

Τμηματικές εξετάσεις στην Γραμμική Άλγεβρα
Περίοδου Σεπτεμβρίου 2002

1. [20%] Αποταθείτε για την αλήθεια ή μη των προτάσεων: (α) “Όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές” και (β) “η ορθογώνια μη μηδενικά διανύσματα του \mathbb{R}^n είναι γραμμικά ανεξάρτητα”.

Δώστε αυστηρή μαθηματική απόδειξη που να δικαιολογεί την απάντησή σας.

2. [20%] (α) Να υπολογιστούν όλα τα διανύσματα του δ.χ. \mathbb{R}^4 που είναι κάθετα στα διανύσματα $x_1 = (1,0,0,0)$ και $x_2 = (1,1,1,2)$. (β) Είναι ο χώρος των διανυσμάτων αυτών δ.χ. και γιατί; (γ) Ποιά είναι η διάστασή του; (δ) Βρείτε μια βάση του. (ε) Ορθοκανονικοποιείστε τη βάση αυτή.

3. [15%] Γραψτε ένα πίνακα – αν υπάρχει – με την ζητούμενη πιο κάτω ιδιότητα και εξηγήστε γιατί υπάρχουν ή δεν υπάρχουν τέτοιοι πίνακες.

(α) (5) Ο χώρος στηλών περιέχει τα $(1,0,0)^t$, $(0,0,1)^t$ και ο χώρος γραμμών τα $(1,1)^t$, $(1,2)^t$.

(β) (5) Χώρος στηλών $= \mathbb{R}^3$ και χώρος γραμμών $= \langle (1,0,0)^t, (0,0,1)^t \rangle$ ($\langle v,u \rangle$ = όλοι οι γραμ. συνδυασμοί των διανυσμάτων v,u).

(γ) (5) Ο χώρος στηλών έχει βάση το $(1,0,2)^t$ και ο μηδενοχώρος το $(3,1,1)^t$.

4. [25%] Θεωρούμε στον χώρο \mathbb{R}^2 , ένα διάνυσμα $x=(\alpha,\beta)$ και τον εξής γ.μ.:

$$T(\alpha,\beta) = (\alpha - \beta, \alpha + \beta).$$

α) Βρείτε τον πίνακα A του γ.μ. T ως προς την τυποποιημένη βάση $E = \{e_1, e_2\}$.

β) Υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός του T και γιατί; Αν και ποιός είναι (σε μορφή πίνακων);

γ) Είναι ο T ισομορφισμός και γιατί;

δ) Να διαγωνιοποιηθεί ο πίνακας A , εφ' όσον αυτό είναι δυνατόν. (Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα και να διατυπωθεί ο μετασχηματισμός διαγωνιοποίησης). Ποιοί είναι οι ιδιοχώροι του A και ποιές οι διαστάσεις τους; Δικαιολογείστε.

5. [20%] Για τον γρ.μετασχηματισμό T του θέματος (4) θεωρούμε τώρα το σύνολο $B = \{(1,1), (-1,2)\}$ που προφανώς αποτελεί βάση του δ.χ. \mathbb{R}^2 .

(α) Ποιοί είναι οι πίνακες μετασχηματισμού (μεταβάσης) από τη βάση E στην B και από την B στην E αντιστοίχως;

(β) Εφαρμόζοντας αναλυτικά τον μετασχηματισμό ομοιότητας, να βρεθεί ο πίνακας C του T ως προς τη νέα βάση B (απαραίτητα **σε μορφή πινάκων!**).

(γ) Πως εκφράζεται τώρα ο μετασχηματισμός διαγωνοποίησης για τον C ; Ποιές είναι οι ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, ιδιοχώρος του C ; Δικαιολογείστε.

Καλή επιτυχία!