ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι *Λύσεις Εξέτασης Ιουνίου 2005*

I. [2] Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις.

1. **[0.4]** <u>Σωστό ή Λάθος:</u> Ο χώρος των ορθογώνιων μητρώων $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι διανυσματικός χώρος.

   Απάντηση. Λάθος. Για παράδειγμα, το μηδενικό στοιχείο (που είναι το μηδενικό μητρώο) δεν ανήκει στο χώρο. Παραβιάζονται και άλλα αξιώματα των δ.χ. Π.χ. αν P και Q είναι ορθογώνια, τότε θα έπρεπε και το $P+Q$ να είναι επίσης ορθογώνιο μητρώο, δηλαδή να ισχύει $(P+Q)^T(P+Q) = I$. Όμως $(P+Q)^T(P+Q) = (P^T+Q^T)(P+Q) = P^TP + P^TQ + Q^TP + Q^TQ = I + P^TQ + Q^TP + I$ που δεν υπάρχει λόγος να ισχύει. $\Box$

2. **[0.4]** <u>Σωστό ή Λάθος:</u> Έστω η βάση διανυσμάτων $\{v_1, ..., v_n\}$ για το χώρο $\mathbb{R}^n$ και ότι το μητρώο A είναι αντιστρέψιμο. Τότε τα διανύσματα $\{Av_1, ..., Av_n\}$ είναι και αυτά βάση του $\mathbb{R}^n$.

   Απάντηση. Σωστό από το εξής: Αν τα στοιχεία ήταν γραμμικά εξαρτημένα, θα υπήρχαν $\alpha_j, j = 1, ..., n$ τα οποία δεν είναι όλα μηδενικά και τ.ώ. $\sum_{j=1}^n \alpha_j A v_j = 0$. Αλλά τότε $A\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = 0$ και επειδή το A είναι αντιστρέψιμο θα πρέπει $\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = 0$, κάτι που αντίκειται στην υπόθεση ότι τα v_j αποτελούν βάση και επομένως είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

   $\Box$

3. **[0.4]** <u>Σωστό ή Λάθος:</u> Αν το μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ορθογώνιο, τότε η ορίζουσά του ($\det(A)$) θα έχει τιμή 1 ή -1. *(*Ισχύει ότι* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$*)*

   Απάντηση. Σωστό. Αφού το μητρώο A είναι ορθογώνιο τότε $A^TA = I \rightarrow \det(A^TA) = \det(I) \rightarrow \det(A^T)\det(A) = 1 \rightarrow (\det(A))^2 = 1 \rightarrow \det(A) = \pm 1$. $\Box$

4. **[0.4]** <u>Σωστό ή Λάθος:</u> Αν δυο ιδιοτιμές ενός μητρώου είναι ίσες τότε έπεται ότι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα θα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

   Απάντηση. Λάθος: Για παράδειγμα, το ταυτοτικό μητρώο έχει την ιδιοτιμή 1 με πολλαπλότητα όσο και το μέγεθος του μητρώου με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα διανύσματα της τυπικής βάσης $e_1, e_2, ..., e_n$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητα. $\Box$

5. **[0.4]** Έστω τα διανύσματα (στήλες) $u, v \in \mathbb{R}^n$ και το $(n+1)\times(n+1)$ μητρώο $A = \begin{pmatrix} I & u \\ v^\top & v^\top u \end{pmatrix}$, όπου I είναι το ταυτοτικό μητρώο μεγέθους n. Να βρείτε ένα διάνυσμα στο μηδενοχώρο του A.

   Απάντηση. Χρειαζόμαστε ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ τ.ώ. $Ax = 0$. Επομένως το $x = [u, -1]^\top$ και τα πολλαπλάσια του ανήκουν στο μηδενοχώρο του A. Επίσης βέβαια η τετριμμένη λύση $x = 0$. $\Box$

II. [1.6] Έστω ότι $v = \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n$, όπου $z_1, \ldots, z_n$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

1. Ποια η προβολή του v στο χώρο που παράγεται από τα z_2, z_3, z_4; (θεωρώντας ότι $n \geq 4$)

   Απάντηση. Αφού τα $z_1, \ldots, z_n$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ προκύπτει άμεσα ότι η προβολή του v στο χώρο που παράγεται από τα z_2, z_3, z_4 είναι το $v = \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \alpha_4 z_4$. Με χρήση εσωτερικών γινομένων: Έστω p η ζητούμενη προβολή ($p = \beta_1 z_2 + \beta_2 z_3 + \beta_3 z_4$). Τότε θα πρέπει

   $< v - p, z_2 >= 0$ και $< v - p, z_3 >= 0$ και $< v - p, z_4 >= 0$

   ή

   $< \alpha_1 z_1 + (\alpha_2 - \beta_1) z_2 + (\alpha_3 - \beta_2) z_3 + (\alpha_4 - \beta_3) z_4 + \ldots + \alpha_n z_n, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_n z_n >= 0 \Rightarrow (\alpha_2 - \beta_1) z_2 \cdot z_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 - \beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = \alpha_2$ και αντίστοιχα $\beta_2 = \alpha_3$ και $\beta_3 = \alpha_4$. $\Box$

2. Ποιο το (ευκλείδειο) μέτρο του v συναρτήσει των $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$;

Απάντηση. Το ευκλείδειο μέτρο του v δίνεται ως εξής χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα ότι $< u, v + w >=< u, v > + < u, w >$:

$$\begin{aligned} \|v\|_2 &= \sqrt{< v, v >} \\ &= \sqrt{< \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n, \alpha_1 z_1 > + \cdots + < \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n, \alpha_n z_1 >}, \end{aligned}$$

και επομένως

$$\|v\|_2 = \sqrt{\alpha_1^2 < z_1, z_1 > + \alpha_2 \alpha_1 < z_2, z_1 > + \cdots + \alpha_n \alpha_1 < z_1, z_n > + \cdots + \alpha_n^2 < z_n, z_n >}.$$

Όμως, από την ορθογωνιότητα των z_j και το γεγονός ότι είναι κανονικοποιημένα (δηλ. ότι $< z_i, z_j >= \delta_{ij}$, όπου $\delta_{ij} = 1$ αν $i = j$ και 0 διαφορετικά), θα έχουμε ότι το παραπάνω είναι ίσο με

$$\|v\|_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}$$

□

III. [1.6] Έστω ότι ο A είναι 6×5.

1. Τι μπορείτε να πείτε για την τάξη του A;

   Απάντηση. Είναι το πολύ 5. Έστω ότι ήταν $m > 5$. Τότε, θα υπήρχαν m διανύσματα του $\mathbb{R}^5$ γραμμικώς ανεξάρτητα που είναι άτοπο. □

2. Τι μπορείτε να πείτε για τη διάσταση του χώρου στηλών του A;

   Απάντηση. Είναι το πολύ 5. Βλ. απάντηση (1). □

3. Τι μπορείτε να πείτε για τη διάσταση του χώρου γραμμών του A;

   Απάντηση. Είναι το πολύ 5. Βλ. απάντηση (1). □

4. Αν ο μηδενοχώρος του A έχει διάσταση 2 τότε τι μπορείτε να πείτε για τη διάσταση του χώρου στηλών του A;

   Απάντηση. Είναι $5 - 2 = 3$ (η διάσταση του χώρου στηλών είναι n μείον τη διάσταση του μηδενοχώρου). □

IV. [1.6] Αναζητείται παραβολή, $y = f(x) = \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 x^2$, με την οποία προσεγγίζονται τα αποτελέσματα 100 μετρήσεων με τη μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων. Από τις μετρήσεις θα προκύψει το σύστημα $Ac = b$, όπου $c = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T$, A ένας πίνακας $m \times n$ και το b είναι διάστασης $m \times 1$.

1. Τότε $m =$. . . και $n =$. . . .

   Απάντηση. $m = 100, \quad n = 3$. □

2. Αν για $x = 4$ μετρήθηκε η τιμή $y = 7$, η εξίσωση που αντιστοιχεί στη μέτρηση αυτή είναι . . . .

   Απάντηση. $\gamma_1 + 4\gamma_2 + 16\gamma_3 = 7$ □

3. Για να έχει λύση το σύστημα $Ac = b$ θα πρέπει το b να ανήκει στο χώρο που παράγεται από . . . .

   Απάντηση. Τις στήλες του A. □

4. Οι σταθερές γ_1, γ_2, γ_3 που ορίζουν τη ζητούμενη παραβολή υπολογίζονται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων από την απαίτηση: (κυκλώστε τις σωστές απαιτήσεις)

   (α) Το Ac να είναι η προβολή του b στο χώρο των εικόνων του A.

   (β) Το $b - Ac$ να είναι κάθετο σε όλα τα στοιχεία του χώρου των εικόνων του A.

   (γ) Η απόσταση $\|b - Ac\|^2$ να είναι ελάχιστη.

Απάντηση. Είναι όλες σωστές. □

5. Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων δίνει το σύστημα $Bc = d$, όπου πάντα $c = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T$, ο B είναι $r \times r$ με $r = \mathbf{3}$ και το d έχει διάσταση $n \times 1$ όπου $n = \mathbf{3}$

   Ποιος τύπος δίνει τον B και το d συναρτήσει του A και του b;

   Απάντηση. $B = A^T A, \quad d = A^T b$. □

V. [1.6] Σας δίνεται το μητρώο:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

όπου οι (πραγματικοί βαθμωτοί) $\alpha \neq \gamma$.

1. Να βρείτε το διαγώνιο μητρώο των ιδιοτιμών Λ και το μητρώο S έτσι ώστε $A = S\Lambda S^{-1}$.

   Απάντηση. Το μητρώο είναι τριγωνικό επομένως οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του, $\lambda_1 = \alpha$ και $\lambda_2 = \gamma$ (Φυσικά μπορείτε και μέσω του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow (\alpha - \lambda)(\gamma - \lambda) = 0$). Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα $v_1 = [\xi_1\ \psi_1]^T$ $v_2 = [\xi_2\ \psi_2]^T$ όπου $Av_1 = \lambda_1 v_1$ και $Av_2 = \lambda_2 v_2$. Εύκολα προκύπτει ότι $v_1 = [1\ 0]^T$ $v_2 = [-\frac{\beta}{(\alpha-\gamma)}\ 1]^T$. Τελικά, $\Lambda = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta}{(\alpha-\gamma)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Το αντίστροφο επίσης προκύπτει άμεσα (χωρίς πράξεις) γιατί το μητρώο έχει ειδική μορφή (όπως οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί Gauss: Είναι τριγωνικό με μονάδες στη διαγώνιο και μόνο μια στήλη υπό τη διαγώνιο είναι μη μηδενική - αρκεί να αλλάξουμε το πρόσημο σε εκείνη τη στήλη). Οπότε $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\beta}{(\alpha-\gamma)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Προσοχή: Το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα προέκυψε από τον περιορισμό $(\alpha - \gamma)\xi_2 + \beta\psi_2 = 0$. Αν, αντί για το παραπάνω, θέσετε για ιδιοδιάνυσμα το $[\frac{(\gamma-\alpha)}{\beta}, 1]$, θα δημιουργηθεί πρόβλημα στην περίπτωση που $\beta = 0$. Με την παραπάνω επιλογή δεν έχουμε πρόβλημα ακόμα και σ' αυτή την περίπτωση γιατί γνωρίζουμε από την εκφώνηση ότι $\alpha \neq \gamma$. □

2. Να βρείτε τους όρους του μητρώου A^{1000}.

   Απάντηση.

$$\begin{aligned} A^{1000} &= (S\Lambda S^{-1})^{1000} = S\Lambda^{1000}S^{-1} = S \begin{bmatrix} \alpha^{1000} & 0 \\ 0 & \gamma^{1000} \end{bmatrix} S^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta}{(\alpha-\gamma)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{1000} & 0 \\ 0 & \gamma^{1000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\beta}{(\alpha-\gamma)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta}{(\alpha-\gamma)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{1000} & \alpha^{1000}\frac{\beta}{(\alpha-\gamma)} \\ 0 & \gamma^{1000} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha^{1000} & \alpha^{1000}\frac{\beta}{(\alpha-\gamma)} - \gamma^{1000}\frac{\beta}{(\alpha-\gamma)} \\ 0 & \gamma^{1000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{1000} & \beta\frac{\alpha^{1000}-\gamma^{1000}}{(\alpha-\gamma)} \\ 0 & \gamma^{1000} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

VI. [1.6] Σας δίνεται το παρακάτω μητρώο:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Θέλουμε να εκτελέσουμε τις παρακάτω πράξεις (με τη συγκεκριμένη σειρά): α) Πολλαπλασιασμό κάθε στοιχείου των γραμμών $i = 1, 2, 3$ του A με το αντίστοιχο i. β) Πρόσθεση κάθε στοιχείου της διαγωνίου του μητρώου που προέκυψε από το (α) με το 5. γ) Ανταλλαγή της 1ης με την 3η γραμμή του μητρώου που προέκυψε από το (β). δ) Διαγραφή της 3ης στήλης του μητρώου που προέκυψε από το (γ).

1. Να δείξετε το τελικό αποτέλεσμα.

2. Αν ονομάσουμε το τελικό αποτέλεσμα B, να δείξετε πώς μπορούν να γραφτούν οι πράξεις στα (α-δ) ως πράξεις με μητρώα επί του A.

Απάντηση. Το πρώτο μέρος είναι προφανές (4 πόντοι!) Για το δεύτερο: Αν $A^{(1)} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} A$, $A^{(2)} = 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + A^{(1)}$, $A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A^{(2)}$. Τότε $B = A^{(3)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ισχύει δηλαδή ότι

$$B = P_2(P_1 A + 5I)P_3$$

όπου

$$P_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, P_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

VII. [1.6] Βρείτε μία ορθοκανονική βάση για το χώρο των πολυωνύμων βαθμού μέχρι 2, ορισμένων στο $[0, 1]$, χρησιμοποιώντας το γνωστό εσωτερικό γινόμενο.

Απάντηση. Έστω $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = \alpha x + \beta$ και $p_3(x) = \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$ η ορθοκανονική βάση που ζητείται. Τότε θα πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω:

Για να είναι η βάση ορθογώνια:

$$\int_0^1 p_1(x)p_2(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int_0^1 1(\alpha x + \beta)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \beta = 0 \quad (1)$$

$$\int_0^1 p_1(x)p_3(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \frac{\gamma}{3} + \frac{\delta}{2} + \varepsilon = 0 \quad (2)$$

$$\int_0^1 p_2(x)p_3(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \frac{\alpha\gamma}{4} + \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{3} + \frac{\alpha\varepsilon + \beta\delta}{2} + \beta\varepsilon = 0 \quad (3)$$

Για να είναι και ορθοκανονική:

$$\int_0^1 p_1(x)^2\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow 1 = 1 \quad (4)$$

$$\int_0^1 p_2(x)^2\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{3} + \alpha\beta + \beta^2 = 1 \quad (5)$$

$$\int_0^1 p_3(x)^2\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow \frac{\gamma^2}{5} + \frac{\gamma\delta}{2} + \frac{2\gamma\varepsilon + \delta^2}{3} + \delta\varepsilon + \varepsilon^2 = 1 \quad (6)$$

Από τις (1) και (5) βρίσκουμε ότι $\alpha = 2\sqrt{(3)}$ και $\beta = -\sqrt{(3)}$. Αντίστοιχα υπολογίζουμε τα γ, δ και ε από τις (2), (3) και (6).

Θα μπορούσαμε αρχικά να είχαμε επιλέξει $p_1(x) = \mathrm{c}$ αλλά, αμέσως -από την (4)-, θα βλέπαμε ότι $\mathrm{c} = 1$. □