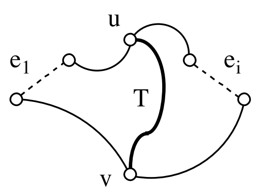
Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Εισαγωγή στα Γραφήματα



Θεωρία – Ασκήσεις

Σταύρος Κοσμαδάκης

2003-2004

"... Uncritical rejection of all theory because it is incomplete and wrong on occasion is foolish and harmful; intelligent criticism of standard material, no matter how long it has been accepted, is sensible and wholesome."

Reuben Fine

Πρόλογος

Αυτό το κείμενο συντάχθηκε για τους φοιτητές του μαθήματος «Διακριτά Μαθηματικά ΙΙ». Το παραπάνω μάθημα παρουσιάζει τις βασικώτερες έννοιες και τεχνικές της θεωρίας των γραφημάτων, και αποδίδει έμφαση στην ακριβή, λεπτομερειακή ανάλυσή τους (παρά στην ευρεία επισκόπησή τους). Στόχος του είναι να προετοιμαστούν οι φοιτητές για την μελέτη εξειδικευμένων θεμάτων (όπως αυτά που ανακύπτουν, για παράδειγμα, στον σχεδιασμό και την θεωρητική αξιολόγηση αλγορίθμων).
Το μάθημα δεν απαιτεί καμμία προγενέστερη γνώση, πέρα από τα στοιχεία του προγραμματισμού και την βασική ανάλυση αλγορίθμων.

Στο τέλος κάθε υπο-ενότητας του κειμένου παρατίθεται μια σειρά Ερωτημάτων. Στο τέλος κάθε ενότητας παρατίθεται μια σειρά Ασκήσεων.

Τα Ερωτήματα είναι απλά προβλήματα, και δίνονται για να ελεγχθεί κατά πόσο έχει αφομοιωθεί επαρκώς το περιεχόμενο της αντίστοιχης υπο-ενότητας. Οι απαντήσεις τους είναι προφανείς, και συνήθως σύντομες. Στην ιδανική περίπτωση τα Ερωτήματα θα μελετώνται παράλληλα με την αντίστοιχη ύλη (γι' αυτό το λόγο, η σειρά τους παρακολουθεί την ροή της αντίστοιχης υπο-ενότητας).

Οι Ασκήσεις είναι ως επί το πλείστον συνθετώτερα προβλήματα. Οι απαντήσεις τους προϋποθέτουν καλή κατανόηση των εννοιών που έχουν παρουσιαστεί μέχρις εκείνο το σημείο, και κάποιο βαθμό ευχέρειας στην χρήση των σχετικών τεχνικών. Οι Ασκήσεις συμπληρώνουν ή επεκτείνουν το περιεχόμενο της αντίστοιχης ενότητας, γι' αυτό και έχουν συμπεριληφθεί απαντήσεις τους (δίνονται στην τελευταία ενότητα του κειμένου). Φυσικά, στην ιδανική περίπτωση θα επιχειρείται να απαντηθούν οι Ασκήσεις, παράλληλα με τη μελέτη της αντίστοιχης ύλης. Η σειρά των Ασκήσεων παρακολουθεί την ροή της αντίστοιχης ενότητας.

Καθώς αυτό το κείμενο θα επεκτείνεται με επιπλέον θέματα στο προσεχές μέλλον, οποιαδήποτε παρατήρηση αποσκοπεί στην βελτίωσή του θα είναι ευπρόσδεκτη.

Σταύρος Κοσμαδάκης

Πάτρα, Νοέμβριος 2003

1 Αρχικές Εννοιες

1.1 Σύνολα και ακολουθίες

Θα χρησιμοποιούμε μόνο πεπερασμένα σύνολα, και θα τα συμβολίζουμε είτε με παράθεση των στοιχείων τους (παραδείγματα: {a, b, 3}, {1, 2,..., n}), ή με μια σύντομη περιγραφή των στοιχείων τους (παράδειγμα: {x | x–3 είναι ακέραιος που διαιρείται διά 5}).
Το κενό σύνολο (χωρίς κανένα στοιχείο) συμβολίζεται με $\emptyset$ ή με {}.
Ο συμβολισμός $x \in A$ σημαίνει ότι το x είναι ένα από τα στοιχεία του συνόλου A (γράφουμε $x \notin A$ αν το x δεν ανήκει στο A).
Δύο σύνολα θεωρούνται ίσα όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.
Το A είναι υπο-σύνολο του B (συμβολισμός: $A \subseteq B$) όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. Ο αριθμός των στοιχείων του συνόλου A συμβολίζεται με $|A|$.
Η τομή των συνόλων A, B (τα κοινά τους στοιχεία) συμβολίζεται με $A \cap B$. Τα (μη-κενά) σύνολα A, B λέγονται *ξένα* όταν $A \cap B = \emptyset$.
Η ένωση των συνόλων A, B είναι το σύνολο $\{x \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$, και συμβολίζεται με $A \cup B$.
Η διαφορά των συνόλων A, B είναι το σύνολο των στοιχείων του A που δεν ανήκουν στο B, και συμβολίζεται με $A-B$.
Η *συμμετρική διαφορά* των συνόλων A, B είναι το σύνολο $(A-B) \cup (B-A)$, και συμβολίζεται με $A \oplus B$. Χρησιμοποιούμε τη συντόμευση $\oplus(A_1, \ldots, A_n)$ για την παράσταση $(\ldots (A_1 \oplus A_2) \oplus \ldots) \oplus A_n)$, όπου $n \geq 2$.

Μερικές φορές είναι χρήσιμο να έχουμε ένα πεπερασμένο αριθμό από αντίγραφα κάποιων στοιχείων. Γενικευμένα σύνολα αυτής της μορφής ονομάζονται *πολυ-σύνολα* (παραδείγματα: {3, 3, a, b, a, 3}, {1, 1, 2, 2,..., n, n}).
Δύο πολύ-σύνολα θεωρούνται ίσα όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, και για κάθε ένα στοιχείο τους παραθέτουν τον ίδιο αριθμό αντιγράφων.

Μια συνάρτηση d από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$, όπου $n \geq 1$, στο σύνολο A ονομάζεται *ακολουθία μήκους* n *με όρους από το* A, και συμβολίζεται $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, όπου $a_i = d(i)$.
Δύο ακολουθίες d, d′ θεωρούνται ίσες όταν έχουν το ίδιο μήκος n, και για κάθε $i=1, 2, \ldots, n$ είναι $d(i)=d'(i)$.
Υπο-ακολουθία της $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ονομάζεται οποιαδήποτε ακολουθία $(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j)$, όπου $1 \leq i \leq j \leq n$.
Αντίστροφη της $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ ονομάζεται η ακολουθία $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1)$.
Ζεύγος ονομάζεται μια ακολουθία μήκους 2.

Ερωτήματα

1. Πόσα διαφορετικά σύνολα μεγέθους $m \geq 0$ μπορούν να σχηματιστούν παίρνοντας στοιχεία από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, K\}$, όπου $K \geq 0$;
2. Αποδείξτε ότι, για οποιαδήποτε σύνολα A, B, Γ, ισχύει $A \oplus B = B \oplus A$ και $(A \oplus B) \oplus \Gamma = A \oplus (B \oplus \Gamma)$.
3. Αποδείξτε ότι, για οποιαδήποτε σύνολα A, B, είναι $|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$.
4. Πόσες διαφορετικές ακολουθίες μήκους $n \geq 1$ υπάρχουν με όρους από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, K\}$, όπου $K \geq 0$;
5. Πόσες διαφορετικές ακολουθίες μήκους $n \geq 1$ υπάρχουν με όρους από το πολυ-σύνολο $\{1, 1, 2, 2, \ldots, K, K\}$, όπου $K \geq 0$;

1.2 Σχέσεις ισοδυναμίας

Ορισμός (σχέσεις και ιδιότητες τους) Ονομάζουμε *σχέση πάνω στο σύνολο* A ένα σύνολο ζευγών με όρους από το A. Αν το ζεύγος (x, y) ανήκει στη σχέση R, λέμε ότι τα x, y *συσχετίζονται μέσω της* R (συμβολισμός: x R y).
Η σχέση R πάνω στο A ονομάζεται *ανακλαστική* αν, για κάθε x ∊ A, έχουμε x R x.
Η σχέση R πάνω στο A ονομάζεται *συμμετρική* αν, κάθε φορά που ισχύει x R y, έχουμε και y R x.
Η σχέση R πάνω στο A ονομάζεται *μεταβατική* αν, κάθε φορά που ισχύει x R y και y R z, ισχύει και x R z.
Η σχέση R ονομάζεται *σχέση ισοδυναμίας* αν είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. □

Παράδειγμα Η σχέση {(1, 1), (2, 2)} πάνω στο σύνολο {1, 2, 3} δεν είναι ανακλαστική. Η σχέση {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)} πάνω στο σύνολο {1, 2, 3} είναι ανακλαστική, αλλά δεν είναι συμμετρική ούτε μεταβατική.
Η σχέση {(m, n) | m>n} πάνω στο σύνολο {0, 1, 2,…, K}, όπου K>0, είναι μεταβατική, αλλά δεν είναι ανακλαστική ούτε συμμετρική.
Η σχέση {(m, n) | οι m, n αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν διά 3} πάνω στο σύνολο {0, 1, 2,…, K}, όπου K≥0, είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός διαμερισμού Ονομάζουμε *διαμερισμό* του συνόλου A μια οικογένεια υπο-συνόλων του A, $\{A_1,\ldots, A_n\}$ όπου $n\geq 1$, που ανά δύο δεν έχουν κοινά στοιχεία ($A_i \cap A_j=\emptyset$ αν $i\neq j$) και η ένωσή τους καλύπτει το A ($A_1 \cup \ldots \cup A_n=A$).
Ο διαμερισμός $\{A_1,\ldots, A_n\}$ του A είναι *λεπτομερέστερος* από τον διαμερισμό $\{A'_1,\ldots, A'_m\}$ του A,[1] αν για κάθε A_i υπάρχει κάποιο A'_j που περιέχει το A_i ($A_i \subseteq A'_j$). □

Παράδειγμα Ο διαμερισμός $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ του {0, 1, 2,…, K} (K≥0), όπου A_i = {m | ο ακέραιος m αφήνει υπόλοιπο i όταν διαιρεθεί διά 6}, είναι λεπτομερέστερος από τον διαμερισμό $\{A'_0, A'_1, A'_2\}$, όπου A'_i = {m | ο ακέραιος m αφήνει υπόλοιπο i όταν διαιρεθεί διά 3}.

Ορισμός κλάσεων ισοδυναμίας Ονομάζουμε *κλάσεις ισοδυναμίας* της σχέσης ισοδυναμίας R πάνω στο σύνολο $A=\{a_1, a_2,..., a_n\}$ ($n\geq 1$), τα υποσύνολα $\{[a_1]_R, [a_2]_R,..., [a_n]_R\}$ του A, όπου $[a_i]_R = \{x \mid x\ R\ a_i\}$ είναι η *κλάση ισοδυναμίας* του a_i. □

1.2.1 Πρόταση (Βασική ιδιότητα των κλάσεων ισοδυναμίας)

Για οποιαδήποτε σχέση ισοδυναμίας R πάνω σε ένα σύνολο A:

i. Αν ισχύει a R a′, θα είναι $[a]_R=[a']_R$.
ii. Αν δεν ισχύει a R a′, θα είναι $[a]_R \cap [a']_R=\emptyset$.
iii. Οι κλάσεις ισοδυναμίας της R αποτελούν διαμερισμό του A. □

Απόδειξη της 1.2.1

i. Αν $x \in [a]_R$ θα είναι x R a (ορισμός της κλάσης ισοδυναμίας του a), και λόγω της a R a′ θα είναι x R a′ (μεταβατικότητα της R) άρα $x \in [a']_R$. Αν $x \in [a']_R$ θα είναι x R a′, και επίσης a′ R a (λόγω της a R a′ και της συμμετρίας της R), οπότε x R a (μεταβατικότητα της R) και $x \in [a]_R$. Δηλαδή τα σύνολα $[a]_R$, $[a']_R$ έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

ii. Αν υπήρχε κοινό στοιχείο x των $[a]_R$ και $[a']_R$ θα ήταν a R x (από την x R a και τη συμμετρία της R) και x R a′, οπότε θα είχαμε a R a′ (μεταβατικότητα της R).

iii. Από τα (i), (ii) προκύπτει ότι δύο διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας της R δεν έχουν κοινά στοιχεία. Λόγω της ανακλαστικότητας της R θα είναι $a \in [a]_R$, για κάθε $a \in A$. □

[1] Ή, ο $\{A'_1,\ldots, A'_m\}$ είναι *γενικώτερος* από τον $\{A_1,\ldots, A_n\}$.

Παρατήρηση Η ανακλαστικότητα της R χρησιμοποιείται μόνο για να εξασφαλιστεί ότι κάθε ένα από τα στοιχεία του A θα ανήκει σε κάποια κλάση ισοδυναμίας.

Λέμε ότι ο διαμερισμός $\{A_1,\ldots, A_n\}$ του A *γενικεύει* τη σχέση R πάνω στο A, αν για οποιοδήποτε συσχετισμό x R y, τα x, y ανήκουν στο ίδιο υπο-σύνολο A_i του διαμερισμού. Για παράδειγμα, ο διαμερισμός $\{A'_0, A'_1, A'_2\}$ του $\{0, 1, 2,\ldots, K\}$ ($K\geq 0$), όπου $A'_i = \{m \mid$ ο m αφήνει υπόλοιπο i όταν διαιρεθεί διά $3\}$, γενικεύει τη σχέση $\{(m, n) \mid m>n$ και οι m, n αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν διά $6\}$ πάνω στο $\{0, 1, 2,\ldots, K\}$.

1.2.2 Πρόταση (Ελαχιστότητα των κλάσεων ισοδυναμίας)

Για οποιαδήποτε σχέση ισοδυναμίας R πάνω σε ένα σύνολο A, οι κλάσεις ισοδυναμίας της R είναι ο λεπτομερέστερος διαμερισμός του A που γενικεύει την R. □

Απόδειξη της 1.2.2
Οι κλάσεις ισοδυναμίας της R αποτελούν ένα διαμερισμό Δ του A. Αν a R a′ θα είναι $a \in [a']_R$ (ορισμός της κλάσης ισοδυναμίας), και επίσης $a' \in [a']_R$ (ανακλαστικότητα της R), επομένως τα a, a′ θα ανήκουν στο ίδιο υπο-σύνολο $[a']_R$ του Δ. Άρα ο διαμερισμός Δ γενικεύει την R.
Αν ο διαμερισμός $\Delta'=\{A'_1,\ldots, A'_m\}$ του A γενικεύει την R, και $[a]_R$ είναι μία από τις κλάσεις ισοδυναμίας της R, κάθε στοιχείο x της $[a]_R$ θα ικανοποιεί τον συσχετισμό x R a, επομένως τα x, a θα ανήκουν στο ίδιο υπο-σύνολο A'_i του Δ′. Δηλαδή $[a]_R\subseteq A'_i$, όπου A'_i το υπο-σύνολο του Δ′ που περιέχει το a. Άρα οι κλάσεις ισοδυναμίας της R είναι λεπτομερέστερος διαμερισμός από τον Δ′.
□

Ερωτήματα

1. Για κάθε μία από τις ιδιότητες: ανακλαστικότητα, συμμετρία, μεταβατικότητα, βρείτε μια σχέση που να μην την ικανοποιεί, και να ικανοποιεί τις άλλες δύο.
2. Για δεδομένο διαμερισμό $\{A_1,\ldots, A_n\}$ του συνόλου A, ορίζουμε μια σχέση R πάνω στο A ως εξής: x R y αν τα x, y ανήκουν στο ίδιο υπο-σύνολο A_i του διαμερισμού. Να επαληθευτεί ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας, και ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας της R είναι τα $A_1,\ldots, A_n$.
3. Να δειχτεί ότι, αν ο διαμερισμός $\{A_1,\ldots, A_n\}$ του A είναι λεπτομερέστερος από τον διαμερισμό $\{A'_1,\ldots, A'_m\}$ του A, κάθε A'_j θα είναι η ένωση κάποιων από τα $A_1,\ldots, A_n$.
4. Να βρεθεί διαμερισμός του $\{0, 1, 2,\ldots, K\}$ ($K\geq 0$) που να γενικεύει τη σχέση $\{(i, i+1) \mid i=0,1,2,...,K\}$.
5. Να δειχτεί ότι για οποιαδήποτε σχέση R πάνω σε ένα σύνολο A, υπάρχει διαμερισμός του A που γενικεύει την R.

1.3 Επαγωγή

Αν Π(n) είναι κάποια ιδιότητα του ακέραιου αριθμού n και a είναι κάποιος ακέραιος, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι ισχύει Π(n) για οποιονδήποτε ακέραιο $n\geq a$, με μια *επαγωγική απόδειξη* όπως παρακάτω:

- **Αρχική περίπτωση** Ισχύει Π(a).
- **Επαγωγικό βήμα** Για οποιονδήποτε ακέραιο i με $i>a$, *αν υποθέσουμε*[2] *ότι ισχύει* Π(m) *για κάθε* m *με* $a\leq m<i$, τότε ισχύει και Π(i).

Δηλαδή, από την αρχική περίπτωση παίρνουμε ότι Π(a). Από το ότι Π(a) και το επαγωγικό βήμα για i=a+1 (όπου το m παίρνει την τιμή a), παίρνουμε ότι Π(a+1). Από το ότι Π(a) και Π(a+1) και το επαγωγικό βήμα για i=a+2 (όπου το m παίρνει τις τιμές a και a+1), παίρνουμε ότι Π(a+2). Και ούτω καθ΄εξής.

[2] Η υπόθεση ότι ισχύει Π(m) για κάθε m με $a\leq m<i$ λέγεται *επαγωγική υπόθεση για τον* i.

Σημείωση Για να αποδειχθεί ότι ισχύει Π(i) στο επαγωγικό βήμα, συχνά αρκεί να χρησιμοποιηθεί μόνο η υπόθεση ότι ισχύει Π(m) για m=i–1, i–2,…, i–K, όπου K μια σταθερά ανεξάρτητη του i.

Παράδειγμα Να δειχτεί ότι ο παρακάτω αλγόριθμος υπολογίζει τη συνάρτηση $\tau(n)=n^2$ (όπου n ακέραιος, $n\geq 0$).

```
1  function T(n: integer)
2   if n=0 then   return 0
3             else   return T(n−1)+(2*n)−1
```

Θα πάρουμε ως αποδεικτέα Π(n) την ιδιότητα «αν $n\geq 0$, η κλήση T(n) του αλγορίθμου επιστρέφει την τιμή n^2». Εδώ a=0.

Αρχική περίπτωση Προφανώς ισχύει Π(0), από την γραμμή 2 του ψευδοκώδικα.

Επαγωγικό βήμα Εστω i ένας ακέραιος, i>0, για τον οποίο ισχύει η επαγωγική υπόθεση «Π(m) για κάθε m με 0≤m<i». Θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει Π(i). Αφού i>0, η κλήση T(i) θα εκτελέσει τη γραμμή 3 (όπου n=i). Από την επαγωγική υπόθεση για m=i−1, και επειδή $i-1\geq 0$, ξέρουμε ότι η αναδρομική κλήση T(i−1) επιστρέφει την τιμή $(i-1)^2$. Αρα η κλήση T(i) θα επιστρέψει την τιμή $(i-1)^2+(2*i)-1=i^2$.

Μπορούμε να περιγράψουμε μια κλάση C από πεπερασμένα αντικείμενα, για τα οποία έχουμε κάποια έννοια μεγέθους, ορίζοντας σταδιακά υπο-κλάσεις C(n) (όπου n ακέραιος, $n \geq a$) που αποτελούνται από αντικείμενα «μεγέθους» το πολύ n. Χρησιμοποιούμε έναν *επαγωγικό ορισμό* όπως παρακάτω:

- **Αρχικές περιπτώσεις** Ορίζουμε την υπο-κλάση C(a).
- **Επαγωγική κατασκευή** Για οποιονδήποτε ακέραιο i με i>a, ορίζουμε τα αντικείμενα της υπο-κλάσης C(i), *σαν συνάρτηση των αντικειμένων των υπο-κλάσεων* C(m) όπου a≤m<i.

Εξυπακούεται ότι η κλάση C προκύπτει ως ένωση των υπο-κλάσεων C(n), όπου $n\geq a$.

Σημείωση Για να κατασκευαστεί επαγωγικά η υπο-κλάση C(i), συχνά αρκεί να χρησιμοποιηθούν μόνο οι υποκλάσεις C(m) για m=i−1, i–2,…, i–K, όπου K μια σταθερά ανεξάρτητη του i.

Παράδειγμα Μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω επαγωγικό ορισμό για μια κλάση Γ από συμβολοσειρές που αντιστοιχούν σε αριθμητικές παραστάσεις:

Αρχικές περιπτώσεις Η υπο-κλάση Γ(0) περιέχει ακριβώς τις συμβολοσειρές που αποτελούνται από ένα σύμβολο μεταβλητής (όπως x, y, και ούτω καθ΄εξής) ή ένα σύμβολο ακέραιου αριθμού (όπως 0, 1, 2, και ούτω καθ΄εξής).

Επαγωγική κατασκευή Η υπο-κλάση Γ(i) αποτελείται από τις συμβολοσειρές $(\sigma_1+\sigma_2)$, $(\sigma_1-\sigma_2)$, $(\sigma_1*\sigma_2)$, όπου σ_1, σ_2 είναι οποιεσδήποτε συμβολοσειρές των υπο-κλάσεων Γ(m), 0≤m<i.

Δηλαδή, μια συμβολοσειρά ορίζεται είτε σαν ένα σύμβολο (αρχικές περιπτώσεις) είτε σαν συνδυασμός μικρότερων συμβολοσειρών (επαγωγική κατασκευή).

Μπορούμε να επαληθεύσουμε μια ιδιότητα Π μιάς κλάσης C που έχει οριστεί επαγωγικά όπως παραπάνω, αποδεικνύοντας με επαγωγή ότι ισχύει η ιδιότητα Π(n) ≡ «η υπο-κλάση C(n) έχει την ιδιότητα Π», για οποιονδήποτε ακέραιο $n\geq a$. Η αντίστοιχη επαγωγή θα είναι η εξής:

- **Αρχική περίπτωση** Η C(a) έχει την ιδιότητα Π.
- **Επαγωγικό βήμα** Για οποιονδήποτε ακέραιο i με i>a, *αν υποθέσουμε ότι η* C(m) *έχει την ιδιότητα* Π *για κάθε* m *με* a≤m<i, τότε και η C(i) έχει την ιδιότητα Π.

Φυσικά, πρέπει για την συγκεκριμένη ιδιότητα Π να είναι γνωστό ότι, αν ισχύει για κάθε μία από τις C(n) ($n\geq a$), θα ισχύει και για την ένωσή τους, C.

<u>Παράδειγμα</u> Μπορούμε να αποδείξουμε με επαγωγή ότι οι συμβολοσειρές της κλάσης Γ που ορίστηκε προηγουμένως έχουν την εξής ιδιότητα Π: ο αριθμός των εμφανίσεων του συμβόλου «)» στην συμβολοσειρά είναι ίσος με τον αριθμό των εμφανίσεων του «(».
Αρχική περίπτωση Κάθε συμβολοσειρά (της υπο-κλάσης Γ(0)) που αποτελείται από ένα σύμβολο μεταβλητής ή ένα σύμβολο ακέραιου αριθμού, έχει προφανώς την ιδιότητα Π.
Επαγωγικό βήμα Αν υποθέσουμε ότι οι συμβολοσειρές σ_1, σ_2 (των υπο-κλάσεων Γ(m), $0 \leq m < i$) έχουν την ιδιότητα Π, τότε προφανώς και οι συμβολοσειρές $(\sigma_1+\sigma_2)$, $(\sigma_1-\sigma_2)$, $(\sigma_1*\sigma_2)$ (της υπο-κλάσης Γ(i)) θα έχουν την ιδιότητα Π.

Με βάση τον επαγωγικό ορισμό μιάς κλάσης C μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση F πάνω στα στοιχεία της C, χρησιμοποιώντας τις υπο-κλάσεις C(n) ($n \geq a$) με τον εξής αναδρομικό τρόπο:

- **Αρχικοποίηση** Ορίζουμε την F στα στοιχεία της C(a).
- **Αναδρομική κλήση** Για οποιονδήποτε ακέραιο i με $i>a$, ορίζουμε την F στα στοιχεία της C(i) *θεωρώντας γνωστές τις τιμές της* F *στα στοιχεία κάθε μιάς από τις* C(m), $a \leq m < i$.

<u>Παράδειγμα</u> Για μιά συμβολοσειρά σ στην κλάση Γ που ορίστηκε προηγουμένως, μπορούμε να ορίσουμε αναδρομικά το *βάθος εμφωλιασμού* τής σ, β(σ):
Αρχικοποίηση Αν η συμβολοσειρά σ είναι στην υπο-κλάση Γ(0), δηλαδή αποτελείται από ένα σύμβολο μεταβλητής ή ένα σύμβολο ακέραιου αριθμού, ορίζουμε β(σ)=0.
Αναδρομική κλήση Για τις συμβολοσειρές $(\sigma_1+\sigma_2)$, $(\sigma_1-\sigma_2)$, $(\sigma_1*\sigma_2)$ της υπο-κλάσης Γ(i), όπου οι σ_1, σ_2 είναι συμβολοσειρές των υπο-κλάσεων Γ(m), $0 \leq m < i$, ορίζουμε: $\beta(\sigma_1+\sigma_2) = \beta(\sigma_1-\sigma_2) = \beta(\sigma_1*\sigma_2) = 1+\max\{\beta(\sigma_1), \beta(\sigma_2)\}$.

Ερωτήματα

1. Γράψτε έναν αλγόριθμο που να υπολογίζει τη συνάρτηση $\tau(n)=n^3$ (n ακέραιος, $n \geq 0$) εκτελώντας μόνο προσθέσεις και αφαιρέσεις. Αποδείξτε ότι ο αλγόριθμός σας είναι σωστός.
2. Είναι δυνατό να κατασκευαστεί η υπο-κλάση Γ(i) των συμβολοσειρών που αντιστοιχούν σε αριθμητικές παραστάσεις, χρησιμοποιώντας μόνο την υποκλάση Γ(i–1);
3. Βρείτε κλάσεις C(n), $n \geq 0$, και μια ιδιότητα Π που να ισχύει για κάθε μία από τις C(n) αλλά να μην ισχύει για την ένωση τους.
4. Το *συμμετρικό-μεταβατικό κλείσιμο* μιάς σχέσης R πάνω στο σύνολο Α ορίζεται επαγωγικά ως η εξής σχέση Q πάνω στο Α:
   Αρχικές περιπτώσεις Η Q(0) είναι η R.
   Επαγωγική κατασκευή Η Q(i) αποτελείται από όλα τα ζεύγη (y, x), όπου το (x, y) είναι ζεύγος κάποιας Q(m) ($0 \leq m < i$), και από όλα τα ζεύγη (x′, z′) όπου, για κάποιο κατάλληλο y′, τα (x′, y′) και (y′, z′) είναι ζεύγη κάποιων Q(m), Q(m′) αντίστοιχα ($0 \leq m < i$, $0 \leq m' < i$).
   i. Να αποδειχτεί ότι $R \subseteq Q$.
   ii. Να αποδειχτεί ότι, αν η S είναι μια συμμετρική και μεταβατική σχέση και $R \subseteq S$, θα είναι $Q \subseteq S$.
   iii. Να αποδειχτεί ότι (x, y) ϵ Q αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία $(a_1, a_2, ..., a_n)$ με $x=a_1$ και $y=a_n$, όπου (a_i, a_{i+1}) ϵ R ή (a_{i+1}, a_i) ϵ R, για κάθε i=1, 2,…, n–1.
   iv Μπορείτε να τροποποιήσετε την κατασκευή της σχέσης Q(i) έτσι ώστε να χρησιμοποιεί μόνο τη σχέση Q(i–1), και να προκύπτει η ίδια σχέση Q;
5. Γράψτε σε ψευδοκώδικα έναν αλγόριθμο που, για μια δεδομένη συμβολοσειρά σ, υπολογίζει το β(σ) (αν η σ είναι στην κλάση Γ), ή αναφέρει ότι η σ δεν είναι στην κλάση Γ (στην αντίθετη περίπτωση). Αποδείξτε ότι ο αλγόριθμός σας είναι σωστός, και αναλύστε την αποδοτικότητά του.

1.4 Ασκήσεις

1. Λέμε ότι το A είναι *ένα ελάχιστο σύνολο που έχει την ιδιότητα* Π, αν η Π ισχύει για το A, και επίσης για οποιοδήποτε σύνολο X όπου ισχύει η Π είναι $A \subseteq X$. Να δειχτεί ότι, αν τα A, A′ είναι ελάχιστα σύνολα που έχουν την Π, θα είναι $A=A'$.
2. Το A είναι ένα πολυ-σύνολο, και A′ είναι το σύνολο που περιέχει ακριβώς ένα αντίγραφο από κάθε στοιχείο του A (και κανένα άλλο στοιχείο). Ποιά διαφορά υπάρχει ανάμεσα σε μια ακολουθία με όρους από το A, και σε μια ακολουθία με όρους από το A′; Ποιά διαφορά υπάρχει ανάμεσα σε μια συνάρτηση ένα-προς-ένα από το $\{1, 2,\ldots, n\}$ ($n \geq 2$) στο A, και σε μια συνάρτηση ένα-προς-ένα από το $\{1, 2,\ldots, n\}$ στο A′;
3. Οι R_1, R_2 είναι συμμετρικές σχέσεις πάνω στο σύνολο A. Να αποδειχτεί ότι η σχέση $R=R_1 \cup R_2$ είναι συμμετρική.
4. Οι R_1, R_2 είναι μεταβατικές σχέσεις πάνω στο σύνολο A. Ισχύει ότι η σχέση $R=R_1 \cup R_2$ είναι μεταβατική;
5. Η R είναι μια συμμετρική και μεταβατική σχέση πάνω στο σύνολο A. Να αποδειχτεί ότι η σχέση $R_\alpha=R \cup \{(x, x) \mid x \in A\}$ είναι σχέση ισοδυναμίας.
6. Να δειχτεί ότι το συμμετρικό-μεταβατικό κλείσιμο Q μιάς σχέσης R είναι συμμετρική και μεταβατική σχέση[3].
7. Ο ορισμός $[a]_R=\{x \mid x\ R\ a\}$ έχει νόημα ακόμα και όταν η R δεν είναι σχέση ισοδυναμίας. Δείξτε ότι κανένα από τα συμπεράσματα της Πρότασης 1.2.1 δεν ισχύει χωρίς την υπόθεση ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας.
8. Αποδείξτε με επαγωγή ότι οι συμβολοσειρές της κλάσης Γ που αντιστοιχούν σε αριθμητικές παραστάσεις έχουν την εξής ιδιότητα Θ: καθώς διαβάζεται μια συμβολοσειρά από αριστερά προς τα δεξιά, ο αριθμός των εμφανίσεων του συμβόλου «)» που έχουν διαβαστεί δεν ξεπερνάει ποτέ τον αριθμό των εμφανίσεων του συμβόλου «(» που έχουν διαβαστεί.
9. i. Αποδείξτε με επαγωγή ότι η παρακάτω κλάση Γ′ από συμβολοσειρές που αντιστοιχούν σε αριθμητικές παραστάσεις, περιέχεται στην κλάση Γ.
   Αρχικές περιπτώσεις Η Γ′(0) περιέχει ακριβώς τις συμβολοσειρές που αποτελούνται από ένα σύμβολο μεταβλητής (όπως x, y, και ούτω καθ΄εξής) ή ένα σύμβολο ακέραιου αριθμού (όπως 0, 1, 2, και ούτω καθ΄εξής).
   Επαγωγική κατασκευή Η Γ′(i) αποτελείται από τις συμβολοσειρές $(\sigma_1+\sigma_2)$, $(\sigma_1-\sigma_2)$, $(\sigma_1*\sigma_2)$, όπου σ_1, σ_2 είναι οποιεσδήποτε συμβολοσειρές της Γ′(i–1), $0<i$.
   ii. Είναι σωστό ότι οι κλάσεις Γ, Γ′ ταυτίζονται;
10. Μπορείτε να τροποποιήσετε την κατασκευή της Γ′(i) από την Γ′(i–1) στην Άσκηση 9, έτσι ώστε οι κλάσεις Γ, Γ′ να ταυτίζονται;
11. i. Αποδείξτε με επαγωγή ότι η παρακάτω σχέση Q′ περιέχεται στο συμμετρικό-μεταβατικό κλείσιμο Q της σχέσης R.
    Αρχικές περιπτώσεις Η Q′(0) είναι η R.
    Επαγωγική κατασκευή Η Q′(i) αποτελείται από όλα τα ζεύγη (y, x), όπου (x, y) είναι ζεύγος της Q′(i–1), και από όλα τα ζεύγη (x′, z′), όπου, για κάποιο κατάλληλο y′, τα (x′, y′) και (y′, z′) είναι ζεύγη της Q′(i–1) ($0<i$).
    ii. Είναι σωστό ότι οι σχέσεις Q, Q′ ταυτίζονται;

[3] Επειδή ισχύει επίσης ότι, για κάθε συμμετρική και μεταβατική σχέση S με $R \subseteq S$, είναι και $Q \subseteq S$, λέμε ότι η Q είναι *η ελάχιστη συμμετρική και μεταβατική σχέση που περιέχει την* R).

2 Συνεκτικότητα

2.1 Γραφήματα

<u>Ορισμός γραφήματος</u> Ένα *γράφημα* G=(V, E) αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο *κορυφών* V (που δεν είναι κενό), και ένα πεπερασμένο σύνολο *ακμών* E. Κάθε ακμή e είναι είτε ένα σύνολο δύο κορυφών, e={a, b} όπου a≠b, οπότε χαρακτηρίζεται *μη-κατευθυνόμενη*, ή ένα ζεύγος κορυφών, e=(a, b), οπότε χαρακτηρίζεται *κατευθυνόμενη*.
Μια ακμή, {a, b} είτε (a, b), *προσπίπτει* στις κορυφές a, b, οι οποίες ονομάζονται *άκρα* της ακμής. Η κορυφή a ονομάζεται *αρχή* της κατευθυνόμενης ακμής (a, b), και η κορυφή b *τέλος* της.
Οι κορυφές a, b ονομάζονται *γειτονικές* όταν το γράφημα έχει μια ακμή με άκρα τις a, b. □

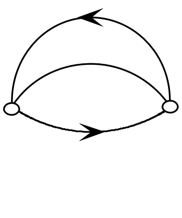
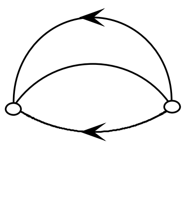
<u>Παρατήρηση</u> Η μη-κατευθυνόμενη ακμή {a, b} είναι ίδια με την μη-κατευθυνόμενη ακμή {b, a}. Η κατευθυνόμενη ακμή (a, b) είναι διαφορετική από την κατευθυνόμενη ακμή (b, a), αν a≠b.

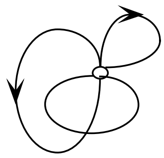
<u>Σημείωση</u> Μιά μη-κατευθυνόμενη ακμή {a, b} παριστάνεται γραφικά με μια συνεχή γραμμή (οποιουδήποτε σχήματος) ανάμεσα στα άκρα της, 

. Μιά κατευθυνόμενη ακμή (a, b) παριστάνεται γραφικά με ένα βέλος 

από την αρχή της προς το τέλος της.
Ο *βαθμός* μιάς κορυφής a, φ(a), είναι ο αριθμός των ακμών που προσπίπτουν στην a.
Ο *έξω-βαθμός* μιάς κορυφής a, φ^{-}(a), είναι ο αριθμός των κατευθυνόμενων ακμών με αρχή την a.
Ο *έσω-βαθμός* μιάς κορυφής a, φ^{+}(a), είναι ο αριθμός των κατευθυνόμενων ακμών με τέλος την a.
Μια κορυφή στην οποία δεν προσπίπτει καμμία ακμή (έχει βαθμό 0) ονομάζεται *απομονωμένη*.
Με *αφαίρεση της ακμής* e από το γράφημα G=(V, E) παίρνουμε το γράφημα (V, E−{e}), το οποίο συμβολίζουμε G−e.
Με *αφαίρεση της κορυφής* a από το γράφημα G=(V, E) παίρνουμε το γράφημα (V−{a}, E−{e | η ακμή e προσπίπτει στο a}), το οποίο συμβολίζουμε G−a.
Ένα γράφημα όπου όλες οι ακμές είναι κατευθυνόμενες (αντίστοιχα, μη-κατευθυνόμενες) ονομάζεται *κατευθυνόμενο* (αντίστοιχα, *μη-κατευθυνόμενο*).
Το γράφημα G′=(V′, E′) λέγεται *υπο-γράφημα* του G=(V, E) όταν V′⊆V και E′⊆E. Το G′=(V′, E′) λέγεται *επαγόμενο υπο-γράφημα* του G=(V, E) όταν V′⊆V, και το E′ περιέχει ακριβώς τις ακμές του G που έχουν και τα δύο άκρα τους στο V′.
Μερικές φορές είναι χρήσιμο να έχουμε ένα πεπερασμένο αριθμό από αντίγραφα κάποιων ακμών (ισοδύναμα, οι ακμές να αποτελούν πολυ-σύνολο αντί για σύνολο). Επίσης, μερικές φορές μπορεί να ταυτίζονται τα άκρα μιάς μη-κατευθυνόμενης ακμής (οπότε προκύπτει *βρόχος*). Γενικευμένα γραφήματα αυτής της μορφής ονομάζονται *πολυ-γραφήματα*.

Ερωτήματα

1. Αποδείξτε ότι ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που έχει μόνο μία κορυφή δεν έχει καμμία ακμή. Πόσες ακμές μπορεί να έχει ένα κατευθυνόμενο γράφημα που έχει μόνο μία κορυφή;
2. Πως ορίζεται μαθηματικά ένα πολυ-γράφημα; Πως ορίζεται ο (έξω-, έσω-)βαθμός μιάς κορυφής ενός πολυ-γραφήματος;
3. Είναι σωστό να ονομαστούν γραφήματα το  και το  ;

4. Πως περιγράφεται μαθηματικά το  ;
5. Πώς μπορούν να παρασταθούν υπολογιστικά ένα γράφημα και ένα πολυ-γράφημα;
6. Μια σχέση R πάνω σε ένα σύνολο A μπορεί να παρασταθεί μέσω ενός κατευθυνόμενου πολυ-γραφήματος $G_R=(A, E)$, όπου $(x, y) \in E$ αν και μόνο αν $x R y$. Ποια είναι η ειδική μορφή του G_R όταν η R είναι ανακλαστική (αντίστοιχα, συμμετρική, μεταβατική, σχέση ισοδυναμίας);

2.2 Διαδρομές

Λέμε ότι διατρέχουμε διαδρομή σε ένα γράφημα, όταν ακολουθούμε ακμές έτσι ώστε κάθε μία τους να αρχίζει να διατρέχεται από την κορυφή όπου τελειώνει η αμέσως προηγούμενη. Μπορούμε να διατρέχουμε μια μη-κατευθυνόμενη ακμή προς οποιαδήποτε από τις δύο δυνατές κατευθύνσεις. Μια κατευθυνόμενη ακμή μπορεί να διατρέχεται μόνο από την αρχή της προς το τέλος της.

Ορισμός διαδρομής Ονομάζουμε *διαδρομή* μια ακολουθία $(a_1, e_1, a_2, e_2, a_3, \ldots, a_n, e_n, a_{n+1})$ με $n \geq 1$, όπου κάθε a_i είναι κορυφή, κάθε e_i είναι ακμή, και είναι $e_i=(a_i, a_{i+1})$ ή $e_i=\{a_i, a_{i+1}\}$, για κάθε $i=1, 2, \ldots, n$.
Το *μήκος* της διαδρομής είναι ο αριθμός n.
Οι κορυφές a_1, a_{n+1} είναι τα *άκρα* της διαδρομής, και ονομάζονται *αρχή* και *τέλος* της αντίστοιχα. Όταν τα άκρα της ταυτίζονται η διαδρομή λέγεται *κλειστή*, αλλοιώς είναι *ανοιχτή*. □

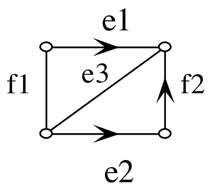
Ορισμός ίχνους Ονομάζουμε *ίχνος* μια διαδρομή $(a_1, e_1, a_2, \ldots, a_n, e_n, a_{n+1})$ που δεν επαναλαμβάνει ακμές (δηλαδή, οι όροι της ακολουθίας που είναι ακμές είναι διαφορετικοί μεταξύ τους). □

Ορισμός μονοπατιού Ονομάζουμε *μονοπάτι* ένα ίχνος $(a_1, e_1, a_2, \ldots, a_n, e_n, a_{n+1})$ που δεν επαναλαμβάνει κορυφές (δηλαδή, οι όροι της ακολουθίας που είναι κορυφές είναι διαφορετικοί μεταξύ τους). □

Παρατήρηση Τα άκρα ενός μονοπατιού είναι πάντα διαφορετικά.

Ορισμός κέντρου Αν $(a_1, e_1, a_2, \ldots, a_{2n}, e_{2n}, a_{2n+1})$ είναι ένα μονοπάτι με *μέγιστο μήκος* σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G, η κορυφή a_{n+1} είναι *κέντρο* του G.
Αν $(a_1, e_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}, e_{2n-1}, a_{2n})$ είναι ένα μονοπάτι με μέγιστο μήκος σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G, οι κορυφές a_n, a_{n+1} είναι *κέντρα* του G. □

Ορισμός κύκλου Ονομάζουμε *κύκλο* ένα κλειστό ίχνος $(a_1, e_1, a_2, \ldots, a_n, e_n, a_{n+1})$ που δεν επαναλαμβάνει κορυφές, εκτός από την αρχική a_1 που ταυτίζεται με την τελική a_{n+1}.
Οι κύκλοι $(a_1, e_1, a_2, \ldots, a_n, e_n, a_{n+1})$ και $(a_i, e_i, a_{i+1}, \ldots, a_n, e_n, a_{n+1}, a_1, e_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, e_{i-1}, a_i)$ που προκύπτουν ο ένας από τον άλλο με κυκλική μετάθεση, θεωρούνται ταυτόσημοι. □



<u>Παράδειγμα</u> Αν διατρέξουμε τις ακμές f1, e1, f2 δεν σχηματίζουμε διαδρομή. Αν διατρέξουμε τις ακμές f1, e3, f2 δεν σχηματίζουμε διαδρομή.
Διατρέχοντας τις ακμές e1, e3, e2, f2, e3, f1 έχουμε διαδρομή, αλλά όχι ίχνος.
Διατρέχοντας τις ακμές f2, e3, f1, e1 έχουμε ίχνος, αλλά όχι μονοπάτι.
Αν διατρέξουμε τις ακμές e1, e3, e2 σχηματίζουμε μονοπάτι.
Αν διατρέξουμε τις ακμές e1, e3, f1 ή τις f2, e3, e2 έχουμε κύκλους. Οι κύκλοι που προκύπτουν διατρέχοντας τις ακμές e1, e3, f1 είτε τις ακμές f1, e1, e3 είναι ταυτόσημοι.

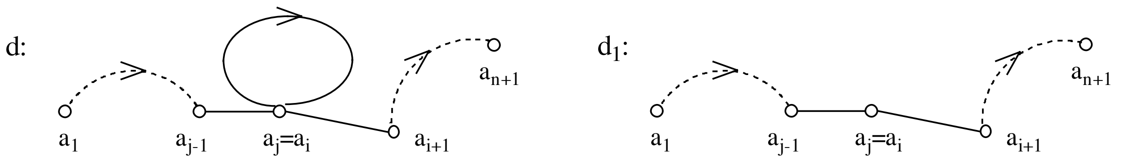
<u>Σημείωση</u> Ένα γράφημα που δεν περιέχει κύκλο ονομάζεται *άκυκλο*.

<u>Σημείωση</u> Μια διαδρομή (ίχνος, μονοπάτι, κύκλος) σε πολυ-γράφημα ορίζεται παρόμοια. Κάθε όρος e_i της ακολουθίας $(a_1, e_1, ..., a_n, e_n, a_{n+1})$ πρέπει να είναι κάποιο από τα αντίγραφα της αντίστοιχης ακμής. Ενα ίχνος σε πολυ-γράφημα δεν πρέπει να επαναλαμβάνει μια ακμή περισσότερες φορές από όσα αντίγραφά της παρατίθενται στο πολυ-γράφημα.

2.2.1 Πρόταση (Απαλοιφή των επαναλήψεων κορυφών σε μια διαδρομή)

Για οποιαδήποτε διαδρομή $d=(a_1, e_1, a_2, ..., a_n, e_n, a_{n+1})$ υπάρχει μια διαδρομή d' στο ίδιο γράφημα, με την ίδια αρχή a_1 και το ίδιο τέλος a_{n+1}, που δεν επαναλαμβάνει καμμία κορυφή — εκτός αν $a_1=a_{n+1}$, οπότε η d' επαναλαμβάνει μόνο την αρχική κορυφή (που ταυτίζεται με την τελική). □

<u>Απόδειξη της 2.2.1</u>
Διατρέχουμε τις ακμές της d μέχρι να συναντήσουμε *για πρώτη φορά* κάποια κορυφή a_i την οποία έχουμε ξαναδεί. Δηλαδή, βρίσκουμε το ελάχιστο i για το οποίο $a_i=a_j$, για κάποια κορυφή a_j με $j<i$. Αν δεν υπάρχει τέτοια κορυφή a_i μπορούμε να πάρουμε $d'=d$. Επίσης, αν $a_i=a_{n+1}$ και $a_j=a_1$ μπορούμε να πάρουμε $d'=d$, αφού η διαδρομή d δεν επαναλαμβάνει καμμία κορυφή, εκτός από την αρχική a_1 που ταυτίζεται με την τελική a_{n+1}.
Σε κάθε άλλη περίπτωση, παίρνουμε $d_1=(a_1, e_1, a_2, ..., a_{j-1}, e_{j-1}, a_j, e_i, a_{i+1}, \ldots, a_n, e_n, a_{n+1})$



(στο σχήμα τα βέλη υποδηλώνουν τη σειρά με την οποία διατρέχονται οι ακμές των διαδρομών).
Αν η διαδρομή d_1 επαναλαμβάνει κορυφές εκτελούμε την ίδια διαδικασία στην d_1. Αν προκύψει ότι δεν μπορούμε να πάρουμε $d'=d_1$, μετασχηματίζουμε την d_1 όπως παραπάνω σε μια επόμενη διαδρομή d_2, και ούτω καθ΄εξής. Αφού κάθε φορά παίρνουμε μια διαδρομή μικρότερου μήκους, η διαδικασία θα καταλήξει σε μια διαδρομή d_p όπου θα μπορούμε να πάρουμε $d'=d_p$. □

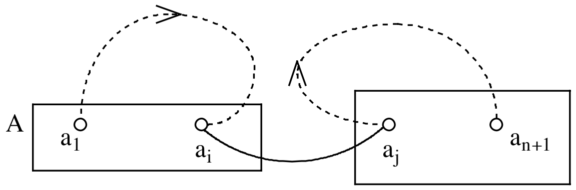
<u>Παρατήρηση</u> Αν τα άκρα της διαδρομής d είναι διαφορετικά, η διαδρομή d' θα είναι μονοπάτι.

2.2.2 Πρόταση (Προσβασιμότητα μέσω μονοπατιού)

Για οποιαδήποτε ξένα υπο-σύνολα A, B των κορυφών ενός γραφήματος G, αν υπάρχει διαδρομή με αρχή στο A και τέλος στο B, θα υπάρχει μονοπάτι μ στο G με αρχή στο A και τέλος στο B, χωρίς καμμία άλλη κορυφή στο A∪B. □

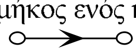
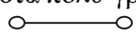
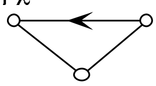
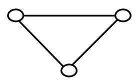
Απόδειξη της 2.2.2

Παίρνουμε μια διαδρομή $d=(a_1, e_1, a_2,..., a_n, e_n, a_{n+1})$ στο G με αρχή $a_1 \in A$ και τέλος $a_{n+1} \in B$.



Διατρέχουμε τις ακμές της d, αρχίζοντας από την κορυφή a_1, μέχρι να συναντήσουμε *για τελευταία φορά* κορυφή $a_i \in A$. Δηλαδή, βρίσκουμε το μέγιστο i για το οποίο $a_i \in A$. Συνεχίζουμε να διατρέχουμε τις ακμές της d, από την κορυφή a_i προς την a_{n+1}, μέχρι να συναντήσουμε *για πρώτη φορά* κορυφή $a_j \in B$. Δηλαδή, βρίσκουμε το ελάχιστο $j>i$ για το οποίο $a_j \in B$. Η διαδρομή $d'=(a_i, e_i, a_{i+1},..., a_{j-1}, e_{j-1}, a_j)$ έχει αρχή στο A και τέλος στο B, και δεν έχει άλλη κορυφή στο $A \cup B$ (από την επιλογή των a_i, a_j. Από την Απόδειξη της Πρότασης 2.2.1, μπορούμε να μετασχηματίσουμε τη διαδρομή d′ σε μονοπάτι, που θα έχει αρχή $a_i \in A$, τέλος $a_j \in B$, και δεν θα έχει άλλη κορυφή στο $A \cup B$. □

Ερωτήματα

1. Διατυπώστε τους ορισμούς διαδρομής, ίχνους, μονοπατιού και κύκλου, για πολυ-γραφήματα.
2. Αποδείξτε ότι, αν οι $d_1=(a_1, e_1, a_2,..., a_n, e_n, a_{n+1})$ και $d_2=(a'_1, e'_1, a'_2,..., a'_m, e'_m, a'_{m+1})$ είναι διαδρομές, και $a'_1=a_{n+1}$, η ακολουθία $d=(a_1, e_1, a_2,..., a_n, e_n, a'_1, e'_1, a'_2,..., a'_m, e'_m, a'_{m+1})$ θα είναι διαδρομή. Αν οι d_1, d_2 είναι ίχνη, είναι σωστό ότι η d θα είναι ίχνος; Αν οι d_1, d_2 είναι μονοπάτια, είναι σωστό ότι η d θα είναι μονοπάτι;
3. Αποδείξτε ότι, αν η ακολουθία $(a_1, e_1, a_2,..., a_n, e_n, a_{n+1})$ είναι μια διαδρομή σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, η αντίστροφη ακολουθία $(a_{n+1}, e_n, a_n,..., a_2, e_1, a_1)$ είναι επίσης διαδρομή.
4. Αποδείξτε ότι σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα δεν μπορεί να υπάρξει κύκλος με μήκος μικρότερο από 3. Ποιό είναι το μικρότερο δυνατό μήκος ενός κύκλου, στα κατευθυνόμενα γραφήματα; Ποιό είναι το μικρότερο δυνατό μήκος ενός κύκλου στα πολυ-γραφήματα;
5. Πόσες διαφορετικές διαδρομές υπάρχουν στο  και στο ; Πόσοι διαφορετικοί κύκλοι υπάρχουν στο  και στο ;
6. Είναι σωστό ότι ένα γράφημα που έχει κλειστή διαδρομή, θα έχει και κύκλο;
   Είναι σωστό ότι ένα γράφημα που έχει ανοιχτή διαδρομή που δεν είναι μονοπάτι, θα έχει και κύκλο;
7. Πως μπορεί να υλοποιηθεί η διαδικασία που περιγράφεται στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.1;
8. Αποδείξτε τα παρακάτω, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.1:
   Αν ένα γράφημα έχει κλειστό ίχνος, θα έχει και κύκλο.
   Αν ένα γράφημα έχει ανοιχτό ίχνος που δεν είναι μονοπάτι, θα έχει και κύκλο.
9. Αποδείξτε τα παρακάτω, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.1:
   Αν ένα κατευθυνόμενο γράφημα έχει κλειστή διαδρομή, θα έχει και κύκλο.
   Αν ένα κατευθυνόμενο γράφημα έχει ανοιχτή διαδρομή που δεν είναι μονοπάτι, θα έχει και κύκλο.
10. Μπορείτε να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.1, ότι για οποιαδήποτε διαδρομή $d=(a_1, e_1, a_2,..., a_n, e_n, a_{n+1})$ όπου $a_1=a_{n+1}$, υπάρχει μια διαδρομή d′ στο ίδιο γράφημα, με την ίδια αρχή a_1 και το ίδιο τέλος a_{n+1}, που είναι κύκλος;

11. Αποδείξτε ότι, για οποιαδήποτε ξένα υπο-σύνολα A, B των κορυφών ενός μη-κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος G, υπάρχει μονοπάτι μ στο G με αρχή στο A και τέλος στο B, χωρίς καμμία άλλη κορυφή στο A∪B.

2.3 Συνεκτικές συνιστώσες

Ορισμός προσβασιμότητας Οι κορυφές a, b ενός γραφήματος συσχετίζονται μέσω της *προσβασιμότητας*, R_δ, αν υπάρχει διαδρομή με αρχή το a και τέλος το b. □

Παρατήρηση Από την Πρόταση 2.2.1 μπορούμε να δούμε ότι, για οποιεσδήποτε διαφορετικές κορυφές a, b ενός γραφήματος, ισχύει a R_δ b αν και μόνο αν υπάρχει μονοπάτι με αρχή το a και τέλος το b.

Ορισμός συνεκτικών συνιστωσών Σε κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα G=(V, E) η σχέση $\{(x,y) \mid x\ R_\delta\ y$ ή $x=y\}$ πάνω στο V είναι σχέση ισοδυναμίας, και οι κλάσεις ισοδυναμίας της αποτελούν ένα διαμερισμό $\{V_1,\ldots, V_n\}$ του V. Τα επαγόμενα υπο-γραφήματα του G με σύνολα κορυφών τα $V_1,\ldots, V_n$ ονομάζονται *συνεκτικές συνιστώσες* του G. Η *συνεκτική συνιστώσα μιάς κορυφής* a του G είναι το (μοναδικό) σύνολο V_i του V που περιέχει την a.
Το G λέγεται *συνεκτικό* όταν έχει μόνο μία συνεκτική συνιστώσα. □

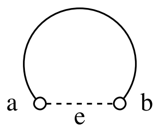
Παρατήρηση Αν οι κορυφές a, b ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G=(V, E) είναι σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G, δεν ισχύει a R_δ b και επομένως δεν υπάρχει διαδρομή με άκρα τις a και b. Από την πρόταση 1.2.2, τα σύνολα κορυφών των συνεκτικών συνιστωσών του G είναι ο λεπτομερέστερος διαμερισμός του V με την παραπάνω ιδιότητα.

Ορισμός γέφυρας Μια ακμή e ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G είναι *γέφυρα* αν το G−e έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το G. □

2.3.1 Πρόταση (Χαρακτηρισμός γέφυρας)

Η ακμή e του μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G είναι γέφυρα αν και μόνο αν δεν υπάρχει κύκλος που να περιέχει την e. □

Απόδειξη της 2.3.1 Αν η e είναι γέφυρα, τα άκρα a, b της e βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G−e (Άσκηση 8), και επομένως δεν υπάρχει διαδρομή με άκρα τις a, b στο G−e. Αρα δεν μπορεί να υπάρχει κύκλος που να περιέχει την e στο G, αφού τότε θα υπήρχε μονοπάτι με άκρα τις a, b που δεν θα διέτρεχε την ακμή e, και επομένως το ίδιο μονοπάτι θα υπήρχε και στο G−e.



Αντίστροφα, αν η e δεν είναι γέφυρα, τα άκρα a, b της e βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G−e (Άσκηση 5), επομένως υπάρχει διαδρομή με άκρα τις a, b στο G−e. Αρα υπάρχει μονοπάτι μ με άκρα τις a, b στο G−e (Πρόταση 2.2.1), και επομένως υπάρχει κύκλος που περιέχει την e στο G, αφού το μονοπάτι μ δεν διατρέχει την ακμή e (το μ υπάρχει και στο G−e). □

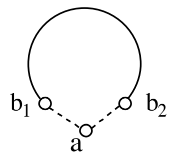
Ορισμός κομβικού σημείου Μια κορυφή a ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G είναι *κομβικό σημείο* αν το G−a έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το G. □

2.3.2 Πρόταση (Χαρακτηρισμός κομβικού σημείου)

Η κορυφή a του μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G είναι κομβικό σημείο αν και μόνο αν υπάρχουν δύο διαφορετικές ακμές που προσπίπτουν στην a, και δεν περιέχονται στον ίδιο κύκλο. □

Απόδειξη της 2.3.2

Αν η κορυφή a του G είναι κομβικό σημείο, υπάρχουν δύο γειτονικές κορυφές b_1, b_2 της a που βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G−a (Άσκηση 9). Επομένως δεν υπάρχει διαδρομή με άκρα τις b_1, b_2 στο G−a. Αρα δεν μπορεί να υπάρχει κύκλος που να περιέχει τις ακμές $\{a, b_1\}$, $\{a, b_2\}$ στο G, αφού τότε θα υπήρχε μονοπάτι με άκρα τις b_1, b_2 που δεν θα περιείχε την κορυφή a, και επομένως το ίδιο μονοπάτι θα υπήρχε και στο G−a.

Αντίστροφα, αν η κορυφή a του G δεν είναι κομβικό σημείο 

, οποιεσδήποτε γειτονικές κορυφές b_1, b_2 της a βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G−a (Άσκηση 6). Επομένως, αν $b_1 \neq b_2$ υπάρχει διαδρομή με άκρα τις b_1, b_2 στο G−a, αρα υπάρχει μονοπάτι μ με άκρα τις b_1, b_2 στο G−a (Πρόταση 2.2.1). Επομένως υπάρχει κύκλος που περιέχει τις ακμές $\{a, b_1\}$, $\{a, b_2\}$ στο G, αφού το μονοπάτι μ δεν περιέχει την κορυφή a (το μ υπάρχει και στο G−a). □

Ερωτήματα

1. Αποδείξτε ότι, για οποιεσδήποτε διαφορετικές κορυφές a, b ενός γραφήματος, a R_δ b αν και μόνο αν υπάρχει ίχνος με αρχή το a και τέλος το b.
2. Αποδείξτε ότι η προσβασιμότητα R_δ είναι μεταβατική, και είναι συμμετρική αν και μόνο αν το γράφημα είναι μη-κατευθυνόμενο. Σε ποιες περιπτώσεις είναι ανακλαστική;
3. Αποδείξτε ότι: αν το G είναι συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα και a, b είναι δύο διαφορετικές κορυφές του G, θα υπάρχει μονοπάτι στο G με άκρα τις a, b.
4. Αποδείξτε ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος είναι συνεκτικό γράφημα.
5. Ποια είναι η συνεκτική συνιστώσα μιάς απομονωμένης κορυφής;
6. Αποδείξτε ότι ένα γράφημα που αποτελείται από μία κορυφή και καμμία ακμή είναι συνεκτικό.
7. Αποδείξτε ότι η σχέση που χρησιμοποιεί ο ορισμός των συνεκτικών συνιστωσών είναι σχέση ισοδυναμίας. Τι θα έδινε αυτός ο ορισμός αν εφαρμοζόταν σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα; Αν εφαρμοζόταν σε ένα μη-κατευθυνόμενο πολυ-γράφημα;
8. Για τα μη-κατευθυνόμενα γραφήματα G=(V, E) και G′=(V, E′) ισχύει ότι, αν a, b είναι οποιεσδήποτε διαφορετικές κορυφές στο V, υπάρχει διαδρομή με άκρα τις a, b στο G αν και μόνο αν υπάρχει διαδρομή με άκρα τις a, b στο G′. Αποδείξτε ότι τα G, G′ έχουν τον ίδιο αριθμό συνεκτικών συνιστωσών.
9. Για οποιοδήποτε n>0, βρείτε ένα συνεκτικό γράφημα G_n με n κορυφές, που κάθε ακμή του να είναι γέφυρα.
   Υπάρχει συνεκτικό γράφημα όπου κάθε ακμή είναι γέφυρα, και όπου δεν υπάρχουν κομβικά σημεία;
10. Για οποιοδήποτε n>0, βρείτε ένα συνεκτικό γράφημα G_n που να έχει n κομβικά σημεία, και να μην έχει γέφυρες.
11. Για οποιοδήποτε n>0, βρείτε ένα συνεκτικό γράφημα G_n με n κορυφές και n ακμές, που να μην έχει κομβικά σημεία.

12. Αποδείξτε ότι, σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, τα άκρα κάθε ακμής που δεν είναι γέφυρα έχουν βαθμό τουλάχιστον 2.
Αποδείξτε ότι, σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, μία κορυφή με βαθμό 1 δεν είναι κομβικό σημείο.

13. Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G έχει k συνεκτικές συνιστώσες. Αποδείξτε ότι, αν προστεθεί στο G μια ακμή ανάμεσα σε δύο κορυφές του, το γράφημα που θα προκύψει θα έχει είτε k είτε k−1 συνεκτικές συνιστώσες.

14. Είναι δυνατόν ένα γράφημα G−e (e είναι ακμή) να έχει λιγότερες συνεκτικές συνιστώσες από το G;
Είναι δυνατόν ένα γράφημα G−a (a είναι κορυφή) να έχει λιγότερες συνεκτικές συνιστώσες από το G;

15. Αποδείξτε ότι, αν το G έχει k συνεκτικές συνιστώσες και η ακμή e του G είναι γέφυρα, το G−e θα έχει ακριβώς k+1 συνεκτικές συνιστώσες. Αν το G έχει k συνεκτικές συνιστώσες και η κορυφή a του G είναι κομβικό σημείο, πόσες συνεκτικές συνιστώσες θα έχει το G−a;

16. Είναι σωστό ότι ένα κομβικό σημείο δεν μπορεί να περιέχεται σε κύκλο;

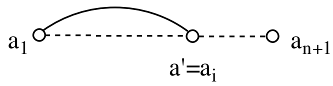
17. Αποδείξτε ότι, αν η ακμή e του μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G είναι γέφυρα, δεν υπάρχει κλειστό ίχνος που να περιέχει την e.

18. Αποδείξτε ότι, σε ένα άκυκλο μη-κατευθυνόμενο γράφημα με μία τουλάχιστον ακμή, κάθε κορυφή που δεν είναι κομβικό σημείο έχει βαθμό 1.

2.4 Επαγωγή για τα συνεκτικά γραφήματα

<u>*Ορισμός μη-επεκτάσιμου μονοπατιού*</u> Ένα μονοπάτι (a,…, b) σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα είναι *μη-επεκτάσιμο* αν, για οποιεσδήποτε κορυφές a′ και b′ που είναι γειτονικές των a και b αντίστοιχα, οι διαδρομές (a′, {a′, a}, a,…, b) και (a,…, b, {b, b′}, b′) δεν είναι μονοπάτια. □

<u>Σημείωση</u> Αν το μονοπάτι (a_1, e_1, a_2,… a_n, e_n, a_{n+1}) είναι μη-επεκτάσιμο και η a_1 έχει μια γειτονική

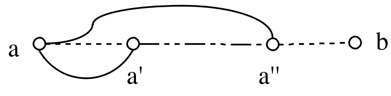


κορυφή a′ διαφορετική από την a_2, θα είναι a′=a_i για κάποιο i>2
(αλλοιώς η διαδρομή (a′, {a′, a_1}, a_1, e_1, a_2,… a_n, e_n, a_{n+1}) θα ήταν μονοπάτι). Επομένως η διαδρομή (a_1, e_1, a_2,… a_{i-1}, e_{i-1}, a_i, {a′, a_1}, a_1) θα είναι κύκλος. Αντίστοιχα προκύπτει κύκλος αν η a_{n+1} έχει μια γειτονική κορυφή διαφορετική από την a_n.
Αν το (a,…, b) είναι μονοπάτι του γραφήματος με *μέγιστο μήκος* και οι κορυφή a′ (αντίστοιχα η b′) είναι γειτονική της a (αντίστοιχα της b), η διαδρομή (a′, {a′, a}, a,…, b) (αντίστοιχα η διαδρομή (a,…, b, {b, b′}, b′)) δεν είναι μονοπάτι: το μήκος της είναι μεγαλύτερο κατά 1 από το μήκος του (a,…, b), οπότε αν ήταν μονοπάτι, το (a,…, b) δεν θα ήταν μέγιστο. Άρα το (a,…, b) είναι μη-επεκτάσιμο.

2.4.1 Πρόταση (Ύπαρξη μη-κομβικού σημείου)

Κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα έχει μία κορυφή που δεν είναι κομβικό σημείο. □

<u>Απόδειξη της 2.4.1</u>
Αν το γράφημα δεν έχει ακμές, καμμία κορυφή του δεν είναι κομβικό σημείο (αφού η αφαίρεση μιάς κορυφής ελαττώνει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών).
Αν το γράφημα έχει μία τουλάχιστον ακμή, θα έχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι. Παίρνουμε ένα μονοπάτι μ=(a,…, b) με μέγιστο μήκος, το οποίο (από την παραπάνω Σημείωση) θα είναι μη-επεκτάσιμο. Αν υπάρχουν δύο διαφορετικές ακμές {a, a′} και {a, a′′} που προσπίπτουν στην a, οι



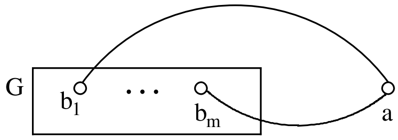
κορυφές a′ και a′′ θα περιέχονται στο μ (λόγω της μη-επεκτασιμότητας του μ, βλέπε την παραπάνω Σημείωση), οπότε οι ακμές {a, a′}, {a, a″} θα περιέχονται στον κύκλο (a, {a, a′}, a′,…, a″, {a″, a}, a) (η υπο-ακολουθία (a′,…, a″) είναι το τμήμα του μονοπατιού μ από την a′ ως την a″). Από την Πρόταση 2.3.2, η κορυφή a δεν είναι κομβικό σημείο. Όμοια, η κορυφή b δεν είναι κομβικό σημείο. □

Στη συνέχεια θα ορίσουμε με επαγωγή μια κλάση Σ από μη-κατευθυνόμενα γραφήματα, και θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω πρόταση για να αποδείξουμε ότι αυτός ο επαγωγικός ορισμός δίνει ακριβώς τα συνεκτικά γραφήματα.

Επαγωγικός ορισμός των συνεκτικών γραφημάτων

Αρχικές περιπτώσεις Η υπο-κλάση Σ(1) αποτελείται από τα μη-κατευθυνόμενα γραφήματα με μία κορυφή και καμμία ακμή.

Επαγωγική κατασκευή Η υπο-κλάση Σ(i) (i>1) αποτελείται από τα γραφήματα



(V∪{a}, E∪{{a, b_1},…, {a, b_m}}), όπου G=(V, E) είναι γράφημα της υπο-κλάσης Σ(i−1), η κορυφή a δεν είναι στο V, και οι κορυφές b_1,…, b_m (m≥1) είναι στο V. □

2.4.2 Πρόταση (Ορθότητα και πληρότητα της επαγωγής για τα συνεκτικά γραφήματα)

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι στην κλάση Σ. □

Απόδειξη της 2.4.2

Αποδεικνύουμε πρώτα την ορθότητα του ορισμού, δηλαδή ότι κάθε γράφημα στην κλάση Σ είναι συνεκτικό. Χρησιμοποιούμε επαγωγή:

Αρχική περίπτωση Προφανώς κάθε γράφημα στην υπο-κλάση Σ(1) είναι συνεκτικό.

Επαγωγικό βήμα Αν υποθέσουμε ότι κάθε γράφημα G=(V, E) στην υπο-κλάση Σ(i−1) είναι συνεκτικό (i>1), τότε οποιοδήποτε γράφημα G′=(V∪{a}, E∪{{a, b_1},…, {a, b_m}}) (όπου a ∉ V, b_i ∈ V) στην υπο-κλάση Σ(i) θα είναι συνεκτικό: κάθε κορυφή x≠a του G′ θα είναι προσβάσιμη από κάθε κορυφή y≠x στο V λόγω της συνεκτικότητας του G, και επίσης η x θα είναι προσβάσιμη από την a μέσω μιάς διαδρομής (a, {a, b_1}, b_1,…, x).

Για την πληρότητα του ορισμού, αποδεικνύουμε με επαγωγή ότι «κάθε συνεκτικό γράφημα με n κορυφές είναι στην υπο-κλάση Σ(n)», για κάθε n≥1.

Αρχική περίπτωση Ένα συνεκτικό γράφημα με μία κορυφή δεν έχει ακμές, οπότε είναι στην υπο-κλάση Σ(1).

Επαγωγικό βήμα Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα με i κορυφές, i>1, a μία κορυφή του G που δεν είναι κομβικό σημείο (Πρόταση 2.4.1), και b_1,…, b_m (m≥1) οι γειτονικές κορυφές της a. Το γράφημα G−a είναι συνεκτικό και έχει i−1 κορυφές, οπότε από την επαγωγική υπόθεση το G−a είναι στην υπο-κλάση Σ(i−1). Επειδή το G προκύπτει από το G−a προσθέτοντας την κορυφή a και τις ακμές {a, b_1},…, {a, b_m}, το G θα είναι στην υπο-κλάση Σ(i) (από την κατασκευή της Σ(i) από την Σ(i−1)). □

2.4.3 Πρόταση (Ιδιότητες των συνεκτικών γραφημάτων)

i. Για κάθε συνεκτικό γράφημα G, υπάρχει ένα συνεκτικό άκυκλο υπο-γράφημα H_G του G που περιέχει όλες τις κορυφές του G.
ii. Κάθε συνεκτικό γράφημα με n κορυφές έχει τουλάχιστον n−1 ακμές (n≥1). □

<u>Απόδειξη της 2.4.3</u>

i. Αποδεικνύουμε με επαγωγή ότι η (i) ισχύει για όλα τα γραφήματα της υπο-κλάσης $\Sigma(n)$, για κάθε $n\geq 1$.

Αρχική περίπτωση Αν το G είναι στην $\Sigma(1)$, παίρνουμε $H_G=G$.

Επαγωγικό βήμα Αν το G είναι στην $\Sigma(i)$, $i>1$, θα είναι $G=(V\cup\{a\}, E\cup\{\{a, b_1\},\ldots, \{a, b_m\}\})$, όπου $G'=(V, E)$ είναι γράφημα της υπο-κλάσης $\Sigma(i-1)$, η κορυφή a δεν είναι στο V, και οι κορυφές $b_1,\ldots, b_m$ ($m\geq 1$) είναι στο V. Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει ένα συνεκτικό άκυκλο υπο-γράφημα $H_{G'}=(V, E')$ του G' που περιέχει όλες τις κορυφές του G'. Παίρνουμε $H_G=(V\cup\{a\}, E'\cup\{\{a, b_1\}\})$. Το H_G θα είναι συνεκτικό και άκυκλο, και θα περιέχει όλες τις κορυφές του G.

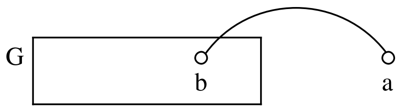
ii. Επειδή κάθε συνεκτικό γράφημα με n κορυφές είναι στην υπο-κλάση $\Sigma(n)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε γράφημα στην $\Sigma(n)$ έχει τουλάχιστον $n-1$ ακμές, για κάθε $n\geq 1$. Χρησιμοποιούμε επαγωγή:

Αρχική περίπτωση Για κάθε γράφημα στην $\Sigma(1)$ είναι $n=1$, και $n-1=0$.

Επαγωγικό βήμα Αν υποθέσουμε ότι κάθε γράφημα (V, E) στην $\Sigma(i-1)$ έχει τουλάχιστον $i-2$ ακμές ($i>1$), κάθε γράφημα $(V\cup\{a\}, E\cup\{\{a, b_1\},\ldots, \{a, b_m\}\})$ (όπου $a\notin V$, $b_i \in V$) στην υπο-κλάση $\Sigma(i)$ θα έχει τουλάχιστον $(i-2)+m\geq i-1$ ακμές. □

Ερωτήματα

1. Γράψτε σε ψευδοκώδικα έναν αλγόριθμο ο οποίος, με δεδομένα ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και μια ακμή του, κατασκευάζει ένα μη- επεκτάσιμο μονοπάτι που διατρέχει την δεδομένη ακμή. Πόσο αποδοτικός είναι ο αλγόριθμός σας;
2. Αποδείξτε ότι, σε ένα άκυκλο μη-κατευθυνόμενο γράφημα, τα άκρα ενός μη-επεκτάσιμου μονοπατιού έχουν βαθμό 1.
3. Αποδείξτε ότι, αν το G=(V, E) είναι ένα άκυκλο μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και η a είναι μία κορυφή που δεν περιέχεται στο V, το γράφημα $(V\cup\{a\}, E\cup\{\{a, b\}\})$, όπου $b \in V$, είναι άκυκλο.



4. Αποδείξτε ότι για κάθε $n\geq 1$, η υπο-κλάση $\Sigma(n)$ αποτελείται από τα συνεκτικά γραφήματα με ακριβώς n κορυφές.
5. Αποδείξτε ότι: για κάθε γράφημα G, υπάρχει ένα άκυκλο υπο-γράφημα H_G του G που περιέχει όλες τις κορυφές του G, και έχει τον ίδιο αριθμό συνεκτικών συνιστωσών.
6. Αποδείξτε ότι κάθε γράφημα με n κορυφές και k συνεκτικές συνιστώσες έχει τουλάχιστον $n-k$ ακμές ($n\geq 1$).
7. Χρησιμοποιείστε τον επαγωγικό ορισμό των συνεκτικών γραφημάτων για να αποδείξετε ότι, αν αθροιστούν οι βαθμοί των κορυφών ενός γραφήματος (όχι απαραίτητα μη-κατευθυνόμενου), προκύπτει το διπλάσιο του αριθμού των ακμών του.
   Χρησιμοποιείστε τον επαγωγικό ορισμό των συνεκτικών γραφημάτων για να αποδείξετε ότι, αν αθροιστούν οι έξω-βαθμοί (αντίστοιχα, έσω-βαθμοί) των κορυφών ενός γραφήματος, προκύπτει ο αριθμός των κατευθυνόμενων ακμών του.
   Νύξη: και στις δύο περιπτώσεις, εξετάστε τις συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος που προκύπτει αντικαθιστώντας κάθε κατευθυνόμενη ακμή (a, b) με μία μη-κατευθυνόμενη {a, b}.

2.5 Ασκήσεις

1. Να αποδειχτεί ότι, αν αθροιστούν οι βαθμοί των κορυφών ενός γραφήματος, προκύπτει το διπλάσιο του αριθμού των ακμών του.
   Να αποδειχτεί ότι, αν αθροιστούν οι έξω-βαθμοί (αντίστοιχα, έσω-βαθμοί) των κορυφών ενός γραφήματος, προκύπτει ο αριθμός των κατευθυνόμενων ακμών του.
   Ισχύουν τα παραπάνω για πολυ-γραφήματα;
2. Για οποιαδήποτε διαδρομή $d=(a_1, e_1, a_2,..., a_n, e_n, a_{n+1})$ με $a_1=a_{n+1}$, η Απόδειξη της Πρότασης 2.2.1 δίνει μια διαδρομή d' με την ίδια αρχή και το ίδιο τέλος, που δεν επαναλαμβάνει καμμία κορυφή εκτός από την αρχική (που ταυτίζεται με την τελική). Βρείτε μία περίπτωση όπου η διαδρομή d' δεν είναι κύκλος.
3. Να αποδειχτεί ότι τα σύνολα κορυφών των συνεκτικών συνιστωσών ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος $G=(V, E)$ είναι ο λεπτομερέστερος διαμερισμός του V με την παρακάτω ιδιότητα: αν οι κορυφές a, b είναι σε διαφορετικά σύνολα, δεν υπάρχει ακμή $\{a, b\}$.
4. Μια σχέση ισοδυναμίας R πάνω σε ένα σύνολο A μπορεί να παρασταθεί μέσω ενός μη-κατευθυνόμενου πολυ-γραφήματος $G_R=(A, E)$, όπου $\{x, y\} \in E$ αν και μόνο αν $x R y$. Ποιές είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του G_R;
5. Από την Πρόταση 2.2.2, αν τα A, B είναι ξένα υπο-σύνολα των κορυφών ενός μη-κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος G, θα υπάρχει μονοπάτι μ στο G με αρχή στο A και τέλος στο B, χωρίς καμμία άλλη κορυφή στο $A \cup B$. Είναι δυνατό να επιλεγούν αυθαίρετα η αρχή και το τέλος του μονοπατιού μ;
6. Να αποδειχτεί ότι: αν το A είναι ένα μη-κενό υπο-σύνολο των κορυφών ενός μη-κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος $G=(V, E)$, και $A \neq V$, θα υπάρχει μια ακμή με το ένα άκρο στο A και το άλλο άκρο στο $V-A$.
7. Να αποδειχτεί ότι: δύο διαφορετικά μέγιστα μονοπάτια ενός μη-κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος θα έχουν κοινή κορυφή.
8. Αποδείξτε ότι: η ακμή e του G είναι γέφυρα αν και μόνο αν τα άκρα της e βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G-e$. *Χρησιμοποιείστε μόνο τον ορισμό της γέφυρας.*
   Αποδείξτε ότι: η ακμή e ενός συνεκτικού γραφήματος G είναι γέφυρα, αν και μόνο αν υπάρχουν κορυφές x, y, όπου κάθε διαδρομή με άκρα τις x, y περιέχει την e.
9. Αποδείξτε ότι: η κορυφή a του G είναι κομβικό σημείο αν και μόνο αν υπάρχουν δύο γειτονικές κορυφές της a που βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G-a$. *Χρησιμοποιείστε μόνο τον ορισμό του κομβικού σημείου.*
   Αποδείξτε ότι: η κορυφή a ενός συνεκτικού γραφήματος G είναι κομβικό σημείο, αν και μόνο αν υπάρχουν κορυφές x, y, όπου κάθε διαδρομή με άκρα τις x, y περιέχει την a.
10. Πότε θα είναι κομβικά σημεία τα άκρα μιάς γέφυρας:
11. Αποδείξτε ότι: αν οι συνεκτικές συνιστώσες ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G είναι $(V_1, E_1), (V_2, E_2),\ldots, (V_k, E_k)$ $(k\geq 1)$, και η ακμή $\{a, b\} \in E_1$ είναι γέφυρα, οι συνεκτικές συνιστώσες του $G-\{a, b\}$ θα είναι τα $(W, F), (W', F'), (V_2, E_2),\ldots, (V_k, E_k)$, όπου:
    $W=\{a\} \cup \{x \mid x \in V_1$ και υπάρχει διαδρομή με άκρα τις x, a που δεν περιέχει τη $b\}$,
    F είναι οι ακμές του E_1 με άκρα στο W,
    $W'=\{b\} \cup \{x \mid x \in V_1$ υπάρχει διαδρομή με άκρα τις x, b που δεν περιέχει την $a\}$,
    F' είναι οι ακμές του E_1 με άκρα στο W'.
12. Αποδείξτε ότι: αν οι συνεκτικές συνιστώσες ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G είναι $(V_1, E_1), (V_2, E_2),\ldots, (V_k, E_k)$ $(k\geq 1)$, η κορυφή $a \in V_1$ είναι κομβικό σημείο, και $\{b_1,\ldots, b_m\}$ είναι οι γειτονικές κορυφές της a $(m\geq 2)$, οι συνεκτικές συνιστώσες του $G-a$ θα είναι τα $(W_1, F_1),\ldots, (W_m, F_m), (V_2, E_2),\ldots, (V_k, E_k)$, όπου:
    $W_i=\{x \mid$ υπάρχει διαδρομή με άκρα τις x, b_i που δεν περιέχει την $a\}$,
    F_i είναι οι ακμές του E_1 με άκρα στο W_i.
13. Βρείτε ένα γράφημα όπου υπάρχει ένα μη-επεκτάσιμο μονοπάτι που δεν έχει μέγιστο μήκος.

14. Αποδείξτε ότι κάθε ακμή ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος περιέχεται σε ένα μη-επεκτάσιμο μονοπάτι.

15. Αποδείξτε ότι: κάθε άκυκλο μη-κατευθυνόμενο γράφημα έχει μια κορυφή με βαθμό μικρότερο από 2.

Αποδείξτε ότι: τα άκρα κάθε μη-επεκτάσιμου μονοπατιού ενός άκυκλου μη-κατευθυνόμενου γραφήματος έχουν βαθμό 1.

3 Δέντρα

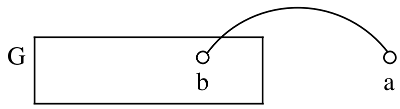
3.1 Ορισμός και ιδιότητες

<u>*Ορισμός δέντρου*</u>   Ονομάζουμε *δέντρο* ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που είναι συνεκτικό και άκυκλο. □

<u>Σημείωση</u>   Ονομάζουμε *υπο-δέντρο* ενός δέντρου, ένα συνεκτικό υπο-γράφημά του. Ονομάζουμε *δάσος* ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, που κάθε συνεκτική συνιστώσα του είναι δέντρο.

Ο επαγωγικός ορισμός των συνεκτικών γραφημάτων μπορεί να τροποποιηθεί, ώστε να δίνει μια κλάση T που να περιέχει ακριβώς τα άκυκλα συνεκτικά γραφήματα:

<u>*Επαγωγικός ορισμός των δέντρων*</u>
Αρχικές περιπτώσεις   Η υπο-κλάση T(1) αποτελείται από τα γραφήματα με μία κορυφή και καμμία ακμή.
Επαγωγική κατασκευή   Η υπο-κλάση T(i) (i>1) αποτελείται από τα γραφήματα

(V∪{a}, E∪{{a, b}}) 

, όπου G=(V, E) είναι γράφημα της υπο-κλάσης T(i–1), η κορυφή a δεν είναι στο V, και η κορυφή b είναι στο V. □

3.1.1 Πρόταση (Ορθότητα και πληρότητα της επαγωγής για τα δέντρα)

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα είναι δέντρο αν και μόνο αν είναι στην κλάση T. □

<u>Απόδειξη της 3.1.1</u>
Αποδεικνύουμε πρώτα την ορθότητα του ορισμού, δηλαδή ότι κάθε γράφημα στην κλάση T είναι δέντρο. Χρησιμοποιούμε επαγωγή:
Αρχική περίπτωση   Προφανώς κάθε γράφημα στην υπο-κλάση T(1) είναι δέντρο.
Επαγωγικό βήμα   Αν υποθέσουμε ότι κάθε γράφημα G=(V, E) στην υπο-κλάση T(i–1) είναι δέντρο (i>1), τότε οποιοδήποτε γράφημα G′=(V∪{a}, E∪{{a, b}}) (όπου a ∉ V, b ∈ V) στην υπο-κλάση T(i) θα είναι συνεκτικό: κάθε κορυφή x≠a του G′ θα είναι προσβάσιμη από κάθε κορυφή y≠x στο V λόγω της συνεκτικότητας του G, και επίσης η x θα είναι προσβάσιμη από την a μέσω μιάς διαδρομής (a, {a, b}, b,…, x). Επίσης το G′ θα είναι άκυκλο: δεν μπορεί να έχει κύκλο που να μην περιέχει την a, λόγω της ακυκλικότητας του G, και δεν μπορεί να έχει κύκλο που να περιέχει την a, επειδή υπάρχει μόνο μία ακμή που προσπίπτει στην a.

Για την πληρότητα του ορισμού, αποδεικνύουμε με επαγωγή ότι «κάθε δέντρο με n κορυφές είναι στην υπο-κλάση T(n)», για κάθε n≥1.
Αρχική περίπτωση   Ένα δέντρο με μία κορυφή δεν έχει ακμές, οπότε είναι στην υπο-κλάση Σ(1).
Επαγωγικό βήμα   Έστω G ένα δέντρο με i κορυφές, i>1, a μία κορυφή του G που δεν είναι κομβικό σημείο (Πρόταση 2.4.1), και $b_1,\ldots, b_m$ (m≥1) οι γειτονικές κορυφές της a. Επειδή δύο διαφορετικές ακμές που προσπίπτουν στην a περιέχονται στον ίδιο κύκλο (Πρόταση 2.3.2), και το G είναι άκυκλο, θα είναι m=1. Το γράφημα G–a είναι συνεκτικό και άκυκλο και έχει i–1 κορυφές, οπότε από την επαγωγική υπόθεση το G–a είναι στην υπο-κλάση T(i–1). Επειδή το G προκύπτει από το G–a προσθέτοντας την κορυφή a και την ακμή $\{a, b_1\}$, το G θα είναι στην υπο-κλάση T(i) (από την κατασκευή της T(i) από την T(i–1)). □

3.1.2 Πρόταση (Ιδιότητες των δέντρων)

i. Αν το G είναι δέντρο, για οποιεσδήποτε διαφορετικές κορυφές x, y του G θα υπάρχει μόνο ένα μονοπάτι με άκρα τις x, y.

ii. Κάθε δέντρο με n κορυφές έχει ακριβώς n−1 ακμές (n≥1). □

Απόδειξη της 3.1.2

i. Αποδεικνύουμε με επαγωγή ότι η (i) ισχύει για όλα τα γραφήματα της υπο-κλάσης T(n), για κάθε n≥1.

Αρχική περίπτωση Κάθε γράφημα στην T(1) έχει μόνο μία κορυφή, οπότε η (i) προφανώς ισχύει.

Επαγωγικό βήμα Αν το G είναι στην T(i), i>1, θα είναι G=(V∪{a}, E∪{{a, b}}), όπου G′=(V, E) είναι δέντρο της υπο-κλάσης T(i−1), a ∉ V, b ∈ V. Έστω x, y δύο διαφορετικές κορυφές του G. Αν οι x, y είναι στο V, ένα μονοπάτι με άκρα τις x, y δεν μπορεί να περιέχει την a (επειδή υπάρχει μόνο μία ακμή που προσπίπτει στην a), οπότε από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει μόνο ένα μονοπάτι με άκρα τις x, y. Αν η x είναι στο V και y=a, τότε αν x=b το {b, {b, a}, a} θα είναι το μοναδικό μονοπάτι με άκρα τις x, y. Αν x≠b, ένα μονοπάτι με άκρα τις x, y θα έχει τη μορφή (x,…, b, {b, a}, a}, όπου η υπο-ακολουθία (x,…, b) θα είναι μονοπάτι του G′. Από την επαγωγική υπόθεση το μονοπάτι (x,…, b) είναι μοναδικό, οπότε το μονοπάτι (x,…, b, {b, a}, a} θα είναι μοναδικό.

ii. Επειδή κάθε δέντρο με n κορυφές είναι στην υπο-κλάση T(n), αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε γράφημα στην T(n) έχει ακριβώς n−1 ακμές, για κάθε n≥1. Χρησιμοποιούμε επαγωγή:

Αρχική περίπτωση Κάθε γράφημα στην T(1) έχει 1 κορυφή και 0 ακμές.

Επαγωγικό βήμα Αν υποθέσουμε ότι κάθε γράφημα (V, E) στην T(i−1) έχει ακριβώς i−2 ακμές (i>1), κάθε γράφημα (V∪{a}, E∪{{a, b}}) (όπου a ∉ V, b ∈ V) στην υπο-κλάση T(i) θα έχει ακριβώς (i−2)+1=i−1 ακμές. □

Ερωτήματα

1. Αποδείξτε ότι ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα είναι δάσος αν και μόνο αν είναι άκυκλο.
2. Ποιες ακμές ενός δέντρου είναι γέφυρες; Ποιες κορυφές ενός δέντρου είναι κομβικά σημεία;
3. Περιγράψτε τα γραφήματα των υπο-κλάσεων T(2) και T(3), ξεκινώντας από την επαγωγική κατασκευή τους.
4. Αποδείξτε ότι, για κάθε n≥1, η υπο-κλάση T(n) αποτελείται από τα δέντρα με ακριβώς n κορυφές.
5. Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G=(V, E) έχει *χρωματισμό με* K *χρώματα* (K≥2) αν υπάρχει συνάρτηση χ από το V στο {1, 2,…, K}, με χ(u)≠χ(v) για κάθε ακμή {u, v} του G. Αποδείξτε ότι κάθε δέντρο έχει χρωματισμό με δύο χρώματα. Νύξη: αποδείξτε με επαγωγή ότι όλα τα γραφήματα της υπο-κλάσης T(n) έχουν χρωματισμό με δύο χρώματα, για κάθε n≥1.
6. Αποδείξτε ότι, αν δύο διαφορετικές κορυφές ενός δέντρου ενωθούν με μία ακμή, το γράφημα που προκύπτει έχει ακριβώς ένα κύκλο.
7. Το G είναι ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα. Αποδείξτε ότι: για οποιεσδήποτε διαφορετικές κορυφές x, y υπάρχει το πολύ ένα μονοπάτι με άκρα τις x, y, αν και μόνο αν το G είναι άκυκλο.
8. Είναι σωστό ότι κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές και ακριβώς n−1 ακμές (n≥1) είναι δέντρο;
9. Αποδείξτε ότι κάθε μη-κατευθυνόμενο άκυκλο γράφημα με n κορυφές και k συνεκτικές συνιστώσες έχει ακριβώς n−k ακμές.
10. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ενός δέντρου με n κορυφές είναι 2(n−1). Νύξη: δείτε την Άσκηση 2.5(1).

11. Αποδείξτε ότι κάθε δέντρο που έχει τουλάχιστον μία ακμή έχει δύο κορυφές με βαθμό 1. Νύξη: εξετάστε ένα μη-επεκτάσιμο μονοπάτι.

3.2 Εφαρμογές της επαγωγής για τα δέντρα

3.2.1 Πρόταση (Ιδιότητα του Helly)

Έστω G ένα δέντρο, και $G_1, G_2, \ldots, G_m$ υπο-δέντρα του G που ανά δύο έχουν κοινή κορυφή ($m \geq 3$). Υπάρχει κορυφή του G που περιέχεται σε όλα τα υπο-δέντρα $G_1, \ldots, G_m$. □

Απόδειξη της 3.2.1

Αποδεικνύουμε με επαγωγή ότι η Πρόταση ισχύει για όλα τα δέντρα της υπο-κλάσης T(n), για κάθε $n \geq 1$. Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση m=3 — η γενική περίπτωση αποδεικνύεται όμοια.
Αρχική περίπτωση Αν το G είναι στην T(1) θα έχει μία κορυφή και καμμία ακμή, οπότε $G=G_1=G_2=G_3$ και η Πρόταση ισχύει.
Επαγωγικό βήμα Αν το G είναι στην T(i), i>1, θα είναι $G=(V\cup\{a\}, E\cup\{\{a, b\}\})$, όπου $G'=(V, E)$ είναι δέντρο της υπο-κλάσης T(i–1), $a \notin V$, $b \in V$. Για κάθε ένα από τα G_1, G_2, G_3 ορίζουμε ένα υπο-δέντρο, H_1, H_2, H_3 αντίστοιχα, που είναι και υπο-δέντρο του G′:
Το G_1 είτε θα είναι υπο-γράφημα του G′, οπότε ορίζουμε $H_1=G_1$, είτε $G_1=(V_1\cup\{a\}, E_1\cup\{\{a, b\}\})$ $(a \notin V_1, b \in V_1)$, όπου (V_1, E_1) είναι συνεκτικό υπο-γράφημα του G′, οπότε ορίζουμε $H_1=(V_1, E_1)$. Όμοια ορίζουμε τα H_2, H_3.
Έστω x μια κοινή κορυφή των G_1, G_2. Θα δείξουμε ότι τα H_1, H_2 έχουν κοινή κορυφή, εξετάζοντας όλες τις δυνατές περιπτώσεις του ορισμού των H_1, H_2.
$H_1=G_1, H_2=G_2$: προφανώς η κορυφή x είναι κοινή κορυφή των H_1, H_2.
$H_1=(V_1, E_1)$ όπου $G_1=(V_1\cup\{a\}, E_1\cup\{\{a, b\}\})$, $H_2=G_2$: αφού το G_2 είναι υπο-γράφημα του G′, η κορυφή x δεν μπορεί να είναι η a, οπότε η x θα είναι κοινή κορυφή των H_1, H_2.
$H_1=G_1$, $H_2=(V_2, E_2)$ όπου $G_2=(V_2\cup\{a\}, E_2\cup\{\{a, b\}\})$: αφού το G_1 είναι υπο-γράφημα του G′, η κορυφή x δεν μπορεί να είναι η a, οπότε η x θα είναι κοινή κορυφή των H_1, H_2.
$H_1=(V_1, E_1)$ όπου $G_1=(V_1\cup\{a\}, E_1\cup\{\{a, b\}\})$, $H_2=(V_2, E_2)$ όπου $G_2=(V_2\cup\{a\}, E_2\cup\{\{a, b\}\})$: η κορυφή b (και η κορυφή x) θα είναι κοινή κορυφή των H_1, H_2.
Άρα τα H_1, H_2, H_3 είναι υπο-δέντρα του G′ που ανά δύο έχουν κοινή κορυφή. Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει κορυφή του G′ που περιέχεται σε κάθε ένα από τα H_1, H_2, H_3. Αφού τα H_1, H_2, H_3 είναι υπο-δέντρα των G_1, G_2, G_3 αντίστοιχα, υπάρχει κορυφή του G που περιέχεται σε κάθε ένα από τα G_1, G_2, G_3. □

3.2.2 Πρόταση (Δέντρο με δεδομένους βαθμούς)

Έστω $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ μια ακολουθία θετικών ακεραίων ($n \geq 1$), όπου $\varphi_1+\ldots+\varphi_n=2(n-1)$. Υπάρχει ένα δέντρο με n κορυφές, $a_1, \ldots, a_n$, με βαθμούς $\varphi(a_j)=\varphi_j$, $j=1, \ldots, n$. □

Απόδειξη της 3.2.2

Αποδεικνύουμε με επαγωγή ότι, για κάθε $n \geq 1$, αν $\varphi_1+\ldots+\varphi_n=2(n-1)$ θα υπάρχει ένα δέντρο στην υπο-κλάση T(n) το οποίο θα ικανοποιεί τη συνθήκη $\varphi(a_j)=\varphi_j$, για κάθε $j=1, \ldots, n$.
Αρχική περίπτωση Για n=1, θα είναι $\varphi_1=2(1-1)=0$, και μπορούμε να πάρουμε ένα δέντρο στην υπο-κλάση T(1) με μία κορυφή, a_1, και καμμία ακμή.
Επαγωγικό βήμα Εστω i ένας ακέραιος, i>1, για τον οποίο ισχύει ότι, αν $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1})$ είναι οποιαδήποτε ακολουθία θετικών ακεραίων με $\varphi_1+\ldots+\varphi_{i-1}=2(i-2)$, υπάρχει ένα δέντρο στην υπο-κλάση T(i–1) με i–1 κορυφές, $a_1, \ldots, a_{i-1}$, όπου $\varphi(a_j)=\varphi_j$, για κάθε $j=1, \ldots, i-1$ (επαγωγική υπόθεση).
Έστω $(\varphi_1, \ldots, \varphi_i)$ μια ακολουθία θετικών ακεραίων όπου $\varphi_1+\ldots+\varphi_i=2(i-1)$.
Αν i=2, έχουμε $\varphi_1+\varphi_2=2$, που δίνει $\varphi_1=\varphi_2=1$, και μπορούμε να πάρουμε ένα δέντρο στην υπο-κλάση T(2) με δύο κορυφές a_1 και a_2, και μία ακμή $\{a_1, a_2\}$.

Αν $i>2$, πρέπει κάποιος όρος της ακολουθίας $(\varphi_1,\ldots,\varphi_i)$ να είναι μεγαλύτερος από 1 (αλλοιώς $\varphi_1+\ldots+\varphi_i=i<2(i-1)$), και επίσης πρέπει κάποιος όρος της ακολουθίας $(\varphi_1,\ldots,\varphi_i)$ να είναι 1 (αλλοιώς $\varphi_1+\ldots+\varphi_i\geq 2i>2(i-1)$). Μπορούμε να θεωρήσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\varphi_{i-1}>1$ και $\varphi_i=1$ (αν όχι, αρκεί να μεταθέσουμε κατάλληλα τους όρους της ακολουθίας $(\varphi_1,\ldots,\varphi_i)$). Παίρνουμε την ακολουθία θετικών ακεραίων $(\varphi_1,\ldots,\varphi_{i-2},\varphi_{i-1}-1)$, για την οποία ισχύει $\varphi_1+\ldots+\varphi_{i-2}+(\varphi_{i-1}-1)= =(\varphi_1+\ldots+\varphi_{i-2}+\varphi_{i-1}+\varphi_i)-2=2(i-1)-2=2(i-2)$. Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει ένα δέντρο $G=(V, E)$ στην υπο-κλάση $T(i-1)$, με $i-1$ κορυφές $a_1,\ldots,a_{i-1}$, με βαθμούς $\varphi(a_j)=\varphi_j$ για κάθε $j=1,\ldots,i-2$, και $\varphi(a_{i-1})=\varphi_{i-1}-1$. Αν a_i είναι μια κορυφή διαφορετική από τις $a_1,\ldots,a_{i-1}$, το δέντρο $G'=(V\cup\{a_i\}, E\cup\{\{a_i, a_{i-1}\}\})$ στην υπο-κλάση $T(i)$ θα έχει βαθμούς $\varphi(a_j)=\varphi_j$ για κάθε $j=1,\ldots,i-2$, και $\varphi(a_{i-1})=(\varphi_{i-1}-1)+1=\varphi_{i-1}$, $\varphi(a_i)=1=\varphi_i$. □

3.2.3 Πρόταση (Κέντρα δέντρου)

Κάθε δέντρο G έχει ένα μοναδικό κέντρο αν το μέγιστο μονοπάτι του G έχει ζυγό μήκος, ή ακριβώς δύο κέντρα που είναι γειτονικές κορυφές, αν το μέγιστο μονοπάτι του G έχει μονό μήκος. □

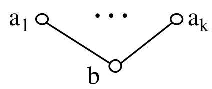
<u>Απόδειξη της 3.2.3</u>

Αποδεικνύουμε με επαγωγή ότι η Πρόταση ισχύει για όλα τα δέντρα με n κορυφές, για κάθε $n\geq 2$ (τα δέντρα με μία μόνο κορυφή δεν έχουν μονοπάτι).

Αρχική περίπτωση Για $n=2$, κάθε δέντρο που αποτελείται από δύο κορυφές  έχει ακριβώς δύο κέντρα που είναι γειτονικές κορυφές.

Επαγωγικό βήμα Έστω ότι η Πρόταση ισχύει για όλα τα δέντρα με m κορυφές, για κάθε m με $2\leq m<i$. Θα δείξουμε ότι η Πρόταση ισχύει για κάθε δέντρο G με i κορυφές.

Το G θα έχει τουλάχιστον δύο κορυφές με βαθμό 1, αφού έχει $i>2$ κορυφές. Έστω $a_1,\ldots,a_k$ οι κορυφές του G με βαθμό 1. Αφαιρούμε από το G τις κορυφές $a_1,\ldots,a_k$, και τις προσπίπτουσες ακμές τους $\{a_1, b_1\},\ldots,\{a_k, b_k\}$, και συγκρίνουμε τα μέγιστα μονοπάτια του δέντρου G′ που προκύπτει με τα μέγιστα μονοπάτια του G.

G: 

Αν το G′ έχει μία μόνο κορυφή b, θα είναι $b=b_1=\ldots=b_k$, και τα μέγιστα μονοπάτια του G θα είναι τα $\{a_l, \{a_l, b\}, b, \{b, a_j\}, a_j\}$, όπου $1\leq l\neq j\leq k$. Άρα το G έχει ένα μοναδικό κέντρο, που είναι η κορυφή b.

Αν το G′ έχει τουλάχιστον δύο κορυφές, τα άκρα οποιουδήποτε μέγιστου μονοπατιού μ του G′ πρέπει να είναι δύο από τις κορυφές $b_1,\ldots,b_k$. Ο λόγος είναι ότι τα άκρα του μ θα έχουν βαθμό 1 στο G′ (βλέπε Άσκηση 2.5(15)), και αν δεν ήταν μεταξύ των $b_1,\ldots,b_k$ θα είχαν βαθμό 1 και στο G, οπότε θα ήταν μεταξύ των κορυφών $a_1,\ldots,a_k$ που αφαιρέθηκαν.

Κάθε μέγιστο μονοπάτι ν του G έχει άκρα με βαθμό 1 στο G, άρα $\nu=\{a_l, \{a_l, b_{l'}\}, b_{l'},\ldots, b_j, \{b_j, a_j\}, a_j\}$ για κάποια l, j, $1\leq l\neq j\leq k$, όπου η υπο-ακολουθία $(b_{l'},\ldots,b_j)$ θα είναι ένα από τα μονοπάτια του G′ με άκρα μεταξύ των $b_1,\ldots,b_k$, με το μεγαλύτερο δυνατό μήκος (αφού το ν είναι μέγιστο). Αλλά τα μέγιστα μονοπάτια του G′ έχουν άκρα μεταξύ των $b_1,\ldots,b_k$, άρα το $(b_{l'},\ldots,b_j)$ θα είναι ένα από τα μέγιστα μονοπάτια του G′, και επομένως αν κάποιο κέντρο του G προέρχεται από το ν, θα είναι και κέντρο του G′. Επίσης, αν το μέγιστο μήκος ενός μονοπατιού του G′ είναι p, το μέγιστο μήκος ενός μονοπατιού του G θα είναι p+2.

Οποιοδήποτε μέγιστο μονοπάτι $\mu=(b_l,\ldots,b_j)$ του G′ δίνει ένα μονοπάτι $\{a_l, \{a_l, b_l\}, b_l,\ldots, b_j, \{b_j, a_j\}, a_j\}$ του G, που από τις παραπάνω παρατηρήσεις θα είναι μέγιστο. Επομένως αν κάποιο κέντρο του G′ προέρχεται από το μ, θα είναι και κέντρο του G.

Άρα τα G, G′ έχουν ακριβώς τα ίδια κέντρα. Από την επαγωγική υπόθεση, αν το μήκος p του μέγιστου μονοπατιού του G′ είναι ζυγό, το G′ θα έχει ένα μοναδικό κέντρο, και αν το p είναι μονό, το G′ θα έχει ακριβώς δύο κέντρα που θα είναι γειτονικές κορυφές. Επομένως, αν το μήκος p+2 του μέγιστου μονοπατιού του G είναι ζυγό, το G θα έχει ένα μοναδικό κέντρο, και αν το p+2 είναι μονό, το G θα έχει ακριβώς δύο κέντρα που θα είναι γειτονικές κορυφές. □

Ερωτήματα

1. Αποδείξτε ότι: αν το μη-κατευθυνόμενο γράφημα G είναι συνεκτικό, και $G=(V\cup\{a\}, E\cup\{\{a, b\}\})$ όπου $a \notin V$, $b \in V$, το γράφημα (V, E) θα είναι συνεκτικό.
2. Αποδείξτε τη γενική περίπτωση της ιδιότητας Helly.
3. Έστω $(\varphi_1,\ldots, \varphi_i)$ μια ακολουθία θετικών ακεραίων ($i>1$), όπου $\varphi_1+\ldots+\varphi_i=2(i-1)$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο όροι της ακολουθίας που είναι 1.
4. Γράψτε σε ψευδοκώδικα έναν αλγόριθμο ο οποίος, με δεδομένα μια ακολουθία θετικών ακεραίων $(\varphi_1,\ldots, \varphi_n)$ ($n\geq1$), όπου $\varphi_1+\ldots+\varphi_n=2(n-1)$, κατασκευάζει ένα δέντρο με n κορυφές, $a_1,\ldots, a_n$, με βαθμούς $\varphi(a_j)=\varphi_j$, $j=1,\ldots, n$. Αποδείξτε ότι ο αλγόριθμός σας είναι σωστός, και αναλύστε την αποδοτικότητά του.
5. Έστω $(\varphi_1,\ldots, \varphi_i)$ μια ακολουθία θετικών ακεραίων ($i>2$), όπου $\varphi_1+\ldots+\varphi_i=2(i-1)$, και υπάρχουν ακριβώς $k\geq2$ όροι της ακολουθίας που είναι 1. Αποδείξτε ότι $k<i$, και ότι το άθροισμα των υπόλοιπων $i-k$ όρων θα είναι τουλάχιστον k.
   Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την παραπάνω παρατήρηση για να βελτιστοποιήσετε την Απόδειξη της Πρότασης 3.2.2;
6. Βρείτε όλα τα γραφήματα όπου υπάρχει κάποιο κέντρο με βαθμό 1.
7. Έστω ότι ένα δέντρο G έχει δύο κέντρα κ_1 και κ_2. Αποδείξτε ότι, για οποιαδήποτε κορυφή x του G με $\varphi(x)>1$, είτε υπάρχει ένα μονοπάτι με άκρα τις x, κ_1 που δεν περιέχει την κ_2, είτε υπάρχει ένα μονοπάτι με άκρα τις x, κ_2 που δεν περιέχει την κ_1.
8. Γράψτε σε ψευδοκώδικα έναν αλγόριθμο που να βρίσκει τα κέντρα ενός δεδομένου δέντρου G. Αποδείξτε ότι ο αλγόριθμός σας είναι σωστός, και αναλύστε την αποδοτικότητά του.
9. Γράψτε σε ψευδοκώδικα έναν αλγόριθμο που να βρίσκει ένα μέγιστο μονοπάτι ενός δεδομένου δέντρου G. Αποδείξτε ότι ο αλγόριθμός σας είναι σωστός, και αναλύστε την αποδοτικότητά του.

3.3 Στοιχειώδεις κύκλοι

Ορισμός δέντρου επικάλυψης Ένα *δέντρο επικάλυψης* ενός συνεκτικού γραφήματος G είναι ένα υπο-γράφημα του G που είναι δέντρο, και περιέχει όλες τις κορυφές του G.
Ένα *δάσος επικάλυψης* ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G είναι ένα υπο-γράφημα του G που είναι δάσος, περιέχει όλες τις κορυφές του G, και έχει τον ίδιο αριθμό συνεκτικών συνιστωσών με το G. □

Παρατήρηση Από την Πρόταση 2.4.3 (i), κάθε συνεκτικό γράφημα G έχει τουλάχιστον ένα δέντρο επικάλυψης.
Από την Πρόταση 3.1.2 (ii), αν το G είναι συνεκτικό και έχει n κορυφές, κάθε δέντρο επικάλυψης του G έχει ακριβώς $n-1$ ακμές.

Ορισμός χορδής Έστω T ένα δέντρο επικάλυψης ενός συνεκτικού γραφήματος G. Ονομάζουμε *χορδή του* G *ως προς το* T, μια ακμή του G που δεν είναι ακμή του T. □

Παρατήρηση Αν το G είναι συνεκτικό και έχει n κορυφές και m ακμές, θα έχει ακριβώς $m-n+1$ χορδές (ως προς οποιοδήποτε δέντρο επικάλυψης).

Ορισμός στοιχειώδους κύκλου Έστω T ένα δέντρο επικάλυψης ενός συνεκτικού γραφήματος G. Ονομάζουμε *στοιχειώδη κύκλο του* G *ως προς το* T, ένα κύκλο του G που διατρέχει μόνο μία χορδή ως προς το T. □

Παρατήρηση Ένας στοιχειώδης κύκλος c ως προς το T που διατρέχει τη χορδή {a, b} θα διατρέχει και το μοναδικό μονοπάτι του T με άκρα τις κορυφές a, b (βλέπε Πρόταση 3.1.2 (i)). Άρα για κάθε χορδή υπάρχει ακριβώς ένας στοιχειώδης κύκλος ως προς το T που τη διατρέχει, και επομένως, αν το G έχει n κορυφές και m ακμές, θα έχει ακριβώς m−n+1 στοιχειώδεις κύκλους (ως προς οποιοδήποτε δέντρο επικάλυψης).

Ορισμός αθροίσματος κύκλων Έστω $c_1,\ldots, c_k$ ($k\geq 2$) κύκλοι ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G, και E_i το σύνολο των ακμών που διατρέχει ο κύκλος c_i, $i=1,\ldots, k$. Αν το σύνολο $\oplus(E_1,\ldots, E_k)$ δεν είναι κενό, και υπάρχει κύκλος c του G που να διατρέχει ακριβώς τις ακμές του συνόλου $\oplus(E_1,\ldots, E_k)$, λέμε ότι ο κύκλος c είναι το *άθροισμα των* $c_1,\ldots, c_k$, και χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $c=\oplus(c_1,\ldots, c_k)$. □

Παρατήρηση Αν για κάποιους κύκλους $c_1,\ldots, c_k$ ($k\geq 2$) υπάρχει το άθροισμα $\oplus(c_1,\ldots, c_k)$, θα είναι μοναδικό.

3.3.1 Πρόταση (Αθροίσματα στοιχειωδών κύκλων)

Έστω T ένα δέντρο επικάλυψης ενός συνεκτικού γραφήματος G, και c ένας κύκλος του G. Είτε ο κύκλος c θα είναι στοιχειώδης ως προς το T, ή θα υπάρχει ένα μοναδικό σύνολο $\{c_1,\ldots, c_k\}$ από στοιχειώδεις κύκλους του G ως προς T ($k\geq 2$), για το οποίο $c=\oplus(c_1,\ldots, c_k)$. □

Απόδειξη της 3.3.1

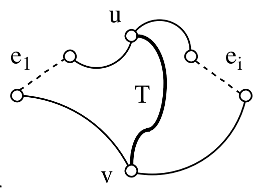
Αν ισχύει $c=\oplus(c_1,\ldots, c_k)$, όπου $\{c_1,\ldots, c_k\}$ ($k\geq 2$) είναι ένα σύνολο από στοιχειώδεις κύκλους του G ως προς T, και e_l είναι η χορδή ως προς το T που διατρέχει ο στοιχειώδης κύκλος c_l, $l=1,\ldots, k$, μπορούμε να δούμε ότι οι χορδές που διατρέχει ο κύκλος c θα είναι ακριβώς οι $e_1,\ldots, e_k$. Ο λόγος είναι ότι κάθε χορδή e_l, $l=1,\ldots, k$, ανήκει σε έναν μόνο από τους $c_1,\ldots, c_k$, οπότε θα ανήκει και στο άθροισμά τους $\oplus(c_1,\ldots, c_k)=c$ (βλέπε Άσκηση 9). Επίσης, καμμία άλλη χορδή δεν μπορεί να ανήκει στον $c=\oplus(c_1,\ldots, c_k)$, αφού δεν θα ανήκει σε κανέναν από τους $c_1,\ldots, c_k$. Επομένως οι χορδές $e_1,\ldots, e_k$, και συνακόλουθα οι στοιχειώδεις κύκλοι $c_1,\ldots, c_k$, προσδιορίζονται με μοναδικό τρόπο από τον κύκλο c.

Έστω $e_1,\ldots, e_n$ οι χορδές ως προς το T που διατρέχει ένας δεδομένος κύκλος c (προφανώς είναι $n\geq 1$, αφού αλλοιώς ο c θα ήταν κύκλος του T). Για $l=1,\ldots, n$, έστω c_l ο στοιχειώδης κύκλος ως προς το T που διατρέχει τη χορδή e_l. Θα δείξουμε με επαγωγή στο n ότι: είτε ο κύκλος c είναι στοιχειώδης και $c=c_1$ (αν $n=1$), ή $c=\oplus(c_1,\ldots, c_n)$ (αν $n>1$).

Αρχική περίπτωση Αν $n=1$, ο κύκλος c διατρέχει μόνο μία χορδή, οπότε είναι στοιχειώδης και $c=c_1$.

Επαγωγικό βήμα Υποθέτουμε ότι, για οποιεσδήποτε χορδές $e_1,\ldots, e_m$, όπου $1\leq m<i$, αν ο c είναι κύκλος που διατρέχει τις $e_1,\ldots, e_m$ (και δεν διατρέχει άλλες χορδές), και ο c_l είναι ο στοιχειώδης κύκλος ως προς το T που διατρέχει τη χορδή e_l, $l=1,\ldots, m$, τότε: είτε ο c θα είναι στοιχειώδης και $c=c_1$ (αν $m=1$), ή $c=\oplus(c_1,\ldots, c_m)$ (αν $m>1$).

Έστω $e_1,\ldots, e_i$ οποιεσδήποτε χορδές, και c ένας κύκλος που διατρέχει τις χορδές $e_1,\ldots, e_i$ (και δεν διατρέχει άλλες χορδές). Αν αφαιρέσουμε από τον κύκλο c τις ακμές e_1 και e_i, οι κορυφές του c μαζύ με τις υπόλοιπες ακμές του σχηματίζουν δύο μονοπάτια του G. Έστω A, B τα σύνολα των κορυφών αυτών των δύο μονοπατιών. Επειδή το T είναι δέντρο επικάλυψης του G, θα περιέχει όλες τις κορυφές του G και θα είναι συνεκτικό, οπότε για οποιεσδήποτε κορυφές $a \in A$ και $b \in B$ θα υπάρχει διαδρομή του T με άκρα τις a, b. Από την Πρόταση 2.2.2, θα υπάρχει μονοπάτι $\mu=(u,\ldots, v)$ του T με αρχή μία κορυφή $u \in A$ και τέλος μία κορυφή $v \in B$, χωρίς καμμία άλλη κορυφή στο $A\cup B$ (έντονη γραμμή στο σχήμα).

Η διαδρομή $\gamma_1=(u,\ldots, v,\ldots, e_1,\ldots, u)$ είναι κύκλος 

, αφού η υπο-ακολουθία $(v,\ldots, e_1,\ldots, u)$ είναι μέρος του κύκλου c, και η υπο-ακολουθία $(u,\ldots, v)=\mu$ δεν έχει κοινές κορυφές με τον c εκτός από τις u, v. Ο κύκλος γ_1 διατρέχει το πολύ $i-1$ από τις χορδές που διατρέχει ο κύκλος c, αφού η υπο-ακολουθία $(u,\ldots, v)=\mu$ είναι μονοπάτι του T (οπότε δεν διατρέχει καμμία χορδή), και η χορδή e_i δεν διατρέχεται από την υπο-ακολουθία $(v,\ldots, e_1,\ldots, u)$. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο γ_1 διατρέχει τις χορδές $e_1,\ldots, e_j$, όπου $j<i$ (αλλοιώς μπορούμε να μεταθέσουμε κατάλληλα τις $e_1,\ldots, e_i$). Από την επαγωγική υπόθεση, αν c_l είναι ο στοιχειώδης κύκλος ως προς το T που διατρέχει τη χορδή e_l, $l=1,\ldots, i$, θα είναι είτε $\gamma_1=c_1$ (αν $j=1$), ή $\gamma_1=\oplus(c_1,\ldots, c_j)$ (αν $j>1$).
Αντίστοιχα, η διαδρομή $\gamma_2=(u,\ldots, v,\ldots, e_i,\ldots, u)$ είναι κύκλος, διατρέχει το πολύ $i-1$ από τις χορδές που διατρέχει ο κύκλος c, και μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο γ_2 διατρέχει τις χορδές $e_{j+1},\ldots, e_i$. Από την επαγωγική υπόθεση, αν c_l είναι ο στοιχειώδης κύκλος ως προς το T που διατρέχει τη χορδή e_l, $l=1,\ldots, i$, θα είναι είτε $\gamma_2=c_{j+1}$ (αν $j+1=i$), ή $\gamma_2=\oplus(c_{j+1},\ldots, c_i)$ (αν $j+1<i$). Από τον ορισμό των γ_1, γ_2, είναι $c=\oplus(\gamma_1, \gamma_2)$. Από τα παραπάνω, μπορούμε να δούμε ότι $c=\oplus(c_1,\ldots, c_i)$ (βλέπε και Ερώτημα 6). □

Ερωτήματα

1. Αποδείξτε ότι: ένα δάσος επικάλυψης ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G με k συνεκτικές συνιστώσες αποτελείται από k δέντρα επικάλυψης, ένα για κάθε συνεκτική συνιστώσα του G.
2. Πόσες ακμές έχει ένα δάσος επικάλυψης ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος με n κορυφές και k συνεκτικές συνιστώσες;
3. Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές, m ακμές, και k συνεκτικές συνιστώσες. Οι ορισμοί της χορδής και του στοιχειώδους κύκλου έχουν νόημα και ως προς ένα δάσος επικάλυψης T του G.
   i. Πόσες είναι οι χορδές του G ως προς το T;
   ii. Πόσοι είναι οι στοιχειώδεις κύκλοι του G ως προς το T;
4. Βρείτε δύο κύκλους c_1, c_2 σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, με σύνολα ακμών E_1, E_2 αντίστοιχα, όπου τα E_1, E_2 να έχουν κοινά στοιχεία, και να μην υπάρχει άθροισμα των c_1, c_2.
5. Έστω E ένα υπο-σύνολο των ακμών ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος. Αποδείξτε ότι δεν γίνεται να υπάρχουν δύο διαφορετικοί κύκλοι, που οι ακμές που διατρέχει ο καθένας να είναι οι ακμές του E.
6. Έστω $c_1,\ldots, c_i$ κύκλοι ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το άθροισμα $\oplus(c_1,\ldots, c_i)$. Αποδείξτε ότι:
   i. Αν υπάρχει το άθροισμα $\oplus(c_1,\ldots, c_{i-1})$, θα είναι $\oplus(c_1,\ldots, c_i)=\oplus(\oplus(c_1,\ldots, c_{i-1}), c_i)$.
   ii. Αν υπάρχει το άθροισμα $\oplus(c_2,\ldots, c_i)$, θα είναι $\oplus(c_1,\ldots, c_i)= \oplus(c_1,\oplus(c_2,\ldots, c_i))$.
   iii. Αν υπάρχουν τα αθροίσματα $\oplus(c_1,\ldots, c_j)$ και $\oplus(c_{j+1},\ldots, c_i)$, θα είναι $\oplus(c_1,\ldots, c_i)=\oplus(\oplus(c_1,\ldots, c_j), \oplus(c_{j+1},\ldots, c_i))$.

3.4 Ασκήσεις

1. Περιγράψτε μια διαδικασία που, με δεδομένα ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G και δύο διαφορετικά μονοπάτια με άκρα τις κορυφές a, b, βρίσκει ένα κύκλο στο G.
2. Το G είναι ένα μη-κατευθυνόμενο άκυκλο γράφημα. Αποδείξτε ότι κάθε συνεκτικό υπο-γράφημα του G θα είναι και επαγόμενο υπο-γράφημα του G.
3. Το G είναι ένα μη-κατευθυνόμενο άκυκλο γράφημα, και τα $G_1=(V_1, E_1)$, $G_2=(V_2, E_2)$ είναι συνεκτικά υπο-γραφήματα του G. Αποδείξτε ότι, αν τα G_1, G_2 έχουν κοινές κορυφές, το γράφημα $(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ θα είναι συνεκτικό.
4. Αποδείξτε ότι κάθε συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές και ακριβώς $n-1$ ακμές ($n \geq 1$) είναι δέντρο.
5. Αποδείξτε ότι κάθε άκυκλο μη-κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές και ακριβώς $n-1$ ακμές ($n \geq 1$) είναι δέντρο.
6. Για οποιοδήποτε $n>1$, βρείτε ένα συνεκτικό γράφημα G_n με ζυγό μήκος μέγιστου μονοπατιού, και με ακριβώς n κέντρα.
7. Ο παρακάτω αλγόριθμος D παίρνει σαν είσοδο ένα δέντρο G=(V, E), και για κάθε κορυφή u στο V υπολογίζει μια ακέραια τιμή d[u] (που αρχικά είναι *null*). Ο αλγόριθμος εκτελεί διαδοχικά περάσματα, που καθένα ενημερώνει τις τιμές κάποιων κορυφών, από *null* σε ακέραιες. Αν ένα πέρασμα δεν ενημερώσει καμμία κορυφή, ο αλγόριθμος τερματίζει.

```
for each u in V do
  d[u]←null      od                % αρχικοποίηση των τιμών των κορυφών
                                     πριν από οποιαδήποτε ενημέρωση
for each u in V do
  if φ(u)=1
    then d[u]←0 od                 % πρώτο πέρασμα των κορυφών

L: flag←false
  new_vertices←{}                  % το σύνολο new_vertices θα συγκεντρώσει
                                     τις κορυφές που θα ενημερωθούν στο
                                     επόμενο πέρασμα
  for each u in V do
         if  d[u]=null   and
              «υπάρχει το πολύ μία γειτονική κορυφή a της u
               με d[a]=null»
          then  new_vertices←new_verticesU{u}
                new_value[u]←max{d[x]+1 | x γειτονική της u, d[x]≠null}
                                 od
  for each u in new_vertices do
         d[u]←new_value[u]         % η ενημέρωση των κορυφών γίνεται
                                     «ταυτόχρονα»
         flag←true                 % σημειώνεται το ότι ενημερώθηκε κάποια
                                 od  κορυφή
  if flag=true then goto L
```

Αποδείξτε ότι, για οποιοδήποτε δέντρο G με δύο τουλάχιστον κορυφές, και για κάθε κορυφή u του G με $\varphi(u)>1$, στο τέλος του αλγορίθμου D ισχύει: η τιμή d[u] είναι το μεγαλύτερο δυνατό μήκος ενός μονοπατιού (x,…, u) με άκρο την u, το οποίο (α) είτε δεν περιέχει κέντρο του G και μπορεί να επεκταθεί σε ένα μονοπάτι (x,…, u,…, κ), όπου η κορυφή κ είναι κέντρο του G, ή (β) το μοναδικό κέντρο του G που περιέχεται στο (x,…, u) είναι η κορυφή u.

8. Βρείτε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα με τρείς κύκλους c_1, c_2, c_3 που έχουν άθροισμα, και που ανά δύο δεν έχουν άθροισμα.
9. Αποδείξτε ότι, αν τα $E_1,\ldots, E_k$ ($k\geq 2$) είναι οποιαδήποτε σύνολα, ισχύει $\oplus(E_1,\ldots, E_k) = \{x \mid \text{το } x \text{ ανήκει σε μονό αριθμό από τα } E_j, j=1, 2,\ldots, k\}$.
10. Έστω $c_1,\ldots, c_k$ ($k\geq 2$) κύκλοι ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος $G=(V, E)$, και E_i το σύνολο των ακμών που διατρέχει ο κύκλος c_i, $i=1,\ldots, k$. Έστω G' το υπο-γράφημα $(V, \oplus(E_1,\ldots, E_k))$ του G. Αποδείξτε ότι ο βαθμός κάθε κορυφής του G' είναι ζυγός.
11. Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα έχει n κορυφές, m ακμές, και k συνεκτικές συνιστώσες. Αποδείξτε ότι το γράφημα έχει ακριβώς ένα κύκλο, αν και μόνο αν $m=n-k+1$.
Είναι σωστό ότι ένα γράφημα όπως παραπάνω έχει ακριβώς δύο κύκλους, αν και μόνο αν $m=n-k+2$;

4 Δισυνεκτικότητα

4.1 Δισυνεκτικότητα ως προς κορυφές

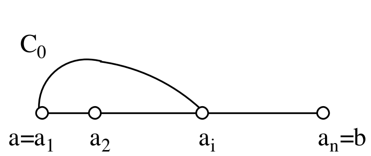
<u>*Ορισμός διπροσβασιμότητας ως προς κορυφές*</u>   Οι κορυφές a, b ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος, όπου a≠b, συσχετίζονται μέσω της *διπροσβασιμότητας ως προς κορυφές*, R_κ, αν υπάρχουν δύο μονοπάτια με αρχή την a και τέλος τη b χωρίς κοινές κορυφές (εκτός από τις a, b). □

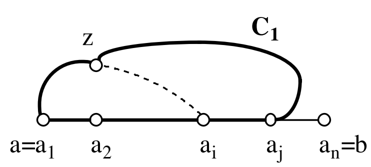
<u>Σημείωση</u> Η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές μπορεί να αναφερθεί πιο σύντομα ως διπροσβασιμότητα.

4.1.1 Πρόταση (Χαρακτηρισμός της διπροσβασιμότητας)

Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα με τρείς τουλάχιστον κορυφές. Για οποιεσδήποτε διαφορετικές κορυφές a, b του G που δεν συνδέονται με ακμή, ισχύει a R_κ b αν και μόνο αν: για οποιαδήποτε κορυφή x διαφορετική από τις a, b, οι κορυφές a, b είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G−x. □

<u>Απόδειξη της 4.1.1</u>
Έστω ότι ισχύει a R_κ b, οπότε υπάρχουν δύο μονοπάτια με αρχή την a και τέλος τη b, χωρίς κοινές κορυφές (εκτός από τις a, b). Μία κορυφή x διαφορετική από τις a, b δεν μπορεί να ανήκει και στα δύο μονοπάτια. Επομένως, τουλάχιστον το ένα από τα δύο μονοπάτια θα υπάρχει και στο G−x, που σημαίνει ότι οι κορυφές a, b είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G−x.
Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι για οποιαδήποτε κορυφή x διαφορετική από τις a, b, υπάρχει διαδρομή με άκρα τις a, b που δεν περιέχει τη x. Θα δείξουμε ότι υπάρχει κύκλος που περιέχει τις a, b, οπότε a R_κ b.
Αφού το G είναι συνεκτικό, υπάρχει μονοπάτι $v=(a_1, \{a_1, a_2\}, a_2,\ldots, a_n)$ με άκρα $a_1=a$ και $a_n=b$.
Αφού οι κορυφές a, b δεν συνδέονται με ακμή, είναι $n\geq 3$.
Έστω $x_0=a_2$, $A_0=\{a_1\}$, $B_0=\{a_3,\ldots, a_n\}$. Αφού η x_0 είναι διαφορετική από τις a, b, από την υπόθεσή μας υπάρχει διαδρομή δ_0, με αρχή την a_1 και τέλος την a_n, που δεν περιέχει τη x_0.
Από την Πρόταση 2.2.2, υπάρχει μονοπάτι μ_0, με αρχή την $a_1 \in A_0$ και τέλος μια κορυφή $a_i \in B_0$, που δεν περιέχει κορυφή του $A_0 \cup B_0$ διαφορετική από τα άκρα του. Η Απόδειξη της Πρότασης 2.2.2 δείχνει ότι μπορούμε να διαλέξουμε ένα τέτοιο μονοπάτι μ_0 που να είναι υπο-ακολουθία μιας δεδομένης διαδρομής d, με αρχή την $a_1 \in A_0$ και τέλος στο B_0. Άρα το μ_0 μπορεί να είναι υπο-ακολουθία της παραπάνω διαδρομής δ_0, που σημαίνει ότι το μ_0 δεν θα περιέχει τη x_0.
Επομένως το μ_0 δεν περιέχει καμμία από τις κορυφές $a_2,\ldots, a_{i-1}$. Έστω C_0 ο κύκλος που προκύπτει διατρέχοντας την υπο-ακολουθία $(a_1,\ldots, a_i)$ του v, και τις ακμές του μονοπατιού μ_0. Ο κύκλος C_0 περιέχει τις κορυφές a_1 και a_i.
Αν $a_i=a_n$, ο C_0 είναι κύκλος που περιέχει τις $a_1=a$ και $a_n=b$.





Αν i<n, θέτουμε $x_1=a_i$, $A_1=\{u \mid u$ κορυφή του C_0 διαφορετική από την $a_i\}$, $B_1=\{a_{i+1},\ldots, a_n\}$.
Παίρνουμε μία διαδρομή δ_1, με αρχή την a_1 και τέλος την a_n, που δεν περιέχει τη x_1.
Εφαρμόζοντας στην δ_1 τη διαδικασία στην Απόδειξη της Πρότασης 2.2.2, βρίσκουμε ένα μονοπάτι μ_1, που έχει αρχή $z \in A_1$, τέλος $a_j \in B_1$, δεν περιέχει τη x_1, και δεν περιέχει κορυφή του $A_1 \cup B_1$ διαφορετική από τα άκρα του. Έστω C_1 ο κύκλος που προκύπτει διατρέχοντας την

υπο-ακολουθία ($a_i,\ldots, a_j$) του ν, τις ακμές του μονοπατιού μ_1, και μία από τις δύο υπο-ακολουθίες ($z,\ldots, a_i$) του C_0 που περιέχει[4] την κορυφή a_1. Ο κύκλος C_1 περιέχει τις κορυφές a_1 και a_j, και παρατηρούμε ότι $j>i$.
Αν $a_j=a_n$, ο C_1 είναι κύκλος που περιέχει τις $a_1=a$ και $a_n=b$.
Αν $j<n$, μετασχηματίζοντας τον κύκλο C_1 όπως παραπάνω παίρνουμε κύκλο C_2 που περιέχει την κορυφή a_1 και μία κορυφή a_k, όπου $k>j$. Και ούτω καθ΄εξής. Αφού κάθε φορά παίρνουμε κύκλο που περιέχει κορυφή του ν με όλο και μεγαλύτερη απόσταση από την a_1 (πάνω στο μονοπάτι ν), η διαδικασία θα καταλήξει σε ένα κύκλο C_p που θα περιέχει τις $a_1=a$ και $a_n=b$. □

Παρατήρηση Στην παραπάνω διαδικασία, κάθε κύκλος C_m μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να περιέχει την ακμή $\{a_1, a_2\}$. Επίσης, θα περιέχει την ακμή $\{a_{l-1}, a_l\}$, όπου a_l το άκρο του μονοπατιού μ_m στο σύνολο B_m. Έτσι, ο τελευταίος κύκλος C_p θα περιέχει τις ακμές $\{a_1, a_2\}$ και $\{a_{n-1}, a_n\}$.

Σημείωση Αν οι κορυφές a, b συνδέονται με ακμή, ισχύει a R_κ b αν και μόνο αν υπάρχει μονοπάτι με άκρα τις a, b, που δεν διατρέχει την ακμή {a, b}. Επομένως a R_κ b αν και μόνο αν η ακμή {a, b} δεν είναι γέφυρα (βλέπε Πρόταση 2.3.1).

Ορισμός δισυνεκτικότητας ως προς κορυφές Ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα G είναι *δισυνεκτικό ως προς κορυφές* αν, για οποιεσδήποτε διαφορετικές κορυφές a, b του G, ισχύει a R_κ b. □

Σημείωση Η δισυνεκτικότητα ως προς κορυφές μπορεί να αναφερθεί πιο σύντομα ως δισυνεκτικότητα.

4.1.2 Πρόταση (Χαρακτηρισμός της δισυνεκτικότητας)

Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα.
1. Αν το G είναι δισυνεκτικό, δεν έχει κομβικό σημείο.
2. Αν το G έχει τρείς τουλάχιστον κορυφές και δεν έχει κομβικό σημείο, είναι δισυνεκτικό. □

Απόδειξη της 4.1.2
1. Έστω x ένα κομβικό σημείο του G. Από την Άσκηση 2.5 (9), η κορυφή x έχει δύο γειτονικές κορυφές a, b που βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G−x. Επομένως κάθε μονοπάτι του G με άκρα τις a, b πρέπει να περιέχει τη x, οπότε δεν ισχύει a R_κ b. Άρα αν το G είναι δισυνεκτικό δεν μπορεί να έχει κομβικό σημείο.
2. Έστω ότι το G δεν είναι δισυνεκτικό, οπότε υπάρχουν δύο διαφορετικές κορυφές a, b του G για τις οποίες δεν ισχύει a R_κ b.
Αν οι a, b δεν συνδέονται με ακμή, από την Πρόταση 4.1.1 θα υπάρχει κορυφή x διαφορετική από τις a, b, με τις a, b να βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G−x. Άρα η κορυφή x θα είναι κομβικό σημείο του G.
Έστω ότι οι a, b συνδέονται με ακμή. Αφού υπάρχουν τρείς τουλάχιστον κορυφές και το G είναι συνεκτικό, είτε η a ή η b θα έχει μία γειτονική κορυφή x, διαφορετική από τις a, b. Αν η x είναι γειτονική της a (αντίστοιχα της b), αφού δεν ισχύει a R_κ b δεν υπάρχει κύκλος που να περιέχει τις ακμές {a, b}, {a, x} (αντίστοιχα, τις {a, b}, {b, x}), και από την Πρόταση 2.3.2 η κορυφή a (αντίστοιχα η b) θα είναι κομβικό σημείο του G.
Άρα αν το G δεν είναι δισυνεκτικό, σε κάθε περίπτωση έχει κομβικό σημείο, οπότε αν δεν υπάρχει κομβικό σημείο το G θα είναι δισυνεκτικό. □

[4] Η κορυφή z θα μπορούσε να είναι μία από τις $a_1,\ldots, a_{i-1}$.

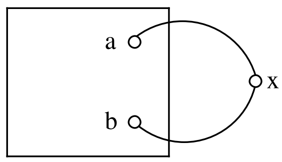
<u>Παρατήρηση</u> Το G δεν έχει κομβικά σημεία αν και μόνο αν η αφαίρεση οποιασδήποτε κορυφής του G δεν καταστρέφει την συνεκτικότητά του. Δηλαδή, για να προκύψει από το G μη-συνεκτικό γράφημα με αφαίρεση κάποιων κορυφών του, πρέπει οι κορυφές που θα αφαιρεθούν να είναι τουλάχιστον δύο.

<u>Σημείωση</u> Για ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα G, η δισυνεκτικότητα ορίζεται εναλλακτικά ως το ότι «το G δεν έχει κομβικά σημεία». Από την παραπάνω Πρόταση, οι δύο ορισμοί ταυτίζονται αν το G δεν είναι το  ή το  .

4.1.3 Πρόταση (Επέκταση δισυνεκτικού υπο-γραφήματος)

Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα, F ένα δισυνεκτικό υπο-γράφημα του G, και $\mu=(a,\ldots, b)$ ένα μονοπάτι του G με άκρα a, b στο F. Το υπο-γράφημα F' του G που προκύπτει προσθέτοντας στο F τις κορυφές και τις ακμές του μ, είναι δισυνεκτικό. □

<u>Απόδειξη της 4.1.3</u>
Αν κάθε κορυφή του μ είναι και κορυφή του F, το F θα είναι δισυνεκτικό υπο-γράφημα του F' με τις ίδιες κορυφές με το F'. Άρα το F' θα είναι δισυνεκτικό.
Αν υπάρχει κορυφή του μ που δεν είναι και κορυφή του F, το F' έχει τουλάχιστον τρείς κορυφές (είναι $a\neq b$), οπότε αρκεί να δείξουμε ότι το F' δεν έχει κομβικά σημεία (Πρόταση 4.1.2 (2)). Έστω x μία κορυφή του F': θα δείξουμε ότι το $F'-x$ είναι συνεκτικό.
Ονομάζουμε μ' το γράφημα που περιέχει τις κορυφές και τις ακμές του μ, εκτός από την κορυφή x και τις ακμές που προσπίπτουν στην x. Αν x=a (αντίστοιχα x=b) το μ' είναι μονοπάτι με άκρο τη b (αντίστοιχα την a). Αν η x είναι κορυφή του μ διαφορετική από τις a, b, το μ' είναι δύο μονοπάτια, το καθένα με άκρο μία από τις a, b. Αν η x δεν είναι κορυφή του μ, είναι $\mu'=\mu$. Προφανώς το $F'-x$ προκύπτει προσθέτοντας στο $F-x$ τις κορυφές και τις ακμές του μ'.
Έστω ότι η x δεν είναι κορυφή του F. Τότε $F-x=F$ που είναι συνεκτικό, το μ' είναι δύο μονοπάτια, το καθένα με άκρο μία από τις a, b,

F:


και με βάση τα παραπάνω το $F'-x$ προφανώς θα είναι συνεκτικό.
Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση η x να είναι κορυφή του F. Αφού το F είναι δισυνεκτικό η x δεν είναι κομβικό σημείο (Πρόταση 4.1.2 (1)), οπότε το $F-x$ είναι συνεκτικό. Από τα παραπάνω, προφανώς το $F'-x$ θα είναι συνεκτικό. □

<u>*Ορισμός δισυνεκτικής συνιστώσας ως προς κορυφές*</u> Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα. Ένα δισυνεκτικό υπο-γράφημα H του G είναι *δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές*, αν: προσθέτοντας στο H οποιεσδήποτε κορυφές και ακμές του G (από αυτές που δεν περιέχονται στο H), παίρνουμε υπο-γράφημα H' του G που δεν είναι δισυνεκτικό. □

<u>Σημείωση</u> Η δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές μπορεί να αναφερθεί πιο σύντομα ως δισυνεκτική συνιστώσα.

4.1.4 Πρόταση (Χαρακτηρισμός των δισυνεκτικών συνιστωσών)

Έστω e μία ακμή ενός μη-κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος G=(V, E) που δεν είναι γέφυρα.
Υπάρχει μοναδική δισυνεκτική συνιστώσα H=(W, K) που περιέχει την e, και είναι

K={e}U{e′ | υπάρχει κύκλος που περιέχει τις ακμές e, e′},
W={u | η u είναι κορυφή κάποιας ακμής στο K}. □

<u>Απόδειξη της 4.1.4</u>
Επειδή η ακμή e δεν είναι γέφυρα, υπάρχει κύκλος C που περιέχει την e (Πρόταση 2.3.1). Το υπο-γράφημα που αποτελείται από τις κορυφές και τις ακμές του C είναι προφανώς δισυνεκτικό. Από την Άσκηση 4.4 (7), υπάρχει δισυνεκτική συνιστώσα που περιέχει τις κορυφές και τις ακμές του C, επομένως υπάρχει δισυνεκτική συνιστώσα που περιέχει την e.
Έστω Θ μία δισυνεκτική συνιστώσα που περιέχει την e. Θα δείξουμε ότι η Θ ταυτίζεται με το H. Έστω f μία ακμή της Θ διαφορετική από την e. Αφού το υπο-γράφημα Θ είναι δισυνεκτικό, από την Άσκηση 4.4 (4) υπάρχει κύκλος που περιέχει τις ακμές e, f. Άρα κάθε ακμή της Θ περιέχεται στο σύνολο K των ακμών του H.
Έστω e′ μία ακμή του H διαφορετική από την e. Από τον ορισμό των ακμών του H, υπάρχει κύκλος που περιέχει τις ακμές e, e′, άρα υπάρχει μονοπάτι μ που περιέχει την e′ και έχει τα ίδια άκρα με την e. Αν προσθέσουμε στη Θ τις κορυφές και τις ακμές του μ, το υπο-γράφημα Θ′ που προκύπτει είναι δισυνεκτικό (Πρόταση 4.1.3). Επειδή η Θ είναι δισυνεκτική συνιστώσα, το Θ′ δεν μπορεί να περιέχει ακμές που δεν είναι στη Θ, άρα η e′ είναι ακμή της Θ.
Αφού τα υπο-γραφήματα Θ, H έχουν τις ίδιες ακμές και είναι συνεκτικά (οπότε δεν έχουν απομονωμένες κορυφές), προφανώς ταυτίζονται. □

<u>Παρατήρηση</u> Αν η ακμή e ενός συνεκτικού γραφήματος είναι γέφυρα, δεν υπάρχει δισυνεκτική συνιστώσα που να περιέχει την e (βλέπε Άσκηση 4.4 (6)). Επομένως, με βάση και την παραπάνω Πρόταση, οι δισυνεκτικές συνιστώσες ενός συνεκτικού γραφήματος G αποτελούν διαμερισμό των ακμών του G που δεν είναι γέφυρες.

4.1.5 Πρόταση (Διπροσβασιμότητα και δισυνεκτικές συνιστώσες)

Δύο διαφορετικές κορυφές a, b ενός μη-κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος είναι στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα, αν και μόνο αν a R_κ b. □

<u>Απόδειξη της 4.1.5</u>
Έστω ότι ισχύει a R_κ b. Υπάρχει ένας κύκλος C που περιέχει τις a, b, οπότε ο C περιέχει μία ακμή e με άκρο την a. Αφού η e ανήκει σε κύκλο δεν είναι γέφυρα (Πρόταση 2.3.1), άρα, από την παραπάνω Πρόταση, υπάρχει δισυνεκτική συνιστώσα H που περιέχει την e (άρα και την κορυφή a), και οι ακμές της είναι οι {e}U{e′ | υπάρχει κύκλος που περιέχει τις ακμές e, e′}. O κύκλος C θα περιέχει μία ακμή f με άκρο την b. Επομένως η δισυνεκτική συνιστώσα H θα περιέχει την ακμή f, άρα θα περιέχει και την κορυφή b.
Έστω ότι οι κορυφές a, b είναι στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα H. Έστω e μια ακμή της H με άκρο την a (το υπο-γράφημα H είναι συνεκτικό). Από την παραπάνω Πρόταση, οι ακμές της H είναι οι {e}U{e′ | υπάρχει κύκλος που περιέχει τις ακμές e, e′}. Αν f είναι μία ακμή της H με άκρο την b, υπάρχει κύκλος που περιέχει τις e, f. Άρα υπάρχει κύκλος που περιέχει τις κορυφές a, b, δηλαδή είναι a R_κ b. □

<u>*Ορισμός γραφήματος δισυνεκτικών συνιστωσών*</u> Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα με δύο τουλάχιστον κορυφές. Έστω $H_1,\ldots, H_m$ οι δισυνεκτικές συνιστώσες του G που περιέχουν μία τουλάχιστον ακμή (m≥0), $e_1,\ldots, e_k$ οι γέφυρες του G (k≥0), και $a_1,\ldots, a_n$ οι κορυφές του G που είτε είναι κομβικά σημεία ή έχουν βαθμό 1 (n≥0).
Το *γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών του* G, M(G), αποτελείται από τις κορυφές

$\{a_1,\ldots, a_n\}\cup\{\eta_1,\ldots, \eta_m\}$

και τις ακμές

$\{e_1,\ldots, e_k\}\cup$

$\{\{\eta_i, a_j\} \mid$ το κομβικό σημείο a_j ανήκει στη δισυνεκτική συνιστώσα $H_i\}$. □

Παρατήρηση Κάθε ένα από τα άκρα μιάς γέφυρας θα είναι κομβικό σημείο, ή θα έχει βαθμό 1 (βλέπε Άσκηση 2.5 (10)). Κάθε κορυφή με βαθμό 1 είναι άκρο μιάς γέφυρας.

Παρατήρηση Κάθε ακμή που δεν είναι γέφυρα θα περιέχεται σε μία μοναδική δισυνεκτική συνιστώσα (βλέπε Πρόταση 4.1.4). Αν αυτή η δισυνεκτική συνιστώσα δεν περιέχει όλες τις ακμές του G, θα περιέχει τουλάχιστον ένα κομβικό σημείο (βλέπε Άσκηση 2.5 (6) και Προτάσεις 2.3.2, 4.1.4).

Ορισμός σύμπτυξης πάνω στις δισυνεκτικές συνιστώσες Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα με δύο τουλάχιστον κορυφές, και έστω $H_1,\ldots, H_m$ οι δισυνεκτικές συνιστώσες του G που περιέχουν μία τουλάχιστον ακμή ($m\geq 0$). Αν F=(W, K) είναι ένα υπο-γράφημα του G, η *σύμπτυξη του* F *πάνω στις δισυνεκτικές συνιστώσες του* G, F/M(G), είναι το υπο-γράφημα του M(G) με κορυφές

{u | η κορυφή u ∈ W είναι
άκρο μιάς ακμής του F που είναι γέφυρα του G}∪
$\{\eta_i \mid$ υπάρχει ακμή του F
που ανήκει στην δισυνεκτική συνιστώσα H_i του G}∪
{u | η κορυφή u ∈ W είναι
άκρο δύο ακμών του F που δεν περιέχονται στον ίδιο κύκλο του G}

και ακμές

{e | η ακμή e του F είναι γέφυρα του G}∪
$\{\{\eta_i, u\} \mid$ η κορυφή u ∈ W είναι
άκρο δύο ακμών του F που δεν περιέχονται στον ίδιο κύκλο του G,
και μία από αυτές ανήκει στην δισυνεκτική συνιστώσα H_i του G}. □

Παρατήρηση Αν δύο ακμές του F με κοινό άκρο δεν περιέχονται στον ίδιο κύκλο του G, είτε μία από αυτές θα είναι γέφυρα, ή θα βρίσκονται σε διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες του G.

4.1.6 Πρόταση (Το γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών)

Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα με δύο τουλάχιστον κορυφές.

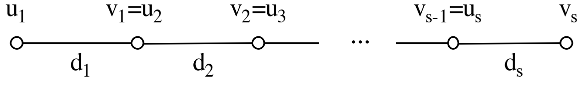
i. Για κάθε μονοπάτι μ του G, η σύμπτυξη του μ πάνω στις δισυνεκτικές συνιστώσες του G είτε θα είναι μονοπάτι του M(G), ή θα αποτελείται από μία κορυφή η_i του M(G), αντίστοιχη μιάς δισυνεκτικής συνιστώσας H_i του G.
ii. Το γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών του G, M(G), είναι συνεκτικό.
iii. Το γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών του G, M(G), είναι άκυκλο. □

Απόδειξη της 4.1.6

i. Αν κάθε ακμή του μ είναι γέφυρα του G, θα είναι μ/M(G)=μ.

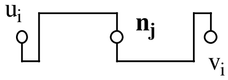
Αν όλες οι ακμές του μ ανήκουν στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα H_i του G, το μ/M(G) θα αποτελείται από την κορυφή η_i του M(G).

Σε κάθε άλλη περίπτωση, διαιρούμε το μ σε διαδοχικές υπο-ακολουθίες $d_1, d_2,\ldots, d_s$ ($s\geq 2$), που

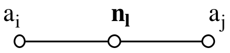


κάθε μία είναι μονοπάτι, και όπου το τέλος του $d_i=(u_i,\ldots, v_i)$ είναι η αρχή του $d_{i+1}=(u_{i+1},\ldots, v_{i+1})$, για κάθε $i=1,\ldots, s-1$. Επιλέγουμε τα μονοπάτια $d_1, d_2,\ldots, d_s$ έτσι ώστε οι ακμές του d_i, $i=1,\ldots, s$, είτε να είναι όλες γέφυρες του G, ή να

ανήκουν όλες στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα του G. Επίσης, αν οι ακμές του d_i είναι γέφυρες ($i=1,\dots, s$), οι ακμές των d_{i-1}, d_{i+1} δεν θα είναι γέφυρες. Και αν οι ακμές του d_i ανήκουν σε μία δισυνεκτική συνιστώσα H του G ($i=1,\dots, s$), οι ακμές των d_{i-1}, d_{i+1} δεν θα ανήκουν στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα H.
Είναι εύκολο να δούμε ότι η σύμπτυξη του μονοπατιού μ πάνω στις δισυνεκτικές συνιστώσες του G, $\mu/M(G)$, είναι η ένωση υπο-γραφημάτων F_i του M(G), όπου κάθε F_i, $i=1,\dots, s$, προκύπτει από το αντίστοιχο d_i ως εξής:
Αν οι ακμές του d_i είναι γέφυρες, $F_i=d_i$.
Αν οι ακμές του $d_i=(u_i,\dots, v_i)$ ανήκουν σε μία δισυνεκτική συνιστώσα H_j του G, τότε:

Αν $1<i<s$, το F_i αποτελείται από τις κορυφές u_i, η_j, v_i, και τις ακμές 

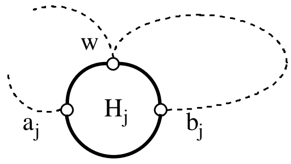
$\{u_i, \eta_j\}$, $\{\eta_j, v_i\}$.
Αν $i=1$, το F_i αποτελείται από τις κορυφές η_j, v_i, και την ακμή $\{\eta_j, v_i\}$. Αν $i=s$, το F_i αποτελείται από τις κορυφές u_i, η_j, και την ακμή $\{u_i, \eta_j\}$.
Προφανώς το $\mu/M(G)$ είναι διαδρομή του M(G), και δεν επαναλαμβάνει καμμία κορυφή που ανήκει στο μονοπάτι μ. Για να δείξουμε ότι το $\mu/M(G)$ είναι μονοπάτι, αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχουν δύο υπο-ακολουθίες του μ, $d_i=(u_i,\dots, v_i)$ και $d_l=(u_l,\dots, v_l)$, με $i<l$, που οι ακμές τους να ανήκουν στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα H του G. Από την επιλογή των $d_1, d_2,\dots, d_s$, δύο τέτοιες υπο-ακολουθίες δεν θα είναι διαδοχικές (άρα $l\geq i+2$). Άρα η υπο-ακολουθία $\nu=(v_i,\dots, u_l)$ του μ θα είναι μονοπάτι, με άκρα v_i, u_l που θα ανήκουν στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα H του G. Από την Πρόταση 4.1.3 και τον ορισμό της δισυνεκτικής συνιστώσας, κάθε κορυφή και κάθε ακμή του ν θα ανήκει επίσης στην H. Επομένως οι ακμές των υπο-ακολουθιών $d_{i+1},\dots, d_{l-1}$ θα ανήκουν στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα με τις ακμές των d_i, d_l, που είναι αδύνατον από την επιλογή των $d_1, d_2,\dots, d_s$.
ii. Αν το G δεν έχει κορυφές που είτε είναι κομβικά σημεία ή έχουν βαθμό 1, το G θα είναι δισυνεκτικό (βλέπε Πρόταση 4.1.2 (2)), οπότε το υπο-γράφημα G θα είναι η μοναδική δισυνεκτική συνιστώσα. Επομένως το M(G) θα αποτελείται από μία μοναδική κορυφή, και θα είναι συνεκτικό.
Αν το G δεν είναι δισυνεκτικό, έστω $a_1,\dots, a_n$ ($n\geq 1$) οι κορυφές του M(G) που είτε είναι κομβικά σημεία του G, ή έχουν βαθμό 1 στο G. Για να δείξουμε ότι το M(G) είναι συνεκτικό, αρκεί να δείξουμε ότι, για οποιαδήποτε i, j με $i\neq j$, το M(G) έχει διαδρομή με άκρα τις a_i, a_j: κάθε άλλη κορυφή η του M(G) θα αντιστοιχεί σε μια δισυνεκτική συνιστώσα H του G, και η H θα περιέχει τουλάχιστον ένα κομβικό σημείο, άρα η κορυφή η θα είναι γειτονική κάποιας από τις $a_1,\dots, a_n$.
Αν οι κορυφές a_i, a_j περιέχονται στη δισυνεκτική συνιστώσα H_l του G, το M(G) έχει το μονοπάτι



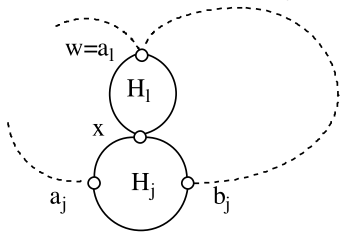
.

Έστω ότι οι a_i, a_j δεν είναι κορυφές της ίδιας δισυνεκτικής συνιστώσας του G. Έστω μ ένα μονοπάτι του G με άκρα τις a_i, a_j, και $\nu=\mu/M(G)$ η σύμπτυξη του μ πάνω στις δισυνεκτικές συνιστώσες του G. Επειδή οι ακμές του μ δεν ανήκουν όλες στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα του G, από την Απόδειξη της (i) το ν είναι μονοπάτι του M(G).
Αν η ακμή του μ που προσπίπτει στην a_i (αντίστοιχα στην a_j) είναι γέφυρα, από την Απόδειξη της (i) η a_i (αντίστοιχα η a_j) είναι άκρο του ν.
Αν οι ακμή του μ που προσπίπτει στην a_i (αντίστοιχα στην a_j) ανήκει στη δισυνεκτική συνιστώσα H_l (αντίστοιχα H_k) του G, από την Απόδειξη της (i) το μονοπάτι ν έχει άκρο την κορυφή η_l (αντίστοιχα την κορυφή η_k). Αφού η κορυφή a_i περιέχεται σε δισυνεκτική συνιστώσα με μία τουλάχιστον ακμή, η a_i δεν μπορεί να έχει βαθμό 1, οπότε είναι κομβικό σημείο. Άρα το M(G) θα έχει ακμή $\{a_i, \eta_l\}$ (αντίστοιχα, το M(G) θα έχει ακμή $\{a_j, \eta_k\}$).
Επομένως στο M(G) κάθε μία από τις κορυφές a_i, a_j ή θα είναι άκρο του μονοπατιού ν, ή θα είναι γειτονική ενός άκρου του ν. Άρα το M(G) θα έχει διαδρομή με άκρα τις a_i, a_j.

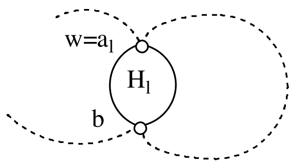
iii. Έστω ότι το M(G) έχει ένα κύκλο C.
Αν ο C δεν περιέχει κορυφή του M(G) που να αντιστοιχεί σε δισυνεκτική συνιστώσα του G, κάθε ακμή του C θα είναι γέφυρα του G, και επίσης ο C θα είναι κύκλος του G. Αυτό είναι αδύνατον, από την Πρόταση 2.3.1.
Έστω ότι ο C περιέχει, κατά σειρά, υπο-ακολουθίες (a_i, {a_i, η_i}, η_i, {η_i, b_i}, b_i), i=1,…, s (s≥1), όπου οι H_1,…, H_s είναι δισυνεκτικές συνιστώσες του G που περιέχουν μία τουλάχιστον ακμή.
Διατρέχουμε τον κύκλο C, αρχίζοντας από την κορυφή a_1 και προχωρώντας προς τις κορυφές a_2,…, a_s, a_1, μέχρι να συναντήσουμε για πρώτη φορά μια κορυφή w όπου:



είτε η w ανήκει σε μια δισυνεκτική συνιστώσα H_j του G , της οποίας τις αντίστοιχες ακμές {a_j, η_j}, {η_j, b_j} έχουμε ήδη διατρέξει, και w≠b_j,



ή w=a_l, και η δισυνεκτική συνιστώσα H_l έχει μία κοινή κορυφή x, x≠b_j, με μια δισυνεκτική συνιστώσα H_j του G, της οποίας τις αντίστοιχες ακμές {a_j, η_j}, {η_j, b_j} έχουμε ήδη διατρέξει,



ή w=a_l, και η δισυνεκτική συνιστώσα H_l περιέχει μία κορυφή bπου έχουμε ήδη διατρέξει.
Μία τέτοια κορυφή w θα υπάρχει πάντα, αφού στην περίπτωση που διατρέξουμε ολόκληρο τον κύκλο C, μπορούμε να πάρουμε w=a_1 (και H_j=H_1).
Αν η κορυφή w που θα βρούμε εμπίπτει σε δύο ή τρείς από τις παραπάνω περιπτώσεις, διαλέγουμε εκείνη για την οποία: το μήκος της υπο-ακολουθίας μ του C που αποτελείται από τις κορυφές και τις ακμές που διατρέξαμε, από την b_j (ή την b) έως και την w, είναι το μικρότερο.
Αντικαθιστούμε κάθε υπο-ακολουθία (a_k,{a_k, η_k}, η_k, {η_k, b_k}, b_k) της παραπάνω υπο-ακολουθίας μ του C, με ένα μονοπάτι ν_k της δισυνεκτικής συνιστώσας H_k, με άκρα τις a_k, b_k (επιλέγουμε το ν_k αυθαίρετα). Παρατηρούμε ότι, από την επιλογή της w, κάθε μία H_k δεν έχει κοινή κορυφή (εκτός ίσως από την b_k) με άλλη δισυνεκτική συνιστώσα $H_{k'}$, που να αντιστοιχεί σε επόμενη υπο-ακολουθία ($a_{k'}$,{$a_{k'}$, $\eta_{k'}$}, $\eta_{k'}$, {$\eta_{k'}$, $b_{k'}$}, $b_{k'}$) της μ. Επίσης, από την επιλογή της w, κάθε μία H_k δεν έχει κοινή κορυφή με το μονοπάτι μ. Άρα η ακολουθία που προκύπτει από τις παραπάνω αντικαταστάσεις είναι ένα μονοπάτι ν του G, με άκρα τις b_j και w (ή τις b και w). Επίσης, το μονοπάτι ν δεν έχει κοινές κορυφές με τη δισυνεκτική συνιστώσα H_j (ή τις H_j και H_l, ή την H_l), εκτός από τα άκρα του.
Έστω F το υπο-γράφημα του G που αποτελείται από την H_j (ή τις H_j και H_l, ή την H_l) και το μονοπάτι ν. Είναι εύκολο να δούμε (όπως στην Απόδειξη της Πρότασης 4.1.3) ότι το F δεν έχει κομβικά σημεία, άρα αφού κάθε μία από τις H_j, H_l έχει τουλάχιστον τρείς κορυφές, το F θα είναι δισυνεκτικό (Πρόταση 4.1.2). Αυτό είναι αδύνατον, από τον ορισμό της δισυνεκτικής συνιστώσας.
Άρα το γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών του G, M(G), δεν μπορεί να έχει κύκλο. □

Ερωτήματα

1. Αποδείξτε ότι, για οποιεσδήποτε διαφορετικές κορυφές a, b ενός γραφήματος, ισχύει a R_κ b αν και μόνο αν υπάρχει κύκλος που περιέχει τις a, b.
   Αποδείξτε ότι, αν οι κορυφές a, b συνδέονται με ακμή, ισχύει a R_κ b αν και μόνο αν η ακμή {a, b} δεν είναι γέφυρα.
2. Πως μπορεί να γενικευτεί η Πρόταση 4.1.1 για μη-κατευθυνόμενα γραφήματα που δεν είναι συνεκτικά;
3. Αποδείξτε ότι ένα δισυνεκτικό γράφημα δεν έχει κορυφές με βαθμό 1.
   Αποδείξτε ότι ένα δισυνεκτικό γράφημα δεν έχει γέφυρες.
4. Ισχύει η Πρόταση 4.1.2 για το  ή το  ;
5. Αποδείξτε ότι: ένα συνεκτικό γράφημα G είναι δισυνεκτικό, αν και μόνο αν το G είναι το μοναδικό υπο-γράφημα του G που είναι δισυνεκτική συνιστώσα.
6. Πότε υπάρχει δισυνεκτική συνιστώσα που αποτελείται από μια μοναδική κορυφή;
   Ποια υπο-γραφήματα ενός δέντρου είναι δισυνεκτικές συνιστώσες;
7. Αποδείξτε σε ένα συνεκτικό γράφημα υπάρχει πάντα τουλάχιστον μία δισυνεκτική συνιστώσα. Νύξη: δείτε την Άσκηση 4.4 (7).
8. Το συνεκτικό γράφημα G έχει ένα δισυνεκτικό υπο-γράφημα G′ που έχει τις ίδιες κορυφές με το G. Αποδείξτε ότι το G είναι δισυνεκτικό.
9. Αποδείξτε ότι η Πρόταση 4.1.3 δεν ισχύει, αν η υπόθεση για τη διαδρομή μ γίνει «η μ είναι κύκλος που περιέχει μία κορυφή του F». Ποιος συλλογισμός στην Απόδειξη της 4.1.3 δεν είναι σωστός σε αυτή την περίπτωση;
10. Τα $F_1=(V_1, E_1)$ και $F_2=(V_2, E_2)$ είναι δισυνεκτικά γραφήματα με δύο κοινές κορυφές. Αποδείξτε ότι το γράφημα $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ δεν έχει κομβικά σημεία. Νύξη: δείτε την Απόδειξη της Πρότασης 4.1.3.
11. Μία δισυνεκτική συνιστώσα H ενός συνεκτικού γραφήματος περιέχει και τα δύο άκρα ενός μονοπατιού μ. Αποδείξτε ότι κάθε ακμή και κάθε κορυφή του μ περιέχεται στην H.
12. Αποδείξτε ότι δύο διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ενός συνεκτικού γραφήματος δεν μπορούν να έχουν δύο κοινές κορυφές.
13. Αποδείξτε ότι κάθε κύκλος περιέχεται σε μία δισυνεκτική συνιστώσα.
14. Ορίζουμε την παρακάτω παραλλαγή της διπροσβασιμότητας, για τις ακμές ενός συνεκτικού γραφήματος G:
    $e_1\ S_\kappa\, e_2$ αν υπάρχει κύκλος που περιέχει τις ακμές e_1, e_2, ή αν $e_1=e_2$.
    Αποδείξτε ότι η S_κ είναι σχέση ισοδυναμίας. Νύξη: δείτε την Άσκηση 4.4 (9).
    Αποδείξτε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας της S_κ είναι οι δισυνεκτικές συνιστώσες στο G, και τα σύνολα {{e} | η ακμή e είναι γέφυρα}.
15. Περιγράψτε έναν απλό αλγόριθμο που να υπολογίζει, για μία δεδομένη κορυφή u ενός συνεκτικού γραφήματος, όλες τις δισυνεκτικές συνιστώσες που περιέχουν την u. Πόσο αποδοτικός είναι ο αλγόριθμός σας;
16. Το G είναι συνεκτικό γράφημα, και τα υπο-γραφήματα H, H′ είναι διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες χωρίς κοινή κορυφή. Αποδείξτε ότι υπάρχει το πολύ μία ακμή που έχει το ένα άκρο στην H και το άλλο στην H′, και ότι αν υπάρχει τέτοια ακμή θα είναι γέφυρα.
17. Το G είναι συνεκτικό γράφημα, και δεν είναι δισυνεκτικό. Αποδείξτε ότι: κάθε δισυνεκτική συνιστώσα του G με μία τουλάχιστον ακμή περιέχει ένα κομβικό σημείο.
18. Πότε δεν έχει ακμές το γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών ενός συνεκτικού γραφήματος G;
19. Αποδείξτε ότι, για κάθε μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα G με δύο τουλάχιστον κορυφές, η σύμπτυξη του G πάνω στις δισυνεκτικές συνιστώσες του G, G/M(G), είναι το γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών του G.

4.2 Δισυνεκτικότητα ως προς ακμές

<u>*Ορισμός διπροσβασιμότητας ως προς ακμές*</u> Οι κορυφές a, b ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος, όπου $a \neq b$, συσχετίζονται μέσω της *διπροσβασιμότητας ως προς ακμές*, R_ι, αν υπάρχουν δύο μονοπάτια με αρχή την a και τέλος τη b χωρίς κοινές ακμές. □

4.2.1 Πρόταση (Χαρακτηρισμός της διπροσβασιμότητας ως προς ακμές)

Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα. Για οποιεσδήποτε διαφορετικές κορυφές a, b του G, ισχύει $a \, R_\iota \, b$ αν και μόνο αν: για οποιαδήποτε ακμή e του G, οι κορυφές a, b είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G−e. □

<u>Απόδειξη της 4.2.1</u>

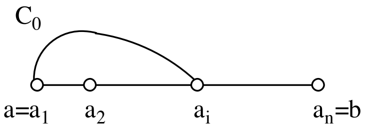
Έστω ότι ισχύει $a \, R_\iota \, b$, οπότε υπάρχουν δύο μονοπάτια με αρχή την a και τέλος τη b, χωρίς κοινές ακμές. Μία ακμή e του G δεν μπορεί να ανήκει και στα δύο μονοπάτια. Επομένως, τουλάχιστον το ένα από τα δύο μονοπάτια θα υπάρχει και στο G−e, που σημαίνει ότι οι κορυφές a, b είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G−e.

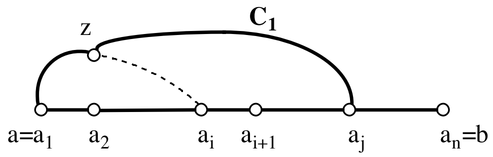
Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι για οποιαδήποτε ακμή e του G, υπάρχει διαδρομή με άκρα τις a, b που δεν περιέχει την e. Θα δείξουμε ότι υπάρχει κλειστό ίχνος που περιέχει τις a, b, οπότε $a \, R_\iota \, b$.

Αφού το G είναι συνεκτικό, υπάρχει μονοπάτι $v=(a_1, \{a_1, a_2\}, a_2, \ldots, a_n)$ με άκρα $a_1=a$ και $a_n=b$. Έστω $e_0=\{a_1, a_2\}$, $A_0=\{a_1\}$, $B_0=\{a_2, \ldots, a_n\}$. Από την υπόθεσή μας υπάρχει διαδρομή δ_0, με αρχή την a_1 και τέλος την a_n, που δεν περιέχει την e_0.

Από την Πρόταση 2.2.2, υπάρχει μονοπάτι μ_0, με αρχή την $a_1 \in A_0$ και τέλος μια κορυφή $a_i \in B_0$, που δεν περιέχει κορυφή του $A_0 \cup B_0$ διαφορετική από τα άκρα του. Η Απόδειξη της Πρότασης 2.2.2 δείχνει ότι μπορούμε να διαλέξουμε ένα τέτοιο μονοπάτι μ_0 που να είναι υπο-ακολουθία μιας δεδομένης διαδρομής d, με αρχή την $a_1 \in A_0$ και τέλος στο B_0. Άρα το μ_0 μπορεί να είναι υπο-ακολουθία της παραπάνω διαδρομής δ_0, που σημαίνει ότι το μ_0 δεν θα περιέχει την e_0. Επομένως το μ_0 δεν περιέχει καμμία από τις κορυφές $a_2, \ldots, a_{i-1}$. Έστω C_0 ο κύκλος που προκύπτει διατρέχοντας την υπο-ακολουθία $(a_1, \ldots, a_i)$ του v, και τις ακμές του μονοπατιού μ_0. Ο κύκλος C_0 περιέχει τις κορυφές a_1 και a_i.

Αν $a_i=a_n$, ο C_0 είναι κύκλος που περιέχει τις $a_1=a$ και $a_n=b$.





Αν i<n, θέτουμε $e_1=\{a_i, a_{i+1}\}$, $A_1=\{u \mid u$ κορυφή του $C_0\}$, $B_1=\{a_{i+1}, \ldots, a_n\}$. Παίρνουμε μία διαδρομή δ_1, με αρχή την a_1 και τέλος την a_n, που δεν περιέχει την ακμή e_1. Εφαρμόζοντας στην δ_1 τη διαδικασία στην Απόδειξη της Πρότασης 2.2.2, βρίσκουμε ένα μονοπάτι μ_1, που έχει αρχή $z \in A_1$, τέλος $a_j \in B_1$, δεν περιέχει την ακμή e_1, και δεν περιέχει κορυφή του $A_1 \cup B_1$ διαφορετική από τα άκρα του. Έστω C_1 το κλειστό ίχνος που προκύπτει διατρέχοντας την υπο-ακολουθία $(a_i, \ldots, a_j)$ του v, τις ακμές του μονοπατιού μ_1, και μία από τις δύο υπο-ακολουθίες $(z, \ldots, a_i)$ του C_0 που περιέχει[5] την κορυφή a_1. Το κλειστό ίχνος C_1 περιέχει τις κορυφές a_1 και a_j, και παρατηρούμε ότι j>i.

Αν $a_j=a_n$, το C_1 είναι κλειστό ίχνος που περιέχει τις $a_1=a$ και $a_n=b$.

Αν j<n, μετασχηματίζοντας το κλειστό ίχνος C_1 όπως παραπάνω παίρνουμε κλειστό ίχνος C_2 που περιέχει την κορυφή a_1 και μία κορυφή a_k, όπου k>j. Και ούτω καθ΄εξής. Αφού κάθε φορά παίρνουμε κλειστό ίχνος που περιέχει κορυφή του v με όλο και μεγαλύτερη απόσταση από την a_1

---

[5] Η κορυφή z θα μπορούσε να είναι μία από τις $a_1, \ldots, a_i$.
Το κλειστό ίχνος C_1 δεν θα είναι κύκλος αν και μόνο αν $z=a_i$.

(πάνω στο μονοπάτι ν), η διαδικασία θα καταλήξει σε ένα κλειστό ίχνος C_p που θα περιέχει τις a_1=a και a_n=b. □

Παρατήρηση Στην παραπάνω διαδικασία, κάθε κλειστό ίχνος C_m μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να περιέχει την ακμή $\{a_1, a_2\}$. Επίσης, θα περιέχει την ακμή $\{a_{l-1}, a_l\}$, όπου a_l το άκρο του μονοπατιού μ_m στο σύνολο B_m. Έτσι, το τελευταίο κλειστό ίχνος C_p θα περιέχει τις ακμές $\{a_1, a_2\}$ και $\{a_{n-1}, a_n\}$.

Ορισμός δισυνεκτικότητας ως προς ακμές Ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα G είναι *δισυνεκτικό ως προς ακμές* αν, για οποιεσδήποτε διαφορετικές κορυφές a, b του G, ισχύει a R_ι b. □

4.2.2 Πρόταση (Χαρακτηρισμός της δισυνεκτικότητας ως προς ακμές)

Ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα G είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές αν και μόνο αν δεν έχει γέφυρα. □

Απόδειξη της 4.2.2
Έστω e μία γέφυρα του G. Από την Άσκηση 2.5 (8), τα άκρα a, b της e βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G−e. Επομένως κάθε μονοπάτι του G με άκρα τις a, b πρέπει να περιέχει την ακμή e, οπότε δεν ισχύει a R_ι b. Άρα αν το G είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές δεν μπορεί να έχει γέφυρα.
Έστω ότι το G δεν είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές, οπότε υπάρχουν δύο διαφορετικές κορυφές a, b του G για τις οποίες δεν ισχύει a R_ι b. Από την Πρόταση 4.2.1 θα υπάρχει ακμή e, με τις a, b να βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G−e. Άρα η ακμή e θα είναι γέφυρα του G.
Οπότε αν δεν υπάρχει γέφυρα το G θα είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές. □

Παρατήρηση Το G δεν έχει γέφυρες αν και μόνο αν η αφαίρεση οποιασδήποτε ακμής του G δεν καταστρέφει την συνεκτικότητά του. Δηλαδή, για να προκύψει από το G μη-συνεκτικό γράφημα με αφαίρεση κάποιων ακμών του, πρέπει οι ακμές που θα αφαιρεθούν να είναι τουλάχιστον δύο.

Σημείωση Για ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα G, η δισυνεκτικότητα ως προς ακμές ορίζεται εναλλακτικά ως το ότι «το G δεν έχει γέφυρες». Από την παραπάνω Πρόταση, οι δύο ορισμοί ταυτίζονται.

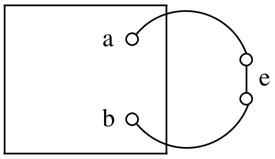
4.2.3 Πρόταση (Επέκταση υπο-γραφήματος που είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές)

Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα, F ένα υπο-γράφημα του G που είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές, και μ=(a,…, b) ένα ίχνος του G με άκρα a, b στο F (παρατήρηση: οι κορυφές a, b μπορεί να ταυτίζονται). Το υπο-γράφημα F′ του G που προκύπτει προσθέτοντας στο F τις κορυφές και τις ακμές του μ, είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές. □

Απόδειξη της 4.2.3
Αρκεί να δείξουμε ότι το F′ δεν έχει γέφυρες (Πρόταση 4.2.2). Έστω e μία ακμή του F′: θα δείξουμε ότι το F′−e είναι συνεκτικό.
Ονομάζουμε μ′ το γράφημα που περιέχει τις κορυφές και τις ακμές του μ, εκτός από την ακμή e. Το μ′ είναι δύο ίχνη, το καθένα με άκρο μία από τις a, b. Αν η e δεν είναι ακμή του μ, είναι μ′=μ. Προφανώς το F′−e προκύπτει προσθέτοντας στο F−e τις κορυφές και τις ακμές του μ′.

Έστω ότι η e δεν είναι ακμή του F. Τότε F−e=F που είναι συνεκτικό, το μ′ είναι δύο ίχνη, το

F:



καθένα με άκρο μία από τις a, b, και με βάση τα παραπάνω το F′−e προφανώς θα είναι συνεκτικό.
Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση η e να είναι ακμή του F. Αφού το F είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές η e δεν είναι γέφυρα (Πρόταση 4.2.2), οπότε το F−e είναι συνεκτικό. Από τα παραπάνω, προφανώς το F′−e θα είναι συνεκτικό. □

Ορισμός δισυνεκτικής συνιστώσας ως προς ακμές Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα. Ένα υπο-γράφημα H του G που είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές είναι *δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές*, αν: προσθέτοντας στο H οποιεσδήποτε κορυφές και ακμές του G (από αυτές που δεν περιέχονται στο H), παίρνουμε υπο-γράφημα H′ του G που δεν είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές. □

4.2.4 Πρόταση (Χαρακτηρισμός των δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς ακμές)

Για κάθε κορυφή a ενός μη-κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος G=(V, E) υπάρχει μοναδική δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H=(W, K) που περιέχει την a, και είναι
W={a}∪{u | υπάρχει κλειστό ίχνος που περιέχει τις κορυφές a, u},
K={e | τα άκρα της ακμής e είναι στο W}. □

Απόδειξη της 4.2.4
Το υπο-γράφημα που αποτελείται από την κορυφή a είναι προφανώς δισυνεκτικό ως προς ακμές. Από την Άσκηση 4.4 (17), υπάρχει δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές που περιέχει την κορυφή a.
Έστω Θ μία δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές που περιέχει την a. Θα δείξουμε ότι η Θ ταυτίζεται με το H.
Έστω v μία κορυφή της Θ διαφορετική από την a.
Αφού το υπο-γράφημα Θ είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές θα ισχύει a R_ι v στο Θ, οπότε θα υπάρχει κλειστό ίχνος που περιέχει τις κορυφές a, v. Άρα κάθε κορυφή της Θ περιέχεται στο σύνολο W των κορυφών του H.
Έστω v μία κορυφή του H διαφορετική από την a. Από τον ορισμό των κορυφών του H, υπάρχει κλειστό ίχνος μ που περιέχει τις κορυφές v, a. Αν προσθέσουμε στη Θ τις κορυφές και τις ακμές του μ, το υπο-γράφημα Θ′ που προκύπτει είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές (Πρόταση 4.2.3 για b=a). Επειδή η Θ είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές, το Θ′ δεν μπορεί να περιέχει κορυφές που δεν είναι στη Θ, άρα η v είναι κορυφή της Θ.
Άρα τα υπο-γραφήματα Θ, H έχουν τις ίδιες κορυφές.
Προφανώς κάθε ακμή της Θ θα είναι στο K, οπότε θα είναι ακμή του H.
Έστω ότι το υπο-γράφημα H έχει μια ακμή e που δεν ανήκει στο Θ. Αν προσθέσουμε στο Θ την ακμή e, το υπο-γράφημα Θ′ που προκύπτει είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές (επειδή το υπο-γράφημα Θ του Θ′ έχει τις ίδιες κορυφές με το Θ′ και είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές). Αλλά το Θ′ δεν μπορεί να είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές και να έχει περισσότερες ακμές από το Θ, επειδή το Θ είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές. Άρα κάθε ακμή του H είναι ακμή του Θ. Αφού τα υπο-γραφήματα Θ, H έχουν τις ίδιες κορυφές και τις ίδιες ακμές, προφανώς ταυτίζονται.
□

Παρατήρηση Με βάση την παραπάνω Πρόταση, οι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές ενός συνεκτικού γραφήματος G αποτελούν διαμερισμό των κορυφών του G.

Παρατήρηση Για κάθε ακμή e του G, υπάρχει δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές που να περιέχει την e αν και μόνο αν υπάρχει δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές που να περιέχει τα άκρα της e, αν και μόνο αν η e δεν είναι γέφυρα (βλέπε Ασκήσεις 4.4 (16), 4.4 (18)).

4.2.5 Πρόταση (Διπροσβασιμότητα και δισυνεκτικές συνιστώσες, ως προς ακμές)

Δύο διαφορετικές κορυφές a, b ενός μη-κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος είναι στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές, αν και μόνο αν a R_ι b. □

Απόδειξη της 4.2.5
Από την παραπάνω Πρόταση, υπάρχει μοναδική δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H που περιέχει την a, και οι κορυφές της H είναι οι {a}∪{u | υπάρχει κλειστό ίχνος που περιέχει τις κορυφές a, u}. Έστω ότι ισχύει a R_ι b. Υπάρχει ένα κλειστό ίχνος που περιέχει τις a, b, επομένως η δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H θα περιέχει την κορυφή b.
Έστω ότι οι κορυφές a, b είναι στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H. Επειδή το υπο-γράφημα H είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές, είναι a R_ι b. □

Ορισμός γραφήματος δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς ακμές Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα. Έστω $H_1,\ldots, H_m$ οι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του G ($m\geq 1$).
Το *γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς ακμές του* G, N(G), αποτελείται από τις κορυφές

$\{\eta_1,\ldots, \eta_m\}$

και τις ακμές

$\{\{\eta_i, \eta_j\}$ | $i\neq j$, και υπάρχει ακμή του G
με τα άκρα της στις δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές $H_i, H_j\}$. □

Παρατήρηση Μια ακμή του G έχει τα άκρα της σε διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές αν και μόνο αν είναι γέφυρα (βλέπε Πρόταση 4.2.4 και εξής).

Ορισμός σύμπτυξης πάνω στις δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα, και $H_1,\ldots, H_m$ οι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του G ($m\geq 1$). Αν F=(W, K) είναι ένα υπο-γράφημα του G, η *σύμπτυξη του* F *πάνω στις δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του* G, F/N(G), είναι το υπο-γράφημα του N(G) με κορυφές

$\{\eta_i$ | υπάρχει κορυφή του F
που ανήκει στην δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H_i του G$\}$

και ακμές

$\{\{\eta_i, \eta_j\}$ | $i\neq j$, και υπάρχει ακμή του F
με τα άκρα της στις δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές $H_i, H_j\}$. □

4.2.6 Πρόταση (Το γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς ακμές)

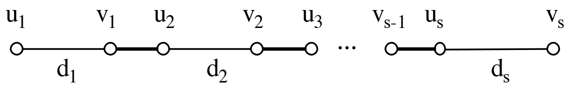
Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα.

i. Για κάθε μονοπάτι μ του G, η σύμπτυξη του μ πάνω στις δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του G είτε θα είναι μονοπάτι του N(G), ή θα αποτελείται από μία κορυφή η_i του N(G), αντίστοιχη μιάς δισυνεκτικής συνιστώσας ως προς ακμές H_i του G.
ii. Το γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς ακμές του G, N(G), είναι συνεκτικό.
iii. Το γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς ακμές του G, N(G), είναι άκυκλο. □

Απόδειξη της 4.2.6

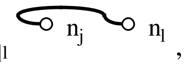
i. Αν όλες οι κορυφές του μ ανήκουν στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H_i του G, το $\mu/N(G)$ θα αποτελείται από την κορυφή η_i του $N(G)$.

Σε κάθε άλλη περίπτωση, διαιρούμε το μσε διαδοχικές υπο-ακολουθίες $d_1, d_2,\ldots, d_s$ ($s\geq 2$), όπου



για κάθε $i=1,\ldots, s$, η $d_i=(u_i,\ldots, v_i)$ είτε είναι μονοπάτι ή αποτελείται από μία κορυφή, $u_i=v_i$, και όπου οι v_i, u_{i+1} είναι γειτονικές κορυφές του μονοπατιού μ, για κάθε $i=1,\ldots, s-1$. Επιλέγουμε τις υπο-ακολουθίες $d_1, d_2,\ldots, d_s$ έτσι ώστε οι κορυφές της d_i, $i=1,\ldots, s$, να ανήκουν όλες στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές του G. Επίσης, αν οι κορυφές της d_i ανήκουν σε μία δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H του G ($i=1,\ldots, s$), οι κορυφές των d_{i-1}, d_{i+1} δεν θα ανήκουν στην H.

Είναι εύκολο να δούμε ότι η σύμπτυξη του μονοπατιού μ πάνω στις δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του G, $\mu/N(G)$, είναι η ένωση υπο-γραφημάτων F_i του $N(G)$, όπου κάθε F_i, $i=1,\ldots, s-1$, προκύπτει από την ακμή $\{v_i, u_{i+1}\}$ του μονοπατιού μ εξής:

Αν οι κορυφές v_i, u_{i+1} ανήκουν στις δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές H_j, H_l αντίστοιχα, το F_i αποτελείται από τις κορυφές η_j, η_l  , και την ακμή $\{\eta_j, \eta_l\}$.

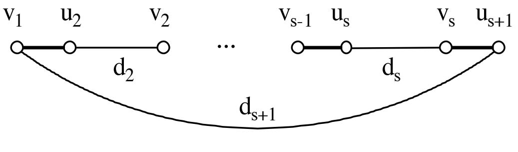
Προφανώς το $\mu/N(G)$ είναι διαδρομή του $N(G)$. Για να δείξουμε ότι το $\mu/N(G)$ είναι μονοπάτι, αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχουν δύο υπο-ακολουθίες του μ, $d_i=(u_i,\ldots, v_i)$ και $d_l=(u_l,\ldots, v_l)$, με $i<l$, που οι κορυφές τους να ανήκουν στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H του G. Από την επιλογή των $d_1, d_2,\ldots, d_s$, δύο τέτοιες υπο-ακολουθίες δεν θα είναι διαδοχικές (άρα $l\geq i+2$). Η υπο-ακολουθία $\nu=(v_i,\ldots, u_l)$ του μ θα είναι μονοπάτι, με άκρα v_i, u_l που θα ανήκουν στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H του G. Από την Πρόταση 4.2.3 και τον ορισμό της δισυνεκτικής συνιστώσας ως προς ακμές, κάθε κορυφή και κάθε ακμή του ν θα ανήκει επίσης στην H. Επομένως οι ακμές των υπο-ακολουθιών $d_{i+1},\ldots, d_{l-1}$ θα ανήκουν στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές με τις ακμές των d_i, d_l, που είναι αδύνατον από την επιλογή των $d_1, d_2,\ldots, d_s$.

ii. Αν το G είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές, το υπο-γράφημα G είναι η μοναδική δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές. Επομένως το $N(G)$ θα αποτελείται από μία μοναδική κορυφή, και θα είναι συνεκτικό.

Έστω ότι το G δεν είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές. Για να δείξουμε ότι το $N(G)$ είναι συνεκτικό, αρκεί να δείξουμε ότι, για οποιαδήποτε i, j με $i\neq j$, το $N(G)$ έχει διαδρομή με άκρα τις κορυφές η_i, η_j.

Έστω H_i, H_j οι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του G που αντιστοιχούν στις η_i, η_j. Επιλέγουμε αυθαίρετα κορυφές u, v του G που ανήκουν στις H_i, H_j αντίστοιχα. Έστω μ ένα μονοπάτι του G με άκρα τις u, v, και $\nu=\mu/N(G)$ η σύμπτυξη του μ πάνω στις δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του G. Από την Απόδειξη της (i), το ν είναι μονοπάτι του $N(G)$, με άκρα τις η_i, η_j.

iii. Έστω ότι το $N(G)$ έχει ένα κύκλο C, με κορυφές, κατά σειρά, $\eta_1,\ldots, \eta_s$, $\eta_{s+1}=\eta_1$, όπου αντίστοιχα οι $H_1,\ldots, H_s, H_{s+1}=H_1$ είναι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του G. Κατασκευάζουμε μία διαδρομή ν του G ως εξής: για κάθε ακμή $\{\eta_i, \eta_{i+1}\}$ του C ($i=1,\ldots, s$), η



διαδρομή ν περιέχει την γέφυρα $\{v_i, u_{i+1}\}$ του G που τα άκρα της ανήκουν στις δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές H_i, H_{i+1} αντίστοιχα

($v_i \in H_i$, $u_{i+1} \in H_{i+1}$). Επίσης, για κάθε κορυφή η_i του C (i=2,…, s+1), αν $v_i \neq u_i$ [6] η διαδρομή ν περιέχει ένα μονοπάτι d_i της δισυνεκτικής συνιστώσας ως προς ακμές H_i, με άκρα τις u_i, v_i (επιλέγουμε το d_i αυθαίρετα).
Επειδή δύο διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές δεν έχουν κοινή κορυφή, η διαδρομή ν θα είναι κύκλος, και θα περιέχει γέφυρες του G. Αυτό είναι αδύνατον, από την Πρόταση 2.3.1. Άρα το γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς ακμές του G, N(G), δεν μπορεί να έχει κύκλο. □

Ερωτήματα

1. Αποδείξτε ότι, για οποιεσδήποτε διαφορετικές κορυφές a, b ενός γραφήματος, ισχύει a R_ι b αν και μόνο αν υπάρχουν δύο διαδρομές με αρχή την a και τέλος τη b, χωρίς κοινές ακμές.
2. Αποδείξτε ότι, για οποιεσδήποτε διαφορετικές κορυφές a, b ενός γραφήματος, ισχύει a R_ι b αν και μόνο αν υπάρχει κλειστό ίχνος που περιέχει τις a, b.
   Αποδείξτε ότι, αν οι κορυφές a, b συνδέονται με ακμή, ισχύει a R_ι b αν και μόνο αν η ακμή {a, b} δεν είναι γέφυρα.
3. Πως μπορεί να γενικευτεί η Πρόταση 4.2.1 για μη-κατευθυνόμενα γραφήματα που δεν είναι συνεκτικά;
4. Αποδείξτε ότι ένα γράφημα που είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές δεν έχει κορυφές με βαθμό 1.
5. Ισχύει η Πρόταση 4.2.2 για το γράφημα ○ ;
6. Αποδείξτε ότι: ένα συνεκτικό γράφημα G είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές, αν και μόνο αν το G είναι το μοναδικό υπο-γράφημα του G που είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές.
7. Πότε υπάρχει δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές που αποτελείται από μια μοναδική κορυφή;
   Ποια υπο-γραφήματα ενός δέντρου είναι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές;
8. Αποδείξτε ότι σε ένα συνεκτικό γράφημα υπάρχει πάντα τουλάχιστον μία δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές. Νύξη: δείτε την Άσκηση 4.4 (17).
9. Το συνεκτικό γράφημα G έχει ένα υπο-γράφημα G′ που είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές και έχει τις ίδιες κορυφές με το G. Αποδείξτε ότι το G είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.
10. Τα $F_1=(V_1, E_1)$ και $F_2=(V_2, E_2)$ είναι γραφήματα που είναι δισυνεκτικά ως προς ακμές και έχουν μία κοινή κορυφή. Αποδείξτε ότι το γράφημα $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ δεν έχει γέφυρες. Νύξη: δείτε την Απόδειξη της Πρότασης 4.2.3.
11. Το υπο-γράφημα H ενός συνεκτικού γραφήματος είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές, και περιέχει τα άκρα ενός ίχνους μ. Αποδείξτε ότι κάθε ακμή και κάθε κορυφή του μ περιέχεται στο H.
12. Αποδείξτε ότι δύο διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές ενός συνεκτικού γραφήματος δεν μπορούν να έχουν κοινή κορυφή.
13. Αποδείξτε ότι κάθε κλειστό ίχνος περιέχεται σε μία δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές.
14. Τα άκρα μιάς ακμής e ανήκουν στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H. Αποδείξτε ότι και η ακμή e θα ανήκει στην H.
15. Ορίζουμε την παρακάτω παραλλαγή της διπροσβασιμότητας ως προς ακμές, για τις κορυφές ενός συνεκτικού γραφήματος G:
    u_1 S_ι u_2 αν υπάρχει κλειστό ίχνος που περιέχει τις κορυφές u_1, u_2, ή αν $u_1=u_2$.
    Αποδείξτε ότι η S_ι είναι σχέση ισοδυναμίας. Νύξη: δείτε την Άσκηση 4.4 (19).
    Αποδείξτε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας της S_ι είναι οι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές στο G.

[6] Χρησιμοποιούμε τη σύμβαση $v_{s+1}=v_1$.

16. Περιγράψτε έναν απλό αλγόριθμο που να υπολογίζει, για μία δεδομένη κορυφή u ενός συνεκτικού γραφήματος, τη δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές που περιέχει τη u. Πόσο αποδοτικός είναι ο αλγόριθμός σας;
17. Το G είναι συνεκτικό γράφημα, και τα υπο-γραφήματα H, H′ είναι διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές. Αποδείξτε ότι υπάρχει το πολύ μία ακμή που έχει το ένα άκρο στην H και το άλλο στην H′, και ότι αν υπάρχει τέτοια ακμή θα είναι γέφυρα.
18. Το G είναι συνεκτικό γράφημα, και δεν είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές. Αποδείξτε ότι: κάθε υπο-γράφημα του G που είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές περιέχει μία κορυφή στην οποία προσπίπτει γέφυρα.
19. Πότε δεν έχει ακμές το γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς ακμές ενός συνεκτικού γραφήματος G;
20. Αποδείξτε ότι, για κάθε μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα G, η σύμπτυξη του G πάνω στις δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του G, G/N(G), είναι το γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς ακμές του G.
21. Αποδείξτε ότι: αν ένα συνεκτικό γράφημα έχει m δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές και k γέφυρες, θα είναι m=k+1.
22. Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα, και μ ένα μονοπάτι του G. Αποδείξτε ότι: το μ διατρέχει το μεγαλύτερο δυνατό αριθμό από γέφυρες του G, αν και μόνο αν το μ/N(G) είναι ένα μέγιστο μονοπάτι του N(G). Νύξη: δείτε την Απόδειξη της Πρότασης 4.2.6.

4.3 Ισχυρή συνεκτικότητα

Ορισμός ισχυρής προσβασιμότητας Οι κορυφές a, b ενός κατευθυνόμενου γραφήματος, όπου a≠b, συσχετίζονται μέσω της *ισχυρής προσβασιμότητας*, $R_{\delta\delta}$, αν υπάρχουν δύο μονοπάτια: το ένα με αρχή την a και τέλος τη b, και το άλλο με αρχή τη b και τέλος την a. □

Απαλοιφή κατευθύνσεων Αν η e είναι μια κατευθυνόμενη ακμή a  b, συμβολίζουμε με υ(e) την μη-κατευθυνόμενη ακμή a  b (με τα ίδια άκρα).
Αν η ακμή e είναι μη-κατευθυνόμενη, θέτουμε υ(e)=e.
Για οποιοδήποτε γράφημα G=(V, E), συμβολίζουμε με υ(G) το μη-κατευθυνόμενο πολυ-γράφημα (V, {υ(e) | η e είναι ακμή του G}).

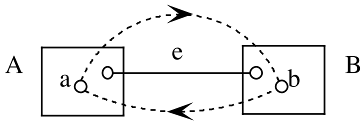
4.3.1 Πρόταση (Ιδιότητες της ισχυρής προσβασιμότητας)

i. Για δύο διαφορετικές κορυφές a, b ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G, ισχύει a $R_{\delta\delta}$ b μόνο αν: για οποιαδήποτε ακμή e του G, οι κορυφές a, b είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του υ(G−e).
ii. Οι a, b είναι διαφορετικές κορυφές ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G. Για οποιαδήποτε ακμή e του G, οι a, b είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G−e. Υπάρχει κατευθυνόμενο γράφημα G^* όπου υ(G^*)=G, και όπου ισχύει a $R_{\delta\delta}$ b. □

Σημείωση Ο ορισμός των συνεκτικών συνιστωσών ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος έχει νόημα και για πολυ-γραφήματα, όπως τα υ(G) και υ(G−e).

Απόδειξη της 4.3.1
i. Έστω ότι ισχύει a $R_{\delta\delta}$ b, οπότε το G έχει ένα μονοπάτι μ_1 με αρχή την a και τέλος τη b, και ένα μονοπάτι μ_2 με αρχή τη b και τέλος την a. Προφανώς οι κορυφές a, b είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του υ(G).
Αν υπάρχει μια ακμή e του G για την οποία οι a, b είναι σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του υ(G−e), διαμερίζουμε τις κορυφές του G σε δύο υπο-σύνολα A, B: το A είναι οι κορυφές της συνεκτικής συνιστώσας του υ(G−e) που περιέχει την a, και το B είναι οι υπόλοιπες κορυφές του G

(η b ανήκει στο B). Είναι εύκολο να δούμε ότι η e είναι η μοναδική ακμή του G που έχει το ένα άκρο της στο A και το άλλο στο B (επειδή το A είναι συνεκτική συνιστώσα του υ(G−e)).



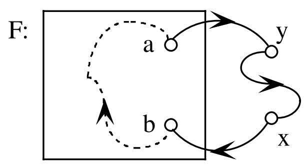
Διατρέχουμε τις ακμές του μονοπατιού μ_1, από την a προς την b .
Επειδή το μ_1 έχει την αρχή του στο A και το τέλος του στο B, θα βρούμε μία πρώτη ακμή (x_1, y_1) του μ_1, όπου $x_1 \in A$ και $y_1 \in B$. Αντίστοιχα, διατρέχοντας τις ακμές του μονοπατιού μ_2, από την b προς την a, θα βρούμε μία πρώτη ακμή (x_2, y_2) του μ_2, όπου $x_2 \in B$ και $y_2 \in A$. Επειδή οι ακμές (x_1, y_1), (x_2, y_2) είναι κατευθυνόμενες, θα είναι διαφορετικές (ακόμα και αν έχουν τα ίδια άκρα). Άρα υπάρχουν δύο ακμές του G που έχουν το ένα άκρο στο A και το άλλο στο B. Αυτό είναι αδύνατον, από την παραπάνω υπόθεση για την e.
Άρα για οποιαδήποτε ακμή e του G, οι κορυφές a, b είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του υ(G−e).
ii. Από την Πρόταση 4.2.1 ισχύει a R_ι b, οπότε υπάρχει κλειστό ίχνος μ που περιέχει τις κορυφές a, b.
Διατρέχουμε τις ακμές του μ (αρχίζοντας από την a), και κατευθύνουμε κάθε ακμή του μ κατά τη φορά που τη διατρέχουμε. Επειδή το μ δεν επαναλαμβάνει ακμές, κάθε ακμή του αποκτά μία μόνο κατεύθυνση. Έστω G^* ένα κατευθυνόμενο γράφημα που προκύπτει από το G δίνοντας κατευθύνσεις στις ακμές του: κάθε ακμή που ανήκει στο μ έχει την παραπάνω κατεύθυνση, και η κατεύθυνση κάθε ακμής που δεν ανήκει στο μ επιλέγεται αυθαίρετα. Προφανώς $\upsilon(G^*)=G$. Επίσης, οι ακμές του G^* που προέρχονται από ακμές του μ αποτελούν μια κλειστή διαδρομή που περιέχει τις κορυφές a, b. Επομένως στο G^* ισχύει a $R_{\delta\delta}$ b. □

<u>*Ορισμός ισχυρής συνεκτικότητας*</u> Ένα κατευθυνόμενο γράφημα G είναι *ισχυρά συνεκτικό* αν, για οποιεσδήποτε διαφορετικές κορυφές a, b του G, ισχύει a $R_{\delta\delta}$ b. □

4.3.2 Πρόταση (Επέκταση ισχυρά συνεκτικού υπο-γραφήματος)

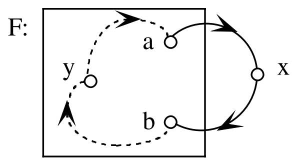
Έστω G ένα κατευθυνόμενο γράφημα, F ένα υπο-γράφημα του G που είναι ισχυρά συνεκτικό, και μ=(a,…, b) μία διαδρομή του G με άκρα a, b στο F (παρατήρηση: οι κορυφές a, b μπορεί να ταυτίζονται). Το υπο-γράφημα F′ του G που προκύπτει προσθέτοντας στο F τις κορυφές και τις ακμές της μ, είναι ισχυρά συνεκτικό. □

<u>Απόδειξη της 4.3.2</u>
Θα δείξουμε ότι, για οποιεσδήποτε διαφορετικές κορυφές x, y του F′, υπάρχει κλειστή διαδρομή του F′ που περιέχει τις x, y.
Έστω ότι οι x, y είναι κορυφές της διαδρομής μ.
Αν a=b, η μ είναι κλειστή διαδρομή του F′ που περιέχει τις x, y.



Αν a≠b, έστω ν ένα μονοπάτι του F με αρχή τη b και τέλος την a (το F είναι ισχυρά συνεκτικό). Το μονοπάτι ν και η διαδρομή μ σχηματίζουν μια κλειστή διαδρομή του F′ που περιέχει τις x, y.
Έστω ότι μόνο μία από τις x, y είναι κορυφή της διαδρομής μ. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η x είναι κορυφή της διαδρομής μ και η y είναι κορυφή του F (αλλοιώς απλώς αλλάζουμε τα ονόματα των x, y). Επειδή η y είναι διαφορετική από τις a και b και το F είναι ισχυρά συνεκτικό, θα υπάρχει μονοπάτι ν_1 του F με αρχή τη b και τέλος την y, και μονοπάτι

ν_2 του F με αρχή την y και τέλος την a

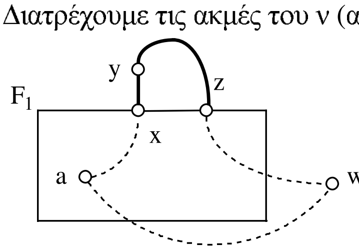


. Τα μονοπάτια ν_1, ν_2 και η διαδρομή μ σχηματίζουν μια κλειστή διαδρομή του F′ που περιέχει τις x, y.
Έστω ότι οι x, y είναι και οι δύο κορυφές του F. Επειδή το F είναι ισχυρά συνεκτικό, θα υπάρχει κλειστή διαδρομή του F που περιέχει τις x, y. □

4.3.3 Πρόταση (Ιδιότητες της ισχυρής συνεκτικότητας)

i. Ένα κατευθυνόμενο γράφημα G είναι ισχυρά συνεκτικό μόνο αν το υ(G) είναι συνεκτικό και δεν έχει γέφυρα.
ii. Έστω ότι το μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα G δεν έχει γέφυρα.
Υπάρχει κατευθυνόμενο γράφημα G^* όπου $\upsilon(G^*)=G$, και το G^* είναι ισχυρά συνεκτικό. □

<u>Απόδειξη της 4.3.3</u>
i. Έστω a, b δύο διαφορετικές κορυφές του G. Αφού το G είναι ισχυρά συνεκτικό ισχύει a $R_{\delta\delta}$ b, οπότε υπάρχει ένα μονοπάτι μ με αρχή την a και τέλος τη b. Οι ακμές
{υ(e) | η ακμή e ανήκει στο μ} σχηματίζουν ένα μονοπάτι του υ(G) με άκρα τις a, b. Άρα το υ(G) είναι συνεκτικό.
Αν η ακμή e είναι γέφυρα του υ(G), τα άκρα a, b της e βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του υ(G)−e (Άσκηση 2.5 (8)). Επομένως, αν θ είναι η ακμή του G για την οποία υ(θ)=e, τα άκρα a, b της θ βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του υ(G−θ). Από την Πρόταση 4.3.1 (i), δεν ισχύει a $R_{\delta\delta}$ b. Άρα αν το G είναι ισχυρά συνεκτικό δεν μπορεί να έχει γέφυρα.
ii. Αν το G έχει μόνο μία κορυφή, μπορούμε να πάρουμε G^*=G.
Έστω a, b δύο διαφορετικές κορυφές του G. Επειδή το G είναι συνεκτικό και δεν έχει γέφυρα ισχύει a R_ι b (Πρόταση 4.2.1), οπότε υπάρχει κλειστό ίχνος μ που περιέχει τις κορυφές a, b. Διατρέχουμε τις ακμές του μ (αρχίζοντας από την a), και κατευθύνουμε κάθε ακμή του μ κατά τη φορά που τη διατρέχουμε. Επειδή το μ δεν επαναλαμβάνει ακμές, κάθε ακμή του αποκτά μία μόνο κατεύθυνση. Έστω F_1 το κατευθυνόμενο γράφημα που αποτελείται από τις κορυφές και τις ακμές του μ, με τις παραπάνω κατευθύνσεις. Προφανώς το F_1 είναι ισχυρά συνεκτικό, και το $\upsilon(F_1)$ είναι υπο-γράφημα του G.
Αν το F_1 περιέχει όλες τις κορυφές του G, κατασκευάζουμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα G^* όπου $\upsilon(G^*)$=G, κατευθύνοντας κάθε ακμή e={x, y} του G ως εξής: αν υπάρχει ακμή θ του F_1 με άκρα τις x, y, δίνουμε στην e την ίδια κατεύθυνση με τη θ. Αλλοιώς, κατευθύνουμε την e αυθαίρετα. Είναι εύκολο να δούμε ότι το G^* θα είναι ισχυρά συνεκτικό (επειδή το F_1 είναι ισχυρά συνεκτικό).
Έστω ότι το G έχει μία κορυφή w που δεν ανήκει στο F_1. Επειδή το G είναι συνεκτικό και δεν έχει γέφυρα, από την Πρόταση 4.2.1 ισχύει a R_ι w (οι a, w είναι διαφορετικές), οπότε το G έχει ένα κλειστό ίχνος ν που περιέχει τις κορυφές a, w.
Διατρέχουμε τις ακμές του ν (αρχίζοντας από την a), μέχρι να βρούμε την πρώτη ακμή του {x, y}



που έχει ένα άκρο y εκτός του F_1 (θα βρούμε τέτοια ακμή, αφού η w δεν είναι κορυφή του G_1). Συνεχίζουμε να διατρέχουμε τις ακμές του ν, από την y και εξής, μέχρι να βρούμε την πρώτη κορυφή του z που ανήκει στο F_1 (πάντα θα υπάρχει τέτοια κορυφή z, αφού στην περίπτωση που διατρέξουμε ολόκληρο το ίχνος ν, μπορούμε να πάρουμε z=a).

Έστω ξ η υπο-ακολουθία (x,…, z) του ίχνους ν. Προφανώς καμμία ακμή τής ξ δεν έχει και τα δύο άκρα της στο F_1. Κατευθύνουμε τις ακμές τής ξ κατά τη φορά που τις διατρέξαμε, και τις προσθέτουμε στο F_1. Από την Πρόταση 4.3.2, το κατευθυνόμενο γράφημα F_2 που προκύπτει θα είναι ισχυρά συνεκτικό (επειδή το F_1 είναι ισχυρά συνεκτικό). Επίσης, το υ(F_2) είναι υπο-γράφημα του G, και το F_2 έχει περισσότερες κορυφές από το F_1 (η κορυφή y του F_2 δεν ανήκει στο F_1).
Αν το F_2 περιέχει όλες τις κορυφές του G, κατασκευάζουμε ένα ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα G^* όπου υ(G^*)=G, κατευθύνοντας κάθε ακμή του G με βάση τις κατευθύνσεις των ακμών του F_2 (όπως περιγράψαμε προηγουμένως).
Αν υπάρχει κορυφή του G που δεν ανήκει στο F_2, επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία. Επειδή κάθε επανάληψη δίνει ένα γράφημα F_{i+1} με περισσότερες κορυφές από το προηγούμενό του F_i (i≥2), θα καταλήξουμε σε ένα ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα F_p που θα περιέχει όλες τις κορυφές του G, και όπου το υ(F_p) θα είναι υπο-γράφημα του G. Άρα από το F_p μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα G^* όπου υ(G^*)=G.
□

<u>*Ορισμός ισχυρά συνεκτικής συνιστώσας*</u> Έστω G ένα κατευθυνόμενο γράφημα. Ένα υπο-γράφημα Η του G που είναι ισχυρά συνεκτικό είναι *ισχυρά συνεκτική συνιστώσα*, αν: προσθέτοντας στο Η οποιεσδήποτε κορυφές και ακμές του G (από αυτές που δεν περιέχονται στο Η), παίρνουμε υπο-γράφημα Η′ του G που δεν είναι ισχυρά συνεκτικό. □

4.3.4 Πρόταση (Χαρακτηρισμός των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών)

Για κάθε κορυφή a ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G=(V, E) υπάρχει μοναδική ισχυρά συνεκτική συνιστώσα H=(W, K) που περιέχει την a, και είναι
W={a}∪{u | υπάρχει κλειστή διαδρομή που περιέχει τις κορυφές a, u},
K={e | τα άκρα της ακμής e είναι στο W}. □

<u>Απόδειξη της 4.3.4</u>
Το υπο-γράφημα που αποτελείται από την κορυφή a είναι προφανώς ισχυρά συνεκτικό. Από την Άσκηση 4.4 (26), υπάρχει ισχυρά συνεκτική συνιστώσα που περιέχει την κορυφή a.
Έστω Θ μία ισχυρά συνεκτική συνιστώσα που περιέχει την a. Θα δείξουμε ότι η Θ ταυτίζεται με το υπο-γράφημα Η.
Έστω v μία κορυφή της Θ διαφορετική από την a. Αφού το υπο-γράφημα Θ είναι ισχυρά συνεκτικό θα ισχύει a $R_{\delta\delta}$ v στο Θ, οπότε θα υπάρχει κλειστή διαδρομή που περιέχει τις κορυφές a, v. Άρα κάθε κορυφή της Θ περιέχεται στο σύνολο W των κορυφών του Η.
Έστω v μία κορυφή του Η διαφορετική από την a. Από τον ορισμό των κορυφών του Η, υπάρχει κλειστή διαδρομή μ που περιέχει τις κορυφές v, a. Αν προσθέσουμε στη Θ τις κορυφές και τις ακμές της μ, το υπο-γράφημα Θ′ που προκύπτει είναι ισχυρά συνεκτικό (Πρόταση 4.3.2 για b=a). Επειδή η Θ είναι ισχυρά συνεκτική συνιστώσα, το Θ′ δεν μπορεί να περιέχει κορυφές που δεν είναι στη Θ, άρα η v είναι κορυφή της Θ.
Άρα τα υπο-γραφήματα Θ, Η έχουν τις ίδιες κορυφές.
Προφανώς κάθε ακμή της Θ θα είναι στο Κ, οπότε θα είναι ακμή του Η.
Έστω ότι το υπο-γράφημα Η έχει μια ακμή e που δεν ανήκει στο Θ. Αν προσθέσουμε στο Θ την ακμή e, το υπο-γράφημα Θ′ που προκύπτει είναι ισχυρά συνεκτικό (επειδή το υπο-γράφημα Θ του Θ′ έχει τις ίδιες κορυφές με το Θ′ και είναι ισχυρά συνεκτικό). Αλλά το Θ′ δεν μπορεί να είναι ισχυρά συνεκτικό και να έχει περισσότερες ακμές από το Θ, επειδή το Θ είναι ισχυρά συνεκτική συνιστώσα. Άρα κάθε ακμή του Η είναι ακμή του Θ.
Αφού τα υπο-γραφήματα Θ, Η έχουν τις ίδιες κορυφές και τις ίδιες ακμές, προφανώς ταυτίζονται.
□

<u>Παρατήρηση</u> Με βάση την παραπάνω Πρόταση, οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G αποτελούν διαμερισμό των κορυφών του G.

Ορισμός γραφήματος ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών Έστω G ένα κατευθυνόμενο γράφημα. Έστω $H_1,\ldots, H_m$ οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G ($m\geq 1$).
Το *γράφημα των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών του* G, Ξ(G), αποτελείται από τις κορυφές

$\{\eta_1,\ldots, \eta_m\}$

και τις ακμές

$\{\{\eta_i, \eta_j\} \mid i\neq j$, και υπάρχει ακμή του G
με τα άκρα της στις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες $H_i, H_j\}$. □

Ορισμός σύμπτυξης πάνω στις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και $H_1,\ldots, H_m$ οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G ($m\geq 1$). Αν F=(W, K) είναι ένα υπο-γράφημα του G, η *σύμπτυξη του* F *πάνω στις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του* G, F/Ξ(G), είναι το υπο-γράφημα του Ξ(G) με κορυφές

$\{\eta_i \mid$ υπάρχει κορυφή του F
που ανήκει στην ισχυρά συνεκτική συνιστώσα H_i του G$\}$

και ακμές

$\{\{\eta_i, \eta_j\} \mid i\neq j$, και υπάρχει ακμή του F
με τα άκρα της στις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες $H_i, H_j\}$. □

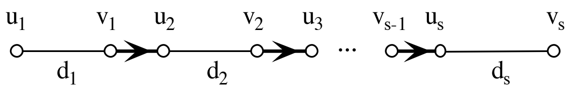
4.3.5 Πρόταση (Το γράφημα των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών)

Έστω G ένα κατευθυνόμενο γράφημα.

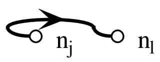
i. Για κάθε μονοπάτι μ του G, η σύμπτυξη του μ πάνω στις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G είτε θα είναι μονοπάτι του Ξ(G), ή θα αποτελείται από μία κορυφή η_i του Ξ(G), αντίστοιχη μιάς ισχυρά συνεκτικής συνιστώσας H_i του G.
ii. Το γράφημα των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών του G, Ξ(G), δεν έχει κλειστή διαδρομή. □

Απόδειξη της 4.3.5

i. Αν όλες οι κορυφές του μ ανήκουν στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα H_i του G, το μ/Ξ(G) θα αποτελείται από την κορυφή η_i του Ξ(G).
Σε κάθε άλλη περίπτωση, διαιρούμε το μ σε διαδοχικές υπο-ακολουθίες $d_1, d_2,\ldots, d_s$ ($s\geq 2$), όπου



για κάθε $i=1,\ldots, s$, η $d_i=(u_i,\ldots, v_i)$ είτε είναι μονοπάτι ή αποτελείται από μία κορυφή, $u_i=v_i$, και όπου οι v_i, u_{i+1} είναι γειτονικές κορυφές του μονοπατιού μ, για κάθε $i=1,\ldots, s-1$. Επιλέγουμε τις υπο-ακολουθίες $d_1, d_2,\ldots, d_s$ έτσι ώστε οι κορυφές της d_i, $i=1,\ldots, s$, να ανήκουν όλες στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του G. Επίσης, αν οι κορυφές της d_i ανήκουν σε μία ισχυρά συνεκτική συνιστώσα H του G ($i=1,\ldots, s$), οι κορυφές των d_{i-1}, d_{i+1} δεν θα ανήκουν στην H.
Είναι εύκολο να δούμε ότι η σύμπτυξη του μονοπατιού μ πάνω στις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G, μ/Ξ(G), είναι η ένωση υπο-γραφημάτων F_i του Ξ(G), όπου κάθε F_i, $i=1,\ldots, s-1$, προκύπτει από την ακμή (v_i, u_{i+1}) του μονοπατιού μ εξής:
Αν οι κορυφές v_i, u_{i+1} ανήκουν στις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες H_j, H_l αντίστοιχα, το F_i αποτελείται από τις κορυφές η_j, η_l

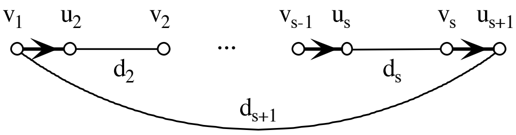


, και την ακμή (η_j, η_l).
Προφανώς το μ/Ξ(G) είναι διαδρομή του Ξ(G). Για να δείξουμε ότι το μ/Ξ(G) είναι μονοπάτι, αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχουν δύο υπο-ακολουθίες του μ, $d_i=(u_i,\ldots, v_i)$ και $d_l=(u_l,\ldots, v_l)$, με $i<l$, που οι κορυφές τους να ανήκουν στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα H του G. Από την επιλογή των $d_1, d_2,\ldots, d_s$, δύο τέτοιες υπο-ακολουθίες δεν θα είναι διαδοχικές (άρα $l\geq i+2$). Η υπο-ακολουθία $\nu=(v_i,\ldots, u_l)$ του μ θα είναι μονοπάτι, με άκρα v_i, u_l που θα ανήκουν στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα H του G. Από την Πρόταση 4.3.2 και τον ορισμό της ισχυρά

συνεκτικής συνιστώσας, κάθε κορυφή και κάθε ακμή του ν θα ανήκει επίσης στην H. Επομένως οι ακμές των υπο-ακολουθιών $d_{i+1},\ldots, d_{l-1}$ θα ανήκουν στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα με τις ακμές των d_i, d_l, που είναι αδύνατον από την επιλογή των $d_1, d_2,\ldots, d_s$.

ii. Έστω ότι το Ξ(G) έχει μία κλειστή διαδρομή C, με κορυφές, κατά σειρά, $\eta_1,\ldots, \eta_s, \eta_{s+1}=\eta_1$, όπου αντίστοιχα οι $H_1,\ldots, H_s, H_{s+1}=H_1$ είναι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G.

Κατασκευάζουμε μία κλειστή διαδρομή ν του G ως εξής: για κάθε ακμή (η_i, η_{i+1}) της C (i=1,…, s),



η διαδρομή ν περιέχει μία ακμή (v_i, u_{i+1}) του G, επιλεγμένη έτσι ώστε τα άκρα της να ανήκουν στις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες H_i, H_{i+1} αντίστοιχα ($v_i \in H_i$, $u_{i+1} \in H_{i+1}$). Επίσης, για κάθε κορυφή η_i της C (i=2,…, s+1), αν $v_i \neq u_i$ [7] η διαδρομή ν περιέχει ένα μονοπάτι d_i της ισχυρά συνεκτικής συνιστώσας H_i, με άκρα τις u_i, v_i (επιλέγουμε το d_i αυθαίρετα).

Επειδή η κλειστή διαδρομή ν θα περιέχεται σε μία ισχυρά συνεκτική συνιστώσα, οι $H_1,\ldots, H_s$ ταυτίζονται, άρα και οι κορυφές $\eta_1,\ldots, \eta_s$ της κλειστής διαδρομής C του Ξ(G) ταυτίζονται. Αυτό είναι αδύνατον, από τον ορισμό της διαδρομής. Άρα το γράφημα των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών του G, Ξ(G), δεν μπορεί να έχει κλειστή διαδρομή. □

Ερωτήματα

1. Αποδείξτε ότι, για οποιεσδήποτε διαφορετικές κορυφές a, b ενός κατευθυνόμενου γραφήματος, ισχύει a $R_{\delta\delta}$ b αν και μόνο αν υπάρχουν δύο διαδρομές, η μία με αρχή την a και τέλος τη b, και η άλλη με αρχή τη b και τέλος την a.
   Αποδείξτε ότι, για οποιεσδήποτε διαφορετικές κορυφές a, b ενός κατευθυνόμενου γραφήματος, ισχύει a $R_{\delta\delta}$ b αν και μόνο αν υπάρχει κλειστή διαδρομή που περιέχει τις κορυφές a, b.
2. Αποδείξτε ότι, για κάθε γράφημα G και κάθε ακμή e του G, υ(G−e)=υ(G)−υ(e).
3. Αποδείξτε ότι: αν οι διαφορετικές κορυφές a, b ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G συνδέονται με ακμή, ισχύει a $R_{\delta\delta}$ b μόνο αν η ακμή {a, b} δεν είναι γέφυρα του υ(G).
   Αποδείξτε ότι: αν η ακμή {a, b} του μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G δεν είναι γέφυρα, υπάρχει κατευθυνόμενο γράφημα G^* όπου $υ(G^*)=G$, και ισχύει a $R_{\delta\delta}$ b.
4. Αποδείξτε ότι ένα ισχυρά συνεκτικό γράφημα δεν έχει κορυφές με βαθμό 1.
5. Ισχύει η Πρόταση 4.3.3 για το γράφημα ○ ;
6. Αποδείξτε ότι: ένα γράφημα G είναι ισχυρά συνεκτικό, αν και μόνο αν το G είναι το μοναδικό υπο-γράφημα του G που είναι ισχυρά συνεκτική συνιστώσα.
7. Πότε υπάρχει ισχυρά συνεκτική συνιστώσα που αποτελείται από μια μοναδική κορυφή; Έστω G ένα κατευθυνόμενο γράφημα όπου το υ(G) είναι άκυκλο. Ποια υπο-γραφήματα του G είναι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες;
8. Αποδείξτε ότι σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα υπάρχει πάντα τουλάχιστον μία ισχυρά συνεκτική συνιστώσα. Νύξη: δείτε την Άσκηση 4.4 (26).
9. Το κατευθυνόμενο γράφημα G έχει ένα υπο-γράφημα G′ που είναι ισχυρά συνεκτικό και έχει τις ίδιες κορυφές με το G. Αποδείξτε ότι το G είναι ισχυρά συνεκτικό.
10. Τα $F_1=(V_1, E_1)$ και $F_2=(V_2, E_2)$ είναι γραφήματα που είναι ισχυρά συνεκτικά και έχουν μία κοινή κορυφή. Αποδείξτε ότι το γράφημα $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ είναι ισχυρά συνεκτικό.
    Νύξη: δείτε την Απόδειξη της Πρότασης 4.3.2.
11. Το υπο-γράφημα H ενός κατευθυνόμενου γραφήματος είναι ισχυρά συνεκτική συνιστώσα, και περιέχει τα άκρα μιάς διαδρομής μ. Αποδείξτε ότι κάθε ακμή και κάθε κορυφή της μ περιέχεται στο H.

[7] Χρησιμοποιούμε τη σύμβαση $v_{s+1}=v_1$.

12. Αποδείξτε ότι δύο διαφορετικές ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες ενός κατευθυνόμενου γραφήματος δεν μπορούν να έχουν κοινή κορυφή.

13. Αποδείξτε ότι κάθε κλειστή διαδρομή περιέχεται σε μία ισχυρά συνεκτική συνιστώσα.

14. Τα άκρα μιάς ακμής e ανήκουν στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα H. Αποδείξτε ότι και η ακμή e θα ανήκει στην H.

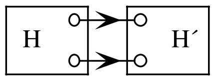
15. Ορίζουμε την παρακάτω παραλλαγή της ισχυρής προσβασιμότητας, για τις κορυφές ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G: $u_1\ S_{\delta\delta}\ u_2$ αν υπάρχει κλειστή διαδρομή που περιέχει τις κορυφές u_1, u_2, ή αν $u_1=u_2$.

Αποδείξτε ότι η $S_{\delta\delta}$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

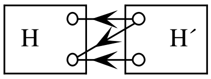
Αποδείξτε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας της $S_{\delta\delta}$ είναι οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες στο G.

16. Περιγράψτε έναν απλό αλγόριθμο που να υπολογίζει, για μία δεδομένη κορυφή u ενός κατευθυνόμενου γραφήματος, την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα που περιέχει τη u. Πόσο αποδοτικός είναι ο αλγόριθμός σας;

17. Το G είναι κατευθυνόμενο γράφημα, και τα υπο-γραφήματα H, H′ είναι διαφορετικές ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες. Αποδείξτε ότι:

είτε κάθε ακμή που έχει ένα άκρο στο H και ένα στο H′ έχει την αρχή της στο H και το τέλος της στο H′ 

,

ή κάθε ακμή που έχει ένα άκρο στο H και ένα στο H′ έχει την αρχή της στο H′ και το τέλος της στο H 

.

18. Πότε δεν έχει ακμές το γράφημα των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G;

19. Αποδείξτε ότι, για κάθε κατευθυνόμενο γράφημα G, η σύμπτυξη του G πάνω στις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G, G/Ξ(G), είναι το γράφημα των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών του G.

4.4 Ασκήσεις

1. Είναι σωστό ότι η διπροσβασιμότητα είναι μεταβατική σχέση;

2. Ισχύει η Πρόταση 4.1.1 αν παραλειφθεί η συνθήκη ότι οι a, b δεν συνδέονται με ακμή;

3. Είναι σωστό ότι, αν ένα δισυνεκτικό γράφημα έχει ένα μονοπάτι $\mu=(a_1, \{a_1, a_2\}, a_2, \ldots, a_n)$, θα έχει και ένα μονοπάτι $\mu'\neq\mu$, με άκρα τις a_1 και a_n, χωρίς κοινές κορυφές με το μ εκτός από τα άκρα του;

4. Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα, και {a, a′}, {b, b′} δύο διαφορετικές ακμές του G, όπου: για οποιαδήποτε κορυφή x, εκείνες από τις κορυφές a, a′, b, b′ που είναι διαφορετικές από την x θα είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G−x. Αποδείξτε ότι υπάρχει κύκλος του G που περιέχει τις ακμές {a, a′}, {b, b′}.

Έστω G ένα δισυνεκτικό γράφημα, και {a, a′}, {b, b′} δύο διαφορετικές ακμές του G. Αποδείξτε ότι υπάρχει κύκλος του G που περιέχει τις ακμές {a, a′}, {b, b′}.

5. Οι u, v, w είναι τρείς διαφορετικές κορυφές ενός δισυνεκτικού γραφήματος G. Αποδείξτε ότι υπάρχει μονοπάτι που διατρέχει τις u, v, w, με αυτή τη σειρά.

Υπάρχει πάντα κύκλος του G που περιέχει τις u, v, w;

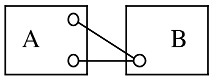
6. Έστω ότι η ακμή {a, b} του συνεκτικού γραφήματος G είναι γέφυρα. Αποδείξτε ότι, αν το συνεκτικό υπο-γράφημα F του G περιέχει τις κορυφές a, b, δεν θα είναι δισυνεκτικό.

7. Έστω G=(V, E) ένα συνεκτικό γράφημα, και F=(V′, E′) ένα δισυνεκτικό υπο-γράφημα του G. Αποδείξτε ότι υπάρχει δισυνεκτική συνιστώσα που περιέχει τις κορυφές και τις ακμές του F.

8. Αποδείξτε ότι αν μια κορυφή u ενός συνεκτικού γραφήματος ανήκει σε δύο διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες, η u είναι κομβικό σημείο.
Η κορυφή u είναι κομβικό σημείο ενός συνεκτικού γραφήματος. Αποδείξτε ότι μια δισυνεκτική συνιστώσα δεν μπορεί να περιέχει όλες τις ακμές που προσπίπτουν στην u.

9. Οι e, e_1, e_2 είναι τρείς διαφορετικές ακμές ενός συνεκτικού γραφήματος, και υπάρχει ένας κύκλος που περιέχει τις e, e_1, και ένας κύκλος που περιέχει τις e, e_2. Αποδείξτε ότι υπάρχει κύκλος που περιέχει τις e_1, e_2.

10. Οι u, v είναι διαφορετικές κορυφές ενός συνεκτικού γραφήματος G, και κάθε μονοπάτι με άκρα τις u, v έχει μήκος τουλάχιστον 3.
Λέμε ότι ένας διαμερισμός των κορυφών του G σε δύο υπο-σύνολα A, B, διαχωρίζει τις u, v, αν η u και κάθε γειτονική κορυφή της u ανήκουν στο A, και αντίστοιχα η v και κάθε γειτονική κορυφή της v ανήκουν στο B. Λέμε ότι ένας διαμερισμός των κορυφών του G σε δύο υπο-σύνολα A, B, που διαχωρίζει τις u, v, συνενώνεται, αν υπάρχει κορυφή όπου προσπίπτει κάθε ακμή που έχει το ένα άκρο της στο A και το άλλο στο B



.

Αποδείξτε ότι: αν υπάρχει διαμερισμός όπως παραπάνω που διαχωρίζει τις u, v και συνενώνεται, οι κορυφές u, v δεν είναι στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα.
Αποδείξτε ότι: αν οι κορυφές u, v δεν είναι στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα, υπάρχει διαμερισμός όπως παραπάνω που διαχωρίζει τις u, v και συνενώνεται.

11. Το G είναι ένα συνεκτικό γράφημα, και η κορυφή x είναι κομβικό σημείο του G.
Έστω $(W_1, F_1),\ldots, (W_m, F_m)$ οι συνεκτικές συνιστώσες του G−x ($m\geq 2$).
Έστω G_i, $i=1,\ldots, m$, το υπο-γράφημα $(W_i\cup\{x\}, F_i\cup\{(x, u) \mid$ η κορυφή u ανήκει στο $W_i\})$ του G.
Αποδείξτε ότι: μια κορυφή διαφορετική από τη x είναι κομβικό σημείο του G αν και μόνο αν είναι κομβικό σημείο κάποιου G_i.
Αποδείξτε ότι: ένα υπο-γράφημα του G είναι δισυνεκτική συνιστώσα αν και μόνο αν είναι δισυνεκτική συνιστώσα κάποιου G_i.

12. Το G είναι ένα συνεκτικό γράφημα που δεν έχει κορυφές με βαθμό 1. Αποδείξτε ότι το G έχει μια δισυνεκτική συνιστώσα που περιέχει το πολύ ένα κομβικό σημείο.

13. Είναι σωστό ότι, αν ένα γράφημα που είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές έχει ένα μονοπάτι $\mu=(a_1, \{a_1, a_2\}, a_2,\ldots, a_n)$, θα έχει και ένα μονοπάτι $\mu'\neq\mu$, με άκρα τις a_1 και a_n, χωρίς κοινές ακμές με το μ;

14. Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα, και $\{a, a'\}$, $\{b, b'\}$ δύο διαφορετικές ακμές του G, όπου: για οποιαδήποτε ακμή e, οι κορυφές a, a′, b, b′ είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G−e. Αποδείξτε ότι υπάρχει κλειστό ίχνος του G που περιέχει τις ακμές $\{a, a'\}$, $\{b, b'\}$.
Έστω G ένα γράφημα που είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές, και $\{a, a'\}$, $\{b, b'\}$ δύο διαφορετικές ακμές του G. Αποδείξτε ότι υπάρχει κλειστό ίχνος του G που περιέχει τις ακμές $\{a, a'\}$, $\{b, b'\}$.

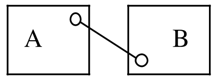
15. Οι u, v, w είναι τρείς διαφορετικές κορυφές ενός γραφήματος G που είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές. Αποδείξτε ότι υπάρχει ίχνος που διατρέχει τις u, v, w, με αυτή τη σειρά.
Υπάρχει πάντα κλειστό ίχνος του G που περιέχει τις u, v, w;

16. Έστω ότι η ακμή $\{a, b\}$ του συνεκτικού γραφήματος G είναι γέφυρα. Αποδείξτε ότι, αν το συνεκτικό υπο-γράφημα F του G περιέχει τις κορυφές a, b, δεν θα είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

17. Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα, και F ένα υπο-γράφημα του G που είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές. Αποδείξτε ότι υπάρχει δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές που περιέχει τις κορυφές και τις ακμές του F.

18. Αποδείξτε ότι τα άκρα μιας ακμής e ενός συνεκτικού γραφήματος ανήκουν σε δύο διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές, αν και μόνο αν η e είναι γέφυρα.

19. Αποδείξτε ότι η διπροσβασιμότητα ως προς ακμές είναι μεταβατική σχέση.

20. Οι u, v είναι διαφορετικές κορυφές ενός συνεκτικού γραφήματος G.
Λέμε ότι ένας διαμερισμός των κορυφών του G σε δύο υπο-σύνολα A, B, διαχωρίζει τις u, v, αν η u ανήκει στο A, και η v ανήκει στο B. Λέμε ότι ένας διαμερισμός των κορυφών του G σε δύο υπο-σύνολα A, B, που διαχωρίζει τις u, v, συνενώνεται, αν υπάρχει μόνο μία ακμή που έχει το ένα άκρο της στο A και το άλλο στο B 

.
Αποδείξτε ότι: αν υπάρχει διαμερισμός όπως παραπάνω που διαχωρίζει τις u, v και συνενώνεται, οι κορυφές u, v δεν είναι στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές.
Αποδείξτε ότι: αν οι κορυφές u, v δεν είναι στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές, υπάρχει διαμερισμός όπως παραπάνω που διαχωρίζει τις u, v και συνενώνεται.

21. Το G είναι ένα συνεκτικό γράφημα, και η ακμή f είναι γέφυρα του G.
Έστω G_1, G_2 οι συνεκτικές συνιστώσες του G−f.
Αποδείξτε ότι: μια ακμή θ διαφορετική από την f είναι γέφυρα του G αν και μόνο αν είναι γέφυρα κάποιου G_i.
Αποδείξτε ότι: ένα υπο-γράφημα του G είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές αν και μόνο αν είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές κάποιου G_i.

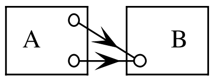
22. Έστω G=(V, E) ένα συνεκτικό γράφημα, και $\{e_1,\ldots, e_k\}$ οι γέφυρες του G ($k\geq 0$).
Έστω $G_1,\ldots, G_s$ οι συνεκτικές συνιστώσες του $(V, E-\{e_1,\ldots, e_k\})$ ($s\geq 1$).
Αποδείξτε ότι τα υπο-γραφήματα $G_1,\ldots, G_s$ είναι οι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του G.

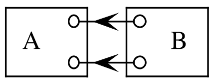
23. Αποδείξτε ότι κάθε συνεκτικό γράφημα G έχει μια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές που περιέχει το πολύ μία κορυφή στην οποία προσπίπτει γέφυρα.

24. Για τις κορυφές a, b ενός κατευθυνόμενου γραφήματος ισχύει $a\ R_{\delta\delta}\ b$. Υπάρχει πάντα κλειστό ίχνος που περιέχει τις a, b;

25. Οι a, b είναι διαφορετικές κορυφές ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G, και για κάθε ακμή e του G, οι a, b είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του υ(G−e). Ισχύει πάντα ότι $a\ R_{\delta\delta}\ b$;

26. Έστω G ένα κατευθυνόμενο γράφημα, και F ένα υπο-γράφημα του G που είναι ισχυρά συνεκτικό. Αποδείξτε ότι υπάρχει ισχυρά συνεκτική συνιστώσα που περιέχει τις κορυφές και τις ακμές του F.

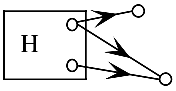
27. Οι u, v είναι διαφορετικές κορυφές ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G=(V, E).
Λέμε ότι ένας διαμερισμός των κορυφών του G σε δύο υπο-σύνολα A, B, διαχωρίζει τις u, v, αν η u ανήκει στο A, και η v ανήκει στο B. Λέμε ότι ένας διαμερισμός των κορυφών του G σε δύο υπο-σύνολα A, B, που διαχωρίζει τις u, v, συνενώνεται, αν:
είτε κάθε ακμή που έχει ένα άκρο στο A και ένα στο B έχει την αρχή της στο A και το τέλος της στο B 

,
ή κάθε ακμή που έχει ένα άκρο στο A και ένα στο B έχει την αρχή της στο B και το τέλος της στο A 

.
Αποδείξτε ότι: αν υπάρχει διαμερισμός όπως παραπάνω που διαχωρίζει τις u, v και συνενώνεται, οι κορυφές u, v δεν είναι στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα.
Αποδείξτε ότι: αν οι κορυφές u, v δεν είναι στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα, υπάρχει διαμερισμός όπως παραπάνω που διαχωρίζει τις u, v και συνενώνεται.

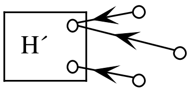
28. Έστω G ένα κατευθυνόμενο γράφημα που δεν έχει κλειστή διαδρομή. Αποδείξτε ότι το G έχει μια κορυφή που δεν είναι τέλος καμμιάς ακμής, και μια κορυφή που δεν είναι αρχή καμμιάς ακμής.

29. Αποδείξτε ότι κάθε κατευθυνόμενο γράφημα G έχει μια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα H, όπου κάθε ακμή που έχει μόνο ένα άκρο στην H έχει την αρχή της στην H



.

Αποδείξτε ότι κάθε κατευθυνόμενο γράφημα G έχει μια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα H′, όπου κάθε ακμή που έχει μόνο ένα άκρο στην H′ έχει το τέλος της στην H′



.

5 Απαντήσεις Ασκήσεων

5.1 Αρχικές Εννοιες

1. Επειδή το A είναι ένα ελάχιστο σύνολο που έχει την ιδιότητα Π, και το A′ ικανοποιεί την Π, έχουμε $A \subseteq A'$. Ομοια έχουμε ότι $A' \subseteq A$, επομένως $A=A'$.

2. Κάθε στοιχείο a του A μπορεί να εμφανιστεί σε οποιαδήποτε θέση μιάς ακολουθίας, ανεξάρτητα από τον αριθμό αντιγράφων του a που παραθέτει το A. Επομένως δεν υπάρχει διαφορά ανάμεσα σε μια ακολουθία με όρους από το A και σε μια ακολουθία με όρους από το A′.

Προφανώς μια συνάρτηση ένα-προς-ένα από το $\{1, 2,\ldots, n\}$ στο A′ θα είναι και ένα-προς-ένα αν θεωρηθεί συνάρτηση από το $\{1, 2,\ldots, n\}$ στο A. Μια συνάρτηση f από το $\{1, 2\}$ στο A με $f(1)=f(2)=a$ θα είναι ένα-προς-ένα αν το A περιέχει τουλάχιστον δύο αντίγραφα του a, αλλά δεν θα είναι ένα-προς-ένα αν θεωρηθεί συνάρτηση από το $\{1, 2\}$ στο A′.

3. Πρέπει να ελέγξουμε ότι, αν ισχύει x R y, τότε θα ισχύει και y R x. Αφού $R=R_1 \cup R_2$, ισχύει x R y αν και μόνο αν x R_1 y ή x R_2 y. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε y R_1 x από τη συμμετρία της R_1, οπότε θα είναι και y R x. Ομοια στη δεύτερη περίπτωση, από τη συμμετρία της R_2.

4. Δεν ισχύει. Ένα αντιπαράδειγμα είναι οι σχέσεις $R_1=\{(\alpha, \beta)\}$, $R_2=\{(\beta, \gamma)\}$ πάνω στο σύνολο $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

5. Πρέπει να ελέγξουμε ότι η σχέση R_α είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.
Η σχέση R_α είναι ανακλαστική από τον ορισμό της.
Η συνθήκη που ορίζει τη συμμετρία της R (αν ισχύει x R y, τότε ισχύει και y R x) ικανοποιείται και αν θέσουμε όπου R τη σχέση $\{(x, x) \mid x \in A\}$. Από την Ασκηση 3, η σχέση $R_\alpha=R\cup\{(x, x) \mid x \in A\}$ είναι συμμετρική.
Για να δείξουμε ότι η R_α είναι μεταβατική, ελέγχουμε ότι κάθε φορά που ισχύει x R_α y και y R_α z, ισχύει και x R_α z. Από τον ορισμό της R_α, x R_α y σημαίνει ότι είτε x R y είτε x=y, και y R_α z σημαίνει ότι είτε y R z είτε y=z. Επομένως αν ισχύει x R_α y και y R_α z έχουμε τις εξής περιπτώσεις:
x R y και y R z: τότε x R z από την μεταβατικότητα της R, οπότε και x R_α z.
x R y και y=z: τότε x R z, οπότε και x R_α z.
x=y και y R z: τότε x R z, οπότε και x R_α z.
x=y και y=z: τότε x=z, οπότε x R_α z.

6. Επειδή η σχέση Q είναι η ένωση των σχέσεων Q(n) ($n\geq 0$), αρκεί να αποδείξουμε ότι, για κάθε $n\geq 0$, αν το (x, y) και τα (x′, y′), (y′, z′) είναι ζεύγη κάποιας Q(n), τότε το (y, x) και το (x′, z′) είναι ζεύγη της Q. Από την επαγωγική κατασκευή της Q(n) μπορούμε να δούμε ότι τα παραπάνω ζεύγη είναι στην Q(n+1), επομένως είναι και στην Q.

7. Παίρνουμε όπου R τη σχέση $\{(m, n) \mid m\geq n\}$[8] πάνω στο σύνολο $\{0, 1, 2,\ldots, K\}$, όπου $K\geq 1$. Τότε $[a]_R=\{m \mid m\geq a\}$, και μπορούμε να ελέγξουμε ότι η R αποτελεί αντιπαράδειγμα και για τα τρία συμπεράσματα της Πρότασης 1.2.1.

8. Θα χρησιμοποιήσουμε το ότι ο αριθμός των εμφανίσεων του συμβόλου «)» που περιέχει μια συμβολοσειρά που αντιστοιχεί σε αριθμητική παράσταση είναι ίσος με τον αριθμό των εμφανίσεων του «(» που περιέχει.
Αρχική περίπτωση Κάθε συμβολοσειρά που αποτελείται από ένα σύμβολο μεταβλητής ή ένα σύμβολο ακέραιου αριθμού έχει προφανώς την ιδιότητα Θ.
Επαγωγικό βήμα Αν υποθέσουμε ότι οι συμβολοσειρές σ_1, σ_2 που αντιστοιχούν σε αριθμητικές παραστάσεις έχουν την ιδιότητα Θ, τότε, χρησιμοποιώντας το παραπάνω, προκύπτει ότι και οι συμβολοσειρές $\sigma_1+\sigma_2$, $\sigma_1-\sigma_2$, $\sigma_1*\sigma_2$ έχουν την ιδιότητα Θ.

[8] Παρατηρείστε ότι η R δεν είναι συμμετρική, ενώ είναι ανακλαστική και μεταβατική. Μπορείτε να βρείτε μια σχέση R που να είναι συμμετρική και μεταβατική και να μην είναι ανακλαστική;

9. i**.** Για να αποδείξουμε ότι $\Gamma'\subseteq\Gamma$ αρκεί να δείξουμε ότι $\Gamma'(n)\subseteq\Gamma(n)$, για κάθε $n\geq 0$ (αφού οι κλάσεις Γ', Γ είναι αντίστοιχα η ένωση των υπο-κλάσεων $\Gamma'(n)$ και η ένωση των υπο-κλάσεων $\Gamma(n)$). Χρησιμοποιούμε επαγωγή:

Αρχική περίπτωση Προφανώς $\Gamma'(0)\subseteq\Gamma(0)$ (αφού $\Gamma'(0)=\Gamma(0)$).

Επαγωγικό βήμα Αν υποθέσουμε ότι $\Gamma'(m)\subseteq\Gamma(m)$ για κάθε m με $0\leq m<i$, τότε $\Gamma'(i-1)\subseteq\Gamma(i-1)$. Από την κατασκευή της $\Gamma'(i)$ από την $\Gamma'(i-1)$, και την κατασκευή της $\Gamma(i)$ από τις $\Gamma(m)$, $0\leq m<i$, προκύπτει $\Gamma'(i)\subseteq\Gamma(i)$.

ii. Οι κλάσεις Γ, Γ' δεν ταυτίζονται: μπορούμε να αποδείξουμε με επαγωγή ότι, για οποιαδήποτε συμβολοσειρά σ στην $\Gamma'(n)$ ή στην $\Gamma(n)$, είναι $\beta(\sigma)=n$ $(n\geq 0)$. Επομένως, για οποιαδήποτε συμβολοσειρά $(\sigma_1+\sigma_2)$ στην $\Gamma'(n+1)$ είναι $\beta(\sigma_1)=\beta(\sigma_2)=n$, πράγμα που προφανώς δεν ισχύει για τις αντίστοιχες συμβολοσειρές της $\Gamma(n)$.

10. Τροποποιούμε τον ορισμό της Γ' ως εξής:

Αρχικές περιπτώσεις Η $\Gamma''(0)$ περιέχει ακριβώς τις συμβολοσειρές που αποτελούνται από ένα σύμβολο μεταβλητής (όπως x, y, και ούτω καθ΄εξής) ή ένα σύμβολο ακέραιου αριθμού (όπως 0, 1, 2, και ούτω καθ΄εξής).

Επαγωγική κατασκευή Η $\Gamma''(i)$, $0<i$, αποτελείται από *όλες τις συμβολοσειρές της* $\Gamma''(i-1)$, και από τις συμβολοσειρές $(\sigma_1+\sigma_2)$, $(\sigma_1-\sigma_2)$, $(\sigma_1*\sigma_2)$, όπου σ_1, σ_2 είναι οποιεσδήποτε συμβολοσειρές της $\Gamma''(i-1)$.

Για να δείξουμε ότι οι κλάσεις Γ, Γ' ταυτίζονται, δείχνουμε ότι $\Gamma''\subseteq\Gamma$ και $\Gamma\subseteq\Gamma''$.

Για να αποδείξουμε ότι $\Gamma''\subseteq\Gamma$, αρκεί να δείξουμε ότι $\Gamma''(n)\subseteq\Gamma(0)\cup\Gamma(1)\cup\ldots\cup\Gamma(n)$, για κάθε $n\geq 0$ (αφού οι κλάσεις Γ'', Γ είναι αντίστοιχα η ένωση των υπο-κλάσεων $\Gamma''(n)$ και η ένωση των υπο-κλάσεων $\Gamma(n)$). Χρησιμοποιούμε επαγωγή:

Αρχική περίπτωση Προφανώς $\Gamma''(0)\subseteq\Gamma(0)$ (αφού $\Gamma''(0)=\Gamma(0)$).

Επαγωγικό βήμα Αν υποθέσουμε ότι $\Gamma''(m)\subseteq\Gamma(0)\cup\Gamma(1)\cup\ldots\cup\Gamma(m)$ για κάθε m με $0\leq m<i$, τότε $\Gamma''(i-1)\subseteq\Gamma(0)\cup\Gamma(1)\cup\ldots\cup\Gamma(i-1)$. Από την κατασκευή της $\Gamma''(i)$ από την $\Gamma''(i-1)$, και την κατασκευή της $\Gamma(i)$ από τις $\Gamma(m)$, $0\leq m<i$, προκύπτει
$\Gamma''(i) \subseteq \Gamma''(i-1)\cup\Gamma(i) \subseteq \Gamma(0)\cup\Gamma(1)\cup\ldots\cup\Gamma(i-1)\cup\Gamma(i)$.

Για να αποδείξουμε ότι $\Gamma\subseteq\Gamma''$, αρκεί να δείξουμε ότι $\Gamma(0)\cup\Gamma(1)\cup\ldots\cup\Gamma(n)\subseteq\Gamma''(n)$, για κάθε $n\geq 0$. Χρησιμοποιούμε επαγωγή:

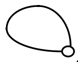
Αρχική περίπτωση Προφανώς $\Gamma(0)\subseteq\Gamma''(0)$ (αφού $\Gamma''(0)=\Gamma(0)$).

Επαγωγικό βήμα Αν υποθέσουμε ότι $\Gamma(0)\cup\Gamma(1)\cup\ldots\cup\Gamma(m)\subseteq\Gamma''(m)$ για κάθε m με $0\leq m<i$, τότε $\Gamma(0)\cup\Gamma(1)\cup\ldots\cup\Gamma(i-1)\subseteq\Gamma''(i-1)$. Από την κατασκευή της $\Gamma(i)$ από τις $\Gamma(m)$, $0\leq m<i$, και την κατασκευή της $\Gamma''(i)$ από την $\Gamma''(i-1)$, προκύπτει $\Gamma(i)\subseteq\Gamma''(i)$, και
$(\Gamma(0)\cup\Gamma(1)\cup\ldots\cup\Gamma(i-1))\cup\Gamma(i) \subseteq \Gamma''(i-1)\cup\Gamma''(i) = \Gamma''(i)$, δηλαδή
$\Gamma(0)\cup\Gamma(1)\cup\ldots\cup\Gamma(i-1)\cup\Gamma(i) \subseteq \Gamma''(i)$.

11. i. Για να αποδείξουμε ότι η Q' περιέχεται στην Q εργαζόμαστε όπως στην Άσκηση 9 (για το ερώτημα $\Gamma'\subseteq\Gamma$).

ii. Αν πάρουμε όπου R τη σχέση $\{(m, m+1) \mid 0\leq m\leq K\}$ πάνω στο σύνολο $\{0, 1, 2,\ldots, K\}$ όπου $K\geq 3$, θα έχουμε $Q=\{(m, m') \mid 0\leq m\leq K, 0\leq m'\leq K\}$. Από την άλλη μεριά, μπορούμε να αποδείξουμε με επαγωγή ότι: για οποιοδήποτε ζεύγος (m, m+p) στην $Q'(2n)$ ο ακέραιος p αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρείται διά 3, και για οποιοδήποτε ζεύγος (m, m+p) στην $Q'(2n+1)$ ο ακέραιος p αφήνει υπόλοιπο 2 όταν διαιρείται διά 3. Άρα
$Q'\subseteq\{(m, m') \mid 0\leq m\leq K, 0\leq m'\leq K$, ο ακέραιος $m-m'$ δεν διαιρείται διά $3\}$, οπότε $Q'\neq Q$.

5.2 Συνεκτικότητα

1. Κάθε ακμή συνεισφέρει 1 στο βαθμό κάθε ενός από τα άκρα της, επομένως κάθε ακμή συνεισφέρει 2 στο άθροισμα των βαθμών των κορυφών.
Κάθε κατευθυνόμενη ακμή συνεισφέρει 1 στον έξω-βαθμό της αρχής της και 1 στον έσω-βαθμό του τέλους της, επομένως κάθε κατευθυνόμενη ακμή συνεισφέρει 1 στο άθροισμα των έξω-βαθμών των κορυφών, και συνεισφέρει 1 στο άθροισμα των έσω-βαθμών των κορυφών.
Τα παραπάνω ισχύουν για πολυ-γραφήματα, αν θεωρηθεί ότι ένας μη-κατευθυνόμενος βρόχος 

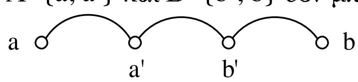
συνεισφέρει 2 στον βαθμό της a.

2. Αν πάρουμε τη διαδρομή $d=(a_1, e_1, a_2,..., a_{2m-2}, e_{2m-2}, a_{2m-1})$ όπου $e_m=e_{m-1}$, $a_{m+1}=a_{m-1},\ldots, a_{2m-3}=a_3, e_{2m-3}=e_2, a_{2m-2}=a_2, e_{2m-2}=e_1, a_{2m-1}=a_1$, η Απόδειξη της Πρότασης 2.2.1 θα δώσει $d_1=(a_1, e_1, a_2,..., a_{m-2}, e_{m-2}, a_{m-1}, e_{m+1}, a_{m+2},\ldots, a_{2m-2}, e_{2m-2}, a_{2m-1}),\ldots,$ $d_{m-2}=(a_1, e_1, a_2, e_{2m-2}, a_{2m-1})$.

3. Αν οι κορυφές a, b είναι σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες, δεν μπορεί να υπάρχει ακμή {a, b}, αφού τότε θα είχαμε a R_δ β.
Αν Δ είναι κάποιος διαμερισμός όπου, αν οι κορυφές a, b είναι σε διαφορετικά σύνολα του Δ δεν υπάρχει ακμή {a, b}, θα έχουμε ότι: αν {a, b} ϵ E, τα a, b είναι στο ίδιο σύνολο του Δ. Επομένως, αν $(a_1, e_1, a_2,..., a_n, e_n, a_{n+1})$ είναι διαδρομή, τα a_1, a_{n+1} θα είναι στο ίδιο σύνολο του Δ, δηλαδή ο διαμερισμός Δ γενικεύει τη σχέση R_δ. Επειδή τα σύνολα κορυφών των συνεκτικών συνιστωσών είναι ο λεπτομερέστερος διαμερισμός που γενικεύει την R_δ, θα είναι και λεπτομερέστερος από τον Δ.

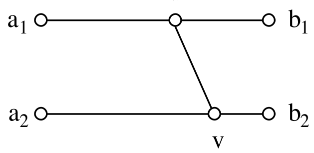
4. Αν το G_R έχει μια διαδρομή $(a_1, e_1, a_2, e_2, a_3,..., a_n, e_n, a_{n+1})$, θα είναι a_1 R a_2, a_2 R a_3, a_n R a_{n+1}, και από τη μεταβατικότητα της R θα είναι a_1 R a_{n+1}. Αρα για οποιεσδήποτε κορυφές x, y του G_R θα έχουμε x R_δ y αν και μόνο αν x R y, και η συνεκτική συνιστώσα V_a μιάς κορυφής a του G_R θα έχει σαν κορυφές τις $\{x \mid x\ R_\delta\ a$ ή $x=a\}=\{x \mid x\ R\ a\}=[a]_R$, δηλαδή την κλάση ισοδυναμίας της a. Οι ακμές της V_a θα είναι οι
$\{\{x, y\} \mid x, y$ στην $[a]_R$ και $x\ R\ y\}=\{\{x, y\} \mid x, y$ στην $[a]_R\}$.

5. Όχι, αν έχουμε A={a, a′} και B={b′, b} δεν μπορούμε να επιλέξουμε τα a, b σαν άκρα του μονοπατιού μ.



6. Χρησιμοποιούμε την Πρόταση 2.2.2, για τα υπο-σύνολα A και V−A. Αφού υπάρχει διαδρομή με αρχή στο A και τέλος στο V−A (το G είναι συνεκτικό), θα υπάρχει μονοπάτι μ στο G με αρχή στο A και τέλος στο V−A, χωρίς καμμία άλλη κορυφή στο A∪(V−A)=V. Αρα το μονοπάτι μ θα είναι μια ακμή με το ένα άκρο στο A και το άλλο άκρο στο V−A.

7. Έστω ότι τα $\mu_1=(a_1,\ldots, b_1)$, $\mu_2=(a_2,\ldots, b_2)$ είναι μέγιστα μονοπάτια μήκους n, χωρίς κοινή κορυφή. Από την Πρόταση 2.2.2, υπάρχει μονοπάτι (u,…, v), με αρχή κορυφή u του μ_1 και τέλος κορυφή v του μ_2, χωρίς άλλη κοινή κορυφή με το μ_1 ή με το μ_2



. Ένα από τα μονοπάτια $(a_1,\ldots, u)$, $(u,\ldots, b_1)$ θα έχει μήκος

τουλάχιστον **Error!**, και ένα από τα μονοπάτια (a_2,…, v), (v,…, b_2) θα έχει μήκος τουλάχιστον **Error!**. Επομένως, ένα από τα μονοπάτια (a_1,…, u,…,v,…, a_2), (a_1,…, u,…,v,…, b_2),
(b_1,…, u,…,v,…, a_2), (b_1,…, u,…,v,…, b_2) θα έχει μήκος τουλάχιστον **Error!**+ **Error!** +1=n+1, που είναι αδύνατον.

8. Αν υπάρχει μια διαδρομή d_0, με άκρα a, b, που δεν διατρέχει την ακμή {a, b}, τότε η αφαίρεση της {a, b} δεν θα αυξήσει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του G (άρα εξ ορισμού η {a, b} δεν είναι γέφυρα). Ο λόγος είναι ότι, για οποιεσδήποτε κορυφές x, y που είναι άκρα μιάς διαδρομής d στο G, αν η d δεν διατρέχει την {a, b} θα έχουμε την ίδια διαδρομή και στο G−{a, b}. Και αν η d διατρέχει την {a, b}, μπορούμε να αντικαταστήσουμε κάθε εμφάνιση της {a, b} στην d με τη διαδρομή d_0, οπότε παίρνουμε μια διαδρομή d′ στο G−{a, b} με άκρα τις x, y. Επομένως αν η {a, b} είναι γέφυρα δεν μπορεί να υπάρχει διαδρομή όπως η d_0, οπότε τα άκρα της {a, b} θα βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G−{a, b}.
Αντίστροφα, αν τα άκρα της {a, b} βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G−{a, b}, η αφαίρεση της {a, b} θα αυξήσει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του G (αφού οι a, b είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G), άρα εξ ορισμού η {a, b} είναι γέφυρα.
Αν η ακμή e={a, b} ενός συνεκτικού γραφήματος G είναι γέφυρα δεν μπορεί να υπάρχει διαδρομή όπως η d_0 (βλέπε παραπάνω), οπότε κάθε διαδρομή με άκρα τις a, b πρέπει να περιέχει την e. Αντίστροφα, αν υπάρχουν κορυφές x, y, όπου κάθε διαδρομή με άκρα τις x, y περιέχει την e, οι x, y θα βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G−e, δηλαδή η αφαίρεση της e θα αυξήσει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του G, άρα εξ ορισμού η e είναι γέφυρα.

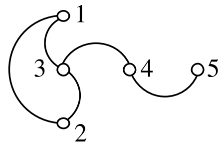
9. Αν η κορυφή a είναι κομβικό σημείο θα έχει τουλάχιστον δύο γειτονικές κορυφές, αλλοιώς το G−a δεν μπορεί να έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το G. Αν, για κάθε δύο γειτονικές κορυφές u, v της a, υπάρχει διαδρομή d(u, v) με άκρα τις u, v που δεν περιέχει την a, η αφαίρεση της a δεν θα αυξήσει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του G (άρα εξ ορισμού η κορυφή a δεν είναι κομβικό σημείο). Ο λόγος είναι ότι, για οποιεσδήποτε κορυφές x, y που είναι άκρα μιάς διαδρομής d στο G, αν η d δεν περιέχει την a θα έχουμε την ίδια διαδρομή και στο G−a. Και αν η d περιέχει την a, μπορούμε να αντικαταστήσουμε κάθε εμφάνιση (…, u, {u, a}, a, {a, v}, v,…) της a στη διαδρομή d με τη διαδρομή d(u, v), οπότε παίρνουμε μια διαδρομή d′ στο G−a με άκρα τις x, y. Επομένως αν η κορυφή a είναι κομβικό σημείο, δεν μπορεί να υπάρχει διαδρομή όπως η d(u, v) για κάθε δύο γειτονικές κορυφές u, v της a. Άρα υπάρχουν δύο γειτονικές κορυφές b_1, b_2 της a που βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G−a.
Αντίστροφα, αν υπάρχουν δύο γειτονικές κορυφές b_1, b_2 της a που βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G−a, η αφαίρεση της a θα αυξήσει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του G (αφού οι b_1, b_2 είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G), άρα η κορυφή a είναι κομβικό σημείο.
Αν η κορυφή a ενός συνεκτικού γραφήματος G είναι κομβικό σημείο δεν μπορεί να υπάρχει διαδρομή όπως η d(u, v) για κάθε δύο γειτονικές κορυφές u, v της a (βλέπε παραπάνω), οπότε υπάρχουν δύο γειτονικές κορυφές b_1, b_2 της a όπου κάθε διαδρομή με άκρα τις b_1, b_2 περιέχει την a. Αντίστροφα, αν υπάρχουν κορυφές x, y, όπου κάθε διαδρομή με άκρα τις x, y περιέχει την a, οι x, y θα βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G−a, δηλαδή η αφαίρεση της a θα αυξήσει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του G, άρα εξ ορισμού η a είναι γέφυρα.

10. Αν η ακμή {a, b} είναι γέφυρα δεν περιέχεται σε κύκλο (Πρόταση 2.3.1), επομένως το a (αντίστοιχα το b) θα είναι κομβικό σημείο αν και μόνο αν είναι άκρο και κάποιας άλλης ακμής (Πρόταση 2.3.1), δηλαδή αν και μόνο αν έχει βαθμό 1.

11. Οι συνεκτικές συνιστώσες $(V_2, E_2),\ldots, (V_k, E_k)$ δεν επηρρεάζονται από την αφαίρεση της $\{a, b\}$: αν οι κορυφές x, y βρίσκονται στην (V_i, E_i) ($i \geq 2$), υπάρχει διαδρομή με άκρα τις x, y που δεν διατρέχει την $\{a, b\}$, οπότε η ίδια διαδρομή θα υπάρχει στο γράφημα και μετά την αφαίρεση της $\{a, b\}$. Αρα οι συνεκτικές συνιστώσες του $G-\{a, b\}$ θα είναι οι $(V_2, E_2),\ldots, (V_k, E_k)$, και οι συνεκτικές συνιστώσες του $(V_1, E_1)-\{a, b\}$.
Το $(V_1, E_1)-\{a, b\}$ είναι μη-συνεκτικό (αφού η ακμή $\{a, b\}$ είναι γέφυρα), και συγκεκριμένα αποτελείται από ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες: ο λόγος είναι ότι, αν το $(V_1, E_1)-\{a, b\}$ είχε τουλάχιστον τρείς συνεκτικές συνιστώσες, η πρόσθεση της ακμής $\{a, b\}$ στο $(V_1, E_1)-\{a, b\}$ θα έδινε ένα γράφημα με τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες, ενώ το (V_1, E_1) είναι συνεκτικό. Επίσης, από την Άσκηση 8 προκύπτει ότι οι κορυφές a, b βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $(V_1, E_1)-\{a, b\}$. Επομένως οι δύο συνεκτικές συνιστώσες του $(V_1, E_1)-\{a, b\}$ θα είναι η συνεκτική συνιστώσα της a, που είναι το (W, F), και η συνεκτική συνιστώσα της b, που είναι το (W', F').

12. Οι συνεκτικές συνιστώσες $(V_2, E_2),\ldots, (V_k, E_k)$ δεν επηρρεάζονται από την αφαίρεση της a: αν οι κορυφές x, y βρίσκονται στην (V_i, E_i) ($i \geq 2$), υπάρχει διαδρομή με άκρα τις x, y που δεν περιέχει την a, οπότε η ίδια διαδρομή θα υπάρχει στο γράφημα και μετά την αφαίρεση της a. Αρα οι συνεκτικές συνιστώσες του $G-a$ θα είναι οι $(V_2, E_2),\ldots, (V_k, E_k)$, και οι συνεκτικές συνιστώσες του $(V_1, E_1)-a$.
Το $(V_1, E_1)-a$ είναι μη-συνεκτικό (αφού η κορυφή a είναι γέφυρα), και συγκεκριμένα αποτελείται από τις συνεκτικές συνιστώσες των $b_1,\ldots, b_m$[9]. Ο λόγος είναι ότι για κάθε κορυφή x του (V_1, E_1) υπάρχει ένα μονοπάτι με άκρα τις x, a, και επομένως υπάρχει ένα μονοπάτι με άκρα τις x, b_i (για κάποιο i), που δεν περιέχει την α. Αρα η κορυφή x βρίσκεται στη συνεκτική συνιστώσα της b_i στο $(V_1, E_1)-a$, που είναι το (W_i, F_i).

13. Το μονοπάτι (1, {1, 3}, 3, {3, 2}, 2} είναι μη-επεκτάσιμο



, αλλά δεν έχει μέγιστο μήκος.

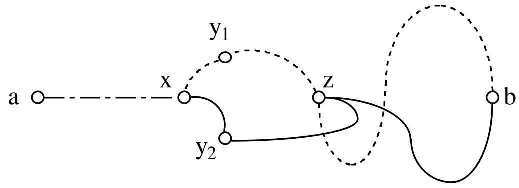
14. Εστω $\{a, b\}$ μια ακμή. Επεκτείνουμε το μονοπάτι $\mu=(a, \{a, b\}, b)$ από το άκρο a, διατρέχοντας ακμές του γραφήματος που οδηγούν σε κορυφές που δεν έχουμε ήδη επισκεφτεί: αν υπάρχει κάποια γειτονική κορυφή a_1 της a διαφορετική από την b, παίρνουμε $\mu_1=(a_1, \{a_1, a\}, a, \{a, b\}, b)$. Αν υπάρχει κάποια γειτονική κορυφή a_2 της a_1 διαφορετική από τις a, b, παίρνουμε $\mu_2=(a_2, \{a_2, a_1\}, a_1, \{a_1, a\}, a, \{a, b\}, b)$. Και ούτω καθ΄εξής, μέχρις ότου η διαδικασία δεν μπορεί να συνεχίσει άλλο, οπότε έχουμε ένα μονοπάτι $\mu_k=(a_k,\ldots, a, \{a, b\}, b)$ που δεν μπορεί να επεκταθεί από το άκρο a_k. Κατόπιν επεκτείνουμε το μονοπάτι μ_k από το άκρο b με τον ίδιο τροπο: αν υπάρχει κάποια γειτονική κορυφή b_1 της b διαφορετική από τις $\{a_k,\ldots, a_1, a\}$, παίρνουμε $\mu_{k+1}=(a_k,\ldots, a, \{a, b\}, b, b_1)$, και ούτω καθ΄εξής.

15. Έστω a μία κορυφή που δεν είναι κομβικό σημείο (Πρόταση 2.4.1). Αν υπάρχουν δύο διαφορετικές ακμές με άκρο την a πρέπει να υπάρχει κύκλος που τις περιέχει (Πρόταση 2.3.2), και αυτό είναι αδύνατον. Άρα η κορυφή a έχει βαθμό το πολύ 1.
Από την Απόδειξη της Πρότασης 2.4.1 βλέπουμε ότι τα άκρα ενός μη-επεκτάσιμου μονοπατιού δεν είναι κομβικά σημεία, επομένως αφού το γράφημα είναι άκυκλο θα έχουν βαθμό 1.

[9] Οι συνεκτικές συνιστώσες των $b_1,\ldots, b_m$ δεν είναι απαραίτητα όλες διαφορετικές μεταξύ τους, αλλά θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο που θα είναι διαφορετικές (Άσκηση 9).

5.3 Δέντρα

1. Διατρέχουμε τις ακμές των δύο μονοπατιών μ_1, μ_2, αρχίζοντας από την κοινή αρχική κορυφή a, μέχρι να βρούμε την πρώτη κορυφή x όπου τα δύο μονοπάτια χωρίζονται (τα μ_1, μ_2 είναι διαφορετικά), δηλαδή όπου η αμέσως επόμενη ακμή $\{x, y_1\}$ του μ_1 είναι διαφορετική από την αμέσως επόμενη ακμή $\{x, y_2\}$ του μ_2



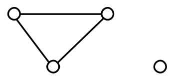
. Αφού τα μ_1, μ_2 έχουν κοινή τελική κορυφή b, αν συνεχίσουμε να διατρέχουμε τις ακμές του μ_1 θα βρούμε μία πρώτη κορυφή z του μ_1 που είναι και κορυφή του μ_2 (η κορυφή z θα μπορούσε να είναι και η y_1 ή η y_2). Το τμήμα $(x, \{x, y_1\}, y_1,\ldots, z)$ του μονοπατιού μ_1 δεν έχει κοινές κορυφές με το τμήμα $(x, \{x, y_2\}, y_2,\ldots, z)$ του μονοπατιού μ_2 (από την επιλογή των κορυφών x, z), οπότε η διαδρομή $(x, \{x, y_1\}, y_1,\ldots, z,\ldots, y_2, \{y_2, x\}, x)$ θα είναι κύκλος.

2. Έστω ότι το $G'=(V', E')$ είναι ένα συνεκτικό υπο-γράφημα του G, οι x, y είναι κορυφές του G', και η $\{x, y\}$ είναι ακμή του G. Επειδή το G' είναι συνεκτικό, υπάρχει μονοπάτι μ του G' με άκρα τις x, y, και επειδή το G' είναι υπο-γράφημα του G, το μ είναι και μονοπάτι του G. Αλλά το G είναι άκυκλο, οπότε δεν υπάρχει μονοπάτι $(x, e_1, a_2,..., a_n, e_n, y)$ με άκρα τις x, y που να είναι διαφορετικό από το $(x, \{x, y\}, y)$ (αλλοιώς η διαδρομή $(x, e_1, a_2,..., a_n, e_n, y, \{y, x\}, x)$ θα ήταν κύκλος του G). Άρα $\mu=(x, \{x, y\}, y)$, και η $\{x, y\}$ είναι και ακμή του G'.

3. Έστω x, y δύο διαφορετικές κοινές κορυφές των G_1, G_2. Επειδή τα G_1, G_2 είναι συνεκτικά, υπάρχει μονοπάτι μ_1 του G_1 με άκρα τις x, y, και μονοπάτι μ_2 του G_2 με άκρα τις x, y. Επειδή τα G_1, G_2 είναι υπο-γραφήματα του G, τα μ_1, μ_2 είναι και μονοπάτια του G. Αλλά το G είναι άκυκλο, οπότε τα μ_1, μ_2 είναι το ίδιο μονοπάτι μ, το οποίο θα είναι και μονοπάτι του $(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$. Άρα το $(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ θα είναι συνεκτικό.

4. Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές που έχει κύκλο, και έστω e μία ακμή του κύκλου. Επειδή η ακμή e δεν είναι γέφυρα (Πρόταση 2.3.1), το γράφημα G−e είναι συνεκτικό, και επειδή έχει n κορυφές, έχει τουλάχιστον n−1 ακμές (Πρόταση 2.4.3). Άρα το G έχει τουλάχιστον n ακμές. Επομένως ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και ακριβώς n−1 ακμές πρέπει να είναι άκυκλο, δηλαδή θα είναι δέντρο.

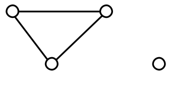
Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές και ακριβώς n−1 ακμές δεν θα είναι δέντρο, αν δεν είναι επιπλέον και συνεκτικό



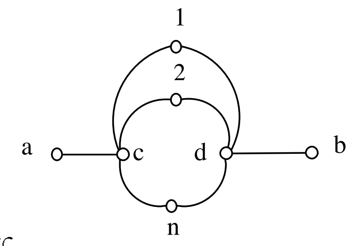
.

5. Αν ένα μη-κατευθυνόμενο άκυκλο γράφημα G με n κορυφές και m ακμές αποτελείται από k συνεκτικές συνιστώσες $G_1,\ldots, G_k$, όπου το G_i έχει n_i κορυφές και m_i ακμές, θα είναι $m_i=n_i-1$ (από την Πρόταση 3.1.2, επειδή το G_i είναι άκυκλο και συνεκτικό δηλαδή δέντρο). Αφού τα $G_1,\ldots, G_k$ δεν έχουν κοινές κορυφές μεταξύ τους, είναι $n=n_1+\ldots+n_k$ και $m=m_1+\ldots+m_k$, επομένως $m=n-k$. Άρα αν το G έχει ακριβώς n−1 ακμές πρέπει k=1, δηλαδή το G θα είναι συνεκτικό, επομένως θα είναι δέντρο.

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές και ακριβώς n−1 ακμές δεν θα είναι δέντρο, αν δεν είναι επιπλέον και άκυκλο

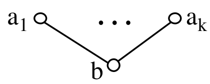


.



6. Το γράφημα με κορυφές {a, c, d, b, 1, 2,…, n} και ακμές {{a, c}, {d, b}, {c, 1}, {1, d}, {c, 2}, {2, d},…, {c, n}, {n, d}} έχει μήκος μέγιστου μονοπατιού 4, και τα κέντρα του είναι οι κορυφές 1, 2,…, n.

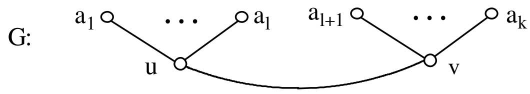
7. Για οποιονδήποτε ακέραιο N ορίζουμε έναν αλγόριθμο D_N (που παίρνει σαν είσοδο ένα δέντρο G=(V, E)) τροποποιώντας τον αλγόριθμο D: αλλάζουμε την εντολή d[u]←0 στο πρώτο πέρασμα των κορυφών (γραμμή 5 του D), σε d[u]←N. Προφανώς ο αλγόριθμος D_N γενικεύει τον D, αφού $D \equiv D_0$.
Θα δείξουμε ότι, για οποιοδήποτε δέντρο G με δύο τουλάχιστον κορυφές, και για κάθε κορυφή u του G με φ(u)>1, στο τέλος του αλγορίθμου D_N ισχύει: d[u]=N+p, όπου p είναι το μεγαλύτερο δυνατό μήκος ενός μονοπατιού (x,…, u) με άκρο την u, το οποίο (α) ή δεν περιέχει κέντρο του G και μπορεί να επεκταθεί σε ένα μονοπάτι (x,…, u,…, κ), όπου η κορυφή κ είναι κέντρο του G, ή (β) το μοναδικό κέντρο του G που περιέχεται στο (x,…, u) είναι η κορυφή u.
Προφανώς, για N=0 έχουμε ακριβώς τη ζητούμενη ιδιότητα του αλγορίθμου D.
Αποδεικνύουμε με επαγωγή ότι η παραπάνω ιδιότητα του D_N ισχύει για όλα τα δέντρα με n κορυφές, για κάθε $n \geq 2$.
Αρχική περίπτωση Για n=2, το G είναι ένα δέντρο που αποτελείται από δύο κορυφές με βαθμό 1  .
Επαγωγικό βήμα Έστω ότι η παραπάνω ιδιότητα του D_N ισχύει για όλα τα δέντρα με m κορυφές, για κάθε m με $2 \leq m < i$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για κάθε δέντρο G με i κορυφές.
Το G θα έχει τουλάχιστον δύο κορυφές με βαθμό 1, αφού έχει i>2 κορυφές. Έστω $a_1,\ldots, a_k$ οι κορυφές του G με βαθμό 1. Αφαιρούμε από το G τις κορυφές $a_1,\ldots, a_k$, και τις προσπίπτουσες ακμές τους$\{a_1, b_1\},\ldots, \{a_k, b_k\}$, και συγκρίνουμε την συμπεριφορά του αλγορίθμου D_{N+1} με είσοδο το δέντρο G′ που προκύπτει, με τη συμπεριφορά του αλγορίθμου D_N με είσοδο το G.

G: 

Αν το G′ έχει μία μόνο κορυφή b, θα είναι $b=b_1=\ldots=b_k$. Ο αλγόριθμος D_N με είσοδο το G θα εκτελέσει την εντολή d[u]←N στη γραμμή 5 για τις κορυφές $a_1,\ldots, a_k$, και στο επόμενο πέρασμα θα θέσει d[b]=N+1 και θα τερματίσει. Η παραπάνω ιδιότητα του D_N ισχύει, αφού η b είναι η μόνη κορυφή του G με βαθμό μεγαλύτερο από 1, και επίσης το G έχει ένα μοναδικό κέντρο, που είναι η κορυφή b.
Έστω ότι το G′ έχει τουλάχιστον δύο κορυφές. Αν μία κορυφή u έχει βαθμό 1 στο G′, θα είναι κάποια από τις $b_1,\ldots, b_k$ (αλλοιώς θα είχε βαθμό 1 και στο G, οπότε θα ήταν μεταξύ των κορυφών $a_1,\ldots, a_k$ που αφαιρέθηκαν), και θα έχει μόνο μία γειτονική a διαφορετική από τις $a_1,\ldots, a_k$. Άρα ο αλγόριθμος D_N, με είσοδο το G, αφού εκτελέσει την εντολή d[u]←N στη γραμμή 5 για τις κορυφές $a_1,\ldots, a_k$, στο δεύτερο πέρασμα θα θέσει d[u]=N+1 για κάθε κορυφή u με βαθμό 1 στο G′. Παρατηρούμε ότι οι κορυφές του G που ενημερώνονται στο δεύτερο πέρασμα του D_N (με είσοδο το G) είναι ακριβώς οι κορυφές του G′ που ενημερώνονται στο πρώτο πέρασμα του D_{N+1} (με είσοδο το G′), και επίσης αποκτούν την ίδια τιμή. Είναι εύκολο να δειχτεί[10] ότι, για κάθε j, οι κορυφές του G που ενημερώνονται στο πέρασμα j+1 του D_N (με

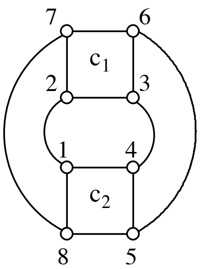
[10] Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στον αριθμό των περασμάτων που εκτελούν οι δύο αλγόριθμοι.

είσοδο το G) είναι ακριβώς οι κορυφές του G′ που ενημερώνονται στο πέρασμα j του D_{N+1} (με είσοδο το G′), και επίσης αποκτούν την ίδια τιμή. Επομένως, η τιμή που δίνει ο D_N σε μια κορυφή του G, διαφορετική από τις $a_1,\ldots, a_k$, είναι η ίδια με την τιμή που δίνει ο D_{N+1} στην ίδια κορυφή (του G′).
Έστω u μια κορυφή του G με φ(u)>1. Προφανώς η u θα είναι και κορυφή του G′.
Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που η κορυφή u είναι κέντρο του G. Θα δείξουμε ότι d[u]=N+p, όπου p είναι το μεγαλύτερο δυνατό μήκος ενός μονοπατιού (x,…, u) με άκρο την u που δεν περιέχει άλλο κέντρο του G. Από την Απόδειξη της Πρότασης 3.2.3 ξέρουμε ότι τα G, G′ έχουν τα ίδια κέντρα, επομένως η κορυφή u είναι και κέντρο του G′.
Αν η κορυφή u έχει βαθμό 1 στο G′, το μήκος του μέγιστου μονοπατιού του G′ θα είναι 1 (επειδή η u είναι κέντρο του G′), επομένως το G′ θα αποτελείται από δύο κορυφές. Άρα το G θα έχει τη μορφή



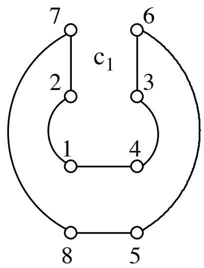
, και τα κέντρα του G θα είναι οι κορυφές u και v. Από τις παραπάνω παρατηρήσεις d[u]=N+1, και επίσης το μεγαλύτερο δυνατό μήκος ενός μονοπατιού (x,…, u) με άκρο την u που δεν περιέχει το άλλο κέντρο του G θα είναι 1.
Έστω ότι η κορυφή u έχει βαθμό μεγαλύτερο από 1 στο G′.
Από τις παραπάνω παρατηρήσεις για τη συμπεριφορά των αλγορίθμων D_N και D_{N+1}, και την επαγωγική υπόθεση για τον αλγόριθμο D_{N+1} με είσοδο το G′, έχουμε ότι d[u]=(N+1)+p′, όπου p′ είναι το μεγαλύτερο δυνατό μήκος ενός μονοπατιού (x′,…, u) του G′ με άκρο την u που δεν περιέχει άλλο κέντρο του G′. Κάθε τέτοιο μονοπάτι του G′ (με μήκος p′) πρέπει να καταλήγει σε μία κορυφή x′ με βαθμό 1 στο G′: σε αντίθετη περίπτωση, είτε το μονοπάτι θα έπρεπε να επεκτεινόταν (λόγω της ακυκλικότητας του G′), και αυτό δεν γίνεται, ή θα υπήρχε μια μοναδική γειτονική κορυφή v της x′ εκτός του μονοπατιού που θα ήταν το άλλο κέντρο του G′, πράγμα επίσης αδύνατον (από την Πρόταση 3.2.3 οι κορυφές u, v θα ήταν γειτονικές, οπότε θα υπήρχε κύκλος στο G′).
Θα δείξουμε ότι p=1+p′. Έστω (x,…, u) ένα μέγιστο μονοπάτι στο G (μήκους p) με άκρο την u που δεν περιέχει άλλο κέντρο του G. Η κορυφή x θα έχει βαθμό 1 στο G (βλέπε τα προηγούμενα), άρα $x=a_j$ για κάποιο j, $1\leq j\leq k$. Επομένως το μονοπάτι θα έχει τη μορφή $(a_j, b_j,\ldots, u)$, όπου το $(b_j,\ldots, u)$ είναι ένα όσο το δυνατόν μεγαλύτερο μονοπάτι του G′ που δεν περιέχει άλλο κέντρο του G και καταλήγει σε μια κορυφή b_j βαθμού 1 του G′. Επειδή το άλλο κέντρο του G είναι επίσης το άλλο κέντρο του G′, και με βάση τα προηγούμενα, το μονοπάτι $(b_j,\ldots, u)$ θα έχει μήκος p′.
Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση που η κορυφή u δεν είναι κέντρο του G. Θα δείξουμε ότι d[u]=N+p, όπου p είναι το μεγαλύτερο δυνατό μήκος ενός μονοπατιού (x,…, u) με άκρο την u, το οποίο δεν περιέχει κέντρο του G και μπορεί να επεκταθεί σε ένα μονοπάτι (x,…, u,…, κ), όπου η κορυφή κ είναι κέντρο του G. Από την Απόδειξη της Πρότασης 3.2.3 ξέρουμε ότι τα G, G′ έχουν τα ίδια κέντρα, επομένως η κορυφή u δεν είναι κέντρο του G′, και η κορυφή κ θα είναι στο G′.
Αν η κορυφή u έχει βαθμό 1 στο G′, η κορυφή x θα είναι κάποια από τις $a_1,\ldots, a_k$ (αλλοιώς θα έπρεπε η κορυφή κ να ήταν κάποια από τις $a_1,\ldots, a_k$). Άρα p=1, και έχουμε δεί παραπάνω ότι d[u]=N+1.
Έστω ότι η κορυφή u έχει βαθμό μεγαλύτερο από 1 στο G′.
Από τις παραπάνω παρατηρήσεις για τη συμπεριφορά των αλγορίθμων D_N και D_{N+1}, και την επαγωγική υπόθεση για τον αλγόριθμο D_{N+1} με είσοδο το G′, έχουμε ότι d[u]=(N+1)+p′, όπου p′ είναι το μεγαλύτερο δυνατό μήκος ενός μονοπατιού (x′,…, u) του G′ με άκρο την u, το οποίο δεν περιέχει κέντρο του G′ και μπορεί να επεκταθεί σε ένα μονοπάτι (x′,…, u,…, κ),

όπου η κορυφή κ είναι κέντρο του G′. Κάθε τέτοιο μονοπάτι του G′ (με μήκος p′) πρέπει να καταλήγει σε μία κορυφή x′ με βαθμό 1 στο G′, για τους ίδιους λόγους με την αντίστοιχη περίπτωση που είδαμε προηγουμένως.
Θα δείξουμε ότι p=1+p′. Έστω (x,…, u) ένα μέγιστο μονοπάτι στο G (μήκους p) με άκρο την u, το οποίο δεν περιέχει κέντρο του G και μπορεί να επεκταθεί σε ένα μονοπάτι (x,…, u,…, κ), όπου η κορυφή κ είναι κέντρο του G. Η κορυφή x θα έχει βαθμό 1 στο G (βλέπε τα προηγούμενα), άρα $x=a_j$ για κάποιο j, $1\leq j\leq k$. Επομένως το μονοπάτι θα έχει τη μορφή (a_j, b_j,…, u), όπου το (b_j,…, u) είναι ένα όσο το δυνατόν μεγαλύτερο μονοπάτι του G′, το οποίο δεν περιέχει κέντρο του G, μπορεί να επεκταθεί σε ένα μονοπάτι (b_j,…, u,…, κ) όπου η κορυφή κ είναι κέντρο του G, και καταλήγει σε μια κορυφή b_j βαθμού 1 του G′. Επειδή κάθε κέντρο του G είναι επίσης κέντρο του G′, και με βάση τα προηγούμενα, το μονοπάτι (b_j,…, u) θα έχει μήκος p′.

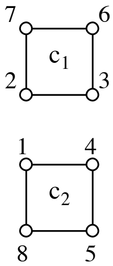


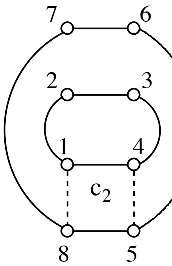
8. Ο κύκλος c_1 περιέχει κατά σειρά τις κορυφές 2, 3, 6, 7, 2, ο κύκλος c_2 περιέχει κατά σειρά τις κορυφές 1, 4, 5, 8, 1, και ο κύκλος c_3 περιέχει κατά σειρά τις κορυφές 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1.

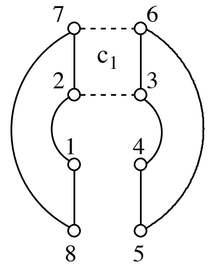
Το άθροισμα των c_1, c_2, c_3 είναι ένας κύκλος



που περιέχει κατά σειρά τις κορυφές 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 2, 1.
Η συμμετρική διαφορά των ακμών των c_1, c_2 είναι οι κύκλοι c_1 και c_2.
Η συμμετρική διαφορά των ακμών των c_2, c_3 είναι οι κύκλοι 1, 2, 3, 4, 1 και 5, 6, 7, 8, 5.
Η συμμετρική διαφορά των ακμών των c_1, c_3 είναι οι κύκλοι 1, 2, 7, 8, 1 και 3, 4, 5, 6, 3.







9. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στον αριθμό k των συνόλων.
Αρχική περίπτωση Αν k=2, από τον ορισμό της συμμετρικής διαφοράς έχουμε $E_1\oplus E_2$= ={x | το x ανήκει σε ένα και μόνο ένα από τα E_1, E_2}=
={x | το x ανήκει σε μονό αριθμό από τα E_1, E_2}.
Επαγωγικό βήμα Υποθέτουμε ότι για κάποιο i>2 ισχύει $\oplus(E_1,\ldots, E_{i-1})$=

$=\{x \mid$ το x ανήκει σε μονό αριθμό από τα E_j, $j=1, 2,\ldots, i-1\}$, για οποιαδήποτε σύνολα $E_1,\ldots, E_{i-1}$.

Τότε $\oplus(E_1,\ldots, E_i) = \oplus(E_1,\ldots, E_{i-1}) \oplus E_i$ (ορισμός του $\oplus(E_1,\ldots, E_i)$)

$=\{x \mid$ το x ανήκει σε ένα και μόνο ένα από τα $\oplus(E_1,\ldots, E_{i-1}), E_i\}=$

(ορισμός της συμμετρικής διαφοράς)

$=\{x \mid$ το x ανήκει στο $\oplus(E_1,\ldots, E_{i-1})$ και δεν ανήκει στο $E_i\}\cup$

$\{x \mid$ το x δεν ανήκει στο $\oplus(E_1,\ldots, E_{i-1})$ και ανήκει στο $E_i\}=$

$=\{x \mid$ το x ανήκει σε μονό αριθμό από τα E_j, $j=1, 2,\ldots, i-1$, και δεν ανήκει στο $E_i\}\cup$

$\{x \mid$ το x ανήκει σε ζυγό αριθμό από τα E_j, $j=1, 2,\ldots, i-1$, και ανήκει στο $E_i\}=$

(επαγωγική υπόθεση)

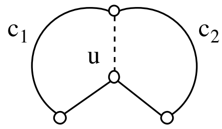
$=\{x \mid$ το x ανήκει σε μονό αριθμό από τα E_j, $j=1, 2,\ldots, i\}$.

10. Θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι ο βαθμός κάθε κορυφής του $(V, \oplus(E_1,\ldots, E_k))$ είναι ζυγός, για οποιοδήποτε $k\geq 2$.

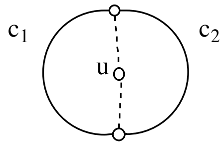
Αρχική περίπτωση Έστω c_1, c_2 κύκλοι ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος $G=(V, E)$, με σύνολα ακμών E_1, E_2 αντίστοιχα. Έστω u μία κορυφή στο V, και Γ_1 (αντίστοιχα Γ_2) οι ακμές του c_1 (αντίστοιχα του c_2) που προσπίπτουν στην u. Ο βαθμός της u στο υπο-γράφημα $(V, E_1\oplus E_2)$ είναι ο αριθμός των ακμών με άκρο την u στο σύνολο $E_1\oplus E_2$, δηλαδή ο αριθμός των ακμών στο σύνολο $\Gamma_1\oplus\Gamma_2=\{e \mid$ η ακμή e ανήκει σε ένα και μόνο ένα από τα $\Gamma_1, \Gamma_2\}$.

Αν τα Γ_1, Γ_2 δεν έχουν κοινά στοιχεία, το σύνολο $\Gamma_1\oplus\Gamma_2$ θα έχει 4 στοιχεία αν η κορυφή u ανήκει και στους δύο κύκλους c_1, c_2, 2 στοιχεία αν η κορυφή u ανήκει μόνο στον ένα από τους c_1, c_2, και θα είναι κενό αν η κορυφή u δεν ανήκει σε κανέναν από τους c_1, c_2.

Αν τα Γ_1, Γ_2 έχουν ένα κοινό στοιχείο (διακεκομμένη ακμή)



, το $\Gamma_1\oplus\Gamma_2$ θα έχει 2 στοιχεία. Αν τα Γ_1, Γ_2 έχουν δύο κοινά στοιχεία (διακεκομμένες ακμές), το $\Gamma_1\oplus\Gamma_2$ θα είναι κενό



.

Άρα σε κάθε περίπτωση το $\Gamma_1\oplus\Gamma_2$ θα έχει ζυγό αριθμό στοιχείων.

Επαγωγικό βήμα Υποθέτουμε ότι, για οποιουσδήποτε κύκλους $c_1,\ldots, c_{i-1}$ $(i>2)$ του G, με σύνολα ακμών $E_1,\ldots, E_{i-1}$ αντίστοιχα, όλες οι κορυφές του υπο-γραφήματος $(V, \oplus(E_1,\ldots, E_{i-1}))$ έχουν ζυγό βαθμό.

Αν $c_1,\ldots, c_i$ $(i>2)$ είναι κύκλοι του G με σύνολα ακμών $E_1,\ldots, E_i$ αντίστοιχα, θα είναι $\oplus(E_1,\ldots, E_i) = \oplus(E_1,\ldots, E_{i-1})\oplus E_i$. Έστω u μία κορυφή στο V, και Γ_1 οι ακμές στο $\oplus(E_1,\ldots, E_{i-1})$ που προσπίπτουν στην u, Γ_2 οι ακμές στο E_i που προσπίπτουν στη u. Ο βαθμός της u στο υπο-γράφημα $(V, \oplus(E_1,\ldots, E_i))$ είναι ο αριθμός των ακμών με άκρο την u στο σύνολο $\oplus(E_1,\ldots, E_{i-1})\oplus E_i$, δηλαδή ο αριθμός των ακμών στο σύνολο $\Gamma_1\oplus\Gamma_2$. Από την επαγωγική υπόθεση ξέρουμε ότι το Γ_1 θα έχει 2n στοιχεία, όπου $n\geq 0$. Το Γ_2 θα έχει ρ στοιχεία, όπου $\rho=2$ αν η κορυφή u ανήκει στον κύκλο c_2, και αλλοιώς $\rho=0$. Θα είναι $|\Gamma_1\oplus\Gamma_2|=|\Gamma_1|+|\Gamma_2|-2|\Gamma_1\cap\Gamma_2|$.

Αν τα Γ_1, Γ_2 δεν έχουν κοινά στοιχεία, το σύνολο $\Gamma_1\oplus\Gamma_2$ θα έχει $2n+\rho$ στοιχεία.

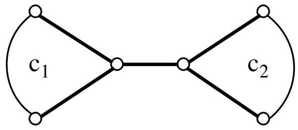
Αν τα Γ_1, Γ_2 έχουν δύο κοινά στοιχεία, το σύνολο $\Gamma_1\oplus\Gamma_2$ θα έχει $2n+\rho-4=2n-2$ στοιχεία $(\rho=2)$.

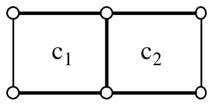
Αν τα Γ_1, Γ_2 έχουν ένα κοινό στοιχείο, το $\Gamma_1\oplus\Gamma_2$ θα έχει $2n+\rho-2=2n$ στοιχεία $(\rho=2)$.

Άρα σε κάθε περίπτωση το $\Gamma_1\oplus\Gamma_2$ θα έχει ζυγό αριθμό στοιχείων.

11. Για να έχει ένα συνεκτικό γράφημα κύκλο, πρέπει να έχει τουλάχιστον μία χορδή ως προς κάποιο δέντρο επικάλυψης T. Κάθε χορδή αντιστοιχεί σε ένα στοιχειώδη κύκλο ως προς το T.

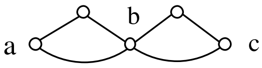
Επομένως, ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και m ακμές έχει ακριβώς ένα κύκλο αν και μόνο αν έχει ακριβώς μία χορδή ως προς το T, δηλαδή αν και μόνο αν $m-n+1=1$, ή $m=n$.
Έστω ότι το γράφημα αποτελείται από k συνεκτικές συνιστώσες $G_1,\ldots, G_k$, όπου το G_i έχει n_i κορυφές και m_i ακμές. Επειδή το G_i είναι συνεκτικό, από την Πρόταση 2.4.3 θα είναι $m_i \geq n_i-1$ για κάθε $i=1,\ldots, k$. Το γράφημα θα έχει ακριβώς ένα κύκλο αν και μόνο αν υπάρχει ένα G_j, $1\leq j\leq k$, το οποίο έχει ακριβώς ένα κύκλο (δηλαδή $m_j=n_j$), και για κάθε $i=1,\ldots, k$ με $i\neq j$ το G_i είναι άκυκλο (δηλαδή $m_i=n_i-1$).
Αφού τα $G_1,\ldots, G_k$ δεν έχουν κοινές κορυφές μεταξύ τους, είναι $n=n_1+\ldots+n_k$, $m=m_1+\ldots+m_k$, και $m\geq(n_1-1)+\ldots +(n_k-1)=n-k$. Αν το γράφημα έχει ακριβώς ένα κύκλο και το j είναι όπως παραπάνω, θα είναι $m=(n_1-1)+\ldots +(n_{j-1}-1)+n_j+(n_{j+1}-1)+\ldots +(n_k-1)=n-(k-1)=n-k+1$. Από την άλλη μεριά, αν $m=n-k+1$ πρέπει να είναι $m_j=n_j$ για ακριβώς ένα j, $1\leq j\leq k$, και $m_i=n_i-1$ για κάθε $i=1,\ldots, k$ με $i\neq j$. Από τα παραπάνω, το γράφημα θα έχει ακριβώς ένα κύκλο.
Ο συνολικός αριθμός των χορδών των $G_1,\ldots, G_k$ ως προς κάποιο δάσος επικάλυψης T είναι $(m_1-n_1+1)+\ldots +(m_k-n_k+1)=m-n+k$. Άρα $m=n-k+2$ αν και μόνο αν υπάρχουν ακριβώς δύο χορδές ως προς το T, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχουν ακριβώς δύο στοιχειώδεις κύκλοι ως προς το T.
Αν το γράφημα έχει ακριβώς δύο κύκλους δεν μπορεί να υπάρχει μόνο ένας στοιχειώδης κύκλος (γιατί θα υπήρχε μόνο ένας κύκλος στο γράφημα), και δεν μπορεί να υπάρχουν παραπάνω από δύο στοιχειώδεις κύκλοι. Άρα υπάρχουν ακριβώς δύο στοιχειώδεις κύκλοι, και $m=n-k+2$.
Αν $m=n-k+2$ θα υπάρχουν ακριβώς δύο στοιχειώδεις κύκλοι c_1, c_2. Οι κύκλοι του γραφήματος θα είναι είτε δύο (αν οι c_1, c_2 δεν έχουν άθροισμα) είτε τρείς (c_1, c_2, και το άθροισμα τους, $\oplus(c_1, c_2)$).

Τα γραφήματα 

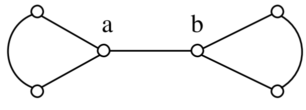
και 

, όπου οι κύκλοι c_1, c_2 είναι στοιχειώδεις ως προς τα αντίστοιχα δέντρα επικάλυψης που αποτελούνται από τις έντονες ακμές, έχουν $n=6$, $m=7$, $k=1$, και $m=n-k+2$. Το πρώτο γράφημα έχει δύο κύκλους, το δεύτερο έχει τρείς κύκλους.

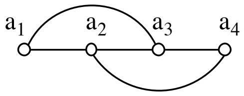
5.4 Δισυνεκτικότητα

1. 

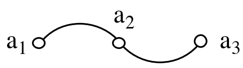
Είναι a R_κ b και b R_κ c, αλλά δεν ισχύει a R_κ c, οπότε η διπροσβασιμότητα δεν είναι μεταβατική.

2. G: 

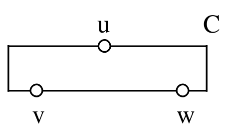
Για οποιαδήποτε κορυφή x διαφορετική από τις a, b, οι κορυφές a, b είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G−x, αλλά δεν ισχύει a R_κ b. Άρα η Πρόταση 4.1.1 δεν ισχύει αν παραλειφθεί η συνθήκη ότι οι a, b δεν συνδέονται με ακμή.

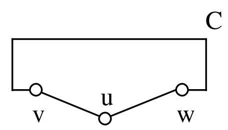
3. Έστω n=2. Αφού a_1 R_κ a_2, υπάρχει μονοπάτι μ′ με άκρα τις a_1, a_2 διαφορετικό από το μ, που προφανώς δεν έχει κοινές κορυφές με το μ εκτός από τα άκρα του.
Έστω n=3. Αφού το γράφημα έχει τρείς τουλάχιστον κορυφές και είναι δισυνεκτικό, η κορυφή a_2 δεν είναι κομβικό σημείο (Πρόταση 4.1.2). Άρα υπάρχει μονοπάτι μ′ με άκρα τις a_1, a_3 που δεν περιέχει την a_2, οπότε δεν έχει κοινές κορυφές με το μ εκτός από τα άκρα του.
Το 

είναι δισυνεκτικό αφού δεν έχει κομβικά σημεία (Πρόταση 4.1.2), αλλά δεν υπάρχει μονοπάτι με άκρα τις a_1, a_4 που να μην έχει άλλες κοινές κορυφές με το (a_1, {a_1, a_2}, a_2, {a_2, a_3}, a_3, {a_3, a_4 }, a_4).
Ποιούς κύκλους θα επέλεγε η διαδικασία που περιγράφεται στην Απόδειξη της Πρότασης 4.1.1, αν το ν ήταν το μονοπάτι (a_1, {a_1, a_2}, a_2, {a_2, a_3}, a_3, {a_3, a_4 }, a_4);

4. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι υπάρχει ένα μονοπάτι μ=(a_1,…, a_n), όπου {a_1, a_2}={a, a′} και {a_{n-1}, a_n}={b, b′}.
Αν οι ακμές {a, a′}, {b, b′} έχουν κοινή κορυφή 

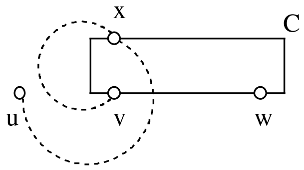
, το ζητούμενο είναι προφανές.
Αν οι ακμές {a, a′}, {b, b′} δεν έχουν κοινή κορυφή, από την Πρόταση 2.2.2 (και τη συνεκτικότητα του G) υπάρχει μονοπάτι ν με αρχή στο {a, a′} και τέλος στο {b, b′}, χωρίς καμμία άλλη κορυφή στο {a, a′, b, b′}. Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ν=(a′,…, b) (αλλοιώς αρκεί να μετονομάσουμε κατάλληλα τις κορυφές a, a′, b, b′). Το ζητούμενο μονοπάτι θα είναι {a, {a, a′}, a′,…, b, {b, b′}, b′}.
Έστω μ ένα μονοπάτι (a_1,…, a_n), όπου {a_1, a_2}={a, a′} και {a_{n-1}, a_n}={b, b′}. Προφανώς $n\geq3$, και από την υπόθεσή μας έχουμε ότι, για κάθε κορυφή a_i με $1<i<n$, υπάρχει διαδρομή με άκρα τις a_1, a_n που δεν περιέχει την a_i. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διαδικασία στην Απόδειξη της Πρότασης 4.1.1, η οποία θα καταλήξει σε ένα κύκλο C που θα περιέχει τις ακμές {a_1, a_2}={a, a′} και {a_{n-1}, a_n}={b, b′}.
Έστω ότι οι {a, a′}, {b, b′} είναι διαφορετικές ακμές ενός δισυνεκτικού γραφήματος G. Από την Πρόταση 4.1.2 (1) το G δεν έχει κομβικά σημεία, οπότε για οποιαδήποτε κορυφή x του G το G−x είναι συνεκτικό. Από τα προηγούμενα, υπάρχει κύκλος που περιέχει τις ακμές {a, a′}, {b, b′}.

5. Αφού το G είναι δισυνεκτικό είναι v R_κ w, οπότε υπάρχει κύκλος C που περιέχει τις κορυφές v, w. Αν η κορυφή u ανήκει στον C 

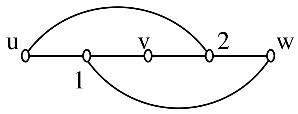


,

υπάρχει πάντα ένα μονοπάτι που αποτελείται από κορυφές και ακμές του C, και διατρέχει τις u, v, w, με αυτή τη σειρά.
Έστω ότι η κορυφή u δεν ανήκει στον C. Το G δεν έχει κομβικό σημείο αφού είναι δισυνεκτικό (Πρόταση 4.1.2), επομένως το G−w είναι συνεκτικό. Έστω μ ένα μονοπάτι του G−w με άκρα τις u, v (διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα). Διατρέχουμε το μ από την u



προς την v, και έστω x η πρώτη κορυφή του C που βρίσκουμε. Επειδή x≠w, υπάρχει πάντα ένα μονοπάτι ν=(x,…, w), που αποτελείται από κορυφές και ακμές του C, και διατρέχει τις x, v, w, με αυτή τη σειρά (ακόμα και αν x=v). Το μονοπάτι (u,…, x,…, w), όπου η υπο-ακολουθία (x,…, w) είναι το μονοπάτι ν, θα διατρέχει τις u, v, w, με αυτή τη σειρά.



Το δεν έχει κομβικά σημεία, οπότε είναι δισυνεκτικό (Πρόταση 4.1.2). Αν ένας κύκλος περιέχει την u θα περιέχει οπωσδήποτε τις ακμές {u, 2} και {u, 1}, και αν περιέχει την v θα περιέχει οπωσδήποτε τις ακμές {v, 2} και {v, 1}. Άρα δεν υπάρχει κύκλος που περιέχει τις u, v, w.

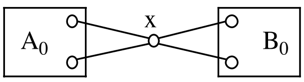
6. Στο F δεν μπορεί να ισχύει a R_κ b, γιατί αν υπήρχε μονοπάτι (a,…, b) στο F διαφορετικό από το {a, {a, b}, b} θα σχηματιζόταν ο κύκλος (a,…, b, {b, a}, a), που θα περιείχε την ακμή {a, b}. Επομένως η {a, b} δεν θα ήταν γέφυρα (Πρόταση 2.3.1).

7. Εξετάζουμε αν το F είναι δισυνεκτική συνιστώσα, ελέγχοντας όλα τα σύνολα με στοιχεία ακμές του G (όλα τα υπο-σύνολα του E). Για κάθε σύνολο D που δεν περιέχεται στο E′, επεκτείνουμε το υπο-γράφημα F με τις ακμές του D (και με τις κορυφές αυτών των ακμών), και ελέγχουμε αν το υπο-γράφημα U(F, D) που προκύπτει είναι δισυνεκτικό. Αν το U(F, D) δεν είναι δισυνεκτικό για κανένα D, τότε εξ ορισμού το F είναι δισυνεκτική συνιστώσα, και μπορούμε να πάρουμε H=F.
Αν υπάρχει κάποιο D_0 για το οποίο το U(F, D_0) είναι δισυνεκτικό και διαφορετικό από το F, τότε το F δεν είναι δισυνεκτική συνιστώσα, οπότε εξετάζουμε με τον ίδιο τρόπο αν η επέκταση U(F, D_0)=F_1 του F είναι δισυνεκτική συνιστώσα. Και ούτω καθ΄εξής. Κάθε επανάληψη του παραπάνω ελέγχου, με είσοδο ένα δισυνεκτικό υπο-γράφημα F_i με περισσότερες ακμές από το F, είτε δίνει ένα επόμενο δισυνεκτικό υπο-γράφημα F_{i+1} με περισσότερες ακμές από το F_i, ή αποδεικνύει ότι το F_i είναι δισυνεκτική συνιστώσα. Προφανώς η διαδικασία θα καταλήξει σε μια δισυνεκτική συνιστώσα F_p που θα περιέχει το F.

8. Αν η κορυφή u ανήκει σε δύο διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες H και Θ, θα είναι άκρο δύο τουλάχιστον ακμών e και f, με e ∈ H και f ∈ Θ. Η ακμή f δεν μπορεί να ανήκει και στην H, γιατί τότε οι ακμές των H, Θ θα ήταν οι
{f}∪{e′ | υπάρχει κύκλος που περιέχει τις ακμές f, e′} (βλέπε Πρόταση 4.1.4), και θα είχαμε H=Θ. Από την Πρόταση 4.1.4 οι ακμές της H είναι οι
{e}∪{e′ | υπάρχει κύκλος που περιέχει τις ακμές e, e′}, οπότε αφού η f δεν ανήκει στην H, δεν υπάρχει κύκλος που να περιέχει τις ακμές e, f. Από την Πρόταση 2.3.2, η κορυφή u είναι κομβικό σημείο.
Αν η κορυφή u είναι κομβικό σημείο, υπάρχουν δύο ακμές e, f που προσπίπτουν στην u και που δεν περιέχονται στον ίδιο κύκλο (Πρόταση 2.3.2). Αν υπάρχει δισυνεκτική συνιστώσα H που περιέχει την e, οι ακμές της H θα είναι οι
{e}∪{e′ | υπάρχει κύκλος που περιέχει τις ακμές e, e′}, οπότε η ακμή f δεν θα ανήκει στην

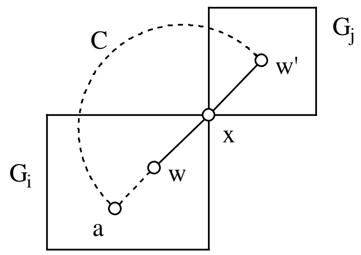
H. Άρα δεν υπάρχει δισυνεκτική συνιστώσα που περιέχει όλες τις ακμές που προσπίπτουν στην u.

9. Η ακμή e δεν είναι γέφυρα αφού περιέχεται σε κύκλο (Πρόταση 2.3.1), οπότε από την Πρόταση 4.1.4 υπάρχει μοναδική δισυνεκτική συνιστώσα H που περιέχει την e, και οι ακμές της H είναι οι $\{e\} \cup \{e' \mid$ υπάρχει κύκλος που περιέχει τις ακμές $e, e'\}$. Επομένως οι e_1, e_2 είναι ακμές του υπο-γραφήματος H.
Επειδή το H είναι δισυνεκτική συνιστώσα και περιέχει την e_1, από την Πρόταση 4.1.4 οι ακμές του H είναι οι $\{e_1\} \cup \{e' \mid$ υπάρχει κύκλος που περιέχει τις ακμές $e_1, e'\}$. Αφού η e_2 είναι ακμή του H, υπάρχει κύκλος που περιέχει τις e_1, e_2.

10. Υποθέτουμε ότι οι κορυφές u, v, όπου κάθε μονοπάτι με άκρα τις u, v έχει μήκος τουλάχιστον 3, είναι στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα H. Θα δείξουμε ότι ένας οποιοσδήποτε διαμερισμός των κορυφών του G σε δύο υπο-σύνολα A, B, που διαχωρίζει τις u, v, δεν θα συνενώνεται.
Επειδή το υπο-γράφημα H είναι δισυνεκτικό ισχύει $u \ R_\kappa \ v$, οπότε θα υπάρχουν δύο μονοπάτια μ_1, μ_2, με αρχή την u και τέλος την v, χωρίς κοινές κορυφές (εκτός από τις u, v). Διατρέχουμε τις ακμές του μονοπατιού μ_1, από την κορυφή u προς την κορυφή v. Επειδή ο διαμερισμός διαχωρίζει τις u, v, η πρώτη ακμή του μ_1 που διατρέχουμε έχει και τα δύο άκρα της στο A, και η τελευταία ακμή του μ_1 που διατρέχουμε έχει και τα δύο άκρα της στο B. Άρα θα βρούμε μία πρώτη ακμή $\{x_1, y_1\}$ του μ_1, όπου $x_1 \in A$ και $y_1 \in B$. Αντίστοιχα, διατρέχοντας τις ακμές του μονοπατιού μ_2, από την κορυφή u προς την κορυφή v, θα βρούμε μία πρώτη ακμή $\{x_2, y_2\}$ του μ_2, όπου $x_2 \in A$ και $y_2 \in B$. Επειδή οι κορυφές x_1, y_1, x_2, y_2 είναι όλες διαφορετικές από τις u, v, και τα μονοπάτια μ_1, μ_2 δεν έχουν κοινές κορυφές εκτός από τις u, v, οι ακμές $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}$ δεν έχουν κοινό άκρο, οπότε δείχνουν ότι ο διαμερισμός δεν συνενώνεται.
Έστω δύο κορυφές u, v, όπου κάθε μονοπάτι με άκρα τις u, v έχει μήκος τουλάχιστον 3, που δεν είναι στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα. Θα βρούμε έναν διαμερισμό των κορυφών του G σε δύο υπο-σύνολα A, B, που διαχωρίζει τις u, v και συνενώνεται.
Από την Πρόταση 4.1.5 δεν ισχύει $u \ R_\kappa \ v$. Προφανώς οι κορυφές u, v δεν συνδέονται με ακμή, και το G έχει τρείς τουλάχιστον κορυφές. Από την Πρόταση 4.1.1, για κάποια κορυφή x διαφορετική από τις u, v, οι κορυφές u, v θα βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G-x$. Έστω A_0 οι κορυφές της συνεκτικής συνιστώσας του $G-x$ που περιέχει την u 

, και B_0 οι υπόλοιπες κορυφές του $G-x$.
Προφανώς κάθε ακμή του $G-x$ έχει και τα δύο άκρα της στο ένα από τα A_0, B_0.
Επειδή κάθε μονοπάτι με άκρα τις u, v έχει μήκος τουλάχιστον 3, η κορυφή x δεν μπορεί να είναι γειτονική και με την u και με την v. Αν η x είναι γειτονική της u (αντίστοιχα της v), θέτουμε $A=A_0\cup\{x\}$, $B=B_0$ (αντίστοιχα $A=A_0$, $B=B_0\cup\{x\}$). Αν η x δεν είναι γειτονική με την u ή την v, θέτουμε (αυθαίρετα) $A=A_0\cup\{x\}$, $B=B_0$. Φαίνεται εύκολα ότι ο διαμερισμός των κορυφών του G στα υπο-σύνολα A, B, διαχωρίζει τις u, v και συνενώνεται.

11. Έστω a μια κορυφή του υπο-γραφήματος G_i ($1 \le i \le m$), διαφορετική από τη x. Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε ακμή του G που προσπίπτει στην a θα ανήκει στο G_i.
Έστω ότι η κορυφή a δεν είναι κομβικό σημείο του G_i. Αν οι e, e′ είναι δύο διαφορετικές ακμές του G_i που προσπίπτουν στην a, υπάρχει κύκλος του G_i που περιέχει τις e, e′ (Πρόταση 2.3.2). Επομένως, αν οι e, e′ είναι δύο διαφορετικές ακμές του G που προσπίπτουν στην a, υπάρχει κύκλος του G που περιέχει τις e, e′. Άρα η κορυφή a δεν είναι κομβικό σημείο του G.
Έστω ότι η κορυφή a είναι κομβικό σημείο του G_i. Από την Πρόταση 2.3.2, υπάρχουν δύο διαφορετικές ακμές e, e′ του G_i που προσπίπτουν στην a, και δεν περιέχονται στον ίδιο κύκλο του G_i. Οι ακμές e, e′ δεν μπορούν να περιέχονται σε κάποιο κύκλο C του G: επειδή



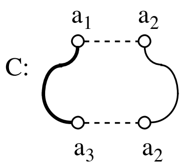
ο C δεν μπορεί να περιέχεται στο G_i, είναι εύκολο να δούμε ότι πρέπει να περιέχει την κορυφή x. Συγκεκριμένα, ο C θα περιέχει μια γειτονική κορυφή w της x που ανήκει στο G_i, και μια γειτονική κορυφή w′ της x που ανήκει σε κάποιο G_j, όπου $j \neq i$. Αυτό όμως σημαίνει ότι οι w, w′ θα βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G−x, που είναι αδύνατον, από την επιλογή των G_i, G_j. Αφού οι ακμές e, e′ δεν περιέχονται στον ίδιο κύκλο του G, η κορυφή a είναι κομβικό σημείο του G.
Άρα η κορυφή a είναι κομβικό σημείο του G_i αν και μόνο αν είναι κομβικό σημείο του G.
Έστω H μια δισυνεκτική συνιστώσα του G, και e μία ακμή της H που περιέχεται σε κάποιο υπο-γράφημα G_i. Η ακμή e δεν είναι γέφυρα του G (βλέπε Άσκηση 4.4 (6)). Από την Πρόταση 4.1.4 είναι H=(W, K), όπου
K={e}∪{e′ | υπάρχει κύκλος του G που περιέχει τις ακμές e, e′},
W={u | η u είναι κορυφή κάποιας ακμής στο K}.
Επειδή η ακμή e δεν είναι γέφυρα του G, υπάρχει κύκλος C του G που περιέχει την e (Πρόταση 2.3.1). Μπορούμε να δείξουμε (όπως παραπάνω) ότι ο C πρέπει να περιέχεται στο G_i. Άρα η ακμή e δεν είναι γέφυρα του G_i. Έστω H′ η δισυνεκτική συνιστώσα του G_i που περιέχει την e. Από την Πρόταση 4.1.4 είναι H′=(W′, K′), όπου
K′={e}∪{e′ | υπάρχει κύκλος του G_i που περιέχει τις ακμές e, e′},
W′={u | η u είναι κορυφή κάποιας ακμής στο K′}.
Προφανώς κάθε ακμή της H′ είναι και ακμή της H. Έστω θ μια ακμή της H, διαφορετική από την e. Υπάρχει κύκλος C του G που περιέχει τις e, θ. Μπορούμε να δείξουμε όπως παραπάνω ότι ο C πρέπει να περιέχεται στο G_i, άρα η θ είναι και ακμή της H′. Επομένως οι H, H′ έχουν τις ίδιες ακμές και τις ίδιες κορυφές, οπότε ταυτίζονται.
Άρα η H είναι δισυνεκτική συνιστώσα του G_i.
Έστω H′ μια δισυνεκτική συνιστώσα κάποιου G_i, και e μία ακμή της H′. Η ακμή e δεν είναι γέφυρα του G_i (Άσκηση 4.4 (6)), και από την Πρόταση 2.3.1 υπάρχει κύκλος του G_i που περιέχει την e. Προφανώς ο ίδιος κύκλος ανήκει και στο G, οπότε η ακμή e δεν είναι γέφυρα του G. Έστω H η δισυνεκτική συνιστώσα του G που περιέχει την e. Μπορούμε να δείξουμε όπως προηγουμένως ότι οι H, H′ ταυτίζονται, άρα η H′ είναι δισυνεκτική συνιστώσα του G.
Άρα ένα υπο-γράφημα του G είναι δισυνεκτική συνιστώσα αν και μόνο αν είναι δισυνεκτική συνιστώσα κάποιου G_i.

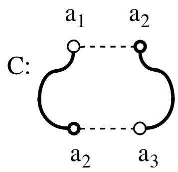
12. Αν το G είναι δισυνεκτικό, έχει μία δισυνεκτική συνιστώσα που είναι το G, και το G δεν έχει κομβικά σημεία (Πρόταση 4.1.2 (1)).
Αν το G δεν είναι δισυνεκτικό, το γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών του G, M(G), είναι άκυκλο και έχει μία τουλάχιστον ακμή, οπότε έχει δύο κορυφές με βαθμό 1 (βλέπε Ασκήσεις 2.5. (14), 2.5 (15)).
Αφού το G δεν έχει κορυφές με βαθμό 1, κάθε κορυφή με βαθμό 1 του M(G) είναι άκρο μιάς ακμής {η, a}, όπου η κορυφή η αντιστοιχεί σε μία δισυνεκτική συνιστώσα H του G, και η κορυφή a είναι κομβικό σημείο του G. Από την Άσκηση 4.4 (8), υπάρχει ακμή e του G με άκρο την a, που δεν ανήκει στην H. Επειδή η ακμή e είτε είναι γέφυρα του G ή περιέχεται σε μία δισυνεκτική συνιστώσα διαφορετική από την H, η κορυφή a θα έχει βαθμό τουλάχιστον 2 στο M(G). Επομένως η κορυφή η έχει βαθμό 1 στο M(G), που σημαίνει ότι η δισυνεκτική συνιστώσα H περιέχει μόνο ένα κομβικό σημείο του G.

Άρα το G έχει δύο δισυνεκτικές συνιστώσες που κάθε μία περιέχει μόνο ένα κομβικό σημείο του G.

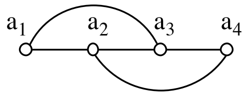
13. Έστω n=2. Αφού $a_1\ R_\iota\ a_2$, υπάρχει μονοπάτι μ′ με άκρα τις a_1, a_2 χωρίς κοινές ακμές με το μ.

Έστω n=3. Αφού το γράφημα είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές δεν έχει γέφυρες (Πρόταση 4.2.2), επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διαδικασία στην Απόδειξη της Πρότασης 4.2.1, η οποία θα καταλήξει σε ένα κλειστό ίχνος C που θα περιέχει τις ακμές $\{a_1, a_2\}$ και $\{a_2, a_3\}$. Αφαιρώντας τις ακμές $\{a_1, a_2\}$ και $\{a_2, a_3\}$ από το C προκύπτει μία ακολουθία C′





από κορυφές και ακμές του C (βλέπε έντονες γραμμές στα σχήματα) που είναι ίχνος με άκρα τις a_1, a_3, και δεν περιέχει τις ακμές $\{a_1, a_2\}$, $\{a_2, a_3\}$. Από την Απόδειξη της Πρότασης 2.2.1, υπάρχει υπο-ακολουθία της C′ που είναι μονοπάτι μ′ με τα ίδια άκρα με την C′. Άρα το μ′ έχει άκρα τις a_1, a_3 και δεν περιέχει τις $\{a_1, a_2\}$, $\{a_2, a_3\}$, οπότε δεν έχει κοινές ακμές με το μ.

Το 

είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές αφού δεν έχει γέφυρες (Πρόταση 4.2.2), αλλά δεν υπάρχει μονοπάτι με άκρα τις a_1, a_4 που να μην έχει άλλες κοινές ακμές με το μονοπάτι $(a_1, \{a_1, a_2\}, a_2, \{a_2, a_3\}, a_3, \{a_3, a_4\}, a_4)$.

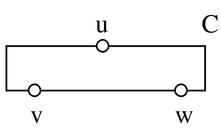
Ποια κλειστά ίχνη θα επέλεγε η διαδικασία που περιγράφεται στην Απόδειξη της Πρότασης 4.2.1, αν το ν ήταν το μονοπάτι $(a_1, \{a_1, a_2\}, a_2, \{a_2, a_3\}, a_3, \{a_3, a_4\}, a_4)$;

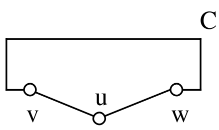
14. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι υπάρχει ένα μονοπάτι $\mu=(a_1,\ldots, a_n)$, όπου $\{a_1, a_2\}=\{a, a'\}$ και $\{a_{n-1}, a_n\}=\{b, b'\}$. Αυτό μπορεί να γίνει όπως στην Απάντηση 5.4 (4).

Από την υπόθεσή μας έχουμε ότι, για κάθε ακμή e του μονοπατιού μ, υπάρχει διαδρομή με άκρα τις a_1, a_n που δεν περιέχει την e. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διαδικασία στην Απόδειξη της Πρότασης 4.2.1, η οποία θα καταλήξει σε ένα κλειστό ίχνος C που θα περιέχει τις ακμές $\{a_1, a_2\}=\{a, a'\}$ και $\{a_{n-1}, a_n\}=\{b, b'\}$.

Έστω ότι οι $\{a, a'\}$, $\{b, b'\}$ είναι διαφορετικές ακμές ενός γραφήματος G που είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές. Από την Πρόταση 4.2.2 το G δεν έχει γέφυρες, οπότε για οποιαδήποτε ακμή e του G το G−e είναι συνεκτικό. Από τα προηγούμενα, υπάρχει κύκλος που περιέχει τις ακμές $\{a, a'\}$, $\{b, b'\}$.

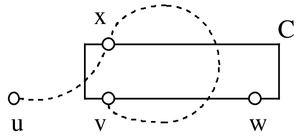
15. Αφού το G είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές είναι $v\ R_\iota\ w$, οπότε υπάρχει κλειστό ίχνος C που περιέχει τις κορυφές v, w. Αν η κορυφή u ανήκει στο C, υπάρχει πάντα ένα ίχνος που



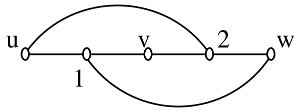


αποτελείται από κορυφές και ακμές του C, και διατρέχει τις u, v, w, με αυτή τη σειρά.

Έστω ότι η κορυφή u δεν ανήκει στο C. Έστω μ ένα μονοπάτι του G με άκρα τις u, v (διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα). Διατρέχουμε το μ από την u προς την v, και έστω x η



πρώτη κορυφή του C που βρίσκουμε. Υπάρχει πάντα ένα ίχνος ν=(x,…, w), που αποτελείται από κορυφές και ακμές του C, και διατρέχει τις x, v, w, με αυτή τη σειρά (ακόμα και αν x=v ή x=w). Το ίχνος (u,…, x,…, w), όπου η υπο-ακολουθία (x,…, w) είναι το ίχνος v, θα διατρέχει τις u, v, w, με αυτή τη σειρά.

Το 

δεν έχει γέφυρες, οπότε είναι δισυνεκτικό (Πρόταση 4.2.2). Αν ένα κλειστό ίχνος περιέχει την u θα περιέχει οπωσδήποτε τις ακμές {u, 2} και {u, 1}, αν περιέχει την v θα περιέχει οπωσδήποτε τις ακμές {v, 2} και {v, 1}, και αν περιέχει την w θα περιέχει οπωσδήποτε τις ακμές {w, 2} και {w, 1}. Άρα ένα κλειστό ίχνος που περιέχει τις u, v, w θα διατρέχει όλες τις ακμές του γραφήματος.
Κάθε φορά που ένα ίχνος φτάνει σε μία κορυφή ή φεύγει από μία κορυφή χρησιμοποιεί μια ακόμα ακμή από αυτές που προσπίπτουν στην κορυφή. Ένα κλειστό ίχνος φτάνει σε μία οποιαδήποτε κορυφή a τόσες φορές όσες την αφήνει (ακόμα και αν η a είναι άκρο του). Άρα αν υπάρχει κλειστό ίχνος που διατρέχει όλες τις ακμές του γραφήματος, κάθε κορυφή θα έχει ζυγό βαθμό.
Επομένως στο παραπάνω γράφημα δεν υπάρχει κλειστό ίχνος που να περιέχει τις u, v, w, αφού οι κορυφές 1, 2 έχουν μονό βαθμό.

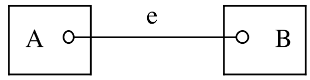
16. Στο F δεν μπορεί να ισχύει a R_ι b, γιατί αν υπήρχε μονοπάτι (a,…, b) στο F χωρίς την ακμή {a, b} θα σχηματιζόταν ο κύκλος (a,…, b, {b, a}, a), που θα περιείχε την ακμή {a, b}. Επομένως η {a, b} δεν θα ήταν γέφυρα (Πρόταση 2.3.1).

17. Η απόδειξη μπορεί να γίνει όπως στην Απάντηση 5.4 (7).

18. Αν τα άκρα της ακμής e={a, b} ανήκουν σε δύο διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές, δεν ισχύει a R_ι b (Πρόταση 4.2.5). Άρα δεν υπάρχει κύκλος που να περιέχει την e, δηλαδή η e είναι γέφυρα (Πρόταση 2.3.1).
Αν η ακμή e={a, b} είναι γέφυρα, από την Απάντηση 5.4 (16) δεν ισχύει a R_ι b. Από την Πρόταση 4.2.5, οι κορυφές a, b δεν μπορούν να ανήκουν στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές.

19. Υποθέτουμε ότι, για τις κορυφές a_1, a, a_2 ενός συνεκτικού γραφήματος G, ισχύει a_1 R_ι a και a R_ι a_2. Θα δείξουμε ότι a_1 R_ι a_2.
Από την Πρόταση 4.2.4 υπάρχει μοναδική δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές, H, που περιέχει την κορυφή a, και οι κορυφές της H είναι οι
{a}∪{u | υπάρχει κλειστό ίχνος που περιέχει τις κορυφές a, u}. Επομένως οι a_1, a_2 είναι κορυφές του υπο-γραφήματος H.
Επειδή το H είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές και περιέχει την a_1, από την Πρόταση 4.2.4 οι κορυφές του H είναι οι
{a_1}∪{u | υπάρχει κλειστό ίχνος που περιέχει τις κορυφές a_1, u}. Αφού η a_2 είναι κορυφή του H, υπάρχει κλειστό ίχνος που περιέχει τις a_1, a_2.

20. Υποθέτουμε ότι οι κορυφές u, v, είναι στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H. Θα δείξουμε ότι ένας οποιοσδήποτε διαμερισμός των κορυφών του G σε δύο υπο-σύνολα A, B, που διαχωρίζει τις u, v, δεν θα συνενώνεται.
Επειδή το υπο-γράφημα H είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές ισχύει u R_ι v, οπότε θα υπάρχουν δύο μονοπάτια μ_1, μ_2, με αρχή την u και τέλος την v, χωρίς κοινές ακμές. Διατρέχουμε τις ακμές του μονοπατιού μ_1, από την κορυφή u προς την κορυφή v. Επειδή ο διαμερισμός διαχωρίζει τις u, v, το μ_1 έχει την αρχή του στο A, και το τέλος του στο B. Άρα θα βρούμε μία πρώτη ακμή {x_1, y_1} του μ_1, όπου $x_1 \in$ A και $y_1 \in$ B. Αντίστοιχα, διατρέχοντας τις ακμές του μονοπατιού μ_2, από την κορυφή u προς την κορυφή v, θα βρούμε μία πρώτη ακμή {x_2, y_2} του μ_2, όπου $x_2 \in$ A και $y_2 \in$ B. Επειδή οι ακμές {x_1, y_1}, {x_2, y_2} είναι διαφορετικές, δείχνουν ότι ο διαμερισμός δεν συνενώνεται.
Έστω δύο κορυφές u, v, που δεν είναι στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές. Θα βρούμε έναν διαμερισμό των κορυφών του G σε δύο υπο-σύνολα A, B, που διαχωρίζει τις u, v και συνενώνεται.

Από την Πρόταση 4.2.5 δεν ισχύει u R_ι v. Από την Πρόταση 4.2.1, για κάποια ακμή e οι κορυφές u, v θα βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G–e. Έστω A οι κορυφές της συνεκτικής συνιστώσας του G–e 

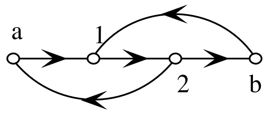
που περιέχει την u, και B οι υπόλοιπες κορυφές του G–e. Φαίνεται εύκολα ότι ο διαμερισμός των κορυφών του G στα υπο-σύνολα A, B, διαχωρίζει τις u, v και συνενώνεται.

21. Έστω θ μια ακμή του G, διαφορετική από την f. Προφανώς η ακμή θ θα ανήκει σε κάποιο G_i (i=1, 2).
Έστω ότι η θ δεν είναι γέφυρα του G_i. Από την Πρόταση 2.3.1 υπάρχει κύκλος του G_i που περιέχει τη θ, επομένως υπάρχει κύκλος του G που περιέχει τη θ. Άρα η ακμή θ δεν είναι γέφυρα του G.
Έστω ότι η ακμή θ είναι γέφυρα του G_i. Από την Πρόταση 2.3.1, η θ δεν περιέχεται σε κύκλο του G_i. Η ακμή θ δεν μπορεί να περιέχεται ούτε σε κάποιο κύκλο C του G: αφού ο C δεν μπορεί να περιέχεται στο G_i, είναι εύκολο να δούμε ότι πρέπει να περιέχει την ακμή e. Αυτό είναι αδύνατον, αφού η e είναι γέφυρα του G. Αφού η ακμή θ δεν περιέχεται σε κύκλο του G, η θ είναι γέφυρα του G.
Άρα η ακμή θ είναι γέφυρα του G_i αν και μόνο αν είναι γέφυρα του G.
Έστω H μια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές του G, και a μία κορυφή της H που περιέχεται σε κάποιο υπο-γράφημα G_i. Από την Πρόταση 4.2.4 είναι H=(W, K), όπου
W={a}U{u | υπάρχει κλειστό ίχνος του G που περιέχει τις κορυφές a, u},
K={e | τα άκρα της ακμής e του G είναι στο W}.
Έστω H′ η δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές του G_i που περιέχει την κορυφή a. Από την Πρόταση 4.2.4 είναι H′=(W′, K′), όπου
W′={a}U{u | υπάρχει κλειστό ίχνος του G_i που περιέχει τις κορυφές a, u},
K′={e | τα άκρα της ακμής e του G_i είναι στο W′}.
Προφανώς κάθε κορυφή της H′ είναι και κορυφή της H. Έστω v μια κορυφή της H, διαφορετική από την a. Υπάρχει κλειστό ίχνος C του G που περιέχει τις a, v. Μπορούμε να δείξουμε όπως παραπάνω ότι το C πρέπει να περιέχεται στο G_i, άρα η v είναι και κορυφή της H′. Επομένως οι H, H′ έχουν τις ίδιες κορυφές. Επίσης κάθε κορυφή της H θα είναι στο G_i (αφού θα είναι και κορυφή της H′), οπότε κάθε ακμή της H θα είναι στο G_i (από τον ορισμό των G_1, G_2), και κάθε ακμή της H θα είναι και ακμή της H′. Άρα οι H, H′ έχουν τις ίδιες κορυφές και τις ίδιες ακμές, οπότε οι H, H′ ταυτίζονται, και η H είναι δισυνεκτική συνιστώσα του G_i.
Έστω H′ μια δισυνεκτική συνιστώσα κάποιου G_i, και a μία κορυφή της H′. Έστω H η δισυνεκτική συνιστώσα του G που περιέχει την a. Μπορούμε να δείξουμε όπως προηγουμένως ότι οι H, H′ ταυτίζονται, άρα η H′ είναι δισυνεκτική συνιστώσα του G.
Άρα ένα υπο-γράφημα του G είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές αν και μόνο αν είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές κάποιου G_i.

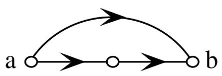
22. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στον αριθμό k των γεφυρών του G.
Αρχική περίπτωση Έστω ότι k=0, οπότε το G δεν έχει γέφυρες, και προφανώς s=1 και G_1=G. Από την Πρόταση 4.2.2 το G είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές. Άρα το G_1 είναι η μοναδική δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές του G.
Επαγωγικό βήμα Υποθέτουμε ότι, για οποιοδήποτε m όπου 0≤m<i, αν ένα συνεκτικό γράφημα G=(V, E) έχει m γέφυρες, {e_1,…, e_m}, οι συνεκτικές συνιστώσες του (V, E–{e_1,…, e_m}) είναι οι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του G.
Έστω G=(V, E) ένα συνεκτικό γράφημα με i γέφυρες, {e_1,…, e_i}. Έστω G_1,…, G_s οι συνεκτικές συνιστώσες του G–{e_1,…, e_i}=(V, E–{e_1,…, e_i}) (αφού i>0, είναι s≥2).
Έστω Γ_1, Γ_2 οι συνεκτικές συνιστώσες του G–e_1. Από την Άσκηση 4.4 (21), οι γέφυρες των Γ_1, Γ_2 θα είναι ακριβώς οι γέφυρες {e_2,…, e_i} του G που είναι διαφορετικές από την

e_1. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι γέφυρες του Γ_1 είναι οι $\{e_2,\ldots, e_j\}$, και οι γέφυρες του Γ_2 είναι οι $\{e_{j+1},\ldots, e_i\}$.
Είναι εύκολο να δούμε ότι ένα υπο-γράφημα του G είναι συνεκτική συνιστώσα του $G-\{e_1,\ldots, e_i\}$ αν και μόνο αν είναι συνεκτική συνιστώσα του $\Gamma_1-\{e_2,\ldots, e_j\}$ ή του $\Gamma_2-\{e_{j+1},\ldots, e_i\}$. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι συνεκτικές συνιστώσες του $\Gamma_1-\{e_2,\ldots, e_j\}$ είναι οι $G_1,\ldots, G_r$, και οι συνεκτικές συνιστώσες του $\Gamma_2-\{e_{j+1},\ldots, e_i\}$ είναι οι $G_{r+1},\ldots, G_s$.
Από την επαγωγική υπόθεση, οι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του Γ_1 είναι τα υπο-γραφήματα $G_1,\ldots, G_r$, και οι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του Γ_2 είναι τα υπο-γραφήματα $G_{r+1},\ldots, G_s$. Από την Άσκηση 4.4 (21), οι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του G είναι τα υπο-γραφήματα $G_1,\ldots, G_s$, δηλαδή οι συνεκτικές συνιστώσες του $(V, E-\{e_1,\ldots, e_i\})$.

23. Αν το G είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές, έχει μία δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές που είναι το G, και το G δεν έχει γέφυρες (Πρόταση 4.2.2).
Αν το G δεν είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές, το γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς ακμές του G, N(G), είναι άκυκλο και έχει μία τουλάχιστον ακμή, οπότε το N(G) έχει δύο κορυφές με βαθμό 1 (βλέπε Ασκήσεις 2.5. (14), 2.5 (15)).
Κάθε κορυφή η του N(G) αντιστοιχεί σε μία δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H του G. Αν η κορυφή η έχει βαθμό 1, υπάρχει μόνο μία ακμή $\{\eta, \eta'\}$ στο N(G). Άρα υπάρχει μόνο μία ακμή του G με το ένα άκρο στην H και το άλλο άκρο σε μία δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H′ διαφορετική από την H. Επομένως η H περιέχει μόνο μία κορυφή στην οποία προσπίπτει γέφυρα.

24. Το 

έχει κλειστή διαδρομή που διατρέχει κατά σειρά τις κορυφές a, 1, 2, b, 1, 2, a. Επιπλέον, είναι εύκολο να δούμε ότι είναι ισχυρά συνεκτικό.
Αν ένα κλειστό ίχνος περιέχει την a θα περιέχει οπωσδήποτε τις ακμές (a, 1) και (2, a), και αν περιέχει τη b θα περιέχει οπωσδήποτε τις ακμές (2, b) και (b, 1). Είναι εύκολο να δούμε ότι οι παραπάνω ακμές δεν σχηματίζουν ίχνος, οπότε ένα κλειστό ίχνος που περιέχει τις a, b θα διατρέχει όλες τις ακμές του γραφήματος.
Κάθε φορά που ένα ίχνος φτάνει σε μία κορυφή ή φεύγει από μία κορυφή χρησιμοποιεί μια ακόμα ακμή από αυτές που προσπίπτουν στην κορυφή. Ένα κλειστό ίχνος φτάνει σε μία οποιαδήποτε κορυφή x τόσες φορές όσες την αφήνει (ακόμα και αν η x είναι άκρο του). Άρα αν υπάρχει κλειστό ίχνος που διατρέχει όλες τις ακμές του γραφήματος, ο έξω-βαθμός κάθε κορυφής θα είναι ίσος με τον έσω-βαθμό της.
Άρα στο παραπάνω γράφημα δεν υπάρχει κλειστό ίχνος που να περιέχει τις a, b, αφού ο έξω-βαθμός των 1, 2 είναι διαφορετικός από τον έσω-βαθμό τους.

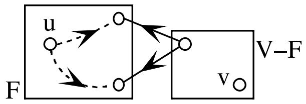
25. Στο 

δεν ισχύει a $R_{\delta\delta}$ b, αλλά αν απαλοιφούν οι κατευθύνεις το γράφημα που προκύπτει δεν έχει γέφυρα.

26. Η απόδειξη μπορεί να γίνει όπως στην Απάντηση 5.4 (7).

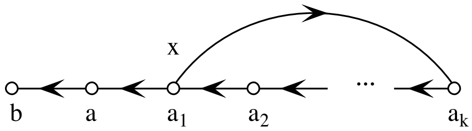
27. Υποθέτουμε ότι οι κορυφές u, v, είναι στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα H. Θα δείξουμε ότι ένας οποιοσδήποτε διαμερισμός των κορυφών του G σε δύο υπο-σύνολα A, B, που διαχωρίζει τις u, v, δεν θα συνενώνεται.
Επειδή το υπο-γράφημα H είναι ισχυρά συνεκτικό ισχύει u $R_{\delta\delta}$ v, οπότε υπάρχει ένα μονοπάτι μ_1 με αρχή τη u και τέλος τη v, και ένα μονοπάτι μ_2 με αρχή τη v και τέλος τη u. Διατρέχουμε τις ακμές του μονοπατιού μ_1, από τη u προς τη v. Επειδή το μ_1 έχει την αρχή του στο A και το τέλος του στο B, θα βρούμε μία πρώτη ακμή (x_1, y_1) του μ_1, όπου $x_1 \in A$ και $y_1 \in B$. Αντίστοιχα, διατρέχοντας τις ακμές του μονοπατιού μ_2, από τη v προς τη u, θα

βρούμε μία πρώτη ακμή (x_2, y_2) του μ_2, όπου $x_2 \in B$ και $y_2 \in A$. Οι ακμές (x_1, y_1), (x_2, y_2) δείχνουν ότι ο διαμερισμός δεν συνενώνεται.
Έστω δύο κορυφές u, v, που δεν είναι στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα. Θα βρούμε έναν διαμερισμό των κορυφών του G σε δύο υπο-σύνολα A, B, που διαχωρίζει τις u, v και συνενώνεται.
Έστω F οι κορυφές $\{u\} \cup \{x \mid$ υπάρχει διαδρομή με αρχή τη u και τέλος την x$\}$, και J οι κορυφές $\{v\} \cup \{y \mid$ υπάρχει διαδρομή με αρχή τη v και τέλος την y$\}$. Επειδή οι u, v δεν είναι στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα, θα είναι είτε $v \notin F$, ή $u \notin J$.

Αν $v \notin F$, θέτουμε 

A=F και B=V−F. Προφανώς ο διαμερισμός του V στα υπο-σύνολα A, B, διαχωρίζει τις u, v. Επίσης, από τον ορισμό του F δεν μπορεί να υπάρχει ακμή με αρχή στο A και τέλος στο B, οπότε ο διαμερισμός συνενώνεται.
Αν $u \notin J$, θέτουμε A=V−J και B=J. Ο διαμερισμός του V στα A, B, διαχωρίζει τις u, v, και από τον ορισμό του J δεν μπορεί να υπάρχει ακμή με αρχή στο B και τέλος στο A, οπότε ο διαμερισμός συνενώνεται.

28. Αν το G δεν έχει ακμές, οποιαδήποτε κορυφή του δεν θα είναι τέλος ακμής, ούτε αρχή ακμής.
Εστω ότι το G έχει μια ακμή (a, b). Επεκτείνουμε το μονοπάτι μ=(a, (a, b), b) από το άκρο a, διατρέχοντας ακμές του γραφήματος αντίστροφα από την κατεύθυνσή τους, και ελέγχοντας ότι δεν οδηγούμαστε σε κορυφές που έχουμε ήδη επισκεφτεί: αν υπάρχει κάποια γειτονική κορυφή a_1 της a διαφορετική από την b και μια ακμή (a_1, a), παίρνουμε $\mu_1=(a_1, (a_1, a), a, (a, b), b)$. Αν υπάρχει κάποια γειτονική κορυφή a_2 της a_1 διαφορετική από τις a, b και μια ακμή (a_2, a_1), παίρνουμε $\mu_2=(a_2, (a_2, a_1), a_1, (a_1, a), a, (a, b), b)$. Και ούτω καθ΄εξής, μέχρις ότου η διαδικασία δεν μπορεί να συνεχίσει άλλο, οπότε έχουμε ένα μονοπάτι $\mu_k=(a_k,\ldots, a, (a, b), b)$ που δεν μπορεί να επεκταθεί από το άκρο a_k. Αυτό



σημαίνει ότι για οποιαδήποτε ακμή (x, a_k) με τέλος την a_k, η κορυφή x πρέπει να ανήκει στο μ_k. Επομένως δεν θα υπάρχει τέτοια ακμή στο G, αφού θα σχηματιζόταν μια κλειστή διαδρομή. Άρα η κορυφή a_k δεν είναι τέλος καμμιάς ακμής.
Κατόπιν επεκτείνουμε το μονοπάτι μ_k από το άκρο b με ανάλογο τρόπο, διατρέχοντας ακμές του γραφήματος κατά την κατεύθυνσή τους, και ελέγχοντας ότι δεν οδηγούμαστε σε κορυφές που έχουμε ήδη επισκεφτεί: αν υπάρχει κάποια γειτονική κορυφή b_1 της b διαφορετική από τις $\{a_k,\ldots, a_1, a\}$ και μια ακμή (b, b_1), παίρνουμε $\mu_{k+1}=(a_k,\ldots, a, (a, b), b, b_1)$. Και ούτω καθ΄εξής, μέχρις ότου η διαδικασία δεν μπορεί να συνεχίσει άλλο, οπότε έχουμε ένα μονοπάτι $\mu_{k+r}=(a_k,\ldots, a, (a, b), b,\ldots, b_r)$ που δεν μπορεί να επεκταθεί από το άκρο b_r. Αυτό σημαίνει ότι για οποιαδήποτε ακμή (b_r, y) με αρχή την b_r, η κορυφή y πρέπει να ανήκει στο μ_{k+r}. Επομένως δεν θα υπάρχει τέτοια ακμή στο G, αφού θα σχηματιζόταν μια κλειστή διαδρομή. Άρα η κορυφή b_r δεν είναι αρχή καμμιάς ακμής.

29. Έστω Ξ(G) το γράφημα των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών του G. Επειδή το Ξ(G) δεν έχει κλειστή διαδρομή (Πρόταση 4.3.5), από την Άσκηση 4.4 (28) υπάρχει μία κορυφή η_i του Ξ(G) που δεν είναι τέλος καμμιάς ακμής, και μία κορυφή η_j του Ξ(G) που δεν είναι αρχή καμμιάς ακμής. Έστω H_i, H_j οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G που αντιστοιχούν στις κορυφές η_i και η_j του Ξ(G).
Έστω e μια ακμή του G που έχει το ένα άκρο της στην H_i, και το άλλο σε μια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα H_k του G διαφορετική από την H_i. Η αντίστοιχη ακμή θ του Ξ(G) θα

έχει άκρα τις κορυφές η_i και η_k. Επειδή η κορυφή η_i δεν είναι τέλος καμμιάς ακμής του $\Xi(G)$, η ακμή θ έχει αρχή την η_i. Άρα η ακμή e του G έχει την αρχή της στην H_i.
Αν κάποια ακμή e' του G έχει το ένα άκρο της στην H_j, και το άλλο σε μια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα H_k του G διαφορετική από την H_j, η αντίστοιχη ακμή θ' του $\Xi(G)$ θα έχει άκρα τις κορυφές η_j και η_k. Επειδή η κορυφή η_j δεν είναι αρχή καμμιάς ακμής του $\Xi(G)$, η ακμή θ' έχει τέλος την η_j, άρα η ακμή e' του G έχει το τέλος της στην H_j.