Διακριτά Μαθηματικά ΙΙ
Λυμένα Θέματα

Created by lessis

Ιουνιος 2009

Ασκηση 1

ισχυει xRy αν η x κορυφη, y ακμη, x ακρο της y
αν η x ακμη, y κορυφη, x εχει ακρο την y

i) ν.δ.ο R συμμετρικη

Η σχεση R συνδεει 1 κορυφη με μια ακμη.
Εστω a η κορυφη και $\{a,b\}$ η ακμη.
Τοτε η σχεση R περιεχει: $\left\{ \begin{matrix} (a,\{a,b\}) \\ (\{a,b\},a) \end{matrix} \right\}$

Αρα απο τον ορισμο της ειναι συμμετρικη!

ii) ν.δ.ο R οχι μεταβατικη για οποιοδηποτε γραφημα που εχει τουλαχιστον 1 ακμη.

Επειδη η σχεση μου απο τον ορισμο της συνδεει κορυφη με ακμη δεν ειναι δυνατο να γινει μεταβαση απο 1 κορυφη σε 1 αλλη και αντιστοιχα απο ακμη σε ακμη. Αρα δεν ειναι μεταβατικη.

Ασκηση 2

Ορισμος ... Συνεκτικες συνιστωσες!!!

Ασκηση 3

Εστω e μια απο τις ακμες ενος κλειστου ιχνους. Αποδειξτε οτι η ακμη e δεν ειναι γεφυρα.

Λυση:

Εστω οτι η ακμη e ειναι γεφυρα, στο G. Αρα τα ακρα της, εστω a, b, θα ανηκουν σε διαφορετικες συνεκτικες συνιστωσες στο G−e. Ομως επειδη εχουμε κλειστο ιχνος ακομα και αν αφαιρεσουμε μια ακμη του e, στο G−e θα υπαρχει διαδρομη απο το a στο b. Αρα τα a, b δεν ανηκουν σε διαφορετικες συνεκτικες συνιστωσες. Αρα η ακμη e δεν ειναι γεφυρα.

Ασκηση 4

α) ορισμος

β) Ολες οι κορυφες με βαθμο ≥ 2

Ασκηση 5

α) Αρχικη περιπτωση: Η υπο-κλαση T(1) αποτελειται απο ολα τα γραφηματα με 1 κορυφη και καμμια ακμη.

Επαγωγικο Βημα: Η υπο-κλαση T(i−1) αποτελειται απο ολα τα γραφηματα $G(V, E)$ με $i-1$ κορυφες που ειναι συνεκτικα και ακυκλα. Τοτε η υπο-κλαση T(i) αποτελειται απο τα $G' = (V \cup \{a\}, E \cup \{a,b\})$ οπου η $a \notin V$ και $b \in V$.

b) Καθε δεντρο με n κορυφες εχει ακριβως $n-1$ ακμες

Αρχικη περιπτωση: Στην υπο-κλαση $T(1)$ εχουμε $n=1$ κορυφη και $n-1=0$ ακμες.
Επαγωγικο βημα: Υποθετω δεντρο στην υπο-κλαση $T(i-1)$ $G=(V,E)$ με $i-1$ κορυφες και $i-2$ ακμες. Στην υποκλαση $T(i)$, $G=(V\cup\{a\}, E\cup\{a,b\})$ αρα εχω $(i-1)+1=i$ κορυφες και $(i-2)+1 = i-1$ ακμες!

Ασκηση 6
Αν ενα συνεκτικο γραφημα με n κορυφες εχει ακριβως $n-1$ ακμες, θα ειναι δεντρο.

Αρχικη περιπτωση: Στην υπο-κλαση $T(1)$ θα εχω $n=1$ κορυφη και $n-1=0$ ακμες. Αρα ειναι δεντρο.
Επαγωγικο βημα: Εστω γραφημα $G(V,E)$ που ανηκει στην υπο-κλαση $T(i-1)$ με $i-1$ κορυφες $i-2$ ακμες και ειναι δεντρο. Ειναι δηλαδη συνεκτικο και ακυκλο! Στην υπο-κλαση $T(i)$ $G=(V\cup\{a\}, E\cup\{a,b\})$ με $a\notin V$ και $b\in V$.
Αυτο εχει i κορυφες και $(i-2)+1 = i-1$ ακμες.
Το G ειναι συνεκτικο, αφου εχουμε προσβαση απο οποιαδηποτε κορυφη σε οποιαδηποτε αλλη και ακυκλο αφου στο a προσπιπτει μονο 1 ακμη. Αρα αφου εδειξα οτι ειναι συνεκτικο και ακυκλο $\rightsquigarrow$ ειναι δεντρο.

Αρα ολα τα συνεκτικα γραφηματα με n και $n-1$ ακμες θα ειναι δεντρα.

Ασκηση 7

α) Δευτρο επικαλυψης ενος γραφηματος G, ειναι ενα υπογραφημα του G που ειναι δευτρο και περιεχει ολες τις κορυφες του G.
Εστω T ενα δευτρο επικαλυψης του G. Ονομαζουμε στοιχειωδη κυκλο του G ως προς το T, ενα κυκλο του G που διατρεχει μονο 1 χορδη ως προς το T.

β)

Σεπτεμβριος 2009

Ασκηση 1

x, y κορυφες. Η σχεση R οριζεται ως εξης: ισχυει xRy αν υπαρχει στο G μονοπατι μηκους 2 με ακρα τις x, y.

α) ν.δ.ο η παραπανω σχεση συμμετρικη για οποιοδηποτε γραφημα.

Αφου υπαρχει μονοπατι απο την x στην y, τοτε απο τον ορισμο της σχεσης θα υπαρχει και το ζευγος (x, y) και το ζευγος (y, x) για 2 οποιεσδηποτε κορυφες $x \neq y$. Αρα η R ειναι συμμετρικη.

β) Βρειτε ενα γραφημα που η σχεση δεν ειναι μεταβατικη.

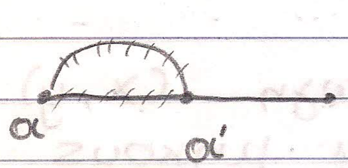
Εστω οτι η R περιλαμβανει τα ζευγη (x, y) και (y, z). Τοτε υπαρχει μονοπατι μηκους 2 απο το x στο y και μονοπατι μηκους 2 απο το y στο z. Ομως απο το x στο z το μονοπατι θα ειναι μηκους 4 αρα το ζευγος (x, z) δεν θα ανηκει στη σχεση ⤳ Δεν ειναι μεταβατικη

Ασκηση 2

α) ορισμος ... μη-επεκτασιμο μονοπατι

β) ν.δ.ο σε ενα ακυκλο μη-κατευθυνομενο γραφημα, τα ακρα ενος μη-επεκτασιμου μονοπατιου εχουν βαθμο 1

Εστω μη-επεκτασιμο μονοπατι με ακρα α, b. Αφου το G ειναι ακυκλο δεν μπορει να υπαρχει κυκλος που να περιεχει την κορυφη α. Αν υπηρχε μια γειτονικη κορυφη α΄ του α τοτε θα επρεπε να ανηκει πανω στο μονοπατι (αφου ειναι μη επεκτασιμο). Ομως τοτε θα δημιουργουνταν κυκλος που περιεχε την κορυφη α, που δεν γινεται αφου το γραφημα ειναι ακυκλο. Αρα η α εχει βαθμο 1. Το ιδιο και για την κορυφη b.



→ δημιουργειται κυκλος που δεν τον θελω.

Ασκηση 4

α) ορισμος ... γεφυρες!

β) Ολες οι ακμες ενος δεντρου ειναι γεφυρες!

Ασκηση 5

α) Επαγωγικος ορισμος συνεκτικων γραφηματων

Αρχικη περιπτωση: Η υπο-κλαση Σ(1) αποτελειται απο τα μη-κατευθυνομενα γραφηματα με 1 κορυφη και καμμια ακμη.
Επαγωγικο Βημα: Η υπο-κλαση Σ(i) με $i>1$ αποτελειται απο τα γραφηματα $G=(V \cup \{a\}, E \cup \{\{a,b_1\},\{a,b_2\}, \dots \{a,b_n\}\}$ οπου $G=(V,E)$ ειναι γραφημα της υπο-κλασης Σ(i-1) με $a \notin V$ και $(b_1, b_2, \dots b_n) \in V$.

β) ν.δ.ο καθε συνεκτικο γραφημα με n κορυφες εχει τουλαχιστον n-1 ακμες.

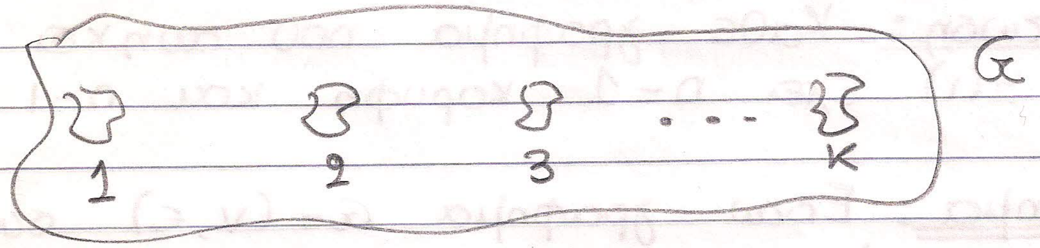
Αρχικη περιπτωση: Καθε γραφημα που ανηκει στην υπο-κλαση Σ(1) εχει $n=1$ κορυφη και $n-1=0$ ακμες.
Επαγωγικο βημα: Εστω γραφημα $G=(V,E)$ στην υπο-κλαση Σ(i-1) και υποθετω οτι εχει $i-1$ κορυφες και τουλαχιστον $i-2$ ακμες. Τοτε ενα γραφημα στην υπο-κλαση Σ(i) ειναι το
$G(V \cup \{a\}, E \cup \{\{a,b_1\},\{a,b_2\}, \dots \{a,b_n\}\}$ το οποιο εχει i κορυφες και τουλαχιστον
$(i-2)+1 = i-1$ ακμες

Ασκηση 6

ν.δ.ο οτι ενα (οχι απαραιτητα συνεκτικο) μη-κατευθυνομενο γραφημα με n κορυφες δεν εχει κυκλο, θα εχει το πολυ n-1 ακμες.

• Αν το G ειναι συνεκτικο, επειδη ξερουμε ηδη οτι ειναι ακυκλο, θα ειναι και δεντρο. Αρα θα εχει ακριβως n-1 ακμες.

• Αν δεν ειναι απαραιτητα συνεκτικο τοτε θα αποτελειται απο κ συνεκτικες συνιστωσες, και εφοσον το G δεν εχει κυκλο καμμια απο τις κ-συνεκτικες συνιστωσες δεν θα εχει κυκλο. Αρα εχουμε ενα δασος με κ-δεντρα.



Καθε συνεκτικη συνιστωσα θα εχει ακριβως n-1 ακμες. Αρα:

Για την $1^{\underline{η}}$ Σ.Σ : $n_1 - 1$ ακμες

$2^{\underline{η}}$ Σ.Σ : $n_2 - 1$ ακμες

⋮

$k^{\underline{η}}$ ΣΣ : $n_k - 1$ ακμες

$n - 1 \cdot k = n - k$.

Αρα το δασος μου εχει n-k ακμες. Ομως στην καλυτερη περιπτωση θα εχω μονο 1 Σ.Σ, αρα θα εχω το πολυ n-1 ακμες.

Ασκηση 7

α) ορισμοι... δεντρο επικαλυψης / χορδη !

β) Εστω Τ δεντρο επικαλυψης σε 1 γραφημα που εχει μονο ενα κυκλο. ν.δ.ο ο κυκλος θα ειναι στοιχειωδης ως προς το Τ.

Το γραφημα εχει 1 κυκλο. Το δεντρο επικαλυψης Τ δεν θα ταυτιζεται με το γραφημα καθως πρεπει να ειναι ακυκλο. Αρα θα υπαρχει 1 ακμη που ανηκει στον κυκλο του γραφηματος, αλλα δεν θα υπαρχει στο δεντρο επικαλυψης. Αυτη η ακμη θα ειναι η χορδη και ο κυκλος του γραφηματος θα την διατρεχει. Αρα ο κυκλος ειναι στοιχειωδης ως προς Τ.

Ιουνιος 2005

Ασκηση 5

Χρησιμοποιειστε τον επαγωγικο ορισμο των δεντρων, για να αποδειξετε οτι σε καθε δεντρο με τουλαχιστον 1 ακμη, υπαρχουν τουλαχιστον 2 κορυφες με βαθμο 1.

Λυση:

Αρχικη περιπτωση: Εστω ενα δεντρο που ανηκει στην υπο-κλαση $T(2)$. Αρα θα εχει ακριβως 2 κορυφες και 1 ακμη. Αρα εχουμε 2 κορυφες με βαθμο τουλαχιστον 1

Επαγωγικο βημα: Υποθετω δεντρο $G=(V,E)$ που ανηκει στην υπο-κλαση $T(i-1)$ με $i-1$ κορυφες, $i-2$ ακμες, και τουλαχιστον 2 κορυφες με βαθμο 1. Αρα το δεντρο στην υπο-κλαση $T(i)$ θα ειναι $G(V\cup\{a\}, E\cup\{a,b\})$. Εδω προσθεσα 1 κορυφη a.

- Αν την συνδεσω με 1 κορυφη που εχει βαθμο ≥ 2, τοτε αυτο δεν με επηρεαζει και συνεπως και το γραφημα στην υπο-κλαση $T(i)$ θα εχει τουλαχιστον 2 κορυφες με βαθμο 1.
- Αν την συνδεσω με 1 απο τις 2 κορυφες που εχουν βαθμο 1, τοτε η a αποκτα βαθμο 1, αυτη που συνδεθηκε με την a εχει βαθμο 2, και η αλλη συνεχιζει να εχει βαθμο 1. Αρα και παλι εχουμε τουλαχιστον 2 κορυφες με βαθμο 1.

Ιουνιος 2008

Ασκηση 3

Q(0) = { G: το G εχει οσεσδηποτε κορυφες και δεν εχει καμμια ακμη }

Q(i+1) = { G: το G προκυπτει απο καποιο G' στην Q(i) προσθετοντας στο G' 1 νεα κορυφη α και 1 ακμη που συνδεει την α με το G' }

α) ν.δ.ο καθε κλαση Q(n) περιεχει μονο ακυκλα γραφηματα

Αρχικη περιπτωση : Τα γραφηματα που ανηκουν στην Q(0) εχουν μονο κορυφες και 0 ακμες. Αρα ειναι ακυκλα!

Επαγωγικο βημα: Εστω G' το γραφημα που ανηκει στην υπο-κλαση Q(i) και υποθετω οτι ειναι ακυκλο με i ακμες. Αρα το γραφημα G που ανηκει στην υπο-κλαση Q(i+1) προκυπτει αν προσθεσω στο G' 1 κορυφη και 1 ακμη. Αφου το G' ηταν ακυκλο και προσθεσαμε μονο 1 κορυφη και μονο 1 ακμη, τοτε και το G ειναι ακυκλο. Αρα η Q(i+1) περιεχει τα γραφηματα με i+1 ακμες που ειναι ακυκλα!

Ασκηση 4

α) Εστω συνεκτικο γραφημα G με n κορυφες και ακριβως n+1 ακμες. ν.δ.ο το G εχει το πολυ 3 κυκλους.

Συνεκτικο γραφημα G με n κορυφες και n+1 ακμες. Ενα δεντρο επικαλυψης του G θα εχει n κορυφες και ακριβως n-1 ακμες. Αρα το συνολο των χορδων του θα ειναι: (συνολο ακμων που υπαρχουν στο G) - (συνολο ακμων που υπαρχουν στο T) = (n+1) - (n-1) = 2 χορδες.
Αρα εχουμε 2 στοιχειωδεις κυκλους. Εαν παρουμε το αθροισμα των 2 στοιχειωδων κυκλων μπορει να προκυψει αλλος 1 κυκλος. Αρα το G εχει το πολυ 3 κυκλους!

Σεπτεμβριος 2008

Ασκηση 6

G συνεκτικο γραφημα με n κορυφες, οπου $n \geq 4$
και ακριβως $n+2$ ακμες

α) v.δ.ο το G εχει 3 στοιχειωδεις κυκλους

Ενα δεντρο επικαλυψης T θα εχει n κορυφες και
$n-1$ ακμες! Αρα το G εχει $(n+2)-(n-1)=3$ χορδες.
Αρα το G θα εχει ακριβως 3 στοιχειωδεις κυκλους!

b) v.δ.ο το G εχει το πολυ 7 κυκλους

Εχουμε 3 κυκλους απο τους 3 στοιχειωδεις κυκλους.
Επισης ο συνδυασμος ανα δυο των 3 στοιχειωδων
κυκλων θα μπορουσε να δωσει αλλους 3 κυκλους
Τελος ο συνδυασμος και των 3 στοιχειωδων
κυκλων θα μπορουσε να δωσει ακομα 1
κυκλο. Αρα $3+3+1=7$ το πολυ κυκλους