

# Τμηματικές Εξετάσεις στη Γραμμική Άλγεβρα

Περίοδος Σεπτεμβρίου

Διάρκεια = 2<sup>20</sup>

27-9-99

1. (10%) Αν το γινόμενο δύο πινάκων  $A, B$  είναι ο μηδενικός πίνακας, δείξτε ότι ο χώρος στηλών του  $B$  περιέχεται στο μηδενικό χώρο του  $A$ . Επίσης, ότι ο χώρος γραμμών του  $A$  περιέχεται στον αριστερό μηδενικό χώρο του  $B$ . (Υπόδειγμα:  $A \cdot B = 0$ .)

2. Δείξτε ότι το διάνυσμα  $x-y$  είναι ορθογώνιο στο  $x+y$  αν και μόνο αν  $\|x\| = \|y\|$ . (10%)

3. Βρείτε την τάξη και τις τέσσερις ιδιοτιμές για τους παρακάτω πίνακες: (20%)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ποια ιδιοδιανύσματα αντιστοιχούν στις μη μηδενικές ιδιοτιμές;

4. Μπορεί να διαγωνοποιηθεί ορθογώνια (δηλ. μπορεί να βρεθεί ένας ορθογώνιος πίνακας  $U$  τέτοιος ώστε ο  $U^T A U$  να είναι διαγώνιος) ο πίνακας (20%)

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

και αν ναι ποιος ο διαγώνιος και ποιος ο  $U$ ; (20%)

5. Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο  $\mathbb{R}^3$  και την τυποποιημένη του βάση  $\{e_1, e_2, e_3\} = e$ . Θεωρούμε επίσης το γραμμικό μετασχηματισμό  $S$  που "αγαλά" ένα διάνυσμα  $v \in \mathbb{R}^3$  ως προς το επίπεδο  $xOy$  των καρτεσιανών συντεταγμένων του  $\mathbb{R}^3$ .

α) Να βρεθεί ο πίνακας  $A$  του  $S$  ως προς την τυποποιημένη βάση.

β) Να βρεθεί ο μηδενικός χώρος και η εικόνα του  $S$ , και οι διαστάσεις τους.

γ) Θεωρούμε τα διανύσματα  $\{d_1 = (1, 2, 3), d_2 = (1, 0, 1), d_3 = (1, 2, 1)\}$ . Αποτελούν βάση του  $\mathbb{R}^3$ ; Αν ναι να βρεθεί ο (νέος) πίνακας  $A'$  του  $S$  ως προς τη νέα βάση. 6, 12,

δ) Διαγωνοποιούνται οι πίνακες  $A$  και  $A'$ , πώς και γιατί;

$$A = CA'$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Καλή Επιτυχία!

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

6

$$\begin{aligned} -3x^2 + 30x - 72 &= 0 \\ 3x^2 - 30x + 72 &= 0 \\ x^2 - 10x + 24 &= 0 \\ (x-4)(x-6) &= 0 \end{aligned}$$