Ονοματεπώνυμο: .... Α.Μ. ....· Έτος ...

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι: *ΕΞΕΤΑΣΗ Σεπτεμβρίου 2005*

Διαβάστε προσεκτικά τις εκφωνήσεις. Για την πλήρη αξιολόγηση του γραπτού σας πρέπει να παρουσιάσετε όλο σας τον συλλογισμό και όλα τα ενδιάμεσα αποτελέσματα. Έχετε 3 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

ΠΡΟΣΟΧΗ:

- Όπου δεν αναφέρεται ή δεν φαίνεται από την εκφώνηση το μέγεθος ή το είδος των στοιχείων ενός μητρώου να υποθέτετε ότι είναι τετραγωνικό μεγέθους n με πραγματικά στοιχεία.
- Αν δεν υπάρχει διευκρίνιση, τα διανύσματα είναι στήλες.
- Τα διανύσματα της τυπικής βάσης συμβολίζονται με e_i (δηλ. στήλη με όλα τα στοιχεία 0 εκτός του στοιχείου στη θέση i που είναι 1).
- Το ταυτοτικό μητρώο συμβολίζεται με I.

I. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις 'Σωστό/Λάθος'.

1. Σωστό ή Λάθος:

2. Ένα τετραγωνικό μητρώο S ονομάζεται αντισυμμετρικό όταν $S^\top = -S$. Να δείξετε ότι οποιοδήποτε τετραγωνικό μητρώο μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού μητρώου. Να εφαρμόσετε αυτή την αρχή στο μητρώο $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, και να υπολογίσετε το συμμετρικό B και το αντισυμμετρικό C έτσι ώστε $A = B + C$.

   Απάντηση. Μπορούμε να γράψουμε $B = (A + A^\top)/2$ και $C = (A - A^\top)/2$. Για το συγκεκριμένο μητρώο έχουμε
   $$B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 5/2 \\ -5//2 & 0 \end{pmatrix}.$$
   $\square$

3. Σωστό ή Λάθος: Δοθέντος ενός ομαλού μητρώου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και ενός μη μηδενικού διανύσματος $x \in \mathbb{R}^n$, τα διανύσματα $\{x, Ax, A^2x, ..., A^nx\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

   Απάντηση. ΛΑΘΟΣ: Όλα τα διανύσματα είναι στοιχεία του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$ που έχει διάσταση n. Επειδή είναι $n + 1$ διανύσματα, θα είναι γραμμικά εξαρτημένα $\square$

4. Έστω μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με δυο γνωστές ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$. α) Να δείξετε ότι αν όλες οι στήλες του $n \times k$ μητρώου $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ περιέχονται στο διανυσματικό υποχώρο που παράγεται από γραμμικούς συνδυασμούς των u_1, u_2, τότε ισχύει $AX = UMG$, όπου $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι διαγώνιος με στοιχεία λ_1, λ_2 στη διαγώνιο και $G \in \mathbb{R}^{2\times k}$. β) Να εξηγήσετε ποια θα είναι τα στοιχεία του G.

   Απάντηση. Έστω ότι $X = [x_1, ..., x_k]$ όπου κάθε $x_j \in \mathbb{R}^n$. Από την εκφώνηση γνωρίζουμε ότι
   $$x_j = \gamma_{j,1}u_1 + \gamma_{j,2}u_2, \quad j = 1, ..., k.$$
   για κάποιους βαθμωτούς $\gamma_{j1}, \gamma_{j,2}$. Προσέξτε τώρα ότι
   $$\begin{aligned} Ax_j &= A(\gamma_{1,j}u_1 + \gamma_{2,j}u_2) = \gamma_{1,j}Au_1 + \gamma_{2,j}Au_2 \\ &= \gamma_{1,j}\lambda_1 u_1 + \gamma_{2,j}\lambda_2 u_2 \\ &= [u_1, u_2]\begin{pmatrix} \gamma_{1,j}\lambda_1 \\ \gamma_{2,j}\lambda_2 \end{pmatrix} = [u_1, u_2]\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \cdots & \gamma_{1,k} \\ \gamma_{2,1} & \cdots & \gamma_{2,k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Επομένως

$$AX = [Ax_1, ...Ax_k] =$$

□

5. Σας δίνεται το διάνυσμα $x = [1, 2, 3]^\top$. Να υπολογίσετε ένα μητρώο $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τέτοιο ώστε για οποιοδήποτε διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^3$, το διάνυσμα Py να είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του x.

   Απάντηση. Είναι το μητρώο $P = xx^\top / x^\top x$, δηλ.

$$P = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

□

6. Δοθέντος του μητρώου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και του αντιστρόφου του A^{-1} και διανύσματα όπως e_i και το διάνυσμα $e = [1, ..., 1]^\top$, να δείξετε πώς μπορεί να εκφραστεί ο υπολογισμός του αθροίσματος $\alpha_{ij} + \mu$, όπου μ είναι το άθροισμα όλων των στοιχείων του A^{-1} χρησιμοποιώντας μόνον τα παραπάνω μητρώα και διανύσματα.

   Απάντηση. Από την ιδιότητα ότι $\alpha_{ij} = e_i^\top A e_j$ και τον ορισμό του γινομένου μητρώου-διανύσματος, ακολουθεί ότι

$$\alpha_{ij} + \mu = e_i^\top A e_j + e^\top B e.$$

□

7. Έστω ένα τετραγωνικό μητρώο A μεγέθους n και διάνυσμα $x \neq 0$ για το οποίο ισχύει ότι $Ax = 0$. Να απαντήσετε (Σωστό ή Λάθος) τα παρακάτω: α) Το A είναι ομαλό (μη αντιστρέψιμο). β) Αν $r(A)$ είναι η τάξη του A, θα ισχύει ότι $r(A) = n - 1$. γ) Το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A.

   Απάντηση. α) ΣΩΣΤΟ καθώς οι στήλες είναι γραμμικά εξαρτημένες. β) Η τάξη του μητρώου είναι $r(A) = n - \mathrm{null}(A)$ όπου $\mathrm{null}(A)$ είναι η διάσταση του μηδενοχώρου του A. Από τα δεδομένα του προβλήματος αυτή είναι τουλάχιστον 1, επομένως $r(A) \leq n-1$ άρα ΛΑΘΟΣ. γ) ΣΩΣΤΟ καθώς μπορούμε να γράψουμε $Ax = 0x$ επομένως είναι ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή 0. □

8. Σωστό ή Λάθος:

II.

III.

IV. Έστω το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Να δείξετε γεωμετρικά, χρησιμοποιώντας τα απαραίτητα σχήματα, δύο ερμηνείες για τη λύση του συστήματος.

V.

1. Να βρείτε ένα απλό απλό παράδειγμα τετραγωνικού μητρώου $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ που δεν γίνεται να διαγωνιοποιηθεί με μετασχηματισμό ομοιότητας, δηλ. δεν υπάρχει $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τέτοιο ώστε το $X^{-1}AX$ να είναι διαγώνιο.

2. Έστω ότι το παραπάνω μητρώο έχει μια ιδιάζουσα τιμή $\sigma_1 = 16$ και αντίστοιχο δεξιό ιδιοδιάνυσμα (δηλ. πρώτη στήλη του μητρώου V στη διάσπαση ιδιαζουσών τιμών $A = U\Sigma V^\top$) το $v = \frac{1}{2}[-1, 1, 1, -1]^\top$. Με βάση την παραπάνω διάσπαση και τα στοιχεία του A, να υπολογίσετε ποιο θα είναι το αντίστοιχο αριστερό ιδιοδιάνυσμα, δηλ. η πρώτη στήλη του U.

VI.

1. Να υπολογίσετε το ίχνος και την ορίζουσα του μητρώου: $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 10 \\ -5 & 11 & 3 \end{pmatrix}$.

   Απάντηση. Το ίχνος είναι το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων, άρα

   $$\mathrm{trace}(A) = 6.$$

   Η ορίζουσα βρίσκεται από τη γνωστή έκφραση:

   $$\begin{aligned} \det(A) &= -2 \cdot (5 \cdot 3 - 10 \cdot 11) + 4 \cdot (3 \cdot 3 - 11 \cdot 4) - 5 \cdot (3 \cdot 10 - 5 \cdot 4) \\ &= -2 \cdot (-95) + 4 \cdot (-35) - 5 \cdot (10) = 0 \end{aligned}$$

   □

2. Χωρίς πράξεις, να αναφέρετε και να δικαιολογήσετε ποια θα είναι η τιμή της ορίζουσας του μητρώου $C = AP$, όπου το A είναι όπως προηγουμένως και

   $$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Απάντηση. Προσέχουμε ότι το μητρώο P είναι μητρώο ανταλλαγής και ότι πολλαπλασιάζοντας AP έχει σαν αποτέλεσμα την ανταλλαγή των στηλών 1 και 3. Από τις ιδιότητες των οριζουσών, η νέα ορίζουσα θα είναι (-1) φορές η αρχική ορίζουσα, επομένως 0. □

3. Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του μητρώου: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Απάντηση. Προσέχουμε ότι το μητρώο έχει τη σύνθετη μορφή

$$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

όπου S είναι το υπομητρώο $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Επομένως, μια ιδιοτιμή είναι -1. Οι άλλες δυο ιδιοτιμές είναι οι ιδιοτιμές του S, οι οποίες είναι οι ρίζες του $\det S = (1 - \lambda)^2 + 1$, δηλ. $1 \pm \iota$. Τα ιδιοδιανύσματα είναι τα εξής: Για την ιδιοτιμή -1, το ιδιοδιάνυσμα φαίνεται άμεσα ότι είναι $u_1 = [0, 0, 1]^\top$. Οι ιδιοτιμές $1 \pm \iota$ αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα που ικανοποιούν τη σχέση

$$Su = (1 \pm \iota)u,$$

επομένως, για αν συμβολίσουμε τα ιδιοδιανύσματα με u_1, u_2, οι συντεταγμένες τους είναι

$$\eta_{1,1} + \eta_{1,2} = (1 + \iota)\eta_{1,2} \Rightarrow \eta_{1,2} = \iota\eta_{1,1}$$

επομένως το πρώτο ιδιοδιάνυσμα είναι παράλληλο στο $\eta_{1,1}[1, \iota, 0]^\top$. Η ιδιοτιμή $1 - \iota$ αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\eta_{2,1} + \eta_{2,2} = (1 - \iota)\eta_{2,1} \Rightarrow \eta_{2,2} = -\iota\eta_{2,1}$$

επομένως είναι παράλληλο στο $\eta_{2,1}[1, -\iota, 0]^\top$. Τέλος κανονικοποιούμε και προκύπτει ότι

$$u_1 = [0, 0, 1]^\top, u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, \iota, 0]^\top, u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, -\iota, 0]^\top.$$

□

VII. Σας δίνονται τα παρακάτω:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 9 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

1. Να υπολογίσετε ένα κάτω τριγωνικό μητρώο L με μονάδες στη διαγώνιο και ένα άνω τριγωνικό μητρώο U τέτοια ώστε $A = LU$.

2. Να υπολογίσετε το L ως γινόμενο 2 στοιχειωδών μητρώων του τύπου $I - \alpha_i q_i e_i^\top$ εξηγώντας τις επιλογές σας για τους βαθμωτούς α_i και τα διανύσματα q_i.

Απάντηση. Στο πρώτο βήμα πολλαπλασιάζουμε το A με το $L_1 = I - [0, 2, -2]^\top e_1$ και λαμβάνουμε

$$L_1 A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Στο επόμενο βήμα πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με $L_2 = I - [0, 0, 1]^\top e_2$ και λαμβάνουμε

$$U = L_2 L_1 A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Επομένως,

$$A = (L_2 L_1)^{-1} U = L_1^{-1} L_2^{-1} U = (I + q_1 e_1^\top)(I + q_2 e_2^\top)$$

όπου $q_1 = [0, 2, -1]^\top$, $q_2 = [0, 0, 1]^\top$, επομένως

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

Για πλήρη βαθμό πρέπει να δείξετε και να δικαιολογήσετε όλα τα βήματα που κάνετε καθώς και τα ενδιάμεσα αποτελέσματα.