

**ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ**  
**Ιούνιος 2010** **Σ. Κοσμαδάκης**

1 Έστω  $P(G), \Sigma(G)$  οι παρακάτω σχέσεις ανάμεσα στις κορυφές ενός τυχαίου μη-κατευθυνόμενου γραφήματος  $G$ :

$P(G) = \{(u, v) : \text{υπάρχει ένα κλειστό ίχνος του } G \text{ που περιέχει τις κορυφές } u, v\}$

$\Sigma(G) = \{(u, v) : \text{υπάρχει ένας κύκλος του } G \text{ που περιέχει τις κορυφές } u, v\}$ .

α Για κάθε μία από τις παραπάνω σχέσεις, βρείτε κατά πόσο είναι πάντα συμμετρική.

ΕΞΗΓΗΣΤΕ ΤΗΝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΑΣ

½ Μονάδα

β Για κάθε μία από τις παραπάνω σχέσεις, αναφέρετε κατά πόσο είναι πάντα μεταβατική.

½ Μονάδα

2α Ποιές κορυφές ενός γραφήματος ονομάζονται κομβικά σημεία;\*

½ Μονάδα

β Βρείτε ένα γράφημα που να έχει ακριβώς δύο γέφυρες και ακριβώς ένα κομβικό σημείο.

ΕΞΗΓΗΣΤΕ ΤΗΝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΑΣ

½ Μονάδα

3 Έστω  $M$  δεδομένος θετικός ακέραιος.

Για κάθε  $n \geq 0$  ορίζουμε επαγωγικά μία κλάση γραφημάτων  $Q_M(n)$  ως εξής:

$Q_M(0) = \{G : \text{το } G \text{ έχει } M \text{ κορυφές και δεν έχει καμία ακμή}\}$

$Q_M(i+1) = \{G : \text{το } G \text{ προκύπτει από κάποιο } G' \text{ στην κλάση } Q_M(i)$

προσθέτοντας στο  $G'$  μία νέα κορυφή  $a$

και μία ακμή που συνδέει την  $a$  με κάποια κορυφή του  $G'\}$ .

α Ποιά είναι η κλάση γραφημάτων που ορίζεται όταν  $M=1$ ;

½ Μονάδα

β Αποδείξτε ότι: αν ένα γράφημα  $G$  με  $e$  ακμές και  $v$  κορυφές βρίσκεται

σε κάποια κλάση  $Q_M(n)$ , θα ισχύει ότι:  $e = v - M$ .

1 Μονάδα

γ Πόσες συνεκτικές συνιστώσες έχουν τα γραφήματα που βρίσκονται στην κλάση  $Q_M(0)$ ;

½ Μονάδα

δ Αποδείξτε ότι: κάθε γράφημα στην κλάση  $Q_M(i+1)$  έχει τον ίδιο αριθμό συνεκτικών συνιστωσών με κάποιο γράφημα στην κλάση  $Q_M(i)$ .

½ Μονάδα

4α Έστω  $G$  ένα συνεκτικό γράφημα με  $v$  κορυφές.

Τι ονομάζεται δέντρο επικάλυψης του  $G$ ;

Ποιό είναι το πλήθος των ακμών ενός δέντρου επικάλυψης του  $G$ ;

Τι ονομάζεται στοιχειώδης κύκλος του  $G$ , ως προς ένα δεδομένο δέντρο επικάλυψής του;\*

1 Μονάδα

β Έστω ότι ένα γράφημα  $G$  έχει ακριβώς ένα στοιχειώδη κύκλο, ως προς κάποιο δέντρο επικάλυψής του.

Αποδείξτε ότι το  $G$  έχει ακριβώς ένα κύκλο.

1 Μονάδα

5α Τι ονομάζεται διπροσβασιμότητα ως προς ακμές;\*

½ Μονάδα

β Βρείτε ένα παράδειγμα όπου να ισχύει η διπροσβασιμότητα ως προς ακμές και να μην ισχύει

η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές. ΕΞΗΓΗΣΤΕ ΤΗΝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΑΣ

½ Μονάδα

γ Αποδείξτε ότι ένα γράφημα που είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές

θα είναι και δισυνεκτικό ως προς ακμές.

½ Μονάδα

6α Αποδείξτε ότι ένα γράφημα που είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές δεν μπορεί να έχει γέφυρες.

½ Μονάδα

β Ποιά υπογραφήματα ενός γραφήματος  $G$  ονομάζονται δισυνεκτικές συνιστώσες του  $G$  ως προς ακμές;\*

½ Μονάδα

γ Βρείτε ένα γράφημα που να έχει ακριβώς δύο δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές και ακριβώς τρεις δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές.

Αναφέρετε ποιά υπογραφήματά του είναι δισυνεκτικές συνιστώσες του ως προς ακμές

και ποιά είναι δισυνεκτικές συνιστώσες του ως προς κορυφές.

1 Μονάδα

\* Αναφέρετε είτε τον ορισμό είτε κάποια χαρακτηριστική ιδιότητα