Θέματα Σεπτεμβρίου 1994

ΘΕΜΑ 1ο

1. Πως μπορούμε να δικαιολογήσουμε ότι όλοι οι K-χώροι V πεπερασμένης διάστασης n ανήκει N μπορούν να θεωρηθούν σαν χώροι της μορφής $V_n(K)$; Δώστε μερικά παραδείγματα σχετικά με αυτή τη θεώρηση.

Λύση

2. Πως μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα γραμμικό μετασχηματισμό T:V->W, τέτοιο ώστε $T(v_i) = w_i$ (i=1, 2, ..., n), όπου V, W είναι K-χώροι, όπου ο V πεπερασμένης διάστασης, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ μια βάση του V και w_i (i=1, 2, ..., n) τυχαία διανύσματα του W; Είναι ο T μοναδικός και γιατί;

Λύση

3. Ποια γενική μορφή έχει κάθε εσωτερικό γινόμενο επί ενός πεπερασμένης διάστασης K-χώρου εφοδιασμένου με εσωτερικό γινόμενο και γιατί; (να δοθεί η απόδειξη)

Λύση

ΘΕΜΑ 2ο

1.

α) Έστω T ένας γραμμικός μετασχηματισμός που ορίζεται ως εξής:

$$T(x,y,z) = (x-y,\ x+2y-z,\ 2x+y+z), \text{ όπου } x,y,z \text{ ανήκουν στο } R$$

Να βρεθεί ο πίνακας του T ως προς την standard βάση και την βάση $\{v_1= (1, 0, 1), v_2= (-2, 1, 1), v_3= (1, -1, 1)\}$ του $V_3(R)$.

β) Είναι ο T K-ισομορφικός και γιατί; Δικαιολογήστε.

Λύση

2. Να βρεθεί μία ορθοκανονική βάση του διανυσματικού χώρου που περιέχει όλα τα πολυώνυμα βαθμού το πολύ 2. Να εκφρασθεί επίσης το πολυώνυμο x^2-2x-1 ως προς τη βάση αυτή.

Λύση

3. Για τον πίνακα

$$A = \begin{matrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & +3 \\ 6 & -6 & 4 \end{matrix}$$

βρείτε όλες τις ιδιοτιμές, καθώς και μια βάση για κάθε ιδιοχώρο. Μπορεί να διαγωνοποιηθεί ο Α και γιατί;

Λύση

Επιστροφή στη λίστα των θεμάτων