ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

Ιούνιος 2008 **Σ. Κοσμαδάκης**

1 Έστω $R_ι$, $R_κ$ οι παρακάτω σχέσεις ανάμεσα στις κορυφές ενός γραφήματος G:

$R_ι$ = {(u, v) : είτε υπάρχει ένα *κλειστό ίχνος* του G που περιέχει τις κορυφές u, v, είτε u=v}

$R_κ$ = {(u, v) : είτε υπάρχει ένας *κύκλος* του G που περιέχει τις κορυφές u, v, είτε u=v}.

Ποιά από τις δύο σχέσεις δεν είναι πάντα (δηλ. για οποιοδήποτε G) σχέση ισοδυναμίας;
ΕΞΗΓΕΙΣΤΕ ΤΗΝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΑΣ! **½ Μονάδα**

2α Ποιές κορυφές ενός γραφήματος ονομάζονται κομβικά σημεία; * **½ Μονάδα**
β Αποδείξτε ότι: τα άκρα ενός μονοπατιού με μέγιστο μήκος δεν είναι κομβικά σημεία. **1 Μονάδα**

3 Για κάθε n≥0 ορίζουμε επαγωγικά την παρακάτω κλάση γραφημάτων Q(n):

Q(0) = {G : το G έχει οσεσδήποτε κορυφές και δεν έχει καμμία ακμή}
Q(i+1) = {G : το G προκύπτει από κάποιο G′ στην Q(i)
προσθέτοντας στο G′ μία νέα κορυφή a και μία ακμή που συνδέει την a με το G′}.

α Αποδείξτε ότι: κάθε κλάση Q(n) περιέχει μόνο άκυκλα γραφήματα. **1 Μονάδα**
β Ποιά γραφήματα περιέχονται στην κλάση Q(2); *ΕΞΗΓΕΙΣΤΕ ΤΗΝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΑΣ!* **½ Μονάδα**

4α Έστω ότι ένα συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές έχει ακριβώς n+1 ακμές.
Αποδείξτε ότι το G έχει το πολύ τρείς κύκλους. **1 Μονάδα**
β Βρείτε ένα γράφημα όπου υπάρχουν δύο κύκλοι c_1 και c_2 με κοινές ακμές, τέτοιοι ώστε
το υπογράφημα $c_1 \oplus c_2$ να μην είναι κύκλος. *ΕΞΗΓΕΙΣΤΕ ΤΗΝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΑΣ!* **½ Μονάδα**

5α Ποια γραφήματα ονομάζονται δισυνεκτικά ως προς κορυφές; *
Ποια γραφήματα ονομάζονται δισυνεκτικά ως προς ακμές; * **½ Μονάδα**
β Αποδείξτε ότι: ένα γράφημα που είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές
θα είναι και δισυνεκτικό ως προς ακμές. **½ Μονάδα**
γ Βρείτε ένα γράφημα που δεν είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές αλλά είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.
ΕΞΗΓΕΙΣΤΕ ΤΗΝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΑΣ! **½ Μονάδα**

6α Αναφέρετε τους ορισμούς των δισυνεκτικών συνιστωσών ενός γραφήματος,
ως προς κορυφές και ως προς ακμές. **½ Μονάδα**
β Αποδείξτε ότι: κάθε κορυφή ενός δέντρου T είναι δισυνεκτική συνιστώσα του T ως προς κορυφές
και ως προς ακμές. **1 Μονάδα**

7α Τα γραφήματα Θ_1 και Θ_2 είναι δισυνεκτικά ως προς ακμές και έχουν κοινές κορυφές.
Αποδείξτε ότι το γράφημα $\Theta_1 \cup \Theta_2$ είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές. **1 Μονάδα**
β Αποδείξτε ότι: δύο διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές (ενός γραφήματος)
δεν μπορούν να έχουν κοινή κορυφή.
Νύξη Χρησιμοποιείστε το **α** (μπορείτε να το θεωρήσετε δεδομένο). **½ Μονάδα**
γ Ισχύει το **β** για δύο διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές (ενός γραφήματος);
ΕΞΗΓΕΙΣΤΕ ΤΗΝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΑΣ! **½ Μονάδα**

* *Αναφέρετε είτε τον ορισμό είτε κάποια χαρακτηριστική ιδιότητα*

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

Σεπτέμβριος 2008 **Σ. Κοσμαδάκης**

1 Έστω S_κ η παρακάτω σχέση ανάμεσα στις *ακμές* ενός γραφήματος G:
$S_\kappa = \{(e, e') :$ είτε υπάρχει ένας κύκλος του G που περιέχει τις ακμές e, e′, είτε $e = e'\}$.
α Αποδείξτε ότι η σχέση S_κ είναι ανακλαστική και συμμετρική. **½ Μονάδα**
β Αποδείξτε ότι η σχέση S_κ είναι μεταβατική. **½ Μονάδα**

2 α Ποια υπογραφήματα ενός γραφήματος G ονομάζονται *συνεκτικές συνιστώσες του G*; * **½ Μονάδα**
β Έστω Η ένα υπογράφημα ενός γραφήματος G, όπου: δεν υπάρχει ακμή του G που να συνδέει κορυφή του Η με κορυφή του G που δεν ανήκει στο Η. Είναι σωστό ότι το υπογράφημα Η θα είναι συνεκτική συνιστώσα του G; *ΕΞΗΓΕΙΣΤΕ ΤΗΝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΑΣ!* **½ Μονάδα**

3 Έστω Μ ένας δεδομένος θετικός ακέραιος. Για κάθε $n \geq 0$ ορίζουμε επαγωγικά την παρακάτω κλάση γραφημάτων Q(n):
Q(0) = {G : το G έχει ακριβώς Μ κορυφές και δεν έχει καμμία ακμή}
Q(i+1) = {G : το G προκύπτει από κάποιο G′ στην Q(i)
προσθέτοντας στο G′ μία νέα κορυφή a και μία ακμή που συνδέει την a με το G′}.
α Αποδείξτε ότι: για κάθε $n \geq 0$, κάθε γράφημα στην κλάση Q(n) έχει ακριβώς M+n κορυφές και ακριβώς n ακμές. **½ Μονάδα**
β Αποδείξτε ότι: για κάθε $n \geq 0$, κάθε γράφημα στην κλάση Q(n) έχει ακριβώς Μ συνεκτικές συνιστώσες. **½ Μονάδα**

4 α Ποιές κορυφές ενός γραφήματος ονομάζονται *κομβικά σημεία*; * **½ Μονάδα**
β Έστω u μία κορυφή ενός γραφήματος G που ανήκει σε κάποιο κύκλο G. Είναι σωστό ότι η κορυφή u δεν μπορεί να είναι κομβικό σημείο του G; *ΕΞΗΓΕΙΣΤΕ ΤΗΝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΑΣ!* **½ Μονάδα**

5 α Έστω Τ ένα δέντρο και u, v δύο κορυφές του Τ. Αποδείξτε ότι υπάρχει μόνο ένα μονοπάτι με άκρα τις u, v. **1 Μονάδα**
β Έστω G ένα γράφημα με n κορυφές, όπου $n \geq 1$, και ακριβώς n−1 ακμές.
Είναι σωστό ότι το G θα είναι άκυκλο; *ΕΞΗΓΕΙΣΤΕ ΤΗΝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΑΣ!* **½ Μονάδα**

6 Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές, όπου $n \geq 4$, και ακριβώς n+2 ακμές.
α Αποδείξτε ότι το G έχει ακριβώς τρείς στοιχειώδεις κύκλους (ως προς ένα τυχαίο δέντρο επικάλυψης Τ). **½ Μονάδα**
β Αποδείξτε ότι το G έχει το πολύ επτά κύκλους. **½ Μονάδα**

7 α Ποια γραφήματα ονομάζονται *δισυνεκτικά ως προς κορυφές*; * **½ Μονάδα**
β Αποδείξτε ότι: ένα γράφημα που είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές δεν έχει κομβικά σημεία. **½ Μονάδα**

8 α Αποδείξτε ότι: ένα δέντρο με τουλάχιστον δύο κορυφές δεν είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές. **½ Μονάδα**
β Ποια υπογραφήματα ενός γραφήματος G ονομάζονται *δισυνεκτικές συνιστώσες του G ως προς ακμές*; * **½ Μονάδα**
γ Αποδείξτε ότι κάθε κορυφή ενός δέντρου είναι δισυνεκτική συνιστώσα του ως προς ακμές. **½ Μονάδα**

9 Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα με ακριβώς δύο γέφυρες.
α Έστω Ν το γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών του G ως προς ακμές.
Αποδείξτε ότι: το Ν έχει ακριβώς τρείς κορυφές και ακριβώς δύο ακμές. **½ Μονάδα**
β Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο κορυφές x, y του G τέτοιες ώστε: οποιεσδήποτε δύο διαδρομές με άκρα τις x, y θα έχουν τουλάχιστον δύο κοινές ακμές. **½ Μονάδα**

* *Αναφέρετε είτε τον ορισμό είτε κάποια χαρακτηριστική ιδιότητα.*

Όταν αναφέρονται γνωστές σχέσεις ανάμεσα στις κορυφές ή ακμές ενός γραφήματος, πρέπει να δίνεται ο ορισμός τους (όχι μόνο το σύμβολό τους).

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
Ιούνιος 2009

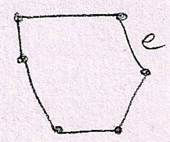
1. ~~1~~ Η σχέση R ανάμεσα στις κορυφές και τις ακμές ενός γραφήματος G ορίζεται ως εξής:
ισχύει x R y είτε αν *η x είναι κορυφή, η y είναι ακμή και η x είναι άκρο της y,*
ή αν *η x είναι ακμή, η y είναι κορυφή και η x έχει σαν άκρο την y.*
Αποδείξτε ότι η σχέση R είναι συμμετρική, για οποιοδήποτε γράφημα G. **½ Μονά**
Αποδείξτε ότι η σχέση R δεν είναι μεταβατική, για οποιοδήποτε γράφημα G
που έχει τουλάχιστον μία ακμή. **½ Μονά**

ή ~~2~~ Ποια υπογραφήματα ενός γραφήματος G ονομάζονται συνεκτικές συνιστώσες του G; **½ Μονά**

3 Έστω e μία από τις ακμές ενός κλειστού ίχνους. Αποδείξτε ότι η ακμή e δεν είναι γέφυρα. **½ Μονά**

κλειστό ίχνος χωρίς επανάληψη κορυφών   e ∈ σε ένα κύκλο

1. **4** ~~α~~ Ποιές κορυφές ενός γραφήματος ονομάζονται κομβικά σημεία; **½ Μονάδ**
~~β~~ Ποιές κορυφές ενός δέντρου είναι κομβικά σημεία του; **½ Μονάδ**



5 ~~α~~ Αναφέρετε τον επαγωγικό ορισμό των δέντρων. T(i) **½ Μονάδα**
~~β~~ Χρησιμοποιείστε τον επαγωγικό ορισμό των δέντρων για να αποδείξετε ότι:
κάθε δέντρο με n κορυφές έχει ακριβώς n−1 ακμές. **½ Μονάδα**

~~6~~ Αποδείξτε ότι: αν ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές έχει ακριβώς n−1 ακμές, θα είναι δέντρο.
1 Μονάδα

7 ~~α~~ Τι ονομάζουμε δέντρο επικάλυψης ενός γραφήματος; Τι ονομάζουμε στοιχειώδη κύκλο ως προς ένα δεδομένο δέντρο επικάλυψης; **½ Μονάδα**
β Έστω C, C′ δύο κύκλοι ενός γραφήματος G χωρίς κοινές ακμές μεταξύ τους και έστω F το υπογράφημα που προκύπτει με ένωση των κορυφών και των ακμών των C, C′.
Αποδείξτε ότι: υπάρχουν στοιχειώδεις κύκλοι $c_1,\ldots, c_k$ (ως προς ένα τυχαίο δέντρο επικάλυψης), για τους οποίους $\oplus(c_1,\ldots, c_k) = F$. **1 Μονάδα**

8 ~~α~~ Τι ονομάζουμε διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές; Διπροσβασιμότητα ως προς ακμές; **½ Μονάδα**
β Αποδείξτε ότι: αν ισχύει η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές θα ισχύει και η διπροσβασιμότητα ως προς ακμές, αλλά όχι και αντίστροφα. **½ Μονάδα**

~~9~~ Έστω H ένα συνεκτικό υπογράφημα ενός γραφήματος G, όπου κανείς κύκλος του G δεν συνδέει κορυφή του H με κορυφή του G που δεν ανήκει στο H.
Είναι σωστό ότι το υπογράφημα H θα είναι δισυνεκτική συνιστώσα του G ως προς κορυφές; **½ Μονάδα**

10 Έστω Θ ένα συνεκτικό υπογράφημα ενός γραφήματος G. Το Θ δεν έχει γέφυρες και επίσης κανένα κλειστό ίχνος του G δεν συνδέει κορυφή του Θ με κορυφή του G που δεν ανήκει στο Θ.
Αποδείξτε ότι το Θ είναι δισυνεκτική συνιστώσα του G ως προς ακμές. **1 Μονάδα**

11 Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα με ακριβώς τρείς γέφυρες. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο κορυφές x, y του G τέτοιες ώστε: οποιεσδήποτε δύο διαδρομές με άκρα τις x, y θα έχουν τουλάχιστον δύο κοινές ακμές.
Νύξη Εξετάστε τη μορφή του γραφήματος των δισυνεκτικών συνιστωσών του G ως προς ακμές.
1 Μονάδα

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
Σεπτέμβριος 2009

1 Η σχέση R ανάμεσα στις κορυφές ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G ορίζεται ως εξής:
ισχύει x R y αν υπάρχει στο G ένα μονοπάτι μήκους 2 με άκρα τις x, y.
α Αποδείξτε ότι η παραπάνω σχέση είναι συμμετρική, για οποιοδήποτε γράφημα. **½ Μον**
β Βρείτε ένα γράφημα όπου η σχέση δεν είναι μεταβατική. **½ Μον**

2 **α** Ποια μονοπάτια ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος ονομάζονται μη-επεκτάσιμα; **½ Μον**
β Αποδείξτε ότι: σε ένα άκυκλο μη-κατευθυνόμενο γράφημα, τα άκρα ενός μη-επεκτάσιμου μονοπατιού έχουν βαθμό 1. **½ Μον**

3 Έστω Ι ένα δεδομένο κλειστό ίχνος. Περιγράψτε πως μπορεί να βρεθεί ένα υποσύνολο των κορυφών και των ακμών του Ι που να είναι <u>κύκλος</u>. **½ Μονά**

4 **α** Ποιές ακμές ενός γραφήματος ονομάζονται γέφυρες; **½ Μονά**
β Ποιές ακμές ενός δέντρου είναι γέφυρές του; **½ Μονά**

5 **α** Αναφέρετε τον επαγωγικό ορισμό των συνεκτικών γραφημάτων. **½ Μονά**
β Χρησιμοποιείστε τον επαγωγικό ορισμό των συνεκτικών γραφημάτων για να αποδείξετε ότι: κάθε συνεκτικό γράφημα με n κορυφές έχει τουλάχιστον n−1 ακμές. **½ Μονά**

6 Αποδείξτε ότι: αν ένα (όχι απαραίτητα συνεκτικό) μη-κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές δεν έχει κύκλο, θα έχει το πολύ n−1 ακμές. **1 Μονάδ**

7 **α** Τι ονομάζουμε δέντρο επικάλυψης ενός γραφήματος; Τι ονομάζουμε χορδή ως προς ένα δεδομένο δέντρο επικάλυψης; **½ Μονάδ**
β Έστω Τ ένα δέντρο επικάλυψης, σε ένα γράφημα που έχει <u>μόνο ένα</u> κύκλο.
Αποδείξτε ότι: ο κύκλος θα είναι στοιχειώδης ως προς το Τ. **½ Μονάδ**

8 Τι ονομάζουμε διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές; Διπροσβασιμότητα ως προς ακμές; **½ Μονάδ**

9 Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα το οποίο έχει <u>μόνο μία</u> δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές.
α Πόσες γέφυρες μπορεί να έχει το G; **½ Μονάδα**
β Είναι δυνατό να υπάρχουν κομβικά σημεία στο G; **½ Μονάδα**

10 Έστω Θ ένα συνεκτικό υπογράφημα ενός γραφήματος G. Το Θ δεν έχει κομβικά σημεία και επίσης κανένας κύκλος του G δεν συνδέει κορυφή του Θ με κορυφή του G που δεν ανήκει στο Θ. Αποδείξτε ότι: το Θ είναι δισυνεκτική συνιστώσα του G ως προς κορυφές. **1 Μονάδα**

11 Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα με τουλάχιστον δύο γέφυρες. Αποδείξτε ότι: υπάρχουν δύο κορυφές x, y ώστε οποιεσδήποτε δύο διαδρομές με άκρα τις x, y να έχουν τουλάχιστον δύο κοινές ακμές.
Νύξη Εξετάστε το γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών του G ως προς ακμές. **1 Μονάδα**