Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πλ/κής

Τμηματική Εξετάσεις στη Γραμμική Άλγεβρα

Περίοδος Σεπτεμβρίου 98.

Πάτρα 15-9-1998 Καθηγητής: Χ. Αλεξόπουλος

1. (10%) Βρείτε στον R^3 όλα τα διανύσματα που είναι ορθογώνια στα $(1,1,1)$ και $(1,-1,0)$. Από αυτά, κατασκευάστε ένα σύστημα ορθογωνίων μεταξύ τους και μοναδιαίων διανυσμάτων του R^3.

2. (15%) Βρείτε τη διάσταση και κατασκευάστε μια βάση του μηδενοχώρου, του χώρου γραμμών και του χώρου στηλών του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

3. (25%) α. Να βρεθεί ο βαθμός και η μηδενικότητα ενός γραμ. μετ/σμού T από τον R^4 στον R^3 που ορίζεται από τη σχέση:

$$T(a_1,a_2,a_3,a_4) = (a_1-a_3+2a_4,\ -2a_1+a_2+2a_3,\ a_2+4a_4)$$

β. Να δειχθεί ότι $(1,3,k) \in \mathrm{im}T$ αν και μόνο αν $k=5$.

γ. Να βρεθεί η συνθήκη που ορίζει ότι το διάνυσμα $(1,x,1,y)$ ανήκει στο $\ker T$

4. (15%) Χρησιμοποιήστε μια κατάλληλη μέθοδο για να ορθοκανονικοποιήσετε το σύνολο

$$\{(1,-1,1,1),\ (0,1,0,1),\ (2,-1,1,1)\}.$$

5. (15%) Να βρεθεί ο βαθμός και η μηδενικότητα του γ. μ. από τον R^4 στον R^3 του οποίου ο πίνακας ως προς τις τυποποιημένες βάσεις είναι ο:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

6. (20%) α. Ποιά η σημασία της διαγωνοποίησης ενός πίνακα A; (με ακρίβεια)

β. Να διαγωνοποιηθεί ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Καλή Επιτυχία!

Θεμα 2 (Σεπτ. 98)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 3r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\dim(A)_{\sigma\tau\eta\lambda\omega\nu} = \dim(A)_{\gamma\rho\alpha\mu\mu\omega\nu} = 2$ όπως φαίνεται και πιο κάτω.

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftarrow r_3 - r_1]{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Χώρος στηλών:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -x_1 - 2x_2 \\ -x_3 = x_2 \end{cases}$$

$$x_1 = -x_4 - 2x_2 = -x_4 + 2x_3$$

Βασικές μεταβλητές x_1, x_2, ελεύθερες x_3, x_4

$(2x_3 - x_4, -x_3, x_3, x_4)$

$x_3 = 1,\ x_4 = 0 \Rightarrow (2, -1, 1, 0)$

$x_3 = 0,\ x_4 = 1 \Rightarrow (-1, 0, 0, 1)$

Βάση χώρου στηλών

Χώρο γραμμών αριστερό μηδενόχωρο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (-x_3, 0, x_3)$

$x_3 = 1 \Rightarrow (-1, 0, 1) \rightarrow$ βάση αρ. μηδενοχώρου

$\Rightarrow$ Ισχύουν:

α: $\dim(X.\Sigma) + \dim N(A) =$ Αρ.

β: $\dim(X.\Gamma) + \dim(N(A^T))$ Αρ.

Θέμα 3 (Σεπτ. 98)

$$A_{(T)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 + 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 - a_3 + 2a_4 &= 0 \\ a_2 + 4a_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & a_2 = -4a_4 \\ & a_1 = a_2 - a_3 = -2a_4 + a_3 \end{aligned}$$

Άρα $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (-2a_4 + a_3, -4a_4, a_3, a_3)$

$$\left.\begin{aligned} a_3 = 1,\ a_4 = 0 &\Rightarrow (1, 0, 1, 0) \\ a_3 = 0,\ a_4 = 1 &\Rightarrow (-2, -4, 0, 1) \end{aligned}\right\} \text{Βάση του } \ker(T)$$

Άρα $(1, -2, 0)$ και $(0, 1, 1) \Rightarrow$ βάση του $Im(T) \Rightarrow$

$$a(1, -2, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, 3, k) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & k \end{vmatrix} = 0 = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & k \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= k - 3 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{k = 5}$$

Διαφορετικό:

Παίρνω σαν βάση του im(T) τα $(-1,2,0)$ $(2,0,4)$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & k \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -1\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & k \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 12 - 2(2k-4) = 0$$

$$\Rightarrow 12 - 4k + 8 = 0 \Rightarrow 4k = 20 \Rightarrow \underline{k = 5}$$

$$\cancel{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow}$$

$\lambda(1,0,1,0) = (1,x,1,y) \Rightarrow$ για $\lambda = 1 \Rightarrow x = y = 0$

~~$(-2,-4,0,1) = (1,x,1,y)$~~

ή $\lambda(1,0,1,0) + \mu(-2,-4,0,1) = \nu(1,x,1,y)$ ← Πιο δύσκολο

ΘΕΜΑ 4 (Σεπτ. 98)

Ορθοκανονικοποίηση των $u_1: (1,-1,1,1)$

$u_2: (0,1,0,1)$

$u_3: (2,-1,1,1)$

$u_1 \perp u_2$, $u_2 \perp u_3$

$V_1 = (1,-1,1,1)$

$V_2 = u_2 - \frac{u_2 V_1}{\|V_1\|^2} V_1 = (0,1,0,1) - 0 = (0,1,0,1)$

$V_3 = u_3 - \frac{u_3 V_2}{\|V_2\|^2} V_2 - \frac{u_3 V_1}{\|V_1\|} V_1 = (2,-1,1,1) - 0 - \frac{(2+1+1+1)}{4}(1,-1,1,1)$

$= (2,-1,1,1) - \left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

Τώρα $V_1 \perp V_2$, $V_2 \perp V_3$, $V_1 \perp V_3$

Κανονικοποίηση $V_1: \frac{V_1}{\|V_1\|} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ //

$V_2: \frac{V_2}{\|V_2\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$V_3: \frac{V_3}{\|V_3\|} = \left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{12}}{4}}, \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{12}}{4}}, \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{12}}{4}}, \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{12}}{4}}\right) = \left(\frac{3}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{1}{\sqrt{12}}\right)$

ΘΕΜΑ 5 [illegible]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & 5 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim(A) = 2$$

$$Ax = 0 \Rightarrow Ux = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 - a_3 + 2a_{\cancel{3}4} = 0 \\ a_2 + 5a_3 - 7a_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -5a_3 + 7a_4 \\ a_1 = 10a_3 - 14a_{\cancel{3}4} + a_3 - 2a_4 \end{cases}$$

$$a_1 = 11a_3 - 16a_{\cancel{3}4}$$

$$\Rightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4) = (11a_3 - 16a_4,\ -5a_3 + 7a_4,\ a_3,\ a_4)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = 1,\ a_4 = 0 \Rightarrow (11, -5, 1, 0) \\ a_3 = 0,\ a_4 = 1 \Rightarrow (-16, 7, 0, 1) \end{array}\right\} \text{βάση του } \ker(A) \Rightarrow$$

$$\dim(\ker(A)) = 2$$

Θεμα 6 (Σεπτ 98)

(β) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$-1\,\Sigma_1 + 2\,\Sigma_2$

$|A - \lambda I_3| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((2-\lambda)(3-\lambda)-2\big) - (2-4+2\lambda)$

$= (1-\lambda)\big((6-2\lambda-3\lambda+\lambda^2)-2\big) - (-2+2\lambda)$

$= (1-\lambda)(4-5\lambda+\lambda^2) - (2\lambda-2)$

$= 4-5\lambda+\lambda^2-4\lambda+5\lambda^2-\lambda^3-2\lambda+2$

$= -\lambda^3$

λ_1

λ_2

λ_3

Λείπει μ.

Μετά $(A - \lambda_i I_3)x = 0$ ...ιδιοδιανύσματα

$(A - 0I)x = 0$

$Ax = 0$ στο διαγώνιο