

**ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ II**  
**Σεπτέμβριος 2013**      **Σ. Κοσμαδάκης**

*Τα γραφήματα θεωρούνται μη-κατευθυνόμενα σε όλα τα θέματα, εκτός από το 2.*

- 1α** Ποιές διαδρομές ονομάζονται *μονοπάτια*; Ποιές διαδρομές ονομάζονται *ίχνη*; **½ Μονάδα**
- β** Αναφέρετε\* αν είναι σωστό ότι: αν δύο διαφορετικές κορυφές συνδέονται με κάποιο ίχνος, θα συνδέονται και με κάποια άλλη (ενδεχομένως διαφορετική) διαδρομή που είναι μονοπάτι. **½ Μονάδα**
- 2** Έστω οι παρακάτω σχέσεις, ανάμεσα στις κορυφές ενός γραφήματος  $G$  με μη-κατευθυνόμενες και κατευθυνόμενες ακμές:
- $R_1 = \{ (u, v) : \text{υπάρχει μία κατευθυνόμενη διαδρομή του } G \text{ από τη } u \text{ στη } v \},$   
 $R_2 = \{ (u, v) : \text{υπάρχει μία κλειστή διαδρομή του } G \text{ που περιέχει τις κορυφές } u, v \}.$
- α** Αναφέρετε\* αν η σχέση  $R_1$  είναι ή όχι πάντα (για οποιοδήποτε  $G$ ) μεταβατική και αν είναι ή όχι πάντα συμμετρική. **½ Μονάδα**
- β** Αντίστοιχα με το (α), για τη σχέση  $R_2$ . **½ Μονάδα**
- 3α** Αποδείξτε ότι: σε ένα άκυκλο γράφημα  $G$ , οποιοδήποτε μονοπάτι με μέγιστο μήκος καταλήγει σε κορυφή που έχει βαθμό 1 στο  $G$ . **½ Μονάδα**
- β** Ποιές κορυφές ενός γραφήματος ονομάζονται *κομβικά σημεία*;\*\* **½ Μονάδα**
- γ** Αποδείξτε ότι: σε ένα γράφημα  $G$ , οποιοδήποτε μονοπάτι με μέγιστο μήκος καταλήγει σε κορυφή που δεν είναι κομβικό σημείο του  $G$ . **½ Μονάδα**
- 4α** Ποιά σχέση μεταξύ δύο τυχαίων κορυφών ενός γραφήματος ονομάζεται *διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές*;\*\* Ποιά σχέση μεταξύ δύο τυχαίων κορυφών ενός γραφήματος ονομάζεται *διπροσβασιμότητα ως προς ακμές*;\*\* **½ Μονάδα**
- β** Αποδείξτε ότι: αν για δύο κορυφές  $u, v$  ισχύει η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές, θα ισχύει για τις  $u, v$  και η διπροσβασιμότητα ως προς ακμές. **½ Μονάδα**
- γ** Βρείτε\* ένα γράφημα που να έχει δύο κορυφές (δείξτε ποιές είναι) για τις οποίες ισχύει η διπροσβασιμότητα ως προς ακμές και δεν ισχύει η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές. **½ Μονάδα**
- 5α** Βρείτε\* ένα γράφημα που να είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές και να έχει ακριβώς τρεις διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές (δείξτε ποιές είναι). **1 Μονάδα**
- β** Αποδείξτε ότι: αν ένα συνεκτικό γράφημα έχει κομβικό σημείο, δεν είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές. **½ Μονάδα**
- 6α** Αποδείξτε ότι: κάθε συνεκτικό γράφημα με  $n$  κορυφές έχει τουλάχιστον  $n-1$  ακμές. Χρησιμοποιείστε την επαγωγή για συνεκτικά γραφήματα.
- β** Αποδείξτε ότι: κάθε δέντρο με  $n$  κορυφές έχει ακριβώς  $n-1$  ακμές. Χρησιμοποιείστε την επαγωγή για δέντρα. **1 Μονάδα**
- 7α** Τι ονομάζεται *δέντρο επικάλυψης* ενός συνεκτικού γραφήματος  $G$ ;  
 Τι ονομάζεται *χορδή* του  $G$  ως προς ένα δεδομένο δέντρο επικάλυψης;  
 Τι ονομάζεται *στοιχειώδης κύκλος* του  $G$  ως προς ένα δεδομένο δέντρο επικάλυψης; **1 Μονάδα**
- β** Βρείτε ένα γράφημα όπου να υπάρχουν δύο διαφορετικοί κύκλοι με τουλάχιστον μία κοινή ακμή (πρέπει να δείξετε ποιό είναι), που το άθροισμά τους δεν είναι κύκλος (δείξτε ποιό είναι). **½ Μονάδα**
- γ** Έστω ένα συνεκτικό γράφημα  $G$  με  $n$  κορυφές και  $m$  ακμές, όπου δεν υπάρχουν κύκλοι με κοινές κορυφές μεταξύ τους. Αποδείξτε ότι το  $G$  έχει ακριβώς  $m-n+1$  διαφορετικούς κύκλους. **1 Μονάδα**

\* Δεν είναι απαραίτητο να δικαιολογηθεί η απάντηση.

\*\* Αναφέρετε είτε τον ορισμό είτε κάποια χαρακτηριστική ιδιότητα.