ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι *Απαντήσεις Προόδου Μαΐου 2005*

ΘΕΜΑ 1. [1.6] Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις Σωστό/Λάθος.

1. Σωστό ή Λάθος: **[0.2]** Ένας διανυσματικός υποχώρος πρέπει να περιέχει πάντα το μηδενικό στοιχείο.
2. Σωστό ή Λάθος: **[0.2]** Για κάθε μητρώο $A \in R^{n\times n}$ υπάρχει ομαλό μητρώο X τέτοιο ώστε το μητρώο $\Lambda := X^{-1}AX$ είναι διαγώνιο.
3. Σωστό ή Λάθος: **[0.2]** Κάθε τετραγωνικό μητρώο μεγέθους n έχει ακριβώς n ιδιοτιμές.
4. Σωστό ή Λάθος: **[0.2]** Το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων κάθε μητρώου είναι ακριβώς n.
5. Σωστό ή Λάθος: **[0.2]** Η ορίζουσα ενός τριγωνικού μητρώου είναι ίση με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του.
6. Σωστό ή Λάθος: **[0.2]** Ο χώρος των κάτω τριγωνικών μητρώων είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $R^{n\times n}$.
7. Σωστό ή Λάθος: **[0.2]** Εάν ένας γραμμικός χώρος παράγεται από τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ τότε η διάστασή του είναι σίγουρα n.
8. Σωστό ή Λάθος: **[0.2]** Εάν τα $v_1, \ldots, v_n$ είναι μεταξύ τους ορθογώνια, τότε η διάστασή του χώρου που παράγουν είναι n.

Απάντηση.

1. Σωστό: (ς. 74)
2. Λάθος: Παράδειγμα το μητρώο $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ που χρησιμοποιήσαμε στην παρουσίαση της μορφής Jordan δεν μπορεί να διαγωνιοποιηθεί με μετασχηματισμούς ομοιότητας.
3. Σωστό: Γιατί οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου που έχει βαθμό n.
4. Λάθος: Οπως και πριν, όλα τα ιδιοδιανύσματα του $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι πολλαπλάσια του $[1,0]^\top$.
5. Σωστό: Για παράδειγμα, αν το μητρώο είναι άνω τριγωνικό, από τον αναδρομικό υπολογισμό της ορίζουσας (αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη) έχουμε ότι $\det(A) = \alpha_{11}\det(A(2:n, 2:n))$ κ.ο.κ.
6. Σωστό: Γιατί το μηδενικό μητρώο ανήκει ανήκει στο χώρο και οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός $\eta L + \kappa\hat{L}$ όπου $L, \hat{L}$ κάτω τριγωνικά και η, κ βαθμωτοί θα είναι κάτω τριγωνικό.
7. Λάθος: Τα διανύσματα θα πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
8. Σωστό: Αν τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα τότε θα υπάρχουν συντελεστές $\alpha_1, ..., \alpha_n$ που δεν είναι όλοι μηδενικοί, τ.ώ. $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$. Αν όμως πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο του γραμμικού συνδυασμού με κάθε ένα από τα v_j θα έχουμε: $v_j^\top \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ και επομένως $\sum_{j=1}^n \alpha_i v_j^\top v_i = 0$ και επειδή τα διανύσματα είναι ορθογώνια θα πρέπει $\alpha_j v_j^\top v_j = 0$. Όμως $v_j^\top v_j > 0$ επομένως $\alpha_j = 0$ και αυτό ισχύει για $j = 1, ..., n$ που δεν μπορεί να ισχύει λόγω της αρχικής μας υπόθεσης.

□

ΘΕΜΑ 2. [1.8]

1. **[0.2]** Έστω $v_1, \ldots, v_n$ μια βάση του R^n και δίνεται ότι το $v \in R^n$. Ποιος τύπος δίνει το διάνυσμα των συντελεστών $a = [a_1, \ldots, a_n]^T$ στην έκφραση $v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$; *Βοήθεια:* $v =$ πίνακας επί διάνυσμα όπου πίνακας $= \ldots$ και διάνυσμα $= \ldots$

   Απάντηση. Θα έχουμε ότι

$$v = Va \quad \text{όπου} \quad V := [v_1, ..., v_n], a = [a_1, ..., a_n]^\top.$$

   (δηλ. V είναι ο πίνακας που απαρτίζεται από τις στήλες v_j.) Επειδή οι στήλες αποτελούν βάση για τον R^n θα είναι και γραμμικά ανεξάρτητες, επομένως το V θα είναι ομαλό, επομένως

$$a = V^{-1} v.$$

   □

2. **[0.2]** Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

   Δώστε (κέντρο, ακτίνα) των κύκλων Gerschgorin στους οποίους περιέχονται οι ιδιοτιμές του A.

   Απάντηση. Ο κύκλος Gerschgorin που αντιστοιχεί στη γραμμή i θα έχει κέντρο το α_{ii} και ακτίνα

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |\alpha_{ij}|.$$

   Επομένως οι κύκλοι D_i θα έχουν (κέντρο,ακτίνα) τα $(2, 6), (5, 8), (3, 6), (5, 6)$. □

3. Έστω ότι ο A είναι πίνακας $n \times n$. Η ιδιότητα ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, είναι ισοδύναμη με τις παρακάτω ιδιότητες:

   3.1 **[0.2]** Η ορίζουσα του A είναι ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΗ

   3.2 **[0.2]** Οι ιδιοτιμές του A είναι ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ

   3.3 **[0.2]** Ο αριθμός των λύσεων του συστήματος $Ax = b$ για οποιοδήποτε διάνυσμα b είναι ΕΝΑΣ

   3.4 **[0.2]** Εάν εφαρμοστεί κατάλληλη μέθοδος Gauss στο σύστημα αυτό (οπότε θα παραχθεί ο άνω τριγωνικός πίνακας U) τότε ο αριθμός των μηδενικών στοιχείων στη διαγώνιο του U είναι n.

   3.5 **[0.2]** Υπάρχει βάση του R^n που αποτελείται από διανύσματα που τα αναγνωρίζουμε στον A και αυτά είναι ΟΙ ΣΤΗΛΕΣ ΤΟΥ A.

4. Ο γραμμικός μετασχηματισμός $L : R^n \to R^n$ μετασχηματίζει κάθε διάνυσμα $v \in R^n$ στο διάνυσμα $Lv \in R^n$ όπου οι συνιστώσες του Lv είναι οι ίδιες με αυτές του v, αλλά με αντίστροφη σειρά. Π.χ. για $n = 5$ το $v = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & 7 & -8 \end{bmatrix}^T$ μετασχηματίζεται στο $v = \begin{bmatrix} -8 & 7 & -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}^T$.

   4.1 **[0.2]** Χρησιμοποιώντας την τυπική βάση του R^n, δώστε τον πίνακα εκπρόσωπο A του μετασχηματισμού L.

   Απάντηση. Ο μετασχηματισμός εκφράζεται με το μητρώο L που προέρχεται από τη μετάθεση των στοιχείων του ταυτοτικού μητρώου σε αντίστροφη σειρά, δηλ.

$$L = [e_n, e_{n-1}, ..., e_1]$$

π.χ. για διανύσματα μεγέθους 5 όπως το παραπάνω θα είναι το μητρώο

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

4.2 **[0.2]** Ποιός ο A^{-1};

Απάντηση. Προσέξτε ότι $LL = I$ επομένως $L^{-1} = L$. □

ΘΕΜΑ 3. [1.5]

1. **[0.5]** Εφαρμόστε απλή μέθοδο Gauss για το σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ και } b = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

οπότε θα προκύψει το σύστημα $Ux = y$. Δώστε τον πίνακα U και το δεξί μέλος y.

Απάντηση. Πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά το επαυξημένο μητρώο $[A, b]$ με το μητρώο $L_1 := I - u_1 e_1^\top$ όπου $u_1 = [0, 2, -1]^\top$ μηδενίζονται τα υποδιαγώνια στοιχεία της πρώτης στήλης του A:

$$L_1[A, b] = (I - u_1 e_1^\top)[A, b] = [A, b] - u_1 e_1^\top [A, b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{array}\right]$$

Πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά με το μητρώο

$$L_2 := I - u_2 e_2^\top$$

όπου $u_2 = [0, 0, -1]^\top$ έχουμε

$$L_2(L_1[A, b]) = (I - u_2 e_2^\top)(L_1[A, b]) = \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Οι πρώτες 3 στήλες θα είναι το ζητούμενο μητρώο U και η τελευταία στήλη το y.

□

2. **[0.5]** Ποιός ο πίνακας M για τον οποίο $MA = U$ και $Mb = y$;

Απάντηση. Από τα προηγούμενα φαίνεται ότι θα είναι ο

$$M = L_2 L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

3. **[0.5]** Παραγοντοποιείστε τον A στη μορφή $A = LU$. Δώστε τους πίνακες L και U. Τι σχέση έχουν οι L και M;

Απάντηση. Από τα παραπάνω, φαίνεται ότι το U είναι το ίδιο. Επίσης $L_2 L_1 A = U \Rightarrow A = L_1^{-1} L_2^{-1} U$ επομένως $L = M^{-1}$. Επομένως

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

ΘΕΜΑ 4. [1.2] Βρείτε μία **ορθοκανονική** βάση για το χώρο των πολυωνύμων βαθμού μέχρι 3, ορισμένων στο $[-1,1]$, χρησιμοποιώντας το γνωστό εσωτερικό γινόμενο.

Απάντηση. Εκκινούμε από τα

$$p_0 = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x^3.$$

$$\mathbf{q_0} = p_0/\|p_0\| = 1/(\int_{-1}^{1} dx)^{1/2} = \mathbf{1/\sqrt{2}}.$$

Έστω

$$p = x - (x, q_0)q_0 = x - \int_{-1}^{1} x dx/\sqrt{2} = x \Rightarrow \mathbf{q_1} = \sqrt{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}}\mathbf{x}$$

Ο επόμενος όρος είναι

$$p = x^2 - (x^2, q_0)q_0 - (x^2, q_1)q_1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

του οποίου η νόρμα είναι

$$\left(\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Επομένως,

$$\mathbf{q_2} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\sqrt{\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}}(\mathbf{x^2} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}})$$

Τέλος αν

$$p = x^3 - (x^3, q_0)q_0 - (x^3, q_1)q_1 - (x^2, q_2)q_2,$$

παρατηρούμε ότι οι όροι (x^3, q_0) και (x^3, q_2) είναι 0 γιατί είναι αποτέλεσμα ολοκλήρωσης συνάρτησης του x περιττής δυναμης στο διάστημα $(-1,1)$. Επομένως θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} p &= x^3 - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\int_{-1}^{1} x^3(x^2 - \frac{1}{3})dx \\ &= x^3 - \frac{3}{5}x \end{aligned}$$

το μέτρο του οποίου είναι

$$\left(\int_{-1}^{1} (x^3 - \frac{3}{5}x)^2 dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{8}{175}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Επομένως, κανονικοποιώντας,

$$\mathbf{q_3} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\sqrt{\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}}(\mathbf{x^3} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\mathbf{x}).$$

□

ΘΕΜΑ 5. [1.3] Να υπολογίσετε το ίχνος και την ορίζουσα του μητρώου:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Είναι το μητρώο ομαλό ή όχι; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση. Το ίχνος είναι το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων, επομένως trace(A) = 4. Η ορίζουσα θα είναι (με βάση το ανάπτυγμα ως προς την πρώτη στήλη που περιέχει το μηδέν) θα είναι

$$\det(A) = 1 \cdot (2-4) - (-1) \cdot (4-4) = -2$$

Επομένως, το μητρώο είναι ομαλό (αλλοιώς η ορίζουσα θα ήταν 0). □

ΘΕΜΑ 6. [1.3] Σας δίνεται το μητρώο:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Να υπολογίσετε συντελεστές κ_0, κ_1 τέτοιους ώστε $A^{-1} = A^2 + \kappa_1 A + \kappa_0 I$ (Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα Cayley-Hamilton).

Απάντηση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^3 - 5\lambda + 14,$$

και από το θεώρημα Cayley-Hamilton θα ισχύει ότι

$$A^3 - 5A + 14I = 0,$$

επομένως θα πρέπει να έχουμε

$$A^{-1} = \frac{5}{14} I - \frac{1}{14} A^2.$$

(Προσοχή: Χρειάζεται και συντελεστής (όχι μονάδα) στο A^2.) □

ΘΕΜΑ 7. [1.3] α) Έστω το ταυτοτικό μητρώο $I \in R^{n\times n}$, τα διανύσματα $u, v \in R^n$ και ο βαθμωτός γ. Θέτουμε $A := I - \gamma uv^\top$. Να υπολογίσετε το αντίστροφο A^{-1} συναρτήσει των δοθέντων στοιχείων $(I, \gamma, u, v.)$ (Υπόδειξη: Το αντίστροφο θα έχει επίσης τη μορφή $A^{-1} = I - \delta uv^\top$ οπότε αρκεί να υπολογίσετε το δ.)

Απάντηση. Αφού

$$A^{-1}A = I = (I - \delta uv^\top)(I - \gamma uv^\top)$$

θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\delta uv^\top + \gamma uv^\top = \delta\gamma(v^\top u)uv^\top$$

επομένως

$$uv^\top \gamma = \delta(\gamma(v^\top u) - 1)uv^\top$$

$$A^{-1} = I - \frac{\gamma}{\gamma(v^\top u) - 1} uv^\top$$

□

β) Μας δίνεται το διάνυσμα $x \in R^n$ και έστω ότι το στοιχείο ξ_k στη θέση k του διανύσματος δεν είναι μηδέν. Να υπολογίσετε το βαθμωτό γ και τα διανύσματα $u, v \in R^n$ τέτοια ώστε $e_j^\top(I - \gamma uv^\top)x = 0$ για $j = k+1, ..., n$, όπου $e_j \in R^n$ είναι το διάνυσμα με 1 στη θέση j και 0 στις υπόλοιπες θέσεις.

Απάντηση. (Από τη θεωρία που αναπτύξαμε στην τάξη και στις σημειώσεις). Η συνθήκη ότι $e_j^\top(I - \gamma uv^\top)x = 0$ για $j = k+1, ..., n$ λέει ότι το διάνυσμα $(I - \gamma uv^\top)x$ έχει μηδέν στις θέσεις $k+1$ ως και n. Επομένως, αρκεί να υπολογίσουμε τα u, v ώστε να πληρούνται αυτές οι συνθήκες. Επιλέγοντας $v = e_k$ και $u = \frac{1}{\xi_k}[0, 0, ..., 0, 1, \xi_{k+1}, ..., \xi_n]^\top$ προκύπτει το ζητούμενο. □