

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
Σεπτέμβριος 2006 **Σ. Κοσμαδάκης**

Θέματα από το «Εισαγωγή στα Γραφήματα»
Έτη Β' Γ' Δ'
Έτη Ε' και Πτυχίο, κατ' επιλογή

- 1 Έστω R_G η παρακάτω σχέση ανάμεσα στις κορυφές ενός γραφήματος G :
 $R_G = \{(u, v) : \text{είτε υπάρχει μία διαδρομή του } G \text{ που περιέχει τις κορυφές } u, v, \text{ είτε } u=v\}$.
Αποδείξτε ότι η R_G είναι σχέση ισοδυναμίας. **1 Μονάδα**
- 2 (α) Αναφέρετε τον ορισμό του μη-επεκτάσιμου μονοπατιού. **½ Μονάδα**
(β) Αποδείξτε ότι σε κάθε άκυκλο γράφημα με μία τουλάχιστον ακμή υπάρχουν δύο κορυφές βαθμού 1. **1 Μονάδα**
- 3 Για κάθε $n \geq 0$ ορίζουμε επαγωγικά την παρακάτω κλάση γραφημάτων $Q(n)$:
 $Q(0) = \{G : \text{το } G \text{ δεν έχει ακμές}\}$
 $Q(i+1) = \{G : \text{το } G \text{ προκύπτει από κάποιο } G' \text{ στην } Q(i) \text{ προσθέτοντας ακριβώς μία νέα κορυφή } a \text{ και μία νέα ακμή που συνδέει την } a \text{ με το } G'\}$.
Αποδείξτε ότι κάθε κλάση $Q(n)$ περιέχει μόνο άκυκλα γραφήματα. **1 Μονάδα**
- 4 (α) Αναφέρετε τον ορισμό του δέντρου επικάλυψης, της χορδής και του στοιχειώδους κύκλου. **1 Μονάδα**
(β) Αποδείξτε ότι: αν ένα συνεκτικό γράφημα έχει n κορυφές και m ακμές θα έχει τουλάχιστον $m-n+1$ κύκλους. **½ Μονάδα**
- 5 (α) Αναφέρετε τον ορισμό της δισυνεκτικής συνιστώσας ως προς κορυφές. **½ Μονάδα**
(β) Έστω u κομβικό σημείο. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο ακμές με άκρο το u που δεν ανήκουν στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές. **1 Μονάδα**
(γ) Βρείτε ένα γράφημα που να έχει δύο δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές με κοινή κορυφή μεταξύ τους. **½ Μονάδα**
- 6 (α) Έστω u άκρο μιάς γέφυρας, με βαθμό μεγαλύτερο από 1. Αποδείξτε ότι το u είναι κομβικό σημείο. **½ Μονάδα**
(β) Βρείτε ένα γράφημα όπου υπάρχει γέφυρα και όπου δεν υπάρχει κομβικό σημείο. *ευθύγραμμο* **½ Μονάδα**
- 7 Αποδείξτε ότι: αν ένα συνεκτικό γράφημα G δεν είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές, υπάρχει δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές που έχει μόνο ένα κοινό σημείο με γέφυρα του G . **1 Μονάδα**
- 8 Αποδείξτε ότι δύο δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές δεν μπορούν να έχουν κοινή κορυφή. **1 Μονάδα**