Θέματα Φεβρουαρίου 1997

1. Έστω ένα ορθογώνιο υποσύνολο $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ενός δ.χ. V εφοδιασμένου με εσωτερικό γινόμενο. Είναι γραμμικά ανεξάρτητο και γιατί;

Λύση

2.

(2.1) Έστω δύο δ.χ. V και W με dimV = dimW = n και ένας ισομορφισμός T του V στον W. Έστω $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ μια βάση του V. Αποδείξτε ότι τότε και το σύνολο $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ είναι μια βάση του W.

(2.2) Το αντίστροφο ισχύει; Δηλαδή, αν $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ βάση του V και $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ βάση του W, είναι τότε ο T ισομορφισμός; Αποδείξτε το.

Λύση

---

3. Έστω οι γραμμικοί μετασχηματισμοί συμμετρίας (ανάκλασης) ***s*** ως προς ευθεία του R^2, διερχόμενη από την αρχή των αξόνων και σχηματίζουσα γωνία φ με τον άξονα των x, και περιστροφής ***r*** γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία θ.

(3.1) Δώστε τους πίνακες A_s και A_r των παραπάνω μετασχηματισμών (θεωρώντας την τυποποιημένη βάση του R^2 $\{e_1=(1,0), e_2=(0,1)\}$).

(3.2) Υπολογίστε τους πυρήνες (μηδενοχώρους ker(s) και ker(r).

(3.3) Υπάρχουν οι αντίστροφοι των παραπάνω μετασχηματισμών, γιατί και ποιοι είναι; Αν ναι δώστε τους πίνακές τους.

(3.4) Θεωρείστε τώρα τη βάση $\{v_1=(1,2)$, και $v_2=(1,1)\}$ του R^2. Πως μετασχηματίζονται τώρα οι πίνακες των s και r; Δώστε με τυπικό τρόπο τις νέες μορφές τους A_s' και A_r' υπό τη μορφή γινομένου πινάκων.

(3.5) Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων A_s και A_r .

(3.6) Ποιες είναι οι ιδιοτιμές και ποια τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων A_s' και A_r' και γιατί;

(3.7) Ποιες είναι ιδιοτιμές των αντιστρόφων μετασχηματισμών; (εφ΄όσον υπάρχουν).

(3.8) Θεωρούμε τη σύνθεση $T = s \circ r$. Είναι ο T γραμμικός μετασχηματισμός και γιατί; Είναι επίσης ο T ισομορφισμός και γιατί;

(3.9) Ποιος είναι ο πίνακας του T και γιατί; Υπολογίστε την εικόνα T(1,2).

Λύση

---

4. Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου W του C^3, ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $v_1= (1, i, 0)$, $v_2=(1, 2, 1-i)$

Λύση

---

5. Να διαγωνοποιηθεί ο συμμετρικός πίνακας

7 -1 -2

A = -1 7 +2

-2 2 10

Συγκεκριμένα να βρεθεί ένας ορθογώνιος πίνακας U τέτοιος ώστε ο U^tAU να είναι ένας διαγώνιος πίνακας.

Λύση

Επιστροφή στη λίστα των θεμάτων