

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

Ιούνιος 2014

Όλα τα γραφήματα θεωρούνται μη-κατευθυνόμενα, αν δεν αναφέρεται κάτι άλλο.

1α Ποιές διαδρομές ονομάζονται μονοπάτια; Ποιές διαδρομές ονομάζονται ίχνη; ½ Μονάδα

β Έστω οι παρακάτω σχέσεις ανάμεσα στις κορυφές ενός γραφήματος G :

$$R_\mu = \{ (u, v) : \text{υπάρχει ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι του } G \text{ από τη } u \text{ στη } v, \text{ ή } u=v \},$$

$$R_{\kappa\delta} = \{ (u, v) : \text{υπάρχει μία κλειστή διαδρομή του } G \text{ που περιέχει τις κορυφές } u, v \},$$

$$R_{\kappa\iota} = \{ (u, v) : \text{υπάρχει ένα κλειστό ίχνος του } G \text{ που περιέχει τις κορυφές } u, v \},$$

$$R_\kappa = \{ (u, v) : \text{υπάρχει ένας κύκλος του } G \text{ που περιέχει τις κορυφές } u, v \}.$$

Αναφέρετε μία από τις παραπάνω σχέσεις που δεν είναι πάντα μεταβατική και μία που δεν είναι πάντα συμμετρική. Εξηγήστε τις απαντήσεις σας.

1 Μονάδα

2 Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε επαγωγικά μία κλάση γραφημάτων $Q(n)$ ως εξής:

$$Q(1) = \{ G : \text{το } G \text{ έχει μία κορυφή και καμία ακμή} \}$$

$$Q(i+1) = \{ G : \text{το } G \text{ προκύπτει από κάποιο } G' \text{ στην κλάση } Q(i), \text{ είτε προσθέτοντας στο } G' \text{ μία νέα κορυφή } a \text{ και μία ακμή που συνδέει την } a \text{ με κάποια κορυφή του } G', \text{ ή προσθέτοντας στο } G' \text{ μία νέα απομονωμένη κορυφή} \}.$$

Έστω G ένα γράφημα, με e ακμές και v κορυφές, που ανήκει σε κάποια από τις παραπάνω κλάσεις.

α Αποδείξτε ότι $e \leq v-1$.

β Αποδείξτε ότι το G είναι άκυκλο.

1 Μονάδα

3α Ποιές κορυφές ή ακμές ενός συνεκτικού γραφήματος ονομάζονται κομβικά σημεία είτε γέφυρες;

Αναφέρετε είτε ορισμούς είτε χαρακτηριστικές ιδιότητες.

½ Μονάδα

β Η ακμή e είναι γέφυρα του G . Αποδείξτε ότι το $G-e$ έχει το πολύ δύο συνεκτικές συνιστώσες.

½ Μονάδα

4α Οι x, y είναι τυχαίες κορυφές ενός δέντρου T .

Αποδείξτε ότι: το T έχει μόνο ένα μονοπάτι με άκρα τις x, y .

1 Μονάδα

β Έστω T ένα δέντρο. Αποδείξτε ότι υπάρχουν τρεις κορυφές x, y, z του T , τέτοιες ώστε:

δεν υπάρχει μονοπάτι με άκρα τις x, y που να περιέχει το z .

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το (α) χωρίς να τα αποδείξετε.

½ Μονάδα



5α Τι ονομάζουμε ισχυρά συνεκτικό (κατευθυνόμενο) γράφημα; Τι ονομάζουμε ισχυρά συνεκτική συνιστώσα ενός (κατευθυνόμενου) γραφήματος;

½ Μονάδα

β Αποδείξτε ότι: αν ένα γράφημα έχει γέφυρα, δεν είναι δυσυνεκτικό ως προς κορυφές ούτε δυσυνεκτικό ως προς ακμές.

½ Μονάδα

γ Βρείτε ένα γράφημα που να έχει ακριβώς δύο δυσυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές (δείξτε ποιές είναι) και ακριβώς τρεις δυσυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές (δείξτε ποιές είναι).

Εξηγήστε την απάντησή σας.

1 Μονάδα

6 Έστω Θ ένα υπογράφημα ενός γραφήματος G και $\{x, y\}$ μία ακμή του G , όπου $x \in \Theta$ και $y \notin \Theta$.

Αποδείξτε ότι:

α Αν το Θ είναι δυσυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές του G , η $\{x, y\}$ θα είναι γέφυρα του G .

β Αν το Θ είναι δυσυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του G , το x θα είναι κομβικό σημείο του G .

1½ Μονάδα

7α Τι ονομάζεται στοιχειώδης κύκλος ως προς ένα δεδομένο δέντρο επικάλυψης;

Πώς ορίζεται το άθροισμα $\oplus(c_1, c_2)$ των κύκλων c_1, c_2 ;

½ Μονάδα

β Βρείτε ένα γράφημα όπου να υπάρχουν δύο διαφορετικοί κύκλοι με τουλάχιστον δύο κοινές ακμές, (δείξτε ποιούς είναι), που το άθροισμά τους δεν είναι κύκλος (δείξτε ποιός είναι).

½ Μονάδα

γ Για τους κύκλους c_1, c_2 ισχύει $\oplus(c_1, c) = c_2$. Αποδείξτε ότι $c = \oplus(c_1, c_2)$.

½ Μονάδα