

**Τμηματικές Εξετάσεις στην Γραμμική Άλγεβρα**  
**Περίοδοι Ιουνίου 2001**  
**24-8-2001**

1. (15%) Έστω  $V$  ο υπόχωρος του  $C[0,1]$  που περιέχει τα πολυώνυμα βαθμού το πολύ 2. Να εφαρμοσθεί η μέθοδος Gram-Schmidt στη βάση  $\{1, x, x^2\}$  του  $V$ .
2. (20%) Να υπολογιστούν όλα τα διανύσματα του δ.χ.  $R^4$  που είναι κάθετα στα διανύσματα  $x_1 = (1, 1, 0, 1)$  και  $x_2 = (1, 0, 1, 2)$ . Είναι ο χώρος των διανυσμάτων αυτών δ.χ. και γιατί; Ποιά είναι η διάστασή του; Βρείτε μια βάση του.
3. (30%) Θεωρούμε στο χώρο  $R^2$  ένα διάνυσμα  $x = (x_1, x_2)$ , τους εξής γ.μ: Το γ.μ. στροφής  $R$  κατά γωνία  $\theta$  και τον μετασχηματισμό  $P(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ .
- α) Αναφέρατε τις ιδιότητες των γ.μ. που διακρίνετε ή γνωρίζετε  
 β) Υπολογίστε τον πίνακα  $C$  του γραμμικού μετασχηματισμού  $T = RP$  (σύνθεση του  $R$  με τον  $P$ ).  
 Αν  $x = (1, 2)^t$  ποιά είναι η εικόνα  $T(x)$ ;  
 γ) Ποιός είναι ο μηδενοχώρος του  $T$  και γιατί; Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του.  
 δ) Υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός του  $T$  και γιατί; Αν ναι ποιός είναι;  
 ε) Να διαγωνοποιηθεί ο πίνακας  $C$ , εφ' όσον αυτό είναι δυνατόν. Αναφέρατε αναλυτικά τα απαιτούμενα βήματα καθώς και τον μετασχηματισμό διαγωνοποίησης.
4. (25%) Αν  $(u_1, u_2)$  και  $(v_1, v_2, v_3)$  είναι βάσεις των δ.χ.  $R^2$  και  $R^3$  αντίστοιχα, έστω ο γ.μ.  $T$  από τον δ.χ.  $R^2$  στον δ.χ.  $R^3$  που ορίζεται:
- $$\left. \begin{array}{l} T(u_1) = v_1 + 2v_2 - v_3 \\ T(u_2) = v_1 - v_2 \end{array} \right\} T(u_1, u_2) = (v_1 + 2v_2 - v_3, v_1 - v_2).$$
- (α) Να βρεθεί ο πίνακας  $A$  του  $T$  ως προς αυτές τις βάσεις.  
 (β) Γιατί τα σύνολα  $\{-u_1 + u_2, 2u_1 - u_2\}$  και  $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$  αποτελούν βάσεις των δ.χ.  $R^2$  και  $R^3$  αντίστοιχα;  
 (γ) Να βρεθεί ο πίνακας  $B$  του  $T$  ως προς τις βάσεις του (β).  
 (δ) Βρείτε τους πίνακες μετασχηματισμού των αρχικών βάσεων στις τελικές.  
 (ε) Ποιά σχέση συνδέει τους πίνακες  $A$  και  $B$  και ποιά η σημασία της;
5. (10%) Χρησιμοποιώντας την κανονική μορφή του Jordan, δώστε τους πιθανούς όμοιους πίνακες ενός πίνακα  $A$   $2 \times 2$  και ενός πίνακα  $B$   $3 \times 3$  με μιγαδικά στοιχεία.

**Καλή επιτυχία!**