Ονοματεπώνυμο: .... Α.Μ. ......· Έτος ...· ΑΙΘΟΥΣΑ: ....

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ *(Σεπτ. - 2/10/07)*

1. Παρακαλείστε να κλείσετε βιβλία, σημειώσεις και κινητά. 2. Επιτρέπεται μια χειρόγραφη κόλλα Α4 με σημειώσεις σύμφωνα με τις οδηγίες που έχουν ήδη δοθεί. 3. Επιπλέον της κόλλας πρέπει να επιστρέψετε τα θέματα καθώς και όλα τα πρόχειρα που θα δείχνουν την προσπάθειά σας, καθώς για πλήρη βαθμό πρέπει να παρουσιάσετε όλο το συλλογισμό σας, όλα τα βήματα που κάνετε καθώς και τα ενδιάμεσα αποτελέσματα.

Να διαβάσετε προσεκτικά τις εκφωνήσεις. Έχετε 3 ώρες. Όπου δεν αναφέρεται ή δεν φαίνεται από την εκφώνηση το μέγεθος ή το είδος των στοιχείων ενός μητρώου να υποθέτετε ότι είναι τετραγωνικό μεγέθους n με πραγματικά στοιχεία. Όταν αναφερόμαστε σε διανύσματα, π.χ. $x \in \mathbb{R}^n$, εννοούμε στήλες, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά. Τα διανύσματα της τυπικής βάσης συμβολίζονται με e_i (δηλ. στήλη με όλα τα στοιχεία 0 εκτός του στοιχείου στη θέση i που είναι 1). Αν το μέγεθος των διανυσμάτων δεν συνεπάγονται από την εκφώνηση, τότε δηλώνονται με υπερδείκτη, π.χ. $e_i^{(n)}$ αν πρόκειται για το διάνυσμα i της τυπικής βάσης του $\mathbb{R}^n$. Το ταυτοτικό μητρώο συμβολίζεται με I, το $A^\top$ είναι το ανάστροφο του A και το A^{-1} το αντίστροφο του A (αν υπάρχει). Όποτε ζητείται ο υπολογισμός μητρώου ή διανύσματος, πρέπει να δείχνετε το αποτέλεσμα ως πίνακα με όλες τις τιμές των στοιχείων του στη σωστή διάταξη.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

Ι.

1. Σωστό ή Λάθος: α) Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $e_i^\top A = e_i^\top B$ για $i = 1, ..., n$ τότε $A = B$. β) Αν $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, τότε το μητρώο $AA^\top$ είναι συμμετρικό. γ) Αν το $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι κάτω τριγωνικό, τότε οι ιδιοτιμές του είναι στη διαγώνιο. δ) Αν ένα πραγματικό μητρώο είναι συμμετρικό, τότε δεν έχει επαναλαμβανόμενες ιδιοτιμές. ε) Έστω διανύσματα $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$ τέτοια ώστε το άθροισμά τους $s = a_1 + a_2 + a_3$ να είναι το μηδενικό διάνυσμα. Αν $x = [1, 1, -10, 4]^\top$ τότε το $A = [2a_1, 3a_2, a_3, x]$ είναι αντιστρέψιμο.

2. Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, x, y \in \mathbb{R}^n$ και το μητρώο $A = I + x^\top y$ είναι αντιστρέψιμο, να δείξετε ότι τότε $A^{-1} = I - \frac{1}{1+x^\top y}x^\top y$. Στη συνέχεια, να χρησιμοποιήσετε την παραπάνω σχέση για να βρείτε το αντίστροφο του μητρώου $\begin{pmatrix} 4 & -33 & 6 \\ 2 & -21 & 4 \\ 1 & -11 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Αν είναι γνωστό ότι το μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμο, να υπολογίσετε το μητρώο X τέτοιο ώστε το σύνθετο μητρώο $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ X & A^{-1} \end{pmatrix}$ να είναι το αντίστροφο του $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \end{pmatrix}$.

4. Έστω ότι E_{ij} συμβολίζει ένα μητρώο με μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο τη μονάδα στη θέση (i, j) και ότι $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι κάποιο δεδομένο μητρώο. α) Να δείξετε ότι το παραπάνω μητρώο είναι ίσο με γινόμενο των διανυσμάτων της μορφής e_i, δηλ. (να γράψετε ακριβώς τη σχέση) $E_{ij} = ...$ Στα παρακάτω, αν τα γράμματα που συμβολίζουν τους δείκτες είναι διαφορετικά, μπορείτε να υποθέσετε ότι οι τιμές τους θα είναι και αυτές διαφορετικές, δηλ. $i \neq j$. Να υπολογίσετε (επειδή τα αποτελέσματα θα έχουν πολλά μηδενικά στοιχεία, μπορείτε να αναφέρετε μόνον που και ποια θα είναι τα μη μηδενικά στοιχεία) όλα τα *i)* $E_{ij}AE_{jk}$, *ii)* $E_{ij}E_{jk}$, *iii)* E_{ij}^2. β) Να δείξετε αν ισχύει (με αντιπαράδειγμα αν όχι) ότι $A = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}E_{ij}$, όπου α_{ij} είναι το στοιχείο του A στη θέση (i, j)..

5. Στα ακόλουθα ερωτήματα ισχύουν οι συμβολισμοί: $C(A)$ =χώρος στηλών, $N(A)$ = μηδενοχώρος, $R(A)$ =χώρος γραμμών.

   (α′) Εξετάστε αν υπάρχει πίνακας A του οποίου ο $C(A)$ έχει βάση το $[2\ 1\ 1]^T$ και ο $N(A)$ το $[1\ 1\ 0]^T$.

   (β′) Αν $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, τότε δείξτε ότι $N(A^TA) = N(A)$.

   (γ′) Αν ισχύει $AB = 0$ ($A \in \mathbb{R}^{mxn}$ και $B \in \mathbb{R}^{nxk}$), τότε δείξτε ότι $C(B) \subseteq N(A)$ και $R(A) \subseteq N(B)$.

6. Έστω $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ ένα αντιστρέψιμο μητρώο. Τότε δείξτε ότι αν $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε και $(Av_1, Av_2, \ldots, Av_n)$ είναι επίσης βάση του $\mathbb{R}^n$.

7. Έστω X ένας γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $< p, q >$, $p \in X$, $q \in X$. Τότε το ευκλείδειο μέτρο κάθε στοιχείου $p \in X$ ορίζεται από τον τύπο $||p|| = \sqrt{< p, p >}$.

   (α′) Ας είναι S υποχώρος του X, διάστασης 3, και p_1, p_2, p_3 μία ορθοκανονική βάση του S. Τότε $< p_1, p_3 >= \ldots\ldots$ και $\|p_2\| = \ldots\ldots.$

   (β′) Κάθε $p \in S$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των p_1, p_2, p_3, δηλαδή $p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$. Τότε $\alpha_2 = \ldots\ldots\ldots$ (η απάντηση να δοθεί με κατάλληλα εσωτερικά γινόμενα).

(γ') Έστω $q \in X$ και ας είναι $p \in S$ η ορθογώνια προβολή του q στον S. Τότε $p = \ldots\ldots\ldots$ (η απάντηση να δοθεί συναρτήσει των q, p_1, p_2, p_3 και κατάλληλων εσωτερικών γινομένων τους).

8. Έστω S ο υποχώρος που παράγεται από τις συναρτήσεις $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ και $p_3(x) = -3x^2 + 2$, ορισμένων στο $[-1, 1]$.

   (α') Ποια η διάσταση του S; Γιατί;

   (β') Έστω $p(x) = x^2 + 1$. Ποιοι οι συνετελεστές α, β, γ στην έκφραση $p(x) = \alpha p_1(x) + \beta p_2(x) + \gamma p_3(x)$;

   (γ') Περιγράψτε συνοπτικά τα βήματα που θα κάνατε για να υπολογίσετε την προβολή $q(x)$ της $f(x) = x^5$ στο χώρο S.

II. Έστω το σύστημα $Ax = b$ που προκύπτει από τις πέντε εξισώσεις $x_1 + 2x_2 = -1$, $x_2 = 1$, $x_1 + x_2 = 18$ και $x_1 = 2$.

1. Δώστε τα A, x και b του συστήματος $Ax = b$.

2. Αφού το σύστημα δεν έχει λύση, βρίσκουμε την προσεγγιστική λύση x η οποία ελαχιστοποιεί την ποσότητα $||Ax - b||^2$, όπου $|| \cdot ||$ είναι το Ευκλείδειο μέτρο. Συναρτήσει των x_1 και x_2, δώστε την ποσότητα $Q = ||Ax - b||^2$.

3. Η ελαχιστοποίηση της ποσότητας Q δίνει δύο εξισώσεις ως προς x_1, x_2. Δώστε τις εξισώσεις αυτές. Δώστε τη λύση του 2×2 συστήματος που έχει προκύψει.

4. Ποια η προβολή του b στο χώρο γραμμών του A;

III. Δίδεται το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Να υπολογίσετε το βαθμό και τους συντελεστές ενός μη μηδενικού πολυωνύμου, $p(x) = \alpha_n x^n + \cdots \alpha_0$, τέτοιο ώστε $p(A) = 0$.

2. Να υπολογίσετε βαθμωτούς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ και μη μηδενικά διανύσματα u_1, u_2, j_3 τέτοια ώστε $Au_j = \lambda_j u_j$ για $j = 1, 2, 3$.

3. Να χρησιμοποιήσετε τα αποτελέσματα των παραπάνω υπολογισμών και να βρείτε το μητρώο $B = \sum_{j=0}^{5} A^j$ (δηλ. τον πίνακα των στοιχείων του).

4. Έστω ότι στο αρχικό μητρώο A, μηδενίζουμε τα στοιχεία στις θέσεις κάτω από την κύρια διαγώνιο και ότι ονομάζουμε το νέο μητρώο C. Ποιές θα είναι οι ιδιοτιμές του νέου μητρώου (να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

5. Να βρείτε πόσα και ποιά γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα x, μήκους 1, υπάρχουν τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση $Cx = \lambda x$ και να βρείτε το λ.

IV. Δίδεται το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Αναγάγετε τον A στην κλιμακωτή μορφή αναγμένων γραμμών, έστω R. Στα επόμενα ερωτήματα να βασισθείτε απαραίτητα στη μορφή αυτή.

1. Ποια η τάξη του A;

2. Προσδιορίστε μια βάση για το χώρο γραμμών και μια βάση για το χώρο στηλών του A.

3. Δώστε τη διάσταση και προσδιορίστε μια βάση για το μηδενοχώρο του A.

4. Το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για κάθε b; Αν όχι, ποια είναι η συνθήκη επιλυσιμότητας;

5. Δίνεται $b = (1\ 4\ 2)^T$. Τότε, με βάση προηγούμενα ερωτήματα, υπολογίστε τυπικά και συστηματικά την πλήρη λύση του $Ax = b$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στις απαντήσεις πρέπει να δίνετε πλήρη αιτιολόγηση καθώς και τα ενδιάμεσα αποτελέσματα! (π.χ. στο πρόχειρο).