# Τμηματικές Εξετάσεις στην Γραμμική Άλγεβρα
## Περιόδου Φερβρουαρίου 2003
## 18-2-2003

1. **(20%)** Έστω S ο χώρος που περιέχει τα διανύσματα με $x_1+3x_2-x_3=0$. (α) Βρείτε το χώρο $S^{\perp}$ που περιέχει όλα τα διανύσματα τα ορθογώνια στον S (ορθογώνιο συμπλήρωμα του S) και εκφράστε τον <u>μαθηματικά</u>. Τι εκφράζει ο χώρος αυτός; Στη συνέχεια βρείτε μια ορθοκανονική βάση του με τυπικό τρόπο.

2. **(15%)** Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων του πίνακα:

   A= [1, 2, 0, 1 ; 0, 1, 1, 0; 1, 2, 0, 1 ]

3. **(10%)** Γράψτε ένα πίνακα - αν υπάρχει - με την ζητούμενη πιο κάτω ιδιότητα και εξηγήστε γιατί υπάρχουν ή δεν υπάρχουν τέτοιοι πίνακες.
   (α) Χώρος στηλών = $R^3$ και χώρος γραμμών = $\langle(1,0,0)^t, (-1, 4, -2)^t, (1,-2, 1)^t\rangle$ ($\langle v,u,w\rangle$=όλοι οι γραμ. συνδυασμοί των διανυσμάτων v,u,w).
   (β) Ο χώρος στηλών έχει βάση το $(1,1,2)^t$ και ο μηδενοχώρος το $(3,-1,1)^t$.

4. **(25%)** Θεωρούμε στο χώρο $R^2$ τους μετασχηματισμούς συμμετρίας S ως προς την ευθεία y=x και στροφής R ως προς μια γωνία φ, όπου $\varphi\neq 2k\pi$, k=0,1,2...(α) Δείξτε πως βρίσκονται οι πίνακες T(S) και T(R) των S και R αντίστοιχα. (β) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των S και R (γ) Διατυπώστε τα συμπεράσματά σας όσον αφορά τη διαγωνοποίηση των παραπάνω μετασχηματισμών εκφράζοντας πλήρως τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς διαγωνοποίησης και στις δύο περιπτώσεις.

5. **(15%)** Σε μια γραφική εφαρμογή που απεικονίζει διανύσματα στο χώρο $R^2$, ως προς τη βάση B1={**b**$_1$={2,5} **b**$_2$=(1,4)}, απαιτείται να γίνει αλλαγή βάσης στην B2={**b**$_1$={2,1} **b**$_2$=(1,1)}. (α) Βρείτε τον πίνακα που αλλάζει την πρώτη στην δεύτερη. (β) Ποια μορφή θα πάρουν τώρα οι μετασχηματισμοί S και R του θέματος (4); (Σημ. Μην κάνετε στο τελικό στάδιο λεπτομερείς πράξεις).

6. **(15%)** Έστω ένας αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός T του $R^n$ πάνω στον εαυτό του, με πίνακα A. Αποδείξτε ότι αν B1 είναι μια βάση του $R^n$, τότε και η T(B1) είναι ομοίως βάση του $R^n$

**Καλή επιτυχία!**