ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ: Υποδείξεις και Απαντήσεις Εξεταστικής Ιουνίου 2004

Το άθροισμα των βαθμών των παρακάτω ερωτήσεων υπερβαίνει το 100 γιατί συμπεριλαμβάνονται τα ερωτήματα και οι αντίστοιχες απαντήσεις για *όλες τις εκδοχές των θεμάτων* εκτός από τις ερωτήσεις που διέφεραν μόνον ως προς τα στοιχεία των μητρώων ή των διανυσμάτων (οπότε παρουσιάζεται η λύση μιας μόνον εκδοχής.) Κάθε υποερώτημα της ερώτησης I βαθμολογείται με 2.

I. *(30 β.)* Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Πολλές από αυτές είναι τύπου «Σωστό/Λάθος» και σημειώνονται με τον συμβολισμό «Σ/Λ». Δώστε τις απαντήσεις σας στο χώρο που παρέχεται. Εάν υπάρχει η ένδειξη **«Σ.Π.»**(Σελίδα Προχείρου) συμπληρώστε εκεί τον αριθμό σελίδας στο Πρόχειρό σας όπου θα αναφέρεται με λεπτομέρεια η λύση.Τα θέματα πρέπει να αιτιολογηθούν πλήρως. Τα βαθμωτά μεγέθη και το εσωτερικό γινόμενο είναι πραγματικοί αριθμοί εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.

1. Έστω το σύστημα $Ax = b$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Γράψτε ξανά το ίδιο σύστημα με το δεξί μέλος να είναι το $b^\top$.

   Απάντηση. $Ax = b \Rightarrow x^\top A^\top = b^\top$ □

2. «Σ/Λ» Ένα μητρώο που είναι συμμετρικό και ερμιτιανό περιέχει μόνον πραγματικά στοιχεία.

   Απάντηση. Σωστό: $\alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ji}$ γιατί ερμιτιανό, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ λόγω συμμετρίας, οπότε $\alpha_{ji} = \bar{\alpha}_{ji}$. Αλλά αν ένας μιγαδικός είναι ίσος με το συζυγή του τότε είναι και πραγματικός, οπότε όλα τα στοιχεία είναι πραγματικά. □

3. «Σ/Λ» Αν τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε και τα $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_1 + v_3$, $w_3 = v_2 + v_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

   Απάντηση. Σωστό: Γιατί αν πάρουμε έναν γραμμικό συνδυασμό των w_j θα έχουμε

   $$\begin{aligned} \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 &= \alpha(v_1 + v_2) + \beta(v_1 + v_3) + \gamma(v_2 + v_3) \\ &= (\alpha + \beta)v_1 + (\alpha + \gamma)v_2 + (\beta + \gamma)v_3. \end{aligned}$$

   Για να είναι το παραπάνω 0 θα πρέπει να ισχύει ότι

   $$0 = \alpha + \beta = \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

   οπότε $\alpha = \beta\gamma = 0$. □

4. Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί ο βαθμωτός γ έτσι ώστε το σύνολο των σημείων $[x, y]$ που ικανοποιούν την εξίσωση $3x + y = \gamma$ να ανήκουν σε διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$;

   Απάντηση. Αν τα σημεία αυτά αποτελούν υποχώρο, έστω V, θα πρέπει κάθε γραμμικός τους συνδυασμός να ικανοποιεί τον ίδιο περιορισμό. Επίσης θα πρέπει να ανήκει στο χώρο και το μηδενικό σημείο $[0, 0]$. Αλλά $3 \times 0 + 0 = 0$ επομένως θα πρέπει $\gamma = 0$. Στην περίπτωση αυτή κάθε ζεύγος σημείων $u_1 = [x_1, y_1]$, $u_2 = [x_2, y_2]$

   $$\alpha u_1 + \beta u_2 = \alpha[x_1, y_1] + \beta[x_2, y_2] = [\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2]$$

   και θα πρέπει $3(\alpha x_1 + \beta x_2) + \alpha y_1 + \beta y_2 = 0$ αλλά

   $$\alpha(3x_1 + y_1) + \beta(3x_2 + y_2) = 0$$

   επομένως $\alpha u_1 + \beta u_2 \in V$ εφόσον $\gamma = 0$. Για να είναι υποχώρος θα πρέπει κάθε σημείο που παράγεται από γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων □

5. «Σ/Λ» Οι χώροι $V = \{[a \ \ b \ \ c]^\top : a+b+c=0\}$ και $W = \{[a \ \ b \ \ c]^\top : a \geq 0\}$ είναι υποχώροι του $\mathbb{R}^3$.

   Απάντηση. α) Σωστό: Κατάρχήν το στοιχείο $[0,0,0] \in V$. Έστω $v, w \in V$. Τότε $\mu v + \nu w = [\mu\beta_1 + \nu\omega_1, \mu\beta_2 + \nu\omega_2, \mu\beta_3 + \nu\omega_3]$ οπότε

   $$\mu\beta_1 + \nu\omega_1 + \mu\beta_2 + \nu\omega_2 + \mu\beta_3 + \nu\omega_3 = \mu(\beta_1+\beta_2+\beta_3) + \nu(\omega_1+\omega_2+\omega_3) = 0.$$

   β) Λάθος: Το στοιχείο $[0,0,0] \in W$ και αν $v, w \in W$. Τότε $\mu v + \nu w = [\mu\beta_1 + \nu\omega_1, \mu\beta_2 + \nu\omega_2, \mu\beta_3 + \nu\omega_3]$ και εκ κατασκευής $\beta_1, \omega_1 \geq 0$. Αν επιλέξουμε $\mu = 0, \nu = -1$ τότε το διάνυσμα $[-\omega_1, -\omega_2, -\omega_3] \notin W$. Επομένως δεν είναι υπόχωρος. □

6. Να δείξετε πως αν για ένα πραγματικό μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ισχύει ότι $x^\top Ax > 0$ για κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ τότε όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο του A θα είναι θετικά.

   Απάντηση. Επιλέγουμε με τη σειρά $x = e_1, ..., e_n$ όπου e_j το j διάνυσμα της τυπικής βάσης οπότε προκύπτει ότι $e_j^\top Ae_j = \alpha_{jj} > 0$ για κάθε j. □

7. «Σ/Λ» Αν το μητρώο A^2 δεν είναι αντιστρέψιμο τότε το ίδιο ισχύει και για το A.
   Απάντηση: ΣΩΣΤΟ

   Απάντηση. Σωστό: Αν A^2 δεν είναι αντιστρέψιμο τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τ.ώ. $A^2x = 0$ επομένως $A(Ax) = 0$ οπότε είτε $Ax = 0$ είτε $Ay = 0$ όπου $Ax = y$. Και στις δυο περιπτώσεις συνεπάγεται ότι το A είναι ιδιόμορφο. Ένας άλλος τρόπος απόδειξης είναι μέσω ιδιοτιμών: Οι ιδιοτιμές του A^2 είναι το τετράγωνο των ιδιοτιμών του A. Αν το A δεν είναι ομαλό τότε τουλάχιστον μια ιδιοτιμή του θα είναι 0 επομένως το ίδιο θα ισχύει και για την τετραγωνική της ρίζα, καθώς $\sqrt{0} = 0$. Επομένως και το A θα είναι ιδιόμορφο. □

8. «Σ/Λ» Αν όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο ενός άνω τριγωνικού μητρώου είναι μη μηδενικά τότε το μητρώο είναι αντιστρέψιμο.

   Απάντηση. Σωστό: Τρεις τρόποι απόδειξης: α) Η ορίζουσα τριγωνικού είναι το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων οπότε αν κανένα δεν είναι 0 το γινόμενο είναι μη μηδενικό άρα και η ορίζουσα είναι μη μηδενική επομένως το μητρώο είναι αντιστρέψιμο. β) Κατασκευαστικά: Ο μόνος τρόπος να αποτύχει ο αλγόριθμος πίσω αντικατάστασης είναι να χρειαστεί διαίρεση με το 0. Οι διαιρέσεις όλες είναι με τα διαγώνια στοιχεία του A επομένως αν δεν είναι 0 δεν έχουμε αποτυχία για κανένα δεξί μέλος και επομένως ούτε για τα $e_1, ..., e_n$, επομένως το μητρώο είναι ομαλό. γ) Οι ιδιοτιμές κάθε τριγωνικού μητρώου είναι στη διαγώνιό του. Αν όλες είναι μη μηδενικές το μητρώο θα είναι ομαλό. □

9. «Σ/Λ» Αν λ_j είναι οι ιδιοτιμές του A με $\lambda_j \neq 0$ και υπάρχει ο A^{-1} τότε οι ιδιοτιμές του A^{-1} είναι $\frac{1}{\lambda_j}$.

   Απάντηση. Σωστό (Strang σελ. 301). □

10. «Σ/Λ» Αν λ_j είναι οι ιδιοτιμές του A με $\lambda_j \neq 0$ και υπάρχει ο A^{-1} τότε οι ιδιοτιμές του A^{-1} είναι $-\frac{1}{\lambda_j}$.

    Απάντηση. Λάθος: Για κάθε λ_j για το οποίο ισχύει $Ax_j = \lambda_j x_j$ ισχύει επίσης ότι $A^{-1}x_j = \lambda_j^{-1}x_j$. Καθώς το A έχει ακριβώς n ιδιοτιμές, θα είναι αυτές και όχι οι $-1/\lambda_j$. □

11. «Σ/Λ» Αν το συμμετρικό πραγματικό μητρώο A έχει μια ιδιοτιμή λ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα u τέτοιο ώστε $\|u\| = 1$ τότε το μητρώο $A + \lambda uu^\top$ θα έχει μια ιδιοτιμή 0 με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα u.

    Απάντηση. ΛΑΘΟΣ. Αφού $Au = \lambda u$, $(A + \lambda uu^\top)u = Au + \lambda uu^\top u = \lambda u + \lambda u = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ επομένως δεν ισχύει γενικά εκτός αν η ιδιοτιμή είναι 0. □

    «Σ/Λ» Αν το συμμετρικό πραγματικό μητρώο A έχει μια ιδιοτιμή λ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα u τέτοιο ώστε $\|u\| = 1$ τότε το μητρώο $A - \lambda uu^\top$ θα έχει μια ιδιοτιμή 0 με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα u.

    Απάντηση. ΣΩΣΤΟ: Αφού $Au = \lambda u$, $(A - \lambda uu^\top)u = Au - \lambda uu^\top u = \lambda u - \lambda u = 0$. □

12. Δείξτε ότι ο πίνακας στροφής $A = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ είναι ορθομοναδιαίος. Πώς μπορείτε να προβλέψετε άμεσα τον αντίστροφο του A χωρίς να τον υπολογίστε;

    Απάντηση. Αρκεί να δείξετε ότι $A^\top A = I$ (κάντε τις πράξεις). Επομένως $A^{-1} = A^\top$. □

13. Προσδιορίστε τις κανονικές εξισώσεις με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για τη λύση του συστήματος:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 3x + 2y &= 4 \\ 5x + y &= 7 \end{aligned}$$

    Απάντηση. Οι κανονικές εξισώσεις είναι οι $A^\top Ax = A^\top b$, δηλαδή

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

    επομένως

$$\begin{pmatrix} 38 & 17 \\ 17 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 18 \end{pmatrix}$$

    Σημειώνουμε ότι εφόσον το παραπάνω $A^\top A$ τυχαίνει και είναι ομαλό, η λύση του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων $\arg\min_{x \in R^2} \|b - Ax\|$ είναι $x = (A^\top A)^{-1} A^\top b$, δηλαδή (αν κάνουμε τις πράξεις)

$$x = [380/243, -149/243]^\top.$$

    □

14. «Σ/Λ» Αν A είναι ορθομοναδιαίο μητρώο και $x \in \mathbb{R}^n$, τότε $\|Ax\| = \|x\|$.

    Απάντηση. Από τον ορισμό και το ότι το A είναι ορθομοναδιαίο, $\|Ax\| = (x^\top A^\top Ax)^{1/2} = (x^\top x)^{1/2} = \|x\|$. □

15. «Σ/Λ» Δύο όμοιοι πίνακες A και $B = M^{-1}AM$ έχουν ίδιες ιδιοτιμές και ένα ιδιοδιάνυσμα x του A αντιστοιχεί σε ένα ιδιοδιάνυσμα $M^{-1}x$ του B.

    Απάντηση. ΣΩΣΤΟ (βλ. Strang σελ. 356). □

16. Έστω ιδιόμορφος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Πόση αναμένετε να είναι η τάξη του σε σχέση με το n (μικρότερη, μεγαλύτερη, ίση); Έχει ο A μηδενοχώρο μη μηδενικής διάστασης;

    Απάντηση. Μικρότερη του n. Αφού το μητρώο είναι ιδιόμορφο, οι γραμμές θα είναι γραμμικά εξαρτημένες, επομένως η διάσταση του χώρου γραμμών θα είναι μικρότερη του n, έστω r. Αυτή είναι και η τάξη του μητρώου. Επομένως, όπως προβλέπει η θεωρία (βλ. π.χ. Strang σελ. 160) το άθροισμα της διάστασης του χώρου γραμμών r και του μηδενοχώρου, έστω s θα είναι n, επομένως $r + s = n, r < n \Rightarrow s \geq 1$. □

17. «Σ/Λ» Για κάθε μητρώο A ισχύει οτι υπάρχει αντιστρέψιμο μητρώο X ίδιας διάστασης τέτοιο ώστε το $X^{-1}AX$ είναι διαγώνιο.

    Απάντηση. Λάθος: Το μητρώο X περιέχει τα ιδιοδιανύσματα του A. Αν υπάρχουν λιγότερα από n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, το X δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμο. Για παράδειγμα το $A = [1, 1; 0, 1]$ έχει μόνον ένα γραμμικά ανεξάρτητο ιδιοδιανυσμα (ο ιδιοχώρος είναι διάστασης 1) επομένως η διασπαση $X^{-1}AX$ δεν υπάρχει. □

18. «Σ/Λ» Αν δύο μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ είναι κάθετα μεταξύ τους τότε είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απάντηση. ΣΩΣΤΟ. Αν $u \perp v$ και λάβουμε $\alpha u + \beta v = 0 \Rightarrow \alpha v^\top u + \beta v^\top v = 0$ Επομένως $\beta = 0$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $\alpha = 0$ επομένως η μόνη περίπτωση να ισχύει $\alpha u + \beta v = 0$ είναι να έχουμε $\alpha = \beta = 0$ επομένως τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. □

IIa. (*10 β.*)

1. Να επαληθεύσετε τον τύπο Sherman-Morrison: Αν $u, v \in \mathbb{R}^n$ και το $A+uv^\top$ είναι αντιστρέψιμο, να κάνετε όλες τις απαραίτητες πράξεις για να επαληθεύσετε ότι $(A+uv^\top)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}u(1+v^\top A^{-1}u)^{-1}v^\top A^{-1}$.

   Απάντηση. Για συντομία θέτουμε $\phi = (1 + v^\top A^{-1}u)^{-1}$.

$$\begin{aligned}
(A+uv^\top)(A^{-1} - A^{-1}u\phi v^\top A^{-1}) &= (A+uv^\top)A^{-1}(I - u\phi v^\top A^{-1}) \\
&= (I + uv^\top A^{-1})(I - u\phi v^\top A^{-1}) = I + uv^\top A^{-1} - (I + uv^\top A^{-1})u\phi v^\top A^{-1} \\
&= I + uv^\top A^{-1} - \phi uv^\top A^{-1} - \phi uv^\top A^{-1}uv^\top A^{-1} \\
&= I + uv^\top A^{-1} - \phi u(1 + v^\top A^{-1}u)v^\top A^{-1} \\
&= I + uv^\top A^{-1} - uv^\top A^{-1} = I.
\end{aligned}$$

   □

2. Να υπολογίσετε το αντίστροφο του μητρώου $A + uu^\top$ όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, u = [1, 2, 1]^\top.$$

Απάντηση. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσετε τον τύπο Sherman-Morrison (όπως έγινε και στο φροντιστήριο) για να αποφύγετε τον άμεσο (και κοπιαστικό) υπολογισμό του αντιστρόφου. Η ευκολία του τύπου συνίσταται στο ότι αντίθετα από το $A + uu^\top$ που είναι ένα πυκνό μητρώο και άρα κοπιαστικό και ακριβό να αντιστραφεί απευθείας, η αντιστροφή του A είναι τετριμμένη, ενώ το $1 + u^\top A^{-1}u$ είναι βαθμωτός. Επομένως

$$(1 + u^\top A^{-1}u)^{-1} = (1 + [1, 2, 1][1/2, 2/3, 1/4]^\top)^{-1} = 12/37$$

και

$$\begin{aligned}
A^{-1} - A^{-1}u(1 + v^\top A^{-1}u)^{-1}u^\top A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} - 12/37 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ 1/4 \end{pmatrix} [1, 2, 1] \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 31/74 & -4/37 & -3/74 \\ -4/37 & 7/37 & -2/37 \\ -3/74 & -2/37 & 17/74 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

IIb. (*10 β.*) Δίδονται τα μητρώα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

και οι παρακάτω τεμαχισμοί τους. Για κάθε περίπτωση α) να ελέγξετε αν μπορεί να γίνει ο πολλαπλασιασμός χρησιμοποιώντας το συγκεκριμένο τεμαχισμό και β) αν γίνεται, να υπολογίσετε το αποτέλεσμα δείχνοντας όλα τα ενδιάμεσα αποτελέσματα (των πράξεων μεταξύ υπομητρώων).

1. Για τον $A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$, και τον B ως έχει (χωρίς τεμαχισμό).

2. Για τους $A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$ και $B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{array}\right)$.

3. Για τους $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$ και $B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ \hline 2 & 3 \end{array}\right)$.

Απάντηση. 1) Στην περίπτωση αυτή δεν γίνεται ο πολλαπλασιασμός γιατί το A είναι 2×2 μπλοκ μητρώο ενώ το B είναι 1×1.

2) Στην περίπτωση αυτή το A είναι 2×2 μπλοκ μητρώο και το B είναι 2×1. Επίσης οι διαστάσεις είναι σύμμορφες: $A_{11} \in \mathbb{R}^{2\times 1}, A_{21} \in \mathbb{R}^{1\times 1}, B_1 \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ και $A_{12} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, A_{22} \in \mathbb{R}^{1\times 2}, B_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Επομένως το αποτέλεσμα θα γραφτεί ως 2×1 μπλοκ μητρώο:

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{pmatrix}$$

Τα ενδιάμεσα αποτελέσματα είναι

$$\begin{aligned} C_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 13 \\ 12 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 14 & 30 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$C_2 = 1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix}$$

3) Στην περίπτωση αυτή το A είναι 2×2 μπλοκ μητρώο και το B είναι 2×1. Επίσης οι διαστάσεις είναι σύμμορφες: $A_{11} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, A_{21} \in \mathbb{R}^{1\times 2}, B_1 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και $A_{12} \in \mathbb{R}^{2\times 1}, A_{22} \in \mathbb{R}^{1\times 1}, B_2 \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Επομένως το αποτέλεσμα θα γραφτεί ως 2×1 μπλοκ μητρώο, όπως πριν (αλλά οι πράξεις αφορούν μητρώα διαφορετικής διάστασης από πριν):

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{pmatrix}$$

όπου

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

καθώς το στοιχείο $A_{22} = 0$. Τα υπόλοιπα αποτελέσματα είναι όπως και προηγουμένως. □

IIIa. (*10 β.*)

1. Για το παρακάτω μητρώο να υπολογίσετε τους όρους των μητρώων P, L, U που προκύπτουν από την παραγοντοποίηση $A = PLU$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Με βάση τα παραπάνω να υπολογίσετε την ορίζουσα του A.

Απάντηση. Συμβολίζουμε τις στήλες του μητρώου με a_1, a_2 και a_3. Αν πολλαπλασιάσουμε από τα αριστερά με το στοιχειώδες μητρώο $L_1 = I - u_1 e_1^\top$ όπου $u_1 = [0, 2, 1]^\top$ έχουμε

$$L_1 A = [L_1 a_1, L_1 a_2, L_1 a_3] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε το παραπάνω μητρώο με το μητρώο $L_2 = I - u_2 e_2^\top$ όπου $u_2 = [0, 0, -1]^\top$ έχουμε

$$U = L_2 L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

ενώ

$$L = [e_1 + u_1, e_2 + u_2, e_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Επειδή δεν χρειάστηκε εναλλαγή γραμμών, $P = I$.

2) Στην περίπτωση αυτή η ορίζουσα είναι το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του U, δηλ. 3. □

IIIb. (*10 β.*)

1. Για το παρακάτω μητρώο, A, να υπολογίσετε κάτω τριγωνικό μητρώο L με μονάδες στη διαγώνιο και άνω τριγωνικό μητρώο U τέτοιο ώστε $A = LU$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση. Συμβολίζουμε τις στήλες του μητρώου με a_1, a_2 και a_3. Αν πολλαπλασιάσουμε από τα αριστερά με το στοιχειώδες μητρώο $L_1 = I - u_1 e_1^\top$ όπου $u_1 = [0, 2, 3]^\top$ έχουμε

$$L_1 A = [L_1 a_1, L_1 a_2, L_1 a_3] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

οπότε σταματάμε καθώς είναι άνω τριγωνικό και το θέτουμε ίσο με U (Σημ. Αυτός ο πρόωρος τερματισμός συμβαίνει πολύ σπάνια.)

$$L = [e_1 + u_1, e_2, e_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

2. Να χρησιμοποιήσετε τα παραπάνω για να υπολογίσετε την ορίζουσα του A.

Απάντηση. Ισχύει ότι $\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = \det(U) = 9$. □

3. Να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα του μέρους 1 της άσκησης για να υπολογίσετε διαγώνιο μητρώο D και κάτω τριγωνικό μητρώο L με μονάδες στη διαγώνιο τέτοια ώστε $A = LDL^\top$.

Απάντηση. Έχουμε ότι $A = LU$ και αν θέσουμε $D = \mathrm{diag}(U)$ τότε φαίνεται ότι $A = LDD^{-1}U$ οπότε αν θέσουμε $D^{-1}U = \hat{U}$ φαίνεται ότι

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

οπότε προφανώς $\hat{U} = L^\top$ άρα $A = LDL^\top$. □

IV. (*9 β.*)

1. Έστω z_1, z_2 μια ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}^2$. Αν για τυχαίο διάνυσμα v του $\mathbb{R}^2$ οι συντελεστές στη βάση αυτή είναι α_1, α_2 διατυπώστε το πυθαγόρειο θεώρημα.

   Απάντηση. Είναι

   $$\|v\|^2 = < v, v > = < \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 >$$

   και από την ορθογωνιότητα προκύπτει

   $$\|v\|^2 = |\alpha_1|^2 \|z_1\|^2 + |\alpha_2|^2 \|z_2\|^2.$$

   $\square$

2. Με την υπόθεση ότι όλες οι πράξεις μπορούν να περνάνε μέσα στα απειροαθροίσματα βρείτε τύπο για το $\|v\|^2$, όπου το $v = \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n + \cdots$ ανήκει σε γραμμικό χώρο άπειρης διάστασης που έχει σαν ορθογώνια βάση τα $z_1, \cdots, z_n, \cdots$. (Βοήθεια : το ζητούμενο αποτελεί γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος για $d > 2$ διαστάσεις). Με ποια επιπλέον υπόθεση ισχύει ότι $\|v\|^2 = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 + \cdots$;

   Απάντηση. Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει $\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 \|z_j\|^2$. Αν επιπλέον η βάση είναι ορθοκανονική τότε $\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2$. $\square$

3. Έστω η βάση που αποτελείται από τα διανύσματα $z_1 = [1 \;\; 2]^\top$, $z_2 = [-2 \;\; 1]^\top$ και ένα διάνυσμα $v = 5z_1 + 3z_2$. Γράψτε το v ως προς τη βάση που έχει διανύσματα τα $\hat{z}_1 = [1 \;\; 3]^\top$ και $\hat{z}_2 = [-3 \;\; 1]^\top$.

   Απάντηση. Εξ υποθέσεως $v = 5z_1 + 3z_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix}$. Ως προς τη νέα βάση $v = \kappa \hat{z}_1 + \lambda \hat{z}_2$. Αναζητούμε τα κ και λ. Επειδή τα διανύσματα της νέας βάσης είναι ορθογώνια, έπεται ότι

   $$< \hat{z}_1, v > = \kappa \|\hat{z}_1\|^2 = \kappa 10 \Rightarrow 38 = \kappa 10 \Rightarrow \kappa = \frac{19}{5}.$$

   Ομοίως για το λ:

   $$< \hat{z}_2, v > = \lambda \|\hat{z}_2\|^2 = \lambda 10 \Rightarrow 16 = \lambda 10 \Rightarrow \lambda = \frac{8}{5}.$$

   $\square$

Va. (*10 β.*) Δίδονται τα διανύσματα

$$a_1 = [1, 1, 1]^\top, a_2 = [0, 1, 1]^\top, a_3 = [0, 0, 1]^\top.$$

Να χρησιμοποιήσετε τη διαδικασία Gram-Schmidt για να τα ορθοκανικοποιήσετε και να γράφετε τα αποτελέσματα ως νέα διανύσματα u_1, u_2 και u_3.

Απάντηση. Η διαδικασία εξαρτάται από τη σειρά που θα επιλέξουμε για την ορθοκανονικοποίηση: Με τη σειρά που έχουν δοθεί τα διανύσματα προκύπτει το παρακάτω:

1. $$p_1 = a_1 / \|a_1\|_2 = [1, 1, 1]^\top / \sqrt{3}.$$

2. $$\begin{aligned} \hat{p}_2 &= a_2 - (p_1 p_1^\top) a_2 = a_2 - p_1 (p_1^\top a_2) \\ &= [0, 1, 1]^\top - \frac{2}{3}[1, 1, 1]^\top = \frac{1}{3}[-2, 1, 1]. \end{aligned}$$

   Επίσης $\|p_2\|_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Κανονικοποιώντας $p_2 = \hat{p}_2 / \|\hat{p}_2\|_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}[-2, 1, 1]^\top$.

3. Τέλος

$$\begin{aligned}\tilde{p}_3 &= a_3 - (p_1p_1)^\top a_3 - (p_2p_2)^\top a_3\\ &= [0,0,1]^\top - \frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^\top(p_1^\top a_3) - p_2(p_2^\top a_3)\\ &= [0,0,1]^\top - \frac{1}{3}[1,1,1]^\top - \frac{1}{6}[-2,1,1]^\top\\ &= \frac{1}{2}[0,-1,1]^\top.\end{aligned}$$

Επομένως $p_2 = \tilde{p}_2/\|p_2\| = \frac{\sqrt{2}}{4}[0,-1,1]^\top$.

Μπορούμε επίσης να ΟΚ με τη σειρά a_2, a_3, a_1 ή με τη σειρά a_3, a_1, a_2 ή a_1, a_3, a_2 ή a_2, a_1, a_3 ή a_3, a_2, a_1. Η πιο απλή (στην αριθμητική και μορφή των αποτελεσμάτων) διαδικασία είναι η τελευταία στην οποία έχουμε:

$$p_1 = a_3/\|a_3\|_2 = [0,0,1]^\top/\sqrt{1} = [0,0,1]^\top,$$

$$\begin{aligned}\tilde{p}_2 &= a_2 - (p_1p_1^\top)a_2 = [0,1,1]^\top - [0,0,1]^\top = [0,1,0]^\top,\\ \Rightarrow p_2 &= [0,1,0]^\top,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{p}_3 &= a_1 - (p_1p_1)^\top a_1 - (p_2p_2)^\top a_1\\ &= [1,0,0]^\top = p_3.\end{aligned}$$

□

Vb. (*10 β.*) Θεωρείστε το χώρο των πολυωνύμων βαθμού 2, που ορίζονται στο $[-1,1]$. Χρησιμοποιώντας τα $z_1(x)=1$, $z_2(x)=x$ και $z_3(x)=x^2$ και το εσωτερικό γινόμενο $< p,q > = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$ να κατασκευάσετε μια ορθοκανονική βάση πολυωνύμων b_1, b_2, b_3 με τη μέθοδο Gram-Schmidt. (Βοήθεια: απλοποιείστε τη διαδικασία παρατηρώντας ότι $z_1 \perp z_2$ και $z_2 \perp z_3$).

Απάντηση. Κατ' αρχήν επαληθεύουμε άμεσα $\int_{-1}^1 z_1(x)z_2(x)dx = \int_{-1}^1 xdx = 0$ και $\int_{-1}^1 z_2(x)z_3(x)dx = \int_{-1}^1 x^3dx = 0$ άρα $z_1 \perp z_2$ και $z_2 \perp z_3$. Από τη διαδικασία GS έχουμε ότι:

$$b_1(x) = z_1(x)/\sqrt{< z_1, z_1 >}$$

αλλά $< z_1, z_1 >= \int_{-1}^1 1dx = 2$ επομένως $b_1(x) = 1/\sqrt{2}$. Επίσης λόγω του ότι $z_1 \perp z_2$

$$z_2(x) - < b_1, z_2 > b_1(x) = x \Rightarrow b_2(x) = x/(\int_{-1}^1 x^2dx)^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{2}}x.$$

Τέλος

$$z_3(x) - < b_1, z_3 > b_1(x) - < b_2, z_3 > b_2 = z_3(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^1 x^2dx - < b_2, z_3 > b_2.$$

Παρατηρείστε τώρα ότι το b_2 είναι ένα πολλαπλάσιο του z_2 επομένως από την υπόθεση $z_2 \perp z_3$ θα ισχύει ότι $b_2 \perp z_3$ επομένως ο τελευταίος όρος του τελευταίου μέλους θα είναι 0. Επομένως

$$\hat{b}_3(x) = z_3(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^1 x^2dx = x^2 - 1/3, \qquad < \hat{b}_3, \hat{b}_3 >= \int_{-1}^1 (x^2-1/3)^2dx = 8/45.$$

Επομένως $b_3(x) = \frac{\hat{b}_3}{\sqrt{<\hat{b}_3, \hat{b}_3>}} = \frac{3\sqrt{10}}{4}(x^2 - \frac{1}{3})$. □

VI. (*21 β.*)

1. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Προσδιορίστε τις ιδιοτιμές του και τους αντίστοιχους χώρους ιδιοδιανυσμάτων. Στη συνέχεια, προσδιορίστε τους πίνακες S και Λ της διαγωνιοποίησης $\Lambda = S^{-1}AS$ (Βοήθεια: Ορθοκανονικοποιήστε τα ιδιοδιανύσματα).

   Απάντηση. Οι ιδιοτιμές βρίσκονται χρησιμοποιώντας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $A - \lambda I$:

   $$\det(A - \lambda I) = 0 \to (1-\lambda)^2 - 9 = 0 \to \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4.$$

   Ο Λ είναι ο διαγώνιος πίνακας που έχει στη διαγώνιο τις ιδιοτιμές. Για κάθε ιδιοτιμή λύνουμε το $Ax_i = \lambda_i x_i$ και βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα x_i. Ο S είναι ο πίνακας που έχει για στήλες του τα ιδιοδιανύσματα αυτά. Μπορούμε να ορθοκανονικοποιήσουμε τα ιδιοδιανύσματα οπότε ο S^{-1} προκύπτει παίρνοντας απλά τον $S^\top$ και μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι $\Lambda = S^{-1}AS$. Ειδικότερα:

   $$(A + 2I)x_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   και προκύπτει άμεσα ότι το ιδιοδιάνυσμα x_1 θα είναι παράλληλο με το $[1, -1]^\top$. Κανονικοποιώντας προκύπτει ότι $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, -1]^\top$. Ομοίως το ιδιοδιάνυσμα x_2 ικανοποιεί το σύστημα $(A - 4I)x_2 = 0$ επομένως

   $$(A - 4I)x_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{12} \\ \xi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   οπότε $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 1]^\top$. Επομένως

   $$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Τέλος, επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός, ο S είναι ορθογώνιος επομένως $S^{-1} = S^\top$ (δεν χρειάζονται πράξεις για τον υπολογισμό του!). □

2. Να υπολογίσετε άμεσα τον αντίστροφο A^{-1} χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cayley-Hamilton.

   Απάντηση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8$. Από το θεώρημα, ισχύει ότι $A^2 - 2A - 8I = 0$ επομένως πολλαπλασιάζοντας με το αντίστροφο (που υπάρχει) έχουμε $A - 2I = 8A^{-1}$ άρα $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/8 & 3/8 \\ 3/8 & -1/8 \end{pmatrix}$. □

3. Έστω οτι για κάποιο μητρώο A γνωρίζουμε τη διάσπαση σε ιδιάζουσες τιμές (SVD) $A = U\Sigma V^\top$ όπου

   $$U = \begin{pmatrix} 6/10 & -8/10 & 0 \\ 8/10 & 6/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 8/10 & 6/10 & 0 \\ 6/10 & -8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Χρησιμοποιώντας την παραπάνω διάσπαση, να υπολογίσετε το αντίστροφο B^{-1}.

   Απάντηση. Από τον ορισμό τα μητρώα U, V είναι ορθογώνια επομένως $A^{-1} = (U\Sigma V^\top)^{-1} = V\Sigma^{-1}U^\top$ επομένως (αν κάνουμε τις πράξεις, μάλιστα μπορούμε να κερδίσουμε χρησιμοποιώντας τη δομή των U, V)

   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8/25 & 43/75 & 0 \\ 19/25 & -8/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   □

VII. (*10 β.*) Έστω V γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο και Q ένας γραμμικός υποχώρος του V που έχει διάσταση $n < \infty$. Έστω $\|.\|$ το Ευκλείδειο μέτρο που ορίζεται από το δοθέν εσωτερικό γινόμενο. Υπενθυμίζουμε ότι η ορθογώνια προβολή του $v \in V$ στον Q είναι ένα στοιχείο Pv του Q για το οποίο ισχύει:

$$< v - Pv, q >= 0 \qquad \forall q \in Q \tag{1}$$

δηλαδή η διαφορά $v - Pv$ είναι κάθετη σε κάθε στοιχείο του Q.

1. Αποδείξτε ότι το Pv είναι ορθογώνια προβολή του v στον $Q \Leftrightarrow$ το $v - Pv$ είναι κάθετο σε κάθε στοιχείο q_j, $j = 1, \cdots, n$ μιας οποιασδήποτε βάσης του Q.

   Απάντηση. Έστω μια τυχαία βάση του Q με στοιχεία $q_j, j = 1, \ldots, n$. Επειδή το Pv είναι στοιχείο του Q θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης αυτής δηλαδή $Pv = \alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_n q_n$. Όμως το $v - Pv$ είναι κάθετο στο Pv αφού το Pv είναι ορθογώνια προβολή του v στον Q. Άρα, $< v - Pv, Pv >= 0$ οπότε $< v - Pv, \alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_n q_n >= 0$ και από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου προκύπτει ότι το $v - Pv$ είναι κάθετο σε κάθε στοιχείο $q_j, j = 1, \ldots, n$ μιας οποιασδήποτε βάσης του Q. $\square$

2. Έστω $q_1, \cdots, q_n$ μια ορθογώνια βάση του Q $(q_j \perp q_k, j \neq k)$. Τότε, συναρτήσει των v, q_j $(j = 1, \cdots, n)$ και με χρήση εσωτερικών γινομένων και του $\|.\|$ βρείτε τύπο για το Pv ώστε αυτό να είναι η ορθογώνια προβολή του v στον Q. (Βοήθεια: θεωρείστε το Pv ως γραμμικό συνδυασμό της βάσης των q_j και βρείτε τους συντελεστές χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα).

   Απάντηση. Έχουμε $Pv = \alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_n q_n$. Πολ/ντας με q_1 και λόγω της καθετότητας λαμβάνουμε $< Pv, q_1 >= \alpha_1 \|q_1\|^2$ οπότε $\alpha_1 = \frac{<Pv, q_1>}{\|q_1\|^2}$. Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε και τους υπόλοιπους συντελεστές. $\square$

3. Επιλέγοντας μια ορθογώνια βάση του Q, ο προηγούμενος τύπος δίνει μια ορθογώνια προβολή $Pv \in Q$, άρα τέτοια προβολή υπάρχει. Αποδείξτε ότι είναι και μοναδική.

   Απάντηση. Έστω τώρα ότι υπάρχει και δεύτερη προβολή $(Pv)'$. Θα είναι $(Pv)' = \alpha_1^{'} q_1 + \text{ffl} + \alpha_n^{'} q_n$. Αφαιρώντας από την αντίστοιχη σχέση που δίνει το Pv έχουμε:

   $$Pv - (Pv)^{'} = (\alpha_1 - \alpha_1^{'})q_1 + \ldots + (\alpha_n - \alpha_1^{'})q_n.$$

   Πολλαπλασιάζοντας με q_1 έχουμε

   $$(\alpha_1 - \alpha_1^{'}) = \frac{< Pv - (Pv)^{'}, q_1 >}{\|q_1\|^2} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_1^{'}.$$

   Παρόμοια προκύπτουν και τα $\alpha_j = \alpha_j^{'}, j = 2, ..., n$ οπότε οι δύο προβολές συμπίπτουν. $\square$

4. Αποδείξτε ότι ισχύει ή δεν ισχύει το: $< v, Pv > = \|Pv\|^2$ (Βοήθεια: γράψτε το v σαν $(v - Pv) + Pv$).

   Απάντηση. Γράφοντας το $v = (v - Pv) + Pv$ έχουμε:

   $$< v, Pv >=< (v - Pv) + Pv, Pv >=< (v - Pv), Pv > + < Pv, Pv >= \|Pv\|^2$$

   αφού $(v - Pv) \perp Pv$. $\square$

5. Αποδείξτε ότι: $\|v - Pv\|^2 + \|Pv\|^2 = \|v\|^2$. Ποιο γνωστό θεώρημα εκφράζει η σχέση αυτή;

   Απάντηση. Έχουμε διαδοχικά:

   $$\begin{aligned} \|v - Pv\|^2 + \|Pv\|^2 &= < v - Pv, v - Pv > + \|Pv\|^2 \\ &= < v, v > + < Pv, Pv > -2 < v, Pv > + \|Pv\|^2 = (\text{από το } 4) \;\; \|v\|^2 \end{aligned}$$

   που είναι το Πυθαγόρειο θεώρημα. $\square$