Γραμμική Άλγεβρα (ΤΜΗΥΠ 110)
Σετ Λυμένων Ασκήσεων *

Εργαστήριο Συστημάτων Υψηλών Επιδόσεων
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

Ιούνιος 2004

---

*Το παρόν σετ ασκήσεων αποτελεί συμπλήρωμα του θεωρητικού υλικού που χρησιμοποιήθηκε στη διδασκαλία του μαθήματος «Γραμμική Άλγεβρα» το ακαδημαϊκό έτος 2003-2004 στο Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών.

1.1: *Έστω οτι τα διανύσματα $u, v, w, z \in \Re^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*
α) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο:

$$S = \{u + v + w, \quad u + v + z, \quad u + w + z, \quad v + w + z\}$$

αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.
β) Να εξεταστεί εάν το σύνολο των 2 x 2 μητρώων:

$$\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$$

αποτελεί βάση των χώρου $\Re^{2x2}$.

Επίλυση:
α) Θα αποδείξουμε το ζητούμενο στηριζόμενοι στον ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας διανυσμάτων. Τα διανύσματα $u + v + w$, $u + v + z$, $u + w + z$, $v + w + z$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν η ομογενής εξίσωση:

$$c_1(u + v + w) + c_2(u + v + z) + c_3(u + w + z) + c_4(v + w + z) \qquad (1)$$

ικανοποιείται μόνον από την τετριμμένη λύση:

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

Ομαδοποιώντας κοινούς όρους στην εξίσωση (1), παίρνουμε:

$$(c_1 + c_2 + c_3)u + (c_1 + c_2 + c_4)v + (c_1 + c_3 + c_4)w + (c_2 + c_3 + c_4)z \qquad (2)$$

Λόγω της ανεξαρτησίας των διανυσμάτων u, v, w, z η παραπάνω εξίσωση ικανοποιείται μόνον από την τετριμμένη λύση:

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & & & = & 0 \\ c_1 & + & c_2 & + & & & c_4 & = & 0 \\ c_1 & + & & & c_3 & + & c_4 & = & 0 \\ & & c_2 & + & c_3 & + & c_4 & = & 0 \end{array}$$

Με χρήση συμβολισμού μητρώων, το παραπάνω ομογενές σύστημα εξισώσεων γράφεται:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Γνωρίζουμε από τη θεωρία πως ένα τέτοιο σύστημα έχει μοναδική λύση (την μηδενική) αν και μόνο αν το μητρώο των συντελεστών είναι αντιστρέψιμο. Μπορούμε να διαπιστώσουμε αν πράγματι αυτό ισχύει με διάφορους τρόπους (π.χ. ανάγωντας το μητρώο σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή μέσω μετασχηματισμών Gauss - Jordan ή υπολογίζοντας την ορίζουσά του) . Πράγματι, η ορίζουσα του συγκεκριμένου μητρώου είναι -3, γεγονός που υποδηλώνει πως είναι αντιστρέψιμο. Επομένως η εξίσωση (3) έχει μοναδική λύση την μηδενική ($c_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$) και τα διανύσματα του συνόλου S είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

β) Γνωρίζουμε οτι το σύνολο:

$$S' = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \}$$

αποτελεί μία βάση των χώρου $\Re^{2x2}$ (Θυμηθείτε τον ισομορφισμό μεταξύ των χώρων $\Re^{2x2}$ και $\Re^4$). Επομένως, τα «διανύσματα» του συνόλου S' είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Από το ερώτημα α) παίρνουμε οτι το σύνολο:

$$\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \}$$

αποτελείται και αυτό από γραμμικά ανεξάρτητα «διανύσματα». Ο πληθάριθμος του συνόλου αυτού είναι 4, δηλαδή ίσος με τη διάσταση του χώρου $\Re^{2x2}$. Επομένως, πράγματι, τα δεδομένα διανύσματα αποτελούν μία βάση του χώρου $\Re^{2x2}$.

1.2: *α) Σωστό ή Λάθος: Αν το μητρώο B έχει προκύψει με την εφαρμογή ενός αριθμού γραμμοπράξεων στο μητρώο A, τότε μπορεί να γίνει και το αντίθετο, δηλαδή το A να προκύψει από το B με την εφαρμογή ενός αριθμού γραμμοπράξεων.*

β) Σωστό ή Λάθος: Οι 3 βασικές γραμμοπράξεις είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους (δηλαδή καμία δεν μπορεί να παραχθεί ως συνδυασμός των άλλων).

γ) Σωστό ή Λάθος: Το σύστημα $Ax = b$ μπορεί να έχει ακριβώς 2 λύσεις.

δ) Σωστό ή Λάθος: Για κάθε μητρώο A τύπου n x n, υπάρχει ένα μητρώο X τύπου επίσης n x n, τέτοιο ώστε: $AX - XA = I$ όπου I το ταυτοτικό μητρώο.

ε) Σωστό ή Λάθος: Το μητρώο $\begin{bmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμο.

στ) Σωστό ή Λάθος: Όσο πιο κοντά στο μηδέν είναι η τιμή της ορίζουσας ενός μητρώου, τόσο το μητρώο πλησιάζει στο να είναι μη αντιστρέψιμο.

ζ) Σωστό ή Λάθος: Σένα ορθομοναδιαίο σύνολο διανυσμάτων, όλα τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Επίλυση:
α) Σωστό: Κάθε γραμμοπράξη είναι αντιστρέψιμη και μάλιστα η αντίστροφή της είναι μια γραμμοπράξη του ίδιου είδους.

β) Λάθος: Η γραμμοπράξη ανταλαγής γραμμών μπορεί να παραχθεί ως συνδυασμός γραμμοπράξεων :

- Πρόσθεση των στοιχείων μίας γραμμής πολλαπλασιασμένων με έναν αριθμό στα στοιχεία μίας άλλης γραμμής.
- Πολλαπλασιασμός των στοιχείων μίας γραμμης με έναν μη μηδενικό αριθμό.

Συγκεκριμένα, έστω οτι θέλουμε να μεταθέσουμε τις γραμμές R_i και R_j. Η γραμμοπράξη $R_i \longleftrightarrow R_j$ είναι ισοδύναμη με την ακολουθία γραμμοπράξεων:

$$\begin{aligned} R_j &\longleftarrow R_j + R_i \\ R_i &\longleftarrow R_i - R_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_j &\longleftarrow R_j + R_i \\ R_i &\longleftarrow -R_i \end{aligned}$$

γ) Λάθος: Ας υποθέσουμε πως το σύστημα έχει ακριβώς 2 λύσεις u, v ώστε:

$$\begin{aligned} Au &= b \\ Av &= b \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$A(u+v) = 2b \Rightarrow A\frac{1}{2}(u+v) = b$$

που σημαίνει πως το σύστημα έχει και τρίτη λύση, την $\frac{1}{2}(u+v)$.

δ) Λάθος: Θα το αποδείξουμε στηριζόμενοι στον ίχνος (trace) ενός μητρώου. Ας υποθέσουμε πως η πρόταση ήταν σωστή. Τότε, θα είχαμε διαδοχικά:

$$AX - XA = I \Rightarrow trace(AX - XA) = trace(I) \Rightarrow$$

$$trace(AX) - trace(XA) = n$$

Όμως γνωρίζουμε οτι $trace(AX) = trace(XA)$ για κάθε ζεύγος μητρώων A, X. Επομένως, θα είχαμε:

$$0 = n$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.

ε) Σωστό: Το μητρώο είναι αντιστρέψιμο γιατί έχει την ιδιότητα της αυστηρής διαγώνιας κυριαρχίας. Εν γένει, ένα μητρώο A έχει αυτή την ιδιότητα αν :

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ji}|$$

για $i = 1, \cdots, n$. (Η απόδειξη της γενικής αυτής αρχής αφήνεται ως άσκηση. Στηρίζεται στο γεγονός πως το ομογενές σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση - τη μηδενική - αν και μόνον εάν ο μηδενοχώρος του A αποτελείται μόνο από το μηδενικό διάνυσμα).

στ) Λάθος: Το μητρώο $\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}$ έχει σταθερή ορίζουσα ίση με 1 ανεξάρτητα από την τιμή του n. Παρ' όλα αυτά, για πολύ μεγάλες τιμές του n το μητρώο πλησιάζει πολύ κοντά στην μη αντιστρεψιμότητα (ένας τρόπος να το δούμε αυτό είναι πως για μεγάλες τιμές του n η δεύτερη γραμμή και στήλη του μητρώου τείνουν στο μηδενικό διάνυσμα). Αντίθετα, το n x n μητρώο

$\begin{bmatrix} 0.1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0.1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0.1 & \cdots & 0.1 \end{bmatrix}$ είναι πάντοτε αντιστρέψιμο, αν και η ορίζουσά του τείνει στο μηδέν καθώς το n μεγαλώνει.

ζ) Σωστό: Ας υποθέσουμε οτι το σύνολο των ορθομοναδιαίων διανυσμάτων $\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Αυτό σημαίνει πως η ομογενής εξίσωση:

$$c_1 q_1 + c_2 q_2 + \cdots + c_n q_n = 0$$

ικανοποιείται και για μη μηδενικές τιμές των βαθμωτών c_i. Πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω εξίσωση από αριστερά με το διάνυσμα q_1^T, οπότε έχουμε:

$$c_1 q_1^T q_1 + c_2 q_1^T q_2 + \cdots + c_n q_1^T q_n = 0 \Rightarrow$$

(λόγω της ορθογωνιότητας και του μοναδιαίου μέτρου των διανυσμάτων)

$$c_1 = 0$$

Με αντίστοιχο τρόπο, πολλαπλασιάζοντας με τα διανύσματα $q_2^T, q_3^T, \cdots, q_n^T$ παίρνουμε:

$$c_i = 0$$

για $i = 2, \cdots, n$. Επομένως, η αρχική εξίσψση ικανοποιείται μόνο από την τετριμμένη (μηδενική) λύση, άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

1.3: *α) Έστω μητρώο A τύπου n x n. Αν όλες οι στήλες του μητρώου είναι γραμμικά ανεξάρτητες, και επιπλεόν ισχύει οτι $A^2 = A$, τότε το μητρώο A είναι το ταυτοτικό.*

β) Έστω μητρώο A τύπου n x n. Αν ισχύει οτι $A^T = 2A$, τότε το μητρώο A είναι το μηδενικό.

γ) Επαληθεύστε οτι αν έχουμε μητρώο A τύπου n x n, τότε το μητρώο AA^T είναι συμμετρικό. Στη συνέχεια, εξηγήστε εάν κάθε συμμετρικό μητρώο στον χώρο των πραγματικών n x n μητρώων μπορεί να γραφεί στη μορφή AA^T όπου A συμμετρικό.

δ) Περιγράψτε τα n x n μητρώα που είναι ταυτόχρονα συμμετρικά και αντισυμμετρικά.

Επίλυση:

α) Η γραμμική ανεξαρτησία των στηλών αποκαλύπτει πως το μητρώο είναι αντιστρέψιμο (έχει τάξη ίση με n). Επομένως, πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με τον αντίστροφο, παίρνουμε:

$$A^2 = A \Rightarrow A^{-1}A^2 = A^{-1}A \Rightarrow (A^{-1}A)A = I \Rightarrow A = I$$

β) Χρησιμοποιώντας απλά άλγεβρα μητρώων, έχουμε διαδοχικά:

$$A^T = 2A \Rightarrow A = (A^T)^T \Rightarrow A = (2A)^T \Rightarrow$$
$$A = 2A^T \Rightarrow A = 4A \Rightarrow 3A = 0 \Rightarrow A = 0$$

γ) Πράγματι, έστω B = AA^T. Έχουμε:

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$$

επομένως, B = B^T και το μητρώο είναι συμμετρικό.
Στη γενική περίπτωση πραγματικού συμμετρικού μητρώου B, δεν μπορεί να βρεθεί μητρώο A ώστε B = AA^T. Αν υποθέσουμε οτι κάτι τέτοιο ίσχυε, τότε το στοιχείο b_{11} του μητρώου B θα ήταν ίσο με το τετράγωνο της ευκλείδειας νόρμας της πρώτης γραμμής του A. Φυσικά, αυτή η ποσότητα είναι πάντα μη αρνητική. Παρόλα αυτά, θα μπορούσε π.χ. το στοιχείο b_{11} ενός συμμετρικού μητρώου να είναι αρνητικό. Επομένως, καταλήγουμε σε άτοπο. Η πρόταση είναι αληθής μόνο εάν τα μητρώα είναι μιγαδικά.

δ)Έστω μητρώο A που είναι ταυτόχρονα συμμετρικό και αντισυμμετρικό. Αυτό σημαίνει πως:

$$A = A^T$$

$$A = -A^T$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, παίρνουμε πως: $2A = 0 \Rightarrow A = 0$. Επομένως, ο ζητούμενος χώρος αποτελείται μόνο από το μηδενικό μητρώο.

1.4: *Υπολογίστε το τετράγωνο της ορίζουσας του μητρώου:*

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

χωρίς να προχωρήσετε στο απευθείας αλγεβρικό ανάπτυγμα αυτής (Υπόδειξη: Ελέγξετε τις γωνίες που σχηματίζουν μεταξύ τους τα διανύσματα γραμμές - ή στήλες - του μητρώου. Προσπαθείστε να εξάγετε έναν χαρακτηρισμό του μητρώου στηριζόμενοι στο είδος των γωνιών μεταξύ των γραμμών - ή στηλών και να καταλήξετε στο τελικό αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας ιδιότητες οριζουσών.)

Επίλυση:

Εκτελώντας απλούς υπολογισμούς εσωτερικού γινομένου μεταξύ των διανυσμάτων - γραμμών του μητρώου, παρατηρούμε πως οι γραμμές είναι ανά δύο κάθετες μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει πως το μητρώο AA^T είναι διαγώνιο. Συγκεκριμένα:

$$AA^T =$$

$$\begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{bmatrix}$$

Από την παραπάνω ισότητα, παίρνουμε διαδοχικά:

$$det(AA^T) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4 \Rightarrow det(A)det(A^T) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4 \Rightarrow$$

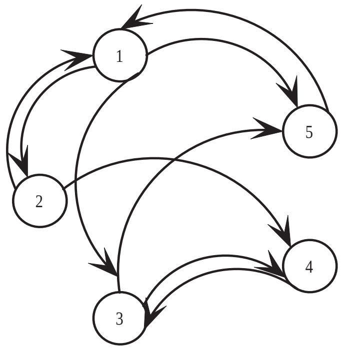
$$det(A)det(A) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4 \Rightarrow det(A)^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

1.5: *Έστω το δίκτυο αεροπορικών συνδέσεων μεταξύ των πόλεων 1,2,3,4 και 5 που φαίνεται στο Σχήμα 1. Ένα βέλος από την πόλη i στην πόλη j σημαίνει πως υπάρχει απευθείας πτήση από την i στην j. Δημιουργούμε το 5 x 5 μητρώο C που είναι τέτοιο ώστε:*

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & flight\ from\ i\ to\ j \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

Το μητρώο αυτό στην περίπτωση του Σχήματος 1 είναι: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Το μητρώο C ονομάζεται και μητρώο γειτονικότητας του αντίστοιχου δικτύου αεροπορικών συνδέσεων. Στη γενική περίπτωση μοντελοποίησης των αεροπορικών συνδέσεων n πόλεων, εξηγήστε την ποιοτική έννοια των γινομένων Ce και $e^T C$ όπου $e = ones(n, 1)$ σε σημειογραφία Matlab (δηλαδή το e είναι το διάνυσμα στήλη που αποτελείται από μονάδες).



Σχήμα 1: Γραφική μοντελοποίηση αεροπορικών συνδέσεων μεταξύ 5 πόλεων.

Επίλυση:

Το γινόμενο $u = Ce$ είναι ένας εύκολος τρόπος να σχηματίσουμε το άθροισμα των στηλών του μητρώου C. Η συνιστώσα u_i του διανύσματος u εκφράζει τον συνολικό αριθμό πτήσεων από την πόλη i προς όλες τις άλλες πόλεις. Αντίστοιχα, το γινόμενο $v = e^T C$ παράγει ένα διάνυσμα - γραμμή και είναι ένας εύκολος τρόπος να σχηματίσουμε το άθροισμα των γραμμών του μητρώου C. Η συνιστώσα v_i του αποτελέσματος εκφράζει το πλήθος των πτήσεων που φτάνουν στην πόλη i από όλες τις άλλες πόλεις.

1.6: *Υπολογίστε το γινόμενο A^{300} εάν το μητρώο A έχει τη μορφή:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

(Υπόδειξη: Προσπαθείστε να βρείτε έναν ορμαθό (υπομητρώο) C του μητρώου A τέτοιο ώστε: $C^2 = C$. Στη συνέχεια προσπαθήστε να βρείτε κάποιες επαγωγικές σχέσεις στηριζόμενοι στον πολλαπλασιασμό μητρώων κατά ορμαθούς.)

Επίλυση:

Εξετάζοντας τη δομή του μητρώου A, συμπεραίνουμε πως ο ορμαθός:

$$C = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

έχει την ιδιότητα $C^2 = C$. Εάν I είναι το 3 x 3 ταυτοτικό μητρώο και 0 το 3 x 3 μηδενικό μητρώο, τότε το A γράφεται στη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} I & C \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

Εκτελούμε έναν πολλαπλασιασμό κατά ορμαθούς του A με τον εαυτό του ως εξής:

$$A^2 = \begin{bmatrix} I & C \\ 0 & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & C \\ 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 2C \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

Ένας τέτοιος πολλαπλασιασμός είναι έγκυρος αφού όλα τα υπομητρώα είναι τύπου 3 x 3. Προσοχή εδώ πρέπει να δωθεί στις διαστάσεις των υπομητρώων προς πολλαπλασιασμό που ανάλογα μη τον τεμαχισμό του αρχικού μητρώου, ενδέχεται να μην συμφωνούν και ο πολλαπλασιασμός να μην είναι έγκυρος (βλ. σχετική θεωρία και διαλέξεις του μαθήματος). Προχωρώντας τώρα με το ίδιο σκεπτικό, εκτελούμε τον υπολογισμό της δύναμης:

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} I & 2C \\ 0 & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & C \\ 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 3C \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

Καταλήγουμε επομένως οτι στη γενική περίπτωση:

$$A^\lambda = \begin{bmatrix} I & \lambda C \\ 0 & C \end{bmatrix} \Rightarrow A^{300} = \begin{bmatrix} I & 300C \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

1.7: *α) Έστω μητρώο A τύπου m x n. Αποδείξτε οτι η τάξη (rank) του μητρώου είναι 1 αν και μόνο αν υπάρχουν διανύσματα* $u \in \Re^m$ *και* $v \in \Re^n$ *τέτοια ώστε* $A = uv^T$.

β) Έστω μητρώο A τύπου m x n με τάξη ίση με 1. Αποδείξτε οτι $A^2 = trace(A) \cdot A$.

Επίλυση:

α) Ας υποθέσουμε αρχικά οτι το μητρώο A έχει τάξη ίση με 1. Αυτό σημαίνει πως το A είναι γραμμο-στηλοϊσοδύναμο[1] με το μητρώο:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

συμβολικά, $A \sim S$. Μπορούμε να γράψουμε το S ως εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $e_1 \in \Re^m$, με $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\hat{e_1} \in \Re^n$, με $\hat{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$S = e_1 \cdot \hat{e_1^T}$$

Από τον ορισμό της ισοδυναμίας μητρώων, έχουμε πως τα A, S συνδέονται με μία σχέση της μορφής:

$$PAQ = S$$

όπου P, Q αντιστρέψιμα μητρώα. Έχουμε λοιπόν διαδοχικά:

$$PAQ = S \Longrightarrow A = P^{-1}SQ^{-1} \Longrightarrow A = P^{-1}e_1 \cdot \hat{e_1^T}Q^{-1} \Longrightarrow$$

$$A = P^{-1}_{(:,1)} \cdot Q^{-1}_{(1,:)}$$

όπου $P^{-1}_{(:,1)}, Q^{-1}_{(1,:)}$ η πρώτη στήλη και η πρώτη γραμμή των μητρώων P^{-1} και Q^{-1} αντίστοιχα. Επομένως, πράγματι, το μητρώο A γράφεται ως εξωτερικό

[1] Αν το μητρώο B έχει προκύψει από το A μετά από εφαρμογή ενός αριθμού γραμμοπράξεων και στηλοπράξεων στο A, τότε τα A,B ονομάζονται γραμμο-στηλοϊσοδύναμα μητρώα ή απλά ισοδύναμα μητρώα. Η εφαρμογή μίας γραμμοπράξης στο μητρώο A αντιστοιχεί σε αριστερό πολλαπλασιασμό του A με ένα στοιχειώδες μητρώο. Αντίστοιχα, η εφαρμογή μιας στηλοπράξης αντιστοιχεί σε δεξιό πολλαπλασιασμό με ένα στοιχειώδες μητρώο. Καθώς ένα μητρώο είναι αντιστρέψιμο αν και μόνον εάν μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο στοιχειωδών μητρώων (δηλαδή μητρώων της μορφής $I - uv^T$), οδηγούμαστε στον ορισμό πως τα μητρώα A, B είναι ισοδύναμα αν και μόνον εάν υπάρχουν αντιστρέψιμα μητρώα P, Q τέτοια ώστε: $PAQ = B$.

γινόμενο δύο διανυσμάτων. Αντίστροφα τώρα, εάν $A = uv^T$, τότε κάθε γραμμή (στήλη) του μητρώου A θα είναι πολλαπλάσιο κάθε άλλης γραμμής (στήλης) του A. Αφού η τάξη ενός μητρώου εκφράζει το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών (στηλών), συμπεραίνουμε πως η τάξη του A είναι 1.

β) Από το προηγούμενο ερώτημα, αν το A έχει τάξη 1, τότε:

$$A = uv^T \Rightarrow A^2 = (uv^T)(uv^T) \Rightarrow A^2 = u(v^T u)v^T \Rightarrow A^2 = (v^T u)(uv^T)$$

Αρκεί επομένως να δείξουμε οτι:

$$v^T u = trace(A)$$

Πράγματι:

$$trace(A) = trace(uv^T) = trace(v^T u) = v^T u$$

αφού το $v^T u$ είναι βαθμωτός.

1.8: *α) Έστω αντιστρέψιμο μητρώο A τύπου n x n. Αποδείξτε οτι εάν το μητρώο έχει ιδιοτιμή λ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα x, τότε το αντίστροφο μητρώο έχει ιδιοτιμή 1/λ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα x.*

β) Έστω μητρώο A τύπου n x n και βαθμωτός $\alpha \notin \sigma(A)$. Αποδείξτε οτι το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A αν και μόνον εάν είναι ιδιοδιάνυσμα του $(A - \alpha I)^{-1}$

Επίλυση:
α) Το (λ,x) είναι ιδιοζεύγος του μητρώου A, γεγονός που σημαίνει πως:

$$Ax = \lambda x$$

πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με τον αντίστροφο, παίρνουμε διαδοχικά:

$$x = \lambda A^{-1} x \Rightarrow A^{-1} x = \frac{1}{\lambda} x$$

β) Εάν το x είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A παίρνουμε διαδοχικά:

$$Ax = \lambda x$$

πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με τον αντίστροφο, παίρνουμε διαδοχικά:

$$Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \alpha I)x = (\lambda - \alpha)x \Rightarrow (A - \alpha I)^{-1} x = \frac{1}{(\lambda - \alpha)} x$$

Η τελευταία σχέση προέκυψε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη με το αντίστροφο του μητρώου $(A - \alpha I)$.

1.9: *α) Έστω ορθομοναδιαία μητρώα A, B. Αποδείξτε οτι το γινόμενο AB είναι επίσης ορθομοναδιαίο.*

β) Έστω ορθομοναδιαίο μητρώο A. Αποδείξτε οτι για την ορίζουσά του, ισχύει: $det(A) = \pm 1$.

Επίλυση:
α) Τα μητρώα A, B είναι ορθομοναδιαία, άρα οι στήλες τους έχουν μοναδιαίο μέτρο και είναι ανά δύο κάθετες μεταξύ τους. Έστω:

$$B = [b_1 \;\; b_2 \;\; \cdots \;\; b_n]$$

όπου b_i είναι η $i-$οστή στήλη του B. Αντίστοιχα, η $i-$οστή στήλη του AB είναι η Ab_i. Επομένως, αρκεί να δείξουμε οτι οι στήλες Ab_i είναι ορθομοναδιαίες, δηλαδή οτι:

$$(Ab_i)^T(Ab_j) = \begin{cases} 1 & if \;\; i = j \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

Πράγματι, έχουμε διαδοχικά:

$$(Ab_i)^T(Ab_j) = (b_i^T A^T)(Ab_j) = b_i^T(A^T A)b_j$$

όμως, αφού A ορθομοναδιαίος, $A^T = A^{-1}$. Άρα: Πράγματι, έχουμε διαδοχικά:

$$(Ab_i)^T(Ab_j) = b_i^T b_j = \begin{cases} 1 & if \;\; i = j \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

λόγω της ορθομοναδιαίας ιδιότητας των στηλών του B.

β) Εάν το A είναι ορθομοναδιαίο, έχουμε οτι:

$$A^T = A^{-1} \Rightarrow AA^T = I \Rightarrow det(A)det(A^T) = 1 \Rightarrow det(A)^2 = 1 \Rightarrow det(A) = \pm 1$$

Οι παραπάνω συνεπαγωγές στηρίχθηκαν στις ιδιότητες:

$$C = D \Rightarrow det(C) = det(D)$$

$$det(CD) = det(C) \cdot det(D)$$

$$det(C) = det(C^T)$$

1.10: *Εξετάστε κάτω από ποιες προϋποθέσεις είναι αντιστρέψιμο ένα μητρώο:*
1) Άνω τριγωνικό
2) Κάτω τριγωνικό
3) Ταυτόχρονα άνω και κάτω τριγωνικό
Για κάθε μία κατηγορία μητρώων, προσπαθείστε να δωσετε μία περιγραφή της δομής του αντιστρόφου.

Επίλυση:
1) Γνωρίζουμε οτι η αντιστρεψιμότητα ενός μητρώου συνδέεται άμεσα με την τιμή της ορίζουσας. Συγκεκριμένα ένα μητρώο Α αντιστρέφεται αν και μόνον εάν $det(A) \neq 0$. Η ορίζουσα του άνω τριγωνικού μητρώου:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου, δηλαδή:

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Επομένως, το μητρώο αντιστρέφεται αν και μόνον εάν $a_{ii} \neq 0$ για $i = 1, \cdots, n$.
2) Ισχύουν ακριβώς τα ίδια με την προηγούμενη περίπτωση. Το κάτω τρογωνικό μητρώο:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

αντιστρέφεται αν και μόνον εάν $a_{ii} \neq 0$ για $i = 1, \cdots, n$.
3)Ένα μητρώο Α που είναι ταυτόχρονα άνω και κάτω τριγωνικό, είναι διαγώνιο έχει δηλαδή τη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Προφανώς και στη περίπτωση αυτή ισχύουν οι ίδιες συνθήκες αντιστρεψιμότητας.
Γνωρίζουμε πως εάν μετασχηματίσουμε ένα μητρώο Α τύπου n x n σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή Ε [2], τότε εάν το Ε είναι το ταυτοτικό μητρώο, το Α

[2] Ένας σύντομος ορισμός του ανηγμένου κλιμακωτού μητρώου καθώς και ένας αλγόριθμος υπολογισμού του δίνονται στο Παράρτημα του παρόντος συνόλου ασκήσεων.

αντιστρέφεται. Συγκεκριμένα, ένας αλγόριθμος υπολογισμού του αντιστρόφου ενός μητρώου A με βάση το ισοδύναμο ανηγμένο κλιμακωτό μητρώο, περιγράφεται στο Παράρτημα. Ας προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο αυτό σε ένα διαγώνιο μητρώο. Έχουμε διαδοχικά:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{R_1 \leftarrow \frac{1}{a_{11}} R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{a_{22}} R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{a_{22}} R_2}$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στο:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{array}\right]$$

Επομένως, το αντίστροφο ενός διαγώνιου μητρώου είναι επίσης διαγώνιο και μάλιστα με αντεστραμμένα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου. Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε πως το αντίστροφο ενός άνω (κάτω) τριγωνικού μητρώου θα είναι επίσης άνω (κάτω) τριγωνικό.

1.11: *α) Ας υποθέσουμε οτι κατά τη διάρκεια της παραγοντοποίησης LU ενός n x n μητρώου A δεν συναντάμε μηδενικά οδηγά στοιχεία και δεν εφαρμόζουμε κάποια τεχνική οδήγησης. Τι περιέχει κάθε ένας από τους παράγοντες L, U στο τέλος;*

β) Ας υποθέσουμε οτι καλείστε να επιλύσετε το σύστημα $Ax = b$ για πολλά διαφορετικά δεξιά μέλη b. Αναφέρατε έναν αποδοτικό τρόπο επίλυσης βασιζόμενο στην παραγοντοποίηση LU.

Επίλυση:

α) Γνωρίζουμε οτι για κάθε αντιστρέψιμο μητρώο A, υπάρχει ένα μητρώο αντιμετάθεσης P τέτοιο ώστε το γινόμενο PA παραγοντοποιείται στη μορφή LU, όπου L κάτω τριγωνικό μητρώο με 1 στην κύρια διαγώνιό του και U άνω τριγωνικό μητρώο. Στην περίπτωση που κατά την μετατροπή του A σε άνω τριγωνικό, δεν χρειαστούν αντιμεταθέσεις γραμμών, το P είναι ίσο με το ταυτοτικό. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις για τις οποίες θα θελήσουμε να αντιμεταθέσουμε γραμμές κατά την μετατροπή του A σε άνω τριγωνικό: 1) Συναντάμε κάποιο μηδενικό οδηγό στοιχείο, 2) Εφαρμόζουμε κάποια τεχνική οδήγησης (π.χ. μερική οδήγηση). Η εκφώνηση μας πληροφορεί οτι κατά την παραγοντοποίηση δεν συμβαίνει τίποτα από αυτά. Στην περίπτωση αυτή, οι παράγοντες L, U έχουν τη μορφή:

$$A = L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Το στοιχείο l_{ij} του μητρώου L είναι το αντίθετο το πολλαπλασιαστή που χρησιμοποιήθηκε κατά την απαλοιφή Gauss για τον μηδενισμό της θέσης (i, j) του A. Τα στοιχεία που περιέχει ο U στη κύρια διαγώνιό του είναι τα οδηγά στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν στη διάρκεια της απαλοιφής. Σαν παράδειγμα, ας δούμε το μητρώο:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 18 & 22 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss στο μητρώο αυτό προκειμένου να αναχθεί σε άνω τριγωνική μορφή. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 18 & 22 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, \ R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1}{\longleftrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 12 & 16 \end{bmatrix} \overset{R_3 \leftarrow R_3 - 4R_2}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = U$$

Οι πολλαπλασιαστές που χρησιμοποιήθηκαν κατά την απαλοιφή είναι οι: -2, -3, -4. Επομένως, οι παράγοντες L, U έχουν τη μορφή:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

και:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ένας απλός πολλαπλασιασμός μπορεί να επιβεβαιώσει οτι $LU = A$.

β) Η επίλυση του συστήματος $Ax = b$ όταν το A είναι γενικό μητρώο απαιτεί πολύ περισσότερες πράξεις σε σχέση με την επίλυση εάν το A είναι άνω ή κάτω τριγωνικό. Επομένως, ένας αποδοτικός τρόπος επίλυσης είναι ο εξής: Αρχικά, εκτελούμε την παραγοντοποίηση $A = LU$. Στη συνέχεια, για κάθε δεξιό μέλος b επιλύουμε εύκολα τα δύο τριγωνικά συστήματα:

$$Ly = b$$

και:

$$Ux = y$$

προσδιορίζοντας για κάθε δεξιό μέλος b το ζητούμενο διάνυσμα x που ικανοποιεί την εξίσωση $Ax = b$.

1.12: *Έστω μητρώο:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & -8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Να υπολογισθεί η ορίζουσα του A χωρίς τη χρήση της άμεσης αλγεβρικής έκφρασης γι' αυτή, αλλά αφού προηγηθεί η διάσπαση $PA = LU$ με μερική οδήγηση [3].

Επίλυση:
Γνωρίζουμε οτι κάθε αντιστρέψιμο μητρώο A επιδέχεται μία παραγοντοποίηση της μορφής $PA = LU$. Με δεδομένο οτι τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του L είναι ίσα με 1, και σύμφωνα με τις ιδιότητες των οριζουσών, έχουμε:

$$PA = LU \Rightarrow det(PA) = det(LU) \Rightarrow det(P)det(A) = det(L)det(U) \Rightarrow$$
$$det(A) = (-1)^k det(U)$$

όπου k το πλήθος των εναλλαγών γραμμών που απαιτήθηκαν κατά τη διάκρεια της παραγοντοποίησης $PA = LU$. Προκειμένου να προσδιορίσουμε τους παράγοντες P, L, U από το μητρώο A προχωράμε ως εξής:

Εφαρμόζουμε την απαλοιφή Gauss όπως στη περίπτωση που δεν απαιτούνται εναλλαγές γραμμών. Χάριν οικονομίας χώρου, αντικαθιστούμε κάθε στοιχείο που μηδενίζεται (μέσω της γραμμοπράξης πρόσθεσης μίας γραμμής πολλαπλασιασμένης με έναν αριθμό στα στοιχεία μίας άλλης γραμμής) με το αντίθετο του πολλαπλασιαστή που χρησιμοποιήθηκε στον μηδενισμό του. Κάθε φορά που πραγματοποιείται μία εναλλαγή γραμμών, εναλλάσονται αντίστοιχα και οι πολλαπλασιαστές. Στον αλγόριθμο που θα εφαρμόσουμε, οι πολλαπλασιαστές που χρησιμοποιούνται θα εμφανίζονται με **έντονη γραφή**. Αρχικά, προσαρτούμε στο μητρώο A ένα διάνυσμα δεικτών p που θα χρησιμοποιηθεί για τον τελικό προσδιορισμό του μητρώου αντιμετάθεσης P. Το διάνυσμα p αρχικά περιέχει τους δείκτες (1,2,3,4) και κατά τη διάρκεια της απαλοιφής οι συνιστώσες του αναδιατάσσονται ανάλογα με τις εναλλαγές γραμμών που πραγματοποιούνται. Προσοχή: Οι τιμές του διανύσματος p δεν είναι αριθμητικές, επομένως δεν εφαρμόζονται σε αυτές γραμμοπράξεις. Το p χρησιμοποιείται αποκλειστικά και μόνο για την παραγωγή του τελικού P. Συγκεκριμένα, οι τεχνικές που περιγράψαμε εφαρμόζονται ως εξής στο μητρώο της άσκησης:

$$[A \mid p] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 12 & -8 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

[3] Υπενθυμίζουμε οτι η μερική οδήγηση συνίσταται στην επιλογή ως οδηγού του μέγιστου κατάπόλυτη τιμή στοιχείου της στήλης στην οποία δουλεύουμε

Εφόσον χρησιμοποιούμε μερική οδήγηση, διαλέγουμε ως πρώτο οδηγό το μέγιστο κατ' απόλυτη τιμή στοιχείο της πρώτης στήλης, δηλαδή το 4, και μεταφέρουμε την γραμμή που το περιέχει πρώτη:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 12 & -8 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right] \xleftrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 8 & 12 & -8 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right] \xleftrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - \frac{1}{4}R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 8 & 12 & -8 & 2 \\ \mathbf{\frac{1}{4}} & 0 & -6 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right] \xleftrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 8 & 12 & -8 & 2 \\ \mathbf{\frac{1}{4}} & 0 & -6 & 6 & 1 \\ \mathbf{\frac{1}{2}} & -1 & -4 & 5 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right] \xleftrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 + \frac{3}{4}R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 8 & 12 & -8 & 2 \\ \mathbf{\frac{1}{4}} & 0 & -6 & 6 & 1 \\ \mathbf{\frac{1}{2}} & -1 & -4 & 5 & 3 \\ -\mathbf{\frac{3}{4}} & 5 & 10 & -10 & 4 \end{array}\right] \xleftrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 + \frac{3}{4}R_1}$$

Ως τώρα έχουμε τελειώσει τον μηδενισμό των στοιχείων που βρίσκονται κάτω από το πρώτο οδηγό στοιχείο. Φυσικά, στο μητρώο που παράχθηκε μετά την τελευταία γραμμοπράξη, δεν εμφανίζονται τα μηδενικά αφού αυτά έχουν αντικατασταθεί από τους πολλαπλασιαστές που θα μας δώσουν τον τελικό παράγοντα L, Συνεχίζουμε την διαδικασία απαλοιφής σημειώνοντας πως ως τώρα έχει πραγματοποιηθεί μία εναλλαγή γραμμών. Εφαρμόζοντας μερική οδήγηση, παρατηρούμε πως πρέπει τώρα να εναλλάξουμε τις γραμμές 2 και 4, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 8 & 12 & -8 & 2 \\ \mathbf{\frac{1}{4}} & 0 & -6 & 6 & 1 \\ \mathbf{\frac{1}{2}} & -1 & -4 & 5 & 3 \\ -\mathbf{\frac{3}{4}} & 5 & 10 & -10 & 4 \end{array}\right] \xleftrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 8 & 12 & -8 & 2 \\ -\mathbf{\frac{3}{4}} & 5 & 10 & -10 & 4 \\ \mathbf{\frac{1}{2}} & -1 & -4 & 5 & 3 \\ \mathbf{\frac{1}{4}} & 0 & -6 & 6 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + \frac{1}{5}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 8 & 12 & -8 & 2 \\ -\mathbf{\frac{3}{4}} & 5 & 10 & -10 & 4 \\ \mathbf{\frac{1}{2}} & -\mathbf{\frac{1}{5}} & -2 & 3 & 3 \\ \mathbf{\frac{1}{4}} & 0 & -6 & 6 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 + 0R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 8 & 12 & -8 & 2 \\ -\mathbf{\frac{3}{4}} & 5 & 10 & -10 & 4 \\ \mathbf{\frac{1}{2}} & -\mathbf{\frac{1}{5}} & -2 & 3 & 3 \\ \mathbf{\frac{1}{4}} & \mathbf{0} & -6 & 6 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 8 & 12 & -8 & 2 \\ -\mathbf{\frac{3}{4}} & 5 & 10 & -10 & 4 \\ \mathbf{\frac{1}{4}} & 0 & -6 & 6 & 1 \\ \mathbf{\frac{1}{2}} & -\mathbf{\frac{1}{5}} & -2 & 3 & 3 \end{array}\right] \xleftrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - \frac{1}{3}R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 8 & 12 & -8 & 2 \\ -\mathbf{\frac{3}{4}} & 5 & 10 & -10 & 4 \\ \mathbf{\frac{1}{4}} & 0 & -6 & 6 & 1 \\ \mathbf{\frac{1}{2}} & -\mathbf{\frac{1}{5}} & \mathbf{\frac{1}{3}} & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Επομένως, έχουμε τώρα ανάγει το αρχικό μητρώο A σε άνω τριγωνική μορφή U. Οι παράγοντες L, U είναι οι:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{\frac{3}{4}} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{\frac{1}{4}} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{\frac{1}{2}} & -\mathbf{\frac{1}{5}} & \mathbf{\frac{1}{3}} & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 & -8 \\ 0 & 5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ενώ ο παράγοντας P υπολογίζεται από το τελικό διάνυσμα αντιμετάθεσης p αν εφαρμόσουμε τις αλλαγές γραμμών που ορίζει το p στον ταυτοτικό $4x4$ πίνακα. Δηλαδή, αφού:

$$p = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ο P θα προκύψει αν πάρουμε τον ταυτοτικό $4x4$ πίνακα και τοποθετήσουμε πρώτη τη δεύτερη γραμμή του, δεύτερη την τέταρτη, τρίτη την πρώτη και τέταρτη την τρίτη. Δηλαδή:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Με απλό πολλαπλασιασμό μπορεί να αποδειχθεί οτι $PA = LU$. Επιστρέφοντας τώρα στο ερώτημα υπολογισμού της ορίζουσας, παρατηρούμε οτι κατά την αναγωγή χρειάστηκαν 3 εναλλαγές γραμμών. Επομένως:

$$det(A) = (-1)^3 det(U) = (-1) \cdot 4 \cdot 5 \cdot (-6) \cdot 1 = 120$$

1.13: *Ας υποθέσουμε πως το σύστημα $Ax = b$, $A \in \Re^{nxn}$, $b \in \Re^n$ έχει μοναδική λύση και οτι στον πίνακα των συντελεστών εφαρμόζεται μία ανανέωση πρώτης τάξης, που δίνει το νέο σύστημα: $(A + cd^T)z = b$ όπου $c, d \in \Re^n$. Ας υποθέσουμε επίσης πως y είναι η λύση του συστήματος $Ay = c$. Δώστε κλειστό τύπο για τη λύση z του ανανεωμένου συστήματος.*

Επίλυση:
Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση των Sherman - Morrison για τον αντίστροφο της ανανέωσης πρώτης τάξης. Ο τύπος μας λέει πως αν το μητρώο A είναι αντιστρέψιμο και c, d είναι διανύσματα τέτοια ώστε $1 + d^T A^{-1} c \neq 0$, τότε το άθροισμα (ανανέωση πρώτης τάξης του A) $(A + cd^T)$ είναι αντιστρέψιμο και ισχύει:

$$(A + cd^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} c d^T A^{-1}}{1 + d^T A^{-1} c} \tag{4}$$

Ψάχνουμε την τιμή του διανύσματος z. Έχουμε διαδοχικά:

$$(A + cd^T)z = b \Rightarrow z = (A + cd^T)^{-1} b$$

και με χρήση της (4) έχουμε:

$$z = (A + cd^T)^{-1} b \Rightarrow z = (A^{-1} - \frac{A^{-1} c d^T A^{-1}}{1 + d^T A^{-1} c}) b \Rightarrow$$

$$z = A^{-1} b - \frac{A^{-1} c d^T A^{-1}}{1 + d^T A^{-1} c} b \Rightarrow z = x - \frac{y d^T x}{1 + d^T y}$$

1.14: *α) Έστω συνεπές σύστημα εξισώσεων $Ax = b$ και διάνυσμα $u \in R(A^T)$. Να αποδειχθεί οτι το εσωτερικό γινόμενο $u^T x$ είναι σταθερό $\forall\ x : Ax = b$.*

β) Προσδιορίστε μία βάση για το μηδενοχώρο του μητρώου:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Επίλυση:
α) Το διάνυσμα u ανήκει στον χώρο γραμμών του μητρώου A (άρα και στο χώρο στηλών του A^T). Επομένως, θα υπάρχει κάποιο διάμυσμα y τέτοιο ώστε:

$$u = A^T y \Rightarrow u^T = y^T A \Rightarrow u^T x = y^T A x \Rightarrow u^T x = y^T b$$

β) Ο μηδενοχώρος N(A) του μητρώου A αποτελείται από το σύνολο όλων των διανυσμάτων x που ικανοποιούν το ομογενές σύστημα $Ax = 0$. Επομένως, προκειμένου να προσδιορίσουμε τον μηδενοχώρο αρκεί να βρούμε τη μορφή όλων αυτών των λύσεων. Για το σκοπό αυτόν, ανάγουμε το

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Μετά την εφαρμογή μιας γραμμοπράξης, παίρνουμε το γραμμοϊσοδύναμο σύστημα:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Τα ισοδύναμα συστήματα έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις, επομένως οι λύσεις του $Ax = 0$ έχουν τη μορφή: $x_1 = -2x_2 - 3x_3$ όπου x_2, x_3 οποιοιδήποτε αριθμοί. Άρα όλες οι λύσεις του ομογενούς συστήματος είναι της μορφής:

$$\begin{bmatrix} -2k - 3l \\ k \\ l \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και επομένως ο μηδενοχώρος είναι: $\mathrm{N(A)} = \mathrm{span}\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$

1.15: *α) Προσδιορίστε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του μητρώου:*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

β) Προσδιορίστε, χωρίς να προχωρήσετε σε υπολογισμό ιδιοτιμών, αν τα διανύσματα που ακολουθούν είναι ιδιοδιανύσματα του μητρώου:

$$A = \begin{bmatrix} -9 & -6 & -2 & -4 \\ -8 & -6 & -3 & -1 \\ 20 & 15 & 8 & 5 \\ 32 & 21 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

και γι΄ αυτά που πράγματι είναι ιδιοδιανύσματα, να υπολογιστεί η αντίστοιχη ιδιοτιμή.

$$x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επίλυση:

α) Προκειμένου να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του μητρώου A, αρκεί να επιλύσουμε την χαρακτηριστική εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$. Αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης, οπότε παίρνουμε:

$$det(A) = 0 \Rightarrow -(\lambda - 3)^3 = 0$$

Από την παραπάνω εξίσωση, συμπεραίνουμε πως το μητρώο A έχει μοναδική ιδιοτιμή την 3 με πολλαπλότητα 3. Προκειμένου να βρούμε τον αντίστοιχο χώρο ιδιοδιανυσμάτων, θα πρέπει να υπολογίσουμε το μηδενοχώρο N(A - 3I), εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss στον $A - 3I$. Μετά την εκτέλεση των απαιτούμενων γραμμοπράξεων, προκύπτει οτι το σύστημα:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

είναι γραμμοϊσοδύναμο με το:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{array}\right]$$

που σημαίνει πως η λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $(A-3I)x = b$ είναι της μορφής:

$$k\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

για τυχαίο k. Άρα, ο μηδενοχώρος του $A-3I$ είναι ο: $\mathrm{N}(A-3I) = \mathrm{span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ και επομένως, ένα ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο της ιδιοτιμής 3 είναι το:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

β) Προκειμένου να επιβεβαιώσουμε αν κάθε ένα εκ των διανυσμάτων x_1, x_2, x_3, x_4 είναι ιδιοδιάνυσμα του Α, αρκεί να εκτελέσουμε τον πολλαπλασιασμό Ax_i για $i = 1, 2, 3, 4$ και να ελέγξουμε αν το αποτέλεσμα είναι πολλαπλάσιο του x_i (οπότε και ο πολλαπλασιαστής θα είναι η αντίστοιχη ιδιοτιμή). Με τον τρόπο αυτόν, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως τα διανύσματα x_1, x_3, x_4 είναι πράγματι ιδιοδιανύσματα του Α με αντίστοιχες ιδιοτιμές, τις 1,3 και 3.

1.16: *α) Να αποδειχθεί οτι εάν το μητρώο A είναι ορθομοναδιαίο, τότε το μέτρο κάθε ιδιοτιμής του είναι ίσο με 1.*

β) Έστω οτι το A είναι μητρώο προβολής. Τι τιμές μπορούν να λάβουν τότε οι ιδιοτιμές του;

Επίλυση:
α) Εφόσον το μητρώο A είναι ορθομοναδιαίο, ο αντίστροφός του είναι ίσος με τον ανάστροφό του, δηλαδή:

$$AA^T = I$$

Ας υποθέσουμε τώρα πως το A έχει ένα ιδιοζεύγος (λ, x). Αυτό σημαίνει οτι $Ax = \lambda x$. Σύμφωνα με τον ορισμό του μέτρου διανύσματος, έχουμε οτι:

$$\|Ax\|^2 = (Ax)^T(Ax) = x^T A^T(Ax) = x^T(A^T A)x = x^T x = \|x\|^2$$

επομένως, θα ισχύει και οτι:

$$\|\lambda x\|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow |\lambda|^2\|x\|^2 = \|x\|^2$$

και εφόσον το x είναι διάφορο του μηδενικού διανύσματος, έχουμε οτι:

$$|\lambda| = 1$$

β) Το A είναι μητρώο προβολής, επομένως $A^2 = A$. Ας υποθέσουμε τώρα πως το A έχει ένα ιδιοζεύγος (λ, x). Αυτό σημαίνει οτι $Ax = \lambda x$. Ή ισοδύναμα:

$$\lambda x = Ax = A^2 x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda^2 x$$

επομένως:

$$(1 - \lambda)\lambda x = 0$$

που σημαίνει πως λ=0 ή λ=1.

1.17: *Να γραφτεί το μητρώο:*

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

σαν γραμμικός συνδυασμός μητρώων προβολής μοναδιαίας τάξης.

Επίλυση:
Αρχικά, υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του A βρίσκοντας τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Έχουμε διαδοχικά:

$$det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (\lambda - 8)(\lambda + 2) = 0$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του A είναι οι 8 και -2. Προσδιορίζοντας τον μηδενοχώρο των μητρώων (A - 8I) και (A +2I), υπολογίζουμε και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Μετά την κανονικοποίηση, τα διανύσματα αυτά αποκτούν μοναδιαίο μέτρο και γράφονται ως $\begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$.

Παρατηρούμε πως το A είναι συμμετρικό, επομένως υπάρχει ορθομοναδιαίο μητρώο Q τέτοιο ώστε $A = Q\Lambda Q^T$, πράγμα που συνεπάγεται οτι:

$$A = Q\Lambda Q^T \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

Αν συμβολίσουμε με q_1, q_2 τις στήλες του Q, τότε η παραπάνω σχέση γράφεται στη μορφή:

$$A = -2q_1q_1^T + 8q_2q_2^T = -2 \begin{bmatrix} 1/10 & -3/10 \\ -3/10 & 9/10 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 9/10 & 3/10 \\ 3/10 & 1/10 \end{bmatrix}$$

1.18: *α) Να υπολογίσετε μία ορθομοναδιαία βάση για τον χώρο που παράγεται από τα διανύσματα:*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

β) Τι συμβαίνει στη διαδικασία των Gram-Schmidt όταν αυτή εφαρμοστεί σε σύνολο γραμμικά εξαρτημένων διανυσμάτων;

Επίλυση:

α) Αρχικά, θα πρέπει να υπολογίσουμε το υποσύνολο των δεδομένων διανυσμάτων που παράγει τον χώρο. Αυτό σημαίνει πως πρέπει να αφήσουμε στο υποσύνολο μόνο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Εκτελώντας μία απλή αναγωγή του μητρώου:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, παρατηρούμε πως η τάξη του είναι ίση με 3, επομένως και τα 3 δεδομένα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, που σημαίνει πως δεν πρέπει να «πετάξουμε» κανένα. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt στο σύνολο των 3 αυτών διανυσμάτων. Ο αλγόριθμος Gram-Schmidt ξεκινάει από ένα σύνολο διανυσμάτων $\{x_1, \cdots, x_n\}$ και παράγει μία ορθομοναδιαία βάση $\{q_1, \cdots, q_n\}$ έτσι ώστε $\text{span}\{x_1, \cdots, x_n\} = \text{span}\{q_1, \cdots, q_n\}$. Αρχικά, παίρνουμε:

$$q_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε το δεύτερο διάνυσμα q_2 της καινούριας βάσης, αφαιρούμε από το x_2 την συνιστώσα του που είναι παράλληλη στο q_1:

$$\hat{q_2} = x_2 - q_1^T x_2 q_1$$

Το διάνυσμα $\hat{q_2}$ είναι πλέον κάθετο στο q_1 (έχει αφαιρεθεί η παράλληλη συνιστώσα) αλλά εν γένει δεν έχει μοναδιαίο μέτρο. Επομένως, το κανονικοποιούμε λαμβάνοντας το δεύτερο διάνυσμα q_2:

$$q_2 = \frac{\hat{q_2}}{\|\hat{q_2}\|}$$

Προκειμένου να πάρουμε το q_3 αφαιρούμε από το x_3 τις συνιστώσες του που είναι παράλληλες στα q_1, q_2:

$$\hat{q_3} = x_3 - q_1^T x_3 q_1 - q_2^T x_3 q_2$$

και στη συνέχεια κανονικοποιούμε:

$$q_3 = \frac{\hat{q_3}}{\|\hat{q_3}\|}$$

Η επαναληπτική αυτή διαδικασία τερματίζει όταν έχουν εξαντληθεί όλα τα διανύσματα x_i. Η εφαρμογή της στα 3 δεδομένα διανύσματα, παράγει την ορθομοναδιαία βάση: $\{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$

β) Αν η διαδικασία Gram-Schmidt εφαρμοστεί σε σύνολο γραμμικά εξαρτημένων διανυσμάτων θα οδηγήσει σε διαίρεση με το μηδέν στη φάση της κανονικοποίησης. Πράγματι, ας υποθέσουμε πως τα πρώτα $\{x_1, \cdots, x_k\}$ διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οπότε η διαδικασία έχει παράγει τα αντίστοιχα ορθομοναδιαία $\{q_1, \cdots, q_k\}$. Έστω τώρα x_{k+1} το πρώτο διάνυσμα που εξαρτάται γραμμικά από τα $\{x_1, \cdots, x_k\}$. Αυτό σημαίνει πως $x_{k+1} \in \text{span}\{x_1, \cdots, x_k\} = \text{span}\{q_1, \cdots, q_k\}$. Δηλαδή το x_{k+1} μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\{q_1, \cdots, q_k\}$. Αυτό μπορεί να γίνει με μοναδικό τρόπο ως εξής:

$$x_{k+1} = (q_1^T x_{k+1})q_1 + (q_2^T x_{k+1})q_2 + \cdots + (q_k^T x_{k+1})q_k$$

Επομένως, όταν η Gram-Schmidt εκτελέσει την εντολή:

$$\hat{q_{k+1}} = x_{k+1} - (q_1^T x_{k+1})q_1 - (q_2^T x_{k+1})q_2 - \cdots - (q_k^T x_{k+1})q_k$$

θα εξάγει αποτέλεσμα $\hat{q_{k+1}} = 0$, και στο επόμενο βήμα (κανονικοποίηση) θα οδηγηθεί σε διαίρεση με το 0.

Παράρτημα

Ανηγμένο Κλιμακωτό Μητρώο

Ένα μητρώο E τύπου $m\ x\ n$ ονομάζεται ανηγμένο κλιμακωτό εάν ισχύουν ταυτόχρονα οι ακόλουθες ιδιότητες:

- Οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πριν από τις μηδενικές.
- Το πρώτο από αριστερά μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το 1 και βρίσκεται δεξιότερα του αντίστοιχου 1 της προηγούμενης γραμμής.
- Το πρώτο από αριστερά 1 κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει.

Για παράδειγμα, τα μητρώα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

βρίσκονται σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή σε αντίθεση με τα μητρώα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Κάθε μητρώο A είναι γραμμοισοδύναμο με ένα μοναδικό ανηγμένο κλιμακωτό μητρώο E. Παρακάτω, περιγράφεται σε συντομία ένας αλγόριθμος εκτέλεσης της αναγωγής αυτής.

Αναγωγή Μητρώου σε Ανηγμένη Κλιμακωτή Μορφή

Ο αλγόριθμος μετατροπής ενός μητρώου A σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή ακολουθεί:

1. Βρίσκουμε τη πρώτη στήλη του μητρώου που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο.
2. Χρησιμοποιώντας την γραμμοπράξη ανταλλαγής γραμμών, μεταφέρουμε πρώτη στο μητρώο την γραμμή που περιέχει το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης.
3. Χρησιμοποιώντας την γραμμοπράξη πολλαπλασιασμού γραμμής με μη μηδενικό αριθμό, μετατρέπουμε το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης σε 1.

4. Χρησιμοποιώντας την γραμμοπράξη πρόσθεσης μίας γραμμής (πολλαπλασιασμένης με έναν αριθμό) σε μία άλλη γραμμή, μετατρέπουμε όλα τα στοιχεία της στήλης που είναι κάτω από τη μονάδα σε 0.

5. Αγνοούμε τη πρώτη γραμμή του μητρώου και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1-4 για τις επόμενες γραμμές του μητρώου, αρχίζοντας από τη δεύτερη γραμμή και προχωρώντας προς την τελευταία. Αν όμως οι γραμμές που απομένουν είναι μηδενικές, μεταβαίνουμε στο βήμα 6 του αλγορίθμου.

6. Από γραμμή σε γραμμή, χρησιμοποιώντας το πρώτο από αριστερά 1 κάθε γραμμής και τη γραμμοπράξη πρόσθεσης μίας γραμμής (πολλαπλασιασμένης με έναν αριθμό) σε μία άλλη γραμμή, μετατρέπουμε όλα τα στοιχεία της στήλης που βρίσκεται η μονάδα αυτή σε μηδενικά.

Για παράδειγμα, προκειμένου να μετατρέψουμε το μητρώο:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

$\odot$ Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με $\frac{1}{2}$ (συμβολικά $R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1$) και προκύπτει το ισοδύναμο μητρώο:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$\odot$ Το στοιχείο της δεύτερης γραμμής κάτω από το πρώτο από αριστερά 1 της πρώτης γραμμής είναι ήδη μηδέν. Επομένως, προχωράμε στο αντίστοιχο στοιχείο της τρίτης γραμμής που είναι ίσο με 3. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με -3 και την προσθέτουμε στην τρίτη γραμμή (συμβολικά $R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$), οπότε προκύπτει το ισοδύναμο μητρώο:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 12 & -9 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$\odot$ Το πρώτο από αριστερά μη μηδενικό στοιχείο της δεύτερης γραμμής είναι ήδη μονάδα. Επομένως, προχωράμε στον μηδενισμό του 4 που βρίσκεται κάτω από αυτή τη μονάδα. Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με -4 και την προσθέτουμε στην τρίτη γραμμή (συμβολικά $R_3 \leftarrow R_3 - 4R_2$), οπότε προκύπτει το ισοδύναμο μητρώο:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & \frac{-17}{2} \end{bmatrix}$$

⊙ Το πρώτο από αριστερά μη μηδενικό στοιχείο της τρίτης γραμμής είναι -17, οπότε πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με $-\frac{1}{17}$(συμβολικά $R_3 \leftarrow -\frac{1}{17}R_3$) και προκύπτει το ισοδύναμο μητρώο:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

⊙ Τώρα πλέον είμαστε στο βήμα 6 του προαναφερθέντος αλγορίθμου. Προσπαθούμε να μηδενίσουμε όλα τα στοιχεία της τέταρτης στήλης που βρίσκονται πάνω από το 1. Για το σκοπό αυτό, εκτελούμε τις πράξεις: $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_3$ και $R_1 \leftarrow R_1 - 3R_3$ οπότε προκύπτει το ισοδύναμο μητρώο:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

⊙ Προσπαθούμε να μηδενίσουμε όλα τα στοιχεία της δεύτερης στήλης που βρίσκονται πάνω από το 1. Για το σκοπό αυτό, εκτελούμε την πράξη: $R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2$ οπότε προκύπτει το ισοδύναμο μητρώο:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Το μητρώο που προέκυψε είναι ανηγμένο κλιμακωτό.

Αντιστροφή Μητρώου μέσω Μετατροπής σε Ανηγμένη Κλιμακωτή Μορφή

Γνωρίζουμε από τη θεωρία πως εάν το ισοδύναμο ανηγμένο κλιμακωτό μητρώο E ενός μητρώου A n x n είναι το ταυτοτικό, τότε το A αντιστρέφεται. Σε περίπτωση που το E δεν είναι το ταυτοτικό μητρώο, τότε το A δεν αντιστρέφεται. Η εφαρμογή μίας γραμμοπράξης σε ένα μητρώο A ισοδυναμεί με αριστερό πολλαπλασιασμό του A με ένα στοιχειώδες μητρώο (δηλαδή μητρώο της μορφής $I - uv^T$). Ας υποθέσουμε οτι το μητρώο A αντιστρέφεται. Αυτό σημαίνει πως είναι γραμμοισοδύναμο με το ταυτοτικό μητρώο I. Σύμφωνα με τη συζήτηση που προηγήθηκε, μπορούμε να γράψουμε:

$$G_1 G_2 \cdots G_k A = I$$

όπου G_i είναι στοιχειώδη μητρώα που αντιστοιχούν σε κάποια από τις 3 γραμμοπράξεις. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει οτι το αντίστροφο του A είναι το γινόμενο των στοιχειωδών μητρώων $G_1 G_2 \cdots G_k$. Η παρατήρηση αυτή, μας οδηγεί στην κατασκευή του ακόλουθου αλγορίθμου εύρεσης του αντιστρόφου ενός μητρώου A:

1 . Σχηματίζουμε το n x $2n$ επαυξημένο μητρώο [A | I] όπου I το μοναδιαίο n x n μητρώο.

2 . Προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε το A σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, εφαρμόζοντας όμως γραμμοπράξεις στο επαυξημένο μητρώο [A | I] και όχι μόνο στο A.

3 . Μετά το τέλος του αλγορίθμου αναγωγής σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, το επαυξημένο μητρώο έχει τη μορφή [R | B], όπου R ανηγμένο κλιμακωτό μητρώο. Εάν $R = I$, όπου I το μοναδιαίο (ταυτοτικό) μητρώο, τότε το A αντιστρέφεται και ο αντίστροφός του είναι το μητρώο B. Εάν $R \neq I$, τότε το A δεν αντιστρέφεται.

Ας προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τον παραπάνω αλγόριθμο για την εύρεση του αντιστρόφου του μητρώου:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Έχουμε διαδοχικά (σημειώνουμε συμβολικά κάθε εκτελούμενη γραμμοπράξη):

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\longleftrightarrow}{R_2 \leftarrow R_2 - R_1, R_3 \leftarrow R_3 - R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\longleftrightarrow}{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\longleftrightarrow}{R_2 \leftarrow R_2 - R_3, R_1 \leftarrow R_1 - R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\longleftrightarrow}{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Καταλήξαμε επομένως στη μορφή [R | B] με $R = I$, επομένως το αρχικό μητρώο αντιστρέφεται και ο αντίστροφός του είναι ο:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$