Ονοματεπώνυμο: .... Α.Μ. .... Έτος ...

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ *ΠΡΟΟΔΟΣ (10 Μαΐου 2008, 12-14:00)*

Διαβάστε προσεκτικά τις εκφωνήσεις. Για πλήρη αξιολόγηση πρέπει να παρουσιάζεται όλος ο συλλογισμός και τα ενδιάμεσα αποτελέσματα. Αν τα αποτελέσματα δεν προκύπτουν από τους υπολογισμούς στο γραπτό (πρόχειρους και μη), δεν βαθμολογείστε για την ερώτηση. Στις ερωτήσεις Σωστό/Λάθος δεν βαθμολογείστε εκτός αν αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Σε όλες τις ερωτήσεις, όπου δεν αναφέρεται ή δεν φαίνεται από την εκφώνηση το μέγεθος ή το είδος των στοιχείων ενός μητρώου θεωρείται ότι είναι τετραγωνικό μεγέθους n με πραγματικά στοιχεία. Όπως και στην τάξη, χρησιμοποιούμε το σύμβολο «;» για την αλλαγή γραμμής, π.χ. το $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ μπορεί να γράφεται και ως $[1, 2; 3, 4]$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

I. Να απαντήσετε σύντομα και περιεκτικά στις παρακάτω ερωτήσεις.

1. Το $n \times n$ μητρώο Hilbert, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ περιγράφεται ως εξής: Στη θέση (i, j) (για $i, j = 1, ..., n$) περιέχει το στοιχείο $1/(i+j-1)$. Έστω ότι επιλέγουμε $n = 3$ και ότι συμβολίζουμε με $e_i \in \mathbb{R}^3$ το διάνυσμα (στήλη) που έχει 1 στη θέση i και 0 στις υπόλοιπες. Επίσης με $e \in \mathbb{R}^3$ το διάνυσμα (στήλη) που έχει 1 σε όλες τις θέσεις. Να υπολογίσετε τα παρακάτω (αν υπάρχει συντομότερος τρόπος από το να κάνετε όλες τις αριθμητικές πράξεις μπορείτε να τον χρησιμοποιήσετε):

$$\text{α) } e_2^\top Ae_3, \text{ β) } A^\top A - AA^\top, \text{ γ) } Ae, \text{ δ) } e^\top A, \text{ ε) } e^\top Ae, \text{ στ) } e^\top Aee^\top$$

2. Έστω ότι το μητρώο A δίδεται ως γινόμενο

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω μορφή και *χωρίς να υπολογίσετε καθόλου* το A να δείξετε ότι πρέπει να είναι αντιστρέψιμο και μετά να το υπολογίσετε (το A^{-1}).

3. Έστω ότι $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε δυο μητρώα B και C τέτοια ώστε $B = B^\top$ και $C = -C^\top$, για τα οποία να ισχύει $A = B + C$.

4. Δίδεται $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (δηλ. το μητρώο έχει m γραμμές και n στήλες *χωρίς να ισχύει* κατ' ανάγκη ότι $m = n$). Σωστό ή Λάθος:

   α) Το γινόμενο $A^\top A$ είναι πάντα έγκυρο και το αποτέλεσμα είναι συμμετρικό μητρώο.

   β) Το γινόμενο $AA^\top$ είναι πάντα έγκυρο και το αποτέλεσμα είναι συμμετρικό μητρώο.

   γ) Η αφαίρεση $A^\top A - AA^\top$ είναι έγκυρη μόνον αν $m = n$.

   δ) Αν γνωρίζουμε ότι $A = P^{-1}SP$ για κάποια μητρώα P, S, τότε $A^3 = P^{-1}S^3P$.

5. α) Για το μητρώο $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 3 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$ να δείξετε ότι μπορεί να γραφτεί στη μορφή $A = xy^\top$ όπου x, y είναι διανύσματα (στήλες).

   β) Τί εννοούμε όταν λέμε ότι η τάξη ενός μητρώου είναι r; Ποια θα είναι η τάξη του παραπάνω A και γιατί;

6. Για το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x + y &= 2 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τη λύση α) με τη θεώρηση κατά γραμμές, β) με τη θεώρηση κατά στήλες. (Σημ. Να σχεδιάσετε ό,τι χρειάζεται για τις 2 περιπτώσεις στο σε 2 σχήματα στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y)).

7. (α) Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Αν η $x = 0$ είναι μοναδική λύση του $Ax = 0$, τότε ποια είναι η τάξη του A;
   (β) Αν $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και το σύστημα $Ax = b$ έχει πάντοτε (για κάθε b) μια τουλάχιστον λύση, τότε ποιος είναι ο μηδενοχώρος $N(A^\top)$;
   (γ) Αν $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, τότε δείξτε ότι $N(A^\top A) = N(A)$, ($N =$ μηδενοχώρος).
   (δ) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένα αντιστρέψιμο μητρώο. Τότε δείξτε ότι αν $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε και $Av_1, Av_2, \ldots, Av_n$ είναι επίσης βάση του $\mathbb{R}^n$.

8. Σε ένα γραμμικό χώρο S έχει ορισθεί εσωτερικό γινόμενο και k στοιχεία του $v_1, \ldots, v_k$ είναι ανά δύο κάθετα. Είναι και γραμμικώς ανεξάρτητα; Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

9. Έστω $v = [v_1\ v_2\ v_3]^\top$, $z = [z_1\ z_2\ z_3]^\top$, $w = [w_1\ w_2\ w_3]^\top$ μία βάση του $\mathbb{R}^3$ διαφορετική από τη γνωστή τυπική βάση. Έστω $y = [y_1\ y_2\ y_3]^\top$ ένα τυχαίο διανύσμα του $\mathbb{R}^3$. Τότε $y = \alpha v + \beta z + \gamma w$.
   (α) Αποδείξτε ότι οι συντελεστές α, β, γ είναι μοναδικοί.
   (β) Ποιο σύστημα εξισώσεων πρέπει να λύσεις για να βρεις τους α, β, γ;

10. Έστω $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γραμμικός μετασχηματισμός και έστω ότι οι εικόνες της τυπικής βάσης $e_1 = [1, 0, 0]^\top$, $e_2 = [0, 1, 0]^\top$, $e_3 = [0, 0, 1]^\top$ είναι αντίστοιχα $Le_1 = [37, 33, 30]^\top$, $Le_2 = [3, 18, -3]^\top$, $Le_3 = [-4, 8, 15]^\top$.
    (α) Ποιος ο πίνακας εκπρόσωπος του L για την τυπική βάση;
    (β) Ποια η εικόνα του $v = [1, -1, 2]^\top$;

11. Έστω $Pv = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ η προβολή του v στο χώρο που παράγεται από τα $u_1, \ldots, u_n$.
    (α) Ποιο σύστημα πρέπει να λυθεί για να βρεθούν οι συντελεστές $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ αν δίνεται η προβολή $w = Pv$;
    (β) Ποιο θα είναι το διάνυσμα $P^{20}v$ και γιατί;

II. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$.

1. Τι ιδιότητα πρέπει να ικανοποιεί το b για να έχει λύση το σύστημα $Ac = b$;

2. Έστω ότι το σύστημα δεν έχει λύση. Για να βρούμε μία προσεγγιστική λύση θα ελαχιστοποιήσουμε την ποσότητα $\|r\|^2$ όπου (συναρτήσει των A, c, b) $r = \ldots\ldots$ και όπου $\|\cdot\|$ είναι το Ευκλείδειο μέτρο. Για να βρεθούν οι τιμές των c_1, c_2 με ελαχιστοποίηση της ποσότητας $\|r\|^2$, θα χρησιμοποιηθούν 2 εξισώσεις. Πώς θα βρεθούν οι εξισώσεις αυτές;

3. Έστω ότι $b = [2\ 3\ 4\ 5]^\top$. Εφαρμόστε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και δώστε τις τιμές των c_1 και c_2.

III. Δίνεται το μητρώο $A = [1, 2, 2, 1; 2, 3, 0, 1; 1, 2, 1, c]$, όπου c πραγματική σταθερά.

1. Βρείτε τη μορφή αναγμένων γραμμών R (συναρτήσει του c) και την τάξη r του A. Στα επόμενα ερωτήματα να βασισθείτε απαραίτητα στη μορφή R.

2. Εκφράστε με σαφήνεια το R σαν γινόμενο στοιχειωδών μητρώων επί το A, και δώστε τα μητρώα αυτά.

3. Αποφανθείτε για την επιλυσιμότητα του συστήματος $Ax = b$ για τις διάφορες τιμές των c και b.

4. Βρείτε μια βάση του μηδενοχώρου του A.

5. Δίδεται $c = 0$ και $b = (1, 2, -1)^\top$. Βρείτε τώρα με συστηματικό τρόπο και με βάση τα παραπάνω τη γενική λύση του $Ax = b$.

Ονοματεπώνυμο: .... Α.Μ. ....· Έτος ...

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ *ΠΡΟΟΔΟΣ (10 Μαΐου 2008, 12-14:00)*

Διαβάστε προσεκτικά τις εκφωνήσεις. Για πλήρη αξιολόγηση πρέπει να παρουσιάζεται όλος ο συλλογισμός και τα ενδιάμεσα αποτελέσματα. Αν τα αποτελέσματα δεν προκύπτουν από τους υπολογισμούς στο γραπτό (πρόχειρους και μη), δεν βαθμολογείστε για την ερώτηση. Στις ερωτήσεις Σωστό/Λάθος δεν βαθμολογείστε εκτός αν αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Σε όλες τις ερωτήσεις, όπου δεν αναφέρεται ή δεν φαίνεται από την εκφώνηση το μέγεθος ή το είδος των στοιχείων ενός μητρώου θεωρείται ότι είναι τετραγωνικό μεγέθους n με πραγματικά στοιχεία. Όπως και στην τάξη, χρησιμοποιούμε το σύμβολο «;» για την αλλαγή γραμμής, π.χ. το $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ μπορεί να γράφεται και ως $[1, 2; 3, 4]$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!

I. Να απαντήσετε σύντομα και περιεκτικά στις παρακάτω ερωτήσεις.

1. Το $n \times n$ μητρώο Hilbert, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ περιγράφεται ως εξής: Στη θέση (i, j) (για $i, j = 1, ..., n$) περιέχει το στοιχείο $1/(i+j-1)$. Έστω ότι επιλέγουμε $n = 3$ και ότι συμβολίζουμε με $e_i \in \mathbb{R}^3$ το διάνυσμα (στήλη) που έχει 1 στη θέση i και 0 στις υπόλοιπες. Επίσης με $e \in \mathbb{R}^3$ το διάνυσμα (στήλη) που έχει 1 σε όλες τις θέσεις. Να υπολογίσετε τα παρακάτω (αν υπάρχει συντομότερος τρόπος από το να κάνετε όλες τις αριθμητικές πράξεις μπορείτε να τον χρησιμοποιήσετε):

$$\text{α) } e^\top A,\ \text{β) } e_2^\top A e_3,\ \text{γ) } e^\top A e,\ \text{δ) } e^\top A e e^\top,\ \text{ε) } Ae,\ \text{στ) } A^\top A - AA^\top$$

2. Έστω ότι το μητρώο A δίδεται ως γινόμενο

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω μορφή και *χωρίς να υπολογίσετε καθόλου* το A να δείξετε ότι πρέπει να είναι αντιστρέψιμο και μετά να το υπολογίσετε (το A^{-1}).

3. Έστω ότι $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε δυο μητρώα B και C τέτοια ώστε $B = B^\top$ και $C = -C^\top$, για τα οποία να ισχύει $A = B + C$.

4. Δίδεται $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ (δηλ. το μητρώο έχει n γραμμές και m στήλες *χωρίς να ισχύει* κατ' ανάγκη ότι $n = m$). Σωστό ή Λάθος:

   α) Το γινόμενο $A^\top A$ είναι πάντα έγκυρο και το αποτέλεσμα είναι συμμετρικό μητρώο.

   β) Το γινόμενο $AA^\top$ είναι πάντα έγκυρο και το αποτέλεσμα είναι συμμετρικό μητρώο.

   γ) Η αφαίρεση $A^\top A - AA^\top$ είναι έγκυρη μόνον αν $m = n$.

   δ) Αν γνωρίζουμε ότι $A = P^{-1}SP$ για κάποια μητρώα P, S, τότε $A^4 = P^{-1}S^4P$.

5. α) Για το μητρώο $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$ να δείξετε ότι μπορεί να γραφτεί στη μορφή $A = xy^\top$ όπου x, y είναι διανύσματα (στήλες).

   β) Τί εννοούμε όταν λέμε ότι η τάξη ενός μητρώου είναι r; Ποια θα είναι η τάξη του παραπάνω A και γιατί;

6. Για το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x + y &= 2 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

   να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τη λύση α) με τη θεώρηση κατά γραμμές, β) με τη θεώρηση κατά στήλες. (Σημ. Να σχεδιάσετε ό,τι χρειάζεται για τις 2 περιπτώσεις στο σε 2 σχήματα στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y)).

7. (α) Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Αν η $x = 0$ είναι μοναδική λύση του $Ax = 0$, τότε ποια είναι η τάξη του A;

   (β) Αν $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και το σύστημα $Ax = b$ έχει πάντοτε (για κάθε b) μια τουλάχιστον λύση, τότε ποιος είναι ο μηδενοχώρος $N(A^\top)$;

   (γ) Αν $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, τότε δείξτε ότι $N(A^\top A) = N(A)$, ($N =$ μηδενοχώρος).

   (δ) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένα αντιστρέψιμο μητρώο. Τότε δείξτε ότι αν $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε και $Av_1, Av_2, \ldots, Av_n$ είναι επίσης βάση του $\mathbb{R}^n$.

8. Σε ένα γραμμικό χώρο S έχει ορισθεί εσωτερικό γινόμενο και k στοιχεία του $v_1, \ldots, v_k$ είναι ανά δύο κάθετα. Είναι και γραμμικώς ανεξάρτητα; Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

9. Έστω $v = [v_1\ v_2\ v_3]^\top$, $z = [z_1\ z_2\ z_3]^\top$, $w = [w_1\ w_2\ w_3]^\top$ μία βάση του $\mathbb{R}^3$ διαφορετική από τη γνωστή τυπική βάση. Έστω $y = [y_1\ y_2\ y_3]^\top$ ένα τυχαίο διανύσμα του $\mathbb{R}^3$. Τότε $y = \alpha v + \beta z + \gamma w$.

   (α) Αποδείξτε ότι οι συντελεστές α, β, γ είναι μοναδικοί.

   (β) Ποιο σύστημα εξισώσεων πρέπει να λύσεις για να βρεις τους α, β, γ;

10. Έστω $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γραμμικός μετασχηματισμός και έστω ότι οι εικόνες της τυπικής βάσης $e_1 = [1, 0, 0]^\top$, $e_2 = [0, 1, 0]^\top$, $e_3 = [0, 0, 1]^\top$ είναι αντίστοιχα $Le_1 = [37, -33, 30]^\top$, $Le_2 = [-3, 18, 3]^\top$, $Le_3 = [-4, 10, 15]^\top$.

    (α) Ποιος ο πίνακας εκπρόσωπος του L για την τυπική βάση;

    (β) Ποια η εικόνα του $v = [1, 3, -2]^\top$;

11. Έστω $Pv = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ η προβολή του v στο χώρο που παράγεται από τα $u_1, \ldots, u_n$.

    (α) Ποιο σύστημα πρέπει να λυθεί για να βρεθούν οι συντελεστές $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ αν δίνεται η προβολή $w = Pv$;

    (β) Ποιο θα είναι το διάνυσμα $P^{10}v$ και γιατί;

II. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$.

1. Τι ιδιότητα πρέπει να ικανοποιεί το b για να έχει λύση το σύστημα $Ac = b$;

2. Έστω ότι το σύστημα δεν έχει λύση. Για να βρούμε μία προσεγγιστική λύση θα ελαχιστοποιήσουμε την ποσότητα $\|r\|^2$ όπου (συναρτήσει των A, c, b) $r = \ldots\ldots$ και όπου $\|\cdot\|$ είναι το Ευκλείδειο μέτρο. Για να βρεθούν οι τιμές των c_1, c_2 με ελαχιστοποίηση της ποσότητας $\|r\|^2$, θα χρησιμοποιηθούν 2 εξισώσεις. Πώς θα βρεθούν οι εξισώσεις αυτές;

3. Έστω ότι $b = [2\ 3\ 2\ 5]^\top$. Εφαρμόστε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και δώστε τις τιμές των c_1 και c_2.

III. Δίνεται το μητρώο $A = [1, 2, 2, 1; 2, 3, 0, 1; 1, 2, 1, d]$, όπου d πραγματική σταθερά.

1. Βρείτε τη μορφή αναγμένων γραμμών R (συναρτήσει του d) και την τάξη r του A. Στα επόμενα ερωτήματα να βασισθείτε απαραίτητα στη μορφή R.

2. Εκφράστε με σαφήνεια το R σαν γινόμενο στοιχειωδών μητρώων επί το A, και δώστε τα μητρώα αυτά.

3. Αποφανθείτε για την επιλυσιμότητα του συστήματος $Ax = b$ για τις διάφορες τιμές των d και b.

4. Βρείτε μια βάση του μηδενοχώρου του A.

5. Δίδεται $d = 1$ και $b = (1, 2, -1)^\top$. Βρείτε τώρα με συστηματικό τρόπο και με βάση τα παραπάνω τη γενική λύση του $Ax = b$.