό ως προς το γινόμενο με βαθμωτό (δηλ. για κάθε $v_1 \in V$ και $a \in \mathbb{R}$ να ισχύει $av_1 \in V$).

   Απάντηση. Όλα τα παραπάνω θα πρέπει να ισχύουν, σύμφωνα με τον ορισμό του γραμμικού χώρου. □

6. Ένας γραμμικός χώρος παράγεται από τα στοιχεία $v_1, \ldots, v_n$. Τι μπορείτε να πείτε για τη διάστασή του; Εάν τα $v_1, \ldots, v_n$ είναι μεταξύ τους ορθογώνια, τι μπορείτε να πείτε για τη διάσταση του χώρου;

   Απάντηση. Η διάσταση του χώρου θα είναι το πολύ ίση με n, διότι κάθε στοιχείο του χώρου γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των n στοιχείων. Στην περίπτωση που είναι μεταξύ τους ορθογώνια, τότε είναι και γραμμικώς ανεξάρτητα (η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση), οπότε η διάσταση του χώρου είναι ίση με n. □

7. Δίνεται στοιχείο $v \neq 0$ ενός γραμμικού χώρου. Περιγράψτε από ποια στοιχεία αποτελείται ο γραμμικός υποχώρος που παράγεται από το v.

   Απάντηση. Ο χώρος αποτελείται από όλα τα στοιχεία λv, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Σε αυτά περιλαμβάνεται και το 0 (με $\lambda = 0$). Με άλλη διατύπωση, ο γραμμικός υποχώρος είναι η ευθεία που ενώνει το 0 και το στοιχείο v. □

8. Έστω το σύστημα $Ax = b$.

   (α) Αν ο A έχει διάσταση 4×4, τι μπορείτε να πείτε για την ύπαρξη λύσης ή λύσεων του συστήματος.

   (β) Αν ο A έχει διάσταση 4×6, τι μπορείτε να πείτε για την ύπαρξη λύσης ή λύσεων του συστήματος.

   (γ) Αν ο A έχει διάσταση 6×4, τι μπορείτε να πείτε για την ύπαρξη λύσης ή λύσεων του συστήματος.

   Απάντηση. Καταρχήν για να υπάρχει λύση (ή λύσεις) πρέπει το b να ανήκει στο χώρο των εικόνων του A, δηλ. στο χώρο που παράγεται από τα διανύσματα στήλες του A.

   (α) Αν η τάξη του A είναι ίση με 4 τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. Αν η τάξη του είναι μικρότερη, τότε έχει άπειρες λύσεις αφού θα υπάρχουν αυθαίρετες μεταβλητές.

   (β) Αν ο A έχει διάσταση 4×6, τότε έχουμε περισσότερους αγνώστους από εξισώσεις και το σύστημα έχει άπειρες λύσεις αφού θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 $(6 - 4)$ αυθαίρετες μεταβλητές.

   (γ) Αν ο A έχει διάσταση 6×4, τότε έχουμε περισσότερες εξισώσεις από αγνώστους. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν λύσεις μόνο αν το b ανήκει στο χώρο των εικόνων του A, δηλαδή ‘αν είμαστε τυχεροί’ και αφού λυθούν οι 4 εξισώσεις, οι άλλες 2 ικανοποιούνται.

   □

9. Δίνεται $\|v\| = 2$, $\|w\| = 3$ (όπου $\|\cdot\|$ το ευκλείδιο μέτρο) σε χώρο εφοδιασμένο με εσωτερικό γινόμενο. Βρείτε ένα άνω φράγμα για το $| < v, w > |$.

   Απάντηση. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy έχουμε

   $$| < v, w > | \leq \|v\| \|w\| = 2 \cdot 3 = 6$$

   □

10. Έστω $v \in X$, όπου X γραμμικός χώρος, και έστω w η προβολή του v σε έναν υποχώρο S.

(α) Ποιο διάνυσμα είναι κάθετο στο w;

(β) Ποια είναι η βέλτιστη προσέγγιση του v από στοιχείο του υποχώρου S;

Απάντηση.

(α) Το διάνυσμα που είναι κάθετο στο w είναι το $v - w$.

(β) Η βέλτιστη προσέγγιση του v από στοιχείο του υποχώρου S είναι προφανώς η προβολή του στον S, άρα το στοιχείο w.

□

II. Δίνεται:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 9 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Θέλουμε να εφαρμόσουμε διαδοχικά τα παρακάτω (σε κάθε βήμα θεωρούμε τα στοιχεία του μητρώου-αποτελέσματος που δεν αναφέρονται, ίδια με τα αντίστοιχα στοιχεία του μητρώου-ορίσματος).

(α) Τετραπλασιασμός της 3ης στήλης του A.

(β) Πρόσθεση της γραμμής 1 στη γραμμή 3 του αποτελέσματος του (α).

(γ) Εναλλαγή των στηλών 1 και 2 του αποτελέσματος του (β).

(δ) Διαγραφή της 1ης γραμμής του αποτελέσματος του (γ).

Να εκφραστούν τα παραπάνω ως γινόμενο $R_2 R_1 A C_1 C_2$ και να δοθεί το αποτέλεσμα.

Απάντηση. Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι οι μετασχηματισμοί (β) και (δ) αντιστοιχούν σε πολλαπλασιασμούς με τα παρακάτω μητρώα (από τα αριστερά και στη σειρά που ορίζεται παραπάνω),

$$R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

και ομοίως οι μετασχηματισμοί (α) και (γ):

$$C_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \ C_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

οπότε

$$R_2 R_1 A C_1 C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 36 \\ 5 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

□

III.

(α) Δίνονται $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, u, v \in \mathbb{R}^n$. Επαληθεύστε τον τύπο:

$$(A + uv^\top)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} \frac{uv^\top}{1 + v^\top A^{-1} u} A^{-1}$$

Απάντηση. Οι παρακάτω ισοδύναμες σχέσεις προκύπτουν χρησιμοποιώντας απλές ιδιότητες από το λογισμό μητρώων:

$$\begin{aligned} (A + uv^\top)^{-1} &= A^{-1} - A^{-1} \frac{uv^\top}{1 + v^\top A^{-1} u} A^{-1} \Leftrightarrow \\ I &= (A + uv^\top) A^{-1} - (A + uv^\top) A^{-1} u \frac{1}{1 + v^\top A^{-1} u} v^\top A^{-1} \end{aligned}$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι το δεξιό μέλος, έστω ότι το ονομάζουμε B, είναι ίσο με το ταυτοτικό μητρώο. Έχουμε ότι

$$B = \frac{I + uv^\top A^{-1} + Iv^\top A^{-1}u + uv^\top A^{-1}v^\top A^{-1}u - uv^\top A^{-1} - uv^\top A^{-1}uv^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u}$$

και απλοποιώντας (θυμηθείτε ότι το $v^\top A^{-1}u$ είναι βαθμωτός):

$$\begin{aligned} B &= \frac{I + Iv^\top A^{-1}u}{1 + v^\top A^{-1}u} \\ &= I. \end{aligned}$$

□

(β) Δίνεται:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Προσδιορίστε τα u, v ώστε:

$$B = A + uv^\top = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Υπόδειξη: Προσέξτε για κάθε στήλη του μητρώου B τη σχέση της με την αντίστοιχη στήλη του A.)

Απάντηση. Από τα παραπάνω μητρώα προκύπτει ότι

$$B - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Το παραπάνω είναι μητρώο 1ης τάξης καθώς, π.χ. κάθε στήλη είναι πολλαπλάσιο της στήλης $[1, 1, 1, 1]^\top$. Ειδικότερα, ισχύει ότι

$$B - A = uv^\top$$

όπου

$$u = [1, 1, 1, 1]^\top, \quad v = [1, -1, 0, 2]^\top.$$

□

IV.

(α) Να βρεθεί η βέλτιστη προσέγγιση του $v = [1\ \ 2\ \ 3\ \ 4]$ από τα στοιχεία του επιπέδου που παράγεται από τα διανύσματα $[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$ και $[0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]$.

(β) Στο χώρο των πολυωνύμων βαθμού μέχρι 2, βρείτε ένα πολυώνυμο που να είναι ορθογώνιο στο πολυώνυμο $p(x) = x^2$ στο $[-1, 1]$.

Απάντηση.

(α) Αφού η βέλτιστη προσέγγιση, έστω w, ανήκει στο επίπεδο των $z_1 = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$ και $z_2 = [0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]$, ισχύει ότι $w = a_1 z_1 + a_2 z_2$ και χρειάζεται να βρούμε τα a_1, a_2.

Τρόπος 1 Απαιτούμε καθετότητα, οπότε θα ισχύει ότι $v - w \perp z_1$ και $v - w \perp z_2$. Παίρνουμε δύο εξισώσεις, λύνουμε και βρίσκουμε τα a_1, a_2.

Τρόπος 2 Απαιτούμε το μέτρο $||v - w||^2$ να είναι ελάχιστο. Έχουμε $||v - w||^2 = < v - w, v - w > = \ldots = Q(a_1, a_2)$. Για να ελαχιστοποίησουμε την συνάρτηση Q απαιτούμε $\frac{\partial Q}{\partial a_1} = 0$ και $\frac{\partial Q}{\partial a_2} = 0$. Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων και βρίσκουμε τα a_1, a_2.

(β) Ζητάμε πολυώνυμο $q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ τέτοιο ώστε $< p, q >= 0$ στο $[-1, 1]$. Έχουμε $< p, q >= 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\mathrm{d}x = 0$. Δίνουμε αυθαίρετα τιμή σε δύο από τους τρεις άγνωστους συντελεστές α, β και γ και υπολογίζουμε τον τρίτο.

□

V. Δίνεται ο πίνακας A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 3 & 10 \\ 4 & 6 & 5 & 12 & -1 & 12 \\ 4 & 6 & 2 & 10 & -2 & 14 \end{pmatrix}$$

Μετά την εκτέλεση των απαραίτητων γραμμοπράξεων, για να βρούμε την τάξη του A, καταλήγουμε στον πίνακα U

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(α) Ποια η τάξη του A; Ποια η διάσταση του μηδενοχώρου του A;

(β) Έστω το σύστημα $Ax = 0$ με τον ίδιο πίνακα A και $x = [x_1 \ \ x_2 \ldots x_6]^T$. Ποιες από τις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_6$ θα είναι αυθαίρετες;

Απάντηση.

(α) Η τάξη του A είναι 3 (αριθμός μη μηδενικών οδηγών στοιχείων). Η διάσταση του μηδενοχώρου του A είναι $6 - 3 = 3$.

(β) Οι αυθαίρετες μεταβλητές θα είναι 3, οι x_4, x_5, x_6, εφόσον στις στήλες 1, 2 και 3 έχουμε μη μηδενικούς οδηγούς και μπορούμε να λύσουμε ως προς x_1, x_2, x_3 συναρτήσει των x_4, x_5 και x_6.

□