σελ. ①

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

$\binom{-1}{k} = (-1)^k$ ①

$(1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$

$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$

Κεφ 1: ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κανόνας του αθροίσματος: $m+n$ τρόποι κατά τους οποίους ένα από τα δύο γεγονότα...

Κανόνας του γινομένου: $m \cdot n$ τρόποι κατά τους οποίους και τα δύο γεγονότα

Συνδυασμός αντικειμένων: Από n αντικείμενα επιλέγουμε τα r χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη την σειρά με την οποία επιλέγονται τα r αντικείμενα. $C(n,r)$.

Διάταξη αντικειμένων: Από n αντικείμενα επιλέγουμε τα r με κάποια συγκεκριμένη σειρά. $P(n,r)$.

1600

$$P(n,r) = n(n-1)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

ΔΙΩΝΥΜΙΚΟΙ ΣΥΝΤ/ΣΤΕΣ:

Οι αριθμοί $C(n,r)$ καλούνται διωνυμικοί συντελεστές.

$(a+x)^v = a^v + \binom{v}{1}a^{v-1}x^1 + \binom{v}{2}a^{v-2}x^2 + \dots + \binom{v}{k}a^{v-k}x^k + \dots$

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)\, x^r \qquad (s+t)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)\, s^r t^{n-r}$$

πλήθος των όρων του αναπτύγματος: $v+1$, Γενικός όρος: $T_{k+1} = \binom{v}{k} a^{v-k} x^k$.

Ιδιότητες: $C(n,r) = C(n,n-r)$, $C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1)$ απόδειξη: ✓

$C(n,r) = \frac{n}{r} C(n-1,r-1)$, $\binom{r+n+1}{n} = \sum_{k=0}^{n} C(r+k,k)$ απόδειξη: ✓

$\sum_{k=m}^{n} C(k,m) = C(n+1,m+1)$, απόδειξη: ✓

$(1+x)^v = 1 + vx + \frac{v(v-1)x^2}{2!} + \frac{v(v-1)(v-2)x^3}{3!} + \dots$, όπου $x \in (-1,1)$.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} = 1$ τύπος του Stirling.

$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$

$\binom{n}{r} = (-1)^r \binom{r-n-1}{r}$, $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$ ✓ απόδειξη!

$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$ ✓ απόδειξη!, $\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$ απόδειξη!

σελ. 2η

ΟΜΑΔΕΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ:

$$\frac{n!}{q_1!\,q_2!\ldots q_t!}$$

n αντικ. σε t ομάδες (μη διακεκριμένες ... ομάδες ...

τρόποι για να διαταχτούν.

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ:

απόδειξη:

Υπάρχουν n^r διατάξεις r αντικ. από n αντικ. όταν επιτρέπεται η επανάληψη

Ο αριθμός των συνδυασμών r αντικ. από n αντικ. με επανάληψη είναι $C(n+r-1, r)$

ΑΡΙΘΜΟΣ ΥΠΟΣΥΝΟΛΩΝ:

→ συνόλων με n στοιχεία: $2^n - 1 = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) - 1$, $(q_1+1)(q_2+1)(q_3+1)\ldots(q_t+1)$

(χωρίς επανάληψη και χωρίς να "μετράει" η διάταξη.) ... 1 ή περισσότερ... αντικείμεν... ... μη ...

ΔΙΑΝΟΜΕΣ ΑΝΤΙΚ-ΝΩΝ ΣΕ ΥΠΟΔΟΧΕΣ:

Έχουμε r διακεκριμένα αντικ. και n διακεκριμένες υποδοχές.

Ο # των τρόπων να κατανείμουμε τα αντικ. στις υποδοχές είναι n^r.

(Δεν μετράει η σειρά με την οποία τα αντικ. εμφανίζονται στην κάθε υποδοχή

→ Όταν μετράει η σειρά τοποθέτησης των αντικ. : $\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$

→ Όταν τα r αντικ. είναι μη διακεκριμένα : $\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!} = \binom{n+r-1}{r}$

απόδειξη: $\binom{n+r-1}{r}$: βιβλίο.

1

Κεφ.2 : ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ: $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Ο μετασχηματισμός z, όταν η μεταβλητή z περιορίζεται σε πραγματικές τιμές, λέγεται γεννήτρια συνάρτηση (ή γεωμετρικός μετασχηματισμός).
Μπορούμε να θεωρούμε τους μετασχηματισμούς z σαν πεπερασμένα αθροίσματα (δηλ. μπορούμε να τους παραγωγίσουμε, ολοκληρώσουμε ...).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΓΕΝΝΗΤΡΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ:

Για $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, \dots$ $a_r \longleftrightarrow \boxed{A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r}$ για $r = 0,1,2,\dots$ και

① Γραμμική ιδιότητα:

k, l σταθερές και $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$, $B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r x^r$

τότε: η γεν. συνάρτηση της $\delta_r = k a_r + l \beta_r$ είναι η $\boxed{\Delta(x) = kA(x) + l B(x)}$

② Ιδιότητα της ολίσθησης:

$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ για ... τότε η γεν. συνάρτηση της ακολουθίας: $\beta_r = 0$ για $r = 0,1,\dots,n-1$, $\beta_r = a_{r-n}$ για $r = n, n+1, \dots$

είναι η: $\boxed{x^n A(x)}$ δεξιά ολίσθηση

Η γεν. συνάρτηση της $\delta_r = a_{r+n}$, $r = 0,1,2,\dots$ είναι η $\boxed{\left[A(x) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r\right] / x^n}$.

αριστερή ολίσθηση

③ Ιδιότητα μερικών αθροισμάτων:

της a_r είναι $A(x)$ η γεν. συνάρτηση. Εάν $\beta_k = \sum_{r=0}^{k} a_r$, $k = 0,1,2,\dots$ τότε η γεν. συν. της είναι η: $\boxed{B(x) = \frac{A(x)}{1-x}}$

④ Ιδιότητα συμπληρωματικών μερικών αθροισμάτων:

Αν $A(1) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r$, $\beta_k = \sum_{r=k}^{\infty} a_r$, $k = 0,1,2,\dots$ τότε η γεν. συνάρτηση της ακολουθίας β_k είναι: $\boxed{B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}}$

Ιδιότητα της κλίμακας:

Ακολουθία $\beta_r = r a_r$, $r = 0,1,2,\dots$ έχει γεν. συν. $\boxed{B(x) = x A'(x)}$.

—ΙΙ— $\delta_r = \frac{a_r}{r+1}$, $r = 0,1,2,\dots$ έχει γεν. συν. $\boxed{\Delta(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(t)\,dt}$

Ιδιότητα της συνέλιξης:

Η ακολουθία $\delta_k = \sum_{r=0}^{k} a_r \beta_{k-r}$, $k = 0,1,2,\dots$ έχει γεν. συν. την: $\boxed{\Delta(x) = A(x) \cdot B(x)}$

$\alpha_1 = \binom{2i}{i}$

$A(x) = (1-4x)^{-1/2}$

$$2^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} = \binom{r}{0} + \binom{r}{1} + \binom{r}{2} + \dots$$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^t = \frac{1-x^{t+1}}{1-x}$$ → επόμενο φορά στην ακολουθία.

Ακολουθία a_r, $r = 0,1,2,\dots$	Γενν. συνάρτηση $A(x)$
① $a_r = 1^r$	$\frac{1}{1-1x}$
② $a_r = (r+1) \cdot 1^r$	$\frac{1}{(1-1x)^2}$
3. $a_0 = 0$, $a_r = \frac{1}{r}$, $r \geq 1$	$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$
4. $\alpha_0 = 0$, $\alpha_r = \frac{1}{r}$, r ζυγός; $a_r = \frac{1}{r}$, $r > 0$ και μονός	$\ln(1+x)$
⑤ $a_r = \binom{n}{r} 1^r$, $n \in R$	$(1+1x)^n$
⑥ $a_r = \frac{1^r}{r!}$	e^{1x}
7. $a_r = \frac{n^r}{r!}$, $n \in R$	e^{nx}
8. $a_r - a_{r-1}$	$(1-x) \cdot A(x)$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$

$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$\ln(1+x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$

$\frac{a_1(1-\lambda^v)}{1-\lambda}$, $\frac{a_1}{1-\lambda}$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

για ζυγούς αριθμούς: $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

για μονούς αριθμούς: $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

ΑΠΑΡΙΘΜΗΤΕΣ ΚΑΙ ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

↳ όταν μας ενδιαφέρει η σειρά των αντικειμένων / και τα διακεκριμένα

Εκθετική γενν. συνάρτηση: $\sum_{k=0}^{\infty} a_r \frac{x^k}{k!}$ (μεταθέσεις διατάξεις)

~~Ο συντελεστής του~~ $\cancel{\frac{x^k}{k!}}$

Αριθμοί Sterling 2ου είδους: $\boxed{S(r,n) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^r}$

Ο αριθμός των τρόπων να τοποθετήσουμε r διακεκριμένα αντικείμενα μέσα σε n μη διακεκριμένες υποδοχές, χωρίς να μένει υποδοχή κενή = $S(r,n)$.

Αν επιτρέψουμε να υπάρχουν άδειες υποδοχές είναι:

$S(r,1) + S(r,2) + \dots + S(r,n)$ για $r \geq n$.

$S(r,1) + S(r,2) + \dots + S(r,r)$ για $r \leq n$.

ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΙ ΑΚΕΡΑΙΩΝ. θετικός, μη ακεραίων

τρόπων που ένας ακέραιος αριθμός n μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα θετικών ακεραίων αριθμών χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά σε αυτά τα αθροίσματα.

$\Delta(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^i)}$

Διαμερισμοί ενός ακεραίου n, $\delta(n)$ είναι ο αριθμός αυτών των αθροισμάτων.

ΚΕΦ. 3: ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΑΔΡΟΜΗΣ.

Η λύση σχέσεων αναδρομής, έπεται στην εύρεση κλειστού τύπου για το γενικό ο της ακολουθίας που ορίζεται με την σχέση αναδρομής.

ΑΜΜΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΑΔΡΟΜΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ:

(1) $c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r} = f(n)$: r-τάξης ή r-βαθμού

ΥΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΧΑΡ. ΕΞΙΣΩΣΗΣ:

Γεν. λύση μη Ομογενούς = Γεν. Λύση Ομογενούς + Ειδική Λύση μη Ομογενούς.

$$a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

Γεν. λύση ομογενούς:

Έστω $a_n^{(h)} = Ax^n$.

$\therefore \overset{(1)}{\Rightarrow} c_0Ax^n + c_1Ax^{n-1} + c_2Ax^{n-2} + \dots + c_rAx^{n-r} = 0$

$$Ax^{n-r}\underbrace{(c_0x^r + c_1x^{r-1} + \dots + c_{r-1}x + c_r)}_{\text{χαρακτηριστική εξίσωση}} = 0.$$

→ Έστω η Χ.Ε. έχει r διαφορετικές πραγματικές ρίζες $(x_1, x_2, \dots x_r)$.

$\therefore a_n^{(h)} = A_1x_1^n + A_2x_2^n + \dots + A_rx_r^n$

Τα $A_1, A_2, \dots, A_r$ υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

→ Αν Μερικές ρίζες της Χ.Ε. είναι μιγαδικοί αριθμοί $(a \pm bi)$.

$\therefore a_n^{(h)} = A_1(a+bi)^n + A_2(a-bi)^n$

$\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ $\quad = A_1(\rho e^{i\theta})^n + A_2(\rho e^{-i\theta})^n = \rho^n(A_1e^{i\theta n} + A_2e^{-i\theta n}$

$\Rightarrow a+bi=\rho e^{i\theta}$ $\quad = \rho^n A_1(\cos n\theta + i\sin n\theta) + \rho^n A_2(\cos n\theta - i\sin n\theta)$.

$\theta = \arctan\frac{b}{a}$.

→ Αν Η Χ.Ε. έχει μία ρίζα πολλαπλότητας κ. (x).

$\therefore a_n^{(h)} = (A_1n^{k-1} + A_2n^{k-2} + \dots + A_k)\,x^n$.

Εύρεση μερικής λύσης μη ομογενούς:

Με βάση την μορφή της οδηγού συνάρτησης f(n) καθορίζεται η μορφή της ειδικής λύσης.

f(n)	Ειδ. Λύση
κ σταθερά	c σταθερά
πολυώνυμο	πολυώνυμο πλήρες ίδιου βαθμού
$k\lambda^n$ κ,λ σταθερές	$c\lambda^n$: c, λ σταθερές

ΛΥΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΓΕΝΝΗΤΡΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ:

- Πολ/ζω με x^n και αθροίζω μέχρι το ∞ (προσοχή στην αρχή του αθροίσματος).
- Βρίσκω τη γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$.
- Προσδιορίζω την ακολουθία.

→ Παραδείγματα βιβλίου.

ΚΕΦ. 4 : ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ POLYA ①

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ BURNSIDE:

Δεδομένου ενός συνόλου και μιας σχέσης ισοδυναμίας να μετρηθεί ο αριθμός των κλάσεων ισοδυναμίας.

Μια διμελής σχέση πάνω σε ένα σύνολο S είναι μια διμελής σχέση μεταξύ του S και του εαυτού του.

Σχέση ισοδυναμίας αν:
- ανακλαστική (1) Κάθε στοιχείο του S σχετίζεται με τον εαυτό του $\alpha \equiv \alpha$.
- αντ. σχετική (2) Αν $\alpha \equiv b \Rightarrow b \equiv \alpha$.
- μεταβατική (3) Αν $\alpha \equiv b$ και $b \equiv c \Rightarrow \alpha \equiv c$.

Δεδομένης μιας σχέσης ισοδυναμίας σε ένα σύνολο S, μπορούμε να χωρίσουμε τα στοιχεία του S σε τάξεις (κλάσεις), έτσι ώστε 2 στοιχεία θα είναι στην ίδια κλάση αν σχετίζονται. Αυτές οι τάξεις (κλάσεις) λέγονται κλάσεις ισοδυναμίας.

Ένα σύνολο S μαζί με μια διμελή πράξη (π.χ. $*$) πάνω στο σύνολο S λέμε ότι αποτελεί ομάδα αν:
$G=(S,*)$
(1) $\alpha*(b*c) = (\alpha*b)*c$: προσεταιριστική $\alpha, b, c \in$ στο S.
(2) $\forall \alpha \in S\ \exists e \in S: \alpha . e = e . \alpha = \alpha$: ουδέτερο στοιχείο
(3) $\forall \alpha \in S\ \exists\ \alpha^{-1} \in S : \alpha * \alpha^{-1} = \alpha^{-1} * \alpha = e$.

Αντιμεταθέσεις συνόλων:

Η σύνθεση (γινόμενο) 2 αντιμεταθέσεων του συνόλου S: (π_1, π_2) συμβολίζεται με $\pi_1 . \pi_2$ και προκύπτει από τις επιλυχημένες αντιμεταθέσεις του S πρώτα σύμφωνα με το π_2 και μετά σύμφωνα με το π_1. π.χ.: $\pi_1 = \begin{pmatrix} \alpha & b & c & d \\ \alpha & d & b & c \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} \alpha & b & c & d \\ b & \alpha & c & d \end{pmatrix}$ τότε $\pi_1 \pi_2 = \begin{pmatrix} \alpha & b & c & d \\ d & \alpha & b & c \end{pmatrix}$

Θεώρημα: Οποιαδήποτε αντιμετάθεση του συνόλου $\{1, \ldots, n\}$ μπορεί να γραφεί κατά ένα μοναδικό τρόπο ως γινόμενο (σύνθεση) κυκλικών αντιμεταθέσεων.

Έστω $G = \{\pi_1, \pi_2, \ldots\}$ ένα σύνολο αντιμεταθέσεων του συνόλου S. Τότε το G λέγεται ομάδα αντιμεταθέσεων του S αν το G μαζί με την πράξη της σύνθεσης αντιμεταθέσεων αποτελούν ομάδα.

Θεώρημα Burnside: Ο αριθμός των κλάσεων ισοδυναμίας, στις οποίες χωρίζεται ένα σύνολο S από την σχέση ισοδυναμίας που αποτελείται από ~~αποτελούμενη~~ μια ομάδα αντιμεταθέσεων G των S δίνεται από:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|I(\pi)|$$

όπου $|I(\pi)|$ είναι ο αριθμός των στοιχείων που παραμένουν τα ίδια μετά την αντιμετ. π

Απόδειξη: $|J(f)|$ = αριθμός αντιμεταθέσεων, στις οποίες το στοιχείο f παραμένει το ίδιο.

$\therefore \sum_{\pi\in G}|I(\pi)| = \sum_{f\in S}|J(f)|$ διότι και τα δύο μετρούν τον συνολικό αριθμό των στοιχ. που μένουν αναλλοίωτα σε ~~όλες~~ τις αντιμεταθέσεις της G

$$\sum_{f\in S}|J(f)| = \sum_{[f]\in S/G}\ \sum_{g\in[f]}|J(g)| \quad ①$$

Το S χωρίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας. Για κάθε κλάση ισοδυναμίας του S υπολογίζει τον ~~...~~ αριθμό ~~...~~ ~~στις οποίες το g παραμένει αναλλοίωτο~~

$[f]$: κλάση ισοδυναμίας ~~του~~ f τους S ως προς $=_G$.

Ισχυρίζομαι ότι $|J(g)| = |E(f,g)|$ (όπου $E(f,g) = \{\pi\in G / \pi(f)=g\}$).

όσες είναι οι αντιμεταθέσεις που αφήνουν αναλλοίωτο το g είναι και οι αντιμεταθέσεις που το ~~μετατρέπουν~~ στέλνουν στο g

(απόδειξη του: Έστω a και b στοιχεία της ίδιας κλάσης ισοδυναμίας. Υπάρχει τουλάχιστον 1 αντιμετάθεση ~~που~~ (έστω πx) που στέλνει το a στο b. Έστω $\{\pi_1,\pi_2,\pi_3,\dots\}$ οι αντιμεταθέσεις στις οποίες το a μένει αναλλοίωτο.*

$$\therefore ① = \sum_{[f]\in S/G}\ \sum_{g\in[f]}\underbrace{|E(f,g)|}_{|G|} = \sum_{[f]\in S/G}|G| = |S/G|\cdot|G|$$

$|S/G|$: αριθμός των κλάσεων ισοδυναμίας που χωρίζεται το S.

$$\therefore S/_G = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in S}|J(f)| = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|I(\pi)|.$$

* Τότε οι αντιμεταθέσεις $\{\pi x\pi_1, \pi x\pi_2, \pi x\pi_3,\dots\}$ στέλνουν το a στο b.
Από ότι συμπεραίνουμε ο αριθμός των αντιμεταθέσεων είναι ο ίδιος.

②.

ΘΕΩΡΗΜΑ POLYA:

$$\boxed{\sum_{f\in X/G} m_f = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\delta_\pi\left(x_1+\dots+x_r, \dots, x_1^{|V|}+\dots+x_r^{|V|}\right)}$$

Για υπολογισμό των δυνατών χρωματισμών ενός συνόλου V, θέτουμε $x_1=x_2=\dots=x_r=1$.

$$\therefore \boxed{|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\delta_\pi(|V|,\dots,|V|)}$$

όπου $\delta_\pi(y_1,\dots,y_{|V|}) = y_1^{b_1}\dots y_{|V|}^{b_{|V|}}$ δείκτρια συνάρτηση για τη συμμετρία π

Απόδειξη:

Έστω το σύνολο C των χρωμάτων είναι ένα σύνολο $\{x_1,\dots,x_r\}$ μεταβλητών.

Δεδομένου ενός χρωματισμού $f: V\to C$ ορίζω το μονώνυμο $\underbrace{x_{f(v_1)}x_{f(v_2)}\dots x_{f(v_n)}}_{m_f}$

a_m → ο αριθμός των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας (ως προς G) χρωματισμών που έχουν το ίδιο μονώνυμο $m\in M$

$(a_m = |\{f\in X/G : m_f = m\}|)$ → σύνολο όλων των μονωνύμων με μεταβλητές $x_1,\dots,x_r$.

$$\therefore \sum_{f\in X/G} m_f = \sum_{m\in M} a_m m \quad ①$$

Θέτουμε $I_m(\pi) = \{f\in X/G : m_f = m \text{ και } \pi(f)=f\}$.

Σε με βάση τον τύπο του Burnside: $a_m = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|I_m(\pi)|$ ②

$$①,② \Rightarrow \sum_{f\in X/G} m_f = \sum_{m\in M}\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|I_m(\pi)|\cdot m = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\sum_{m\in M}|I_m(\pi)|\,m \quad ③$$

→ χρωματισμοί που μένουν αναλλοίωτοι ως προς συμμετρία π.

Από Burnside: $\sum_{m\in M}|I_m(\pi)|\,m = \sum_{f\in I(\pi)} m_f$

$$③ \Rightarrow \sum_{f\in X/G} m_f = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\sum_{f\in I(\pi)} m_f \quad ④$$

Για $\sum_{f\in I(\pi)} m_f$

Έστω μια αντιμετάθεση π με b_i κύκλους μήκους i ($1\le i\le n$)

Αφού $f\in I(\pi)$ (→ $\pi(f)=f$), τότε ο χρωματισμός f παίρνει την ίδια τιμή σε όλα τα στοιχεία ενός κύκλου

$$\therefore \sum m_f = (x_1+\dots+x_r)^{b_1}(x_1^2+\dots+x_r^2)^{b_2}\dots(x_1^n+x_2^n+\dots+x_r^n)^{b_n}$$

Ορίζουμε την δείκτρια συνάρτηση $\delta_\pi(y_1, \ldots, y_n) = y_1^{b_1} \cdots y_n^{b_n}$.

$$\therefore (4) \Rightarrow \sum_{f \in X/G} m_f = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \delta_\pi \left(x_1 + \ldots + x_r, \ldots, x_1^{v} + \ldots + x_r^{v} \right)$$

//

1.

κεφ. 5: $\boxed{\text{ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΣ - ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΣ}}$

Έστω ένα σύνολο S με πληθικό αριθμό $|S| = N$ και τις συνθήκες C_i $1 \le i$ οι οποίες ικανοποιούνται από μερικά στοιχεία του S.

Ο αριθμός των στοιχείων του S, τα οποία δεν ικανοποιούν καμία από τις συνθήκες $1 \le i \le t$ είναι $\bar{N} = N(\bar{C_1}\bar{C_2}\bar{C_3} \dots \bar{C_t})$

ή

$$\boxed{\bar{N} = N - \underbrace{\sum_{1 \le i \le t} N(c_i)}_{\binom{t}{1} \text{ όροι}} + \underbrace{\sum_{1 \le i < k \le t} N(c_i c_j)}_{\binom{t}{2} \text{ όροι}} - \underbrace{\sum_{1 \le i < j < k \le t} N(c_i c_j c_k)}_{\binom{t}{3} \text{ όροι}} + \dots + \underbrace{(-1)^t N(C_1C_2C_3 \dots}_{\binom{t}{t} \text{ όροι}}}$$

απόδειξη: με επαγωγή στο t.

ή συνδυαστικά:

Θα δείξουμε ότι $\forall x \in S$, το x συμμετέχει το ίδιο (0 ή 1) σε κάθε μέρος της εξίσωσης.

1. Εάν το x δεν ικανοποιεί καμία από τις συνθήκες, τότε το x μετριέται μία φορά στο $\bar{N}$ και μία φορά στο N, ∴ Άρα συμμετέχει μία φορά σε κάθε μέρος της εξίσωσης.
2. Εάν το x ικανοποιεί r από τις t συνθήκες. $(1 \le r \le t.)$

Τότε το x δεν συμμετέχει στο $\bar{N}$.

Στο δεξιό μέρος έχω: Μία φορά στο N

r φορές στο $\sum N(c_i)$ (μία φορά για κάθε μία από τις r συνθήκες)

$\binom{r}{2}$ φορές στο $\sum N(c_i c_j)$

$\binom{r}{3}$ φορές στο $\sum N(c_i c_j c_k)$

$+ \quad \binom{r}{r} = 1$ φορές στο $\sum N(C_{i_1} C_{i_2} \dots C_{i_r})$

$$1 - r + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \dots + (-1)^r \binom{r}{r} = [1 + (-1)]^r = 0 \text{ φορές.}$$

∴ Τα δύο μέρη της σχέσης μετράν τα ίδια στοιχεία του S και άρα η ισότητα ικανοποιείται.

$$\boxed{N(C_1 \text{ ή } C_2 \text{ ή } C_3 \text{ ή} \dots \text{ή } C_t) = N - \bar{N}}$$

Αριθμός στοιχείων του S, τα οποία ικανοποιούν τουλάχιστον μία από τις συνθήκες C_i. $(1 \le i \le t)$

Να υπολογιστεί το:

$$\sum_{i=1}^{t} \binom{n-i}{j}$$

Θέτω $a_{ij} = \binom{n-i}{j}$.

Για κάθε σταθερή τιμή του i, θεωρούμε το a_{ij} σαν ακολουθία με δείκτη το j. Η γεν. συνάρτηση είναι: $A_i(x) = (1+x)^{n-i}$

Εμάς μας ενδιαφέρει η ακολουθία $\beta_j = \sum_{i=1}^{t} a_{ij}$

$$\beta(x) = \sum_{i=1}^{t} A_i(x) = \sum_{i=1}^{t} (1+x)^{n-i} = (1+x)^n \sum_{i=1}^{t} \left(\frac{1}{1+x}\right)^i$$

↳ άθροισμα Γ.Π. ίσο με $\dfrac{1-(1+x)^{-t}}{x}$.

$$\therefore B(x) = \frac{(1+x)^n}{x} - \frac{(1+x)^{n-t}}{x}$$

$$\Rightarrow B(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x} - \frac{(1+x)^{n-t} - 1}{x}$$

$$\therefore \beta_j = \binom{n}{j+1} - \binom{n-t}{j+1}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{t} \binom{n-i}{j} = \binom{n}{j+1} - \binom{n-t}{j+1}.$$

Παραδείγματα βιβλίου

→ Μας δίνεται η γεν. συνάρτηση και ζητείται η ακολουθία;
- κάνω ανάλυση κλάσματος
- ~~[illegible]~~ και κάνω πράξεις. χρησιμοποιώ Newton

→ Μας δίνεται η ακολουθία και ζητείται η γεν. συνάρτηση;
- Αθροίζω στον γενικό όρο.
- χρησιμοποιώ ιδιότητες — γενικ. τρόπο. και κάνω πράξεις.
  - Παραγώγιση.

→

① SOS $\binom{n}{r} \overset{?}{=} \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$ με χρήση γεννητριών συναρτήσεων.

Παρατηρούμε ότι οι $\binom{n}{r}$ είναι οι συντελεστές του z^r στο ανάπτυγμα του $(1+z)^n$. Αυτό όμως γράφεται και στη μορφή $(1+z)^{n-1} + z(1+z)^{n-1}$, του οποίου οι συντελεστές της δύναμης z^r είναι $\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$.

---

② $$\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}_{①} \overset{?}{=} \binom{r+s}{n}$$

αποτελεί συνέλιξη των ακολουθιών $x_k = \binom{r}{k}$ και $y_k = \binom{s}{k}$ που έχουν γενν. συναρτήσεις $(1+z)^r$ και $(1+z)^s$.
Άρα σύμφωνα με την ιδιότητα της συνέλιξης η γενν. συνάρτηση της ① είναι η $(1+z)^{r+s}$. Το παραπάνω άθροισμα θα ισούται με τον συντελεστή του z^n. Δηλαδή: $\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$.

---

③ SOS $$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} \overset{?}{=} \binom{n+1}{m+1}$$

Θέτω $X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+1}{m+1} z^m$ και $Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m}\right] z^m$.

Αρκεί να δείξω ότι $X(z) = Y(z)$.

$$\left.\begin{aligned} X(z) &= z^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+1}{m+1} z^{m+1} = z^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+1}{k} z^k = z^{-1}\left[(1+z)^{n+1} - 1\right] \\ Y(z) &= \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \binom{k}{m} z^m\right] = \sum_{k=0}^{n} (1+z)^k = \frac{(1+z)^{n+1} - 1}{(1+z) - 1} = z^{-1}\left[(1+z)^{n+1} - 1\right] \end{aligned}\right\} \checkmark$$

1) Ισο; $\binom{n+r+1}{r} \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k}$

$$\binom{n+r+1}{r} = \binom{n+r}{r} + \underbrace{\binom{n+r}{r-1}}_{\parallel}$$

$$\binom{n+r-1}{r-1} + \underbrace{\binom{n+r-1}{r-2}}_{\parallel}$$

$$\binom{n+r-2}{r-2} + \binom{n+r-2}{r-3}$$

$$\vdots$$

$$\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{0}$$

$$\binom{n}{0}$$

$$\therefore \binom{n+r+1}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k}$$

---

2) $\binom{n+1}{m+1} \overset{?}{=} \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}$

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n+1}{n-m} = \binom{m+(n-m)+1}{n-m} = \sum_{k=0}^{n-m} \binom{m+k}{k} = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} \ //.$$

$$\left(\left(\sum_{k=0}^{n-m} \binom{m+k}{m} \right)\right)$$

---

3) $\binom{n}{r} \overset{?}{=} \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-r+r)(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} \ //.$$

---

4) $\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}(-1)^k \overset{?}{=} (-1)^n \binom{r-1}{n}$

$$\Leftrightarrow \binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \dots + (-1)^n \binom{r}{n} \overset{?}{=} (-1)^n \binom{r-1}{n}$$

ισχύει η ταυτότητα $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$

$$\binom{r}{0} = \cancel{\binom{r-1}{0}}$$

$$-\binom{r}{1} = -\cancel{\binom{r-1}{1}} - \cancel{\binom{r-1}{0}}$$

$$\binom{r}{2} = \cancel{\binom{r-1}{2}} + \cancel{\binom{r-1}{1}}$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n \binom{r}{n} = (-1)^n \binom{r-1}{n} + \cancel{(-1)^n \binom{r-1}{n-1}}$$

$$\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \dots + (-1)^n \binom{r}{n} = (-1)^n \binom{r-1}{n} \ //.$$

5) $\binom{r}{m}\binom{m}{k} \overset{?}{=} \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \frac{r!}{\cancel{m!}\,(r-m)!}\cdot\frac{\cancel{m!}}{k!\,(m-k)!} = \frac{r!}{k!\,(r-k)!}\cdot\frac{(r-k)!}{(m-k)!\,(r-m)!} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}.$$

---

6) $\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k} \overset{?}{=} \binom{r+s}{n}$ με λόγια ~~***~~

---

7) sos $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} \overset{?}{=} \binom{n+1}{m+1}$

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m+1} + \binom{n}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m+1} + \binom{n-1}{m}$$
$$= \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-2}{m} + \binom{n-2}{m+1}$$
$$= \dots$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} \quad //-$$

---

8) ~~***~~

Ο συνολικός αριθμός τρόπων επιλογής n αντικειμένων από $r+s$ αντικ. ισούται με τους τρόπους επιλογής k αντικ. από r από τα $r+s$ αντικ. και των υπόλοιπων $n-k$ αντικ. από τα υπόλοιπα s από τα $r+s$ αντικ., όπου τα r, s παραμένουν σταθερά, το k όμως μεταβάλλεται από 0 έως n. Άρα $\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$.

---

8) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 \overset{?}{=} \binom{2n}{n}$

$$(1+x)^n(1+x^{-1})^n = (1+x)^n(1+x)^n x^{-n} = x^{-n}(1+x)^{2n} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cancel{x^k}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cancel{x^{-k}} = x^{-n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

· Κύλινδρος:

$|G| = 2$ συμμετρίες

· ταυτοτική: X_1^6

· περιστροφή γύρω από οριζόντιο άξονα που χωρίζει το τρίτο από το τέταρτο μέρος κατά $180°$. X_2^3

· Σκακιέρα (2×4 διαστάσεις)

$|G| = 4$ συμμετρίες

· ταυτοτική X_1^8

· οριζόντιος άξονα: και 180° X_2^4

· κατακόρυφο και 180°: X_2^4

· κάθετο στο κέντρο κατά 180: X_2^4.

σελ. 17

· Κύβος 1: 8 κορυφές

$|G| = 24$ συμμετρίες.

δείκτης κύκλων P_G = ..

$G = \{\pi_1, \pi_2$

π_1 · ταυτοτική: X_1^8.

π_2 · 3 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180° γύρω από άξονες που συνδέουν τα κέντρα απέναντι πλευρών (όψεων): X_2^4.

π_3 · 6 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 90° γύρω από άξονες που συνδέουν τα κέντρα απέναντι πλευρών (όψεων): X_4^2.

π_4 · 6 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180° γύρω από άξονες που ενώνουν τα μέσα απέναντι ακμών: X_2^4

π_5 · 8 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120° γύρω από άξονες που συνδέουν απέναντι κορυφές: $X_1^2 X_3^2$.

· Κύβος 2: 6 όψεις (πλευρές).

συμμετρίες οι ίδιες, μόνο που αλλάζουν οι κυκλικές αναπαραστάσεις

· X_1^6

· $X_1^2 X_2^2$

· $X_1^2 X_4$

· X_2^3

· X_3^2

· Κανονική Πυραμίδα: (με 4 πλευρές)

$|G| = 3$ συμμετρίες.

· ταυτοτική X_1^4

· μετάθεση που αντιστοιχεί σε περιστροφή 120° γύρω από τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της βάσης: $X_1 X_3$

· μετάθεση που αντιστοιχεί σε περιστροφή -120° γύρω από τον ίδιο άξονα: $X_1 X_3$.

Τετράεδρο: $|G| = 12$ συμμετρίες

· ταυτοτική: X_1^4.

· 8 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120° γύρω από άξονες που συνδέουν μια κορυφή με το κέντρο της απέναντι όψεως: $X_1 X_3$

· 3 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180° γύρω από άξονες που συνδέουν μέσα απέναντι ακμών: X_2^2.

· Κυκλικός Δίσκος:

4 άξονες οι 2 είναι διαγώνιοι και οι 2 διαμέτροι

$|G| = 8$ συμμετρίες.

· ταυτοτική: X_1^8

· 4 περιστροφές γύρω από τους 4 άξονες κατά 180°: X_2

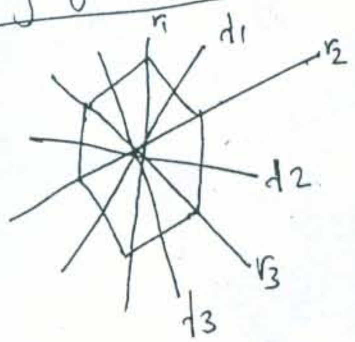
(οριζόντιος, κατακόρυφος, 2 διαγώνιοι)

είναι άρτιοι

Αν οι 4 άξονες + 4×8

· 3 περιστροφές γύρω από άξονα κάθετο στο κέντρο του κυκλικού δίσκου κατά 90°, 180°, 270°: X_4^2, X_2^4, X

εξάγωνο:



$360:6 = 60°$.

κατά 60° στροφή ως προς κάθετο άξονα στο κέντρο. X_6^1

–"– 120° — " — : X_3^2

–"– 180° — " — : X_2^3

–"– 240° — " — : X_3^2

–"– 300° — " — : X_6^1

$|G|=12$ συμμετρίες

ταυτοτικός : X_1^6

Γύρω από r_1 κατά 180° : $X_1^2 X_2^2$

–"– r_2 –"– : $X_1^2 X_2^2$

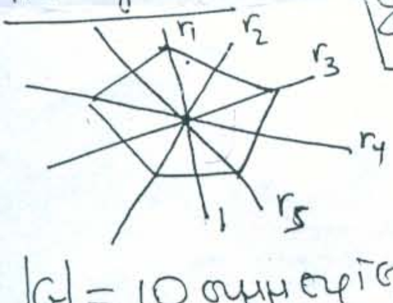
–"– r_3 –"– : $X_1^2 X_2^2$

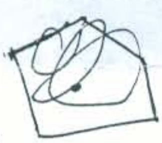
–"– d_1 –"– : X_2^3

–"– d_2 –"– : X_2^3

–"– d_3 –"– : X_2^3

πεντάγωνο:





ταυτοτική : X_1^5

κατά $\frac{360}{5} = 72°$: X_5^1

–"– $2.72°$: X_5

–"– $3.72°$: X_5^1

–"– $4.72°$: X_5

κατά r_1 : $X_1 X_2^2$

κατά r_2 : $X_1 X_2^2$

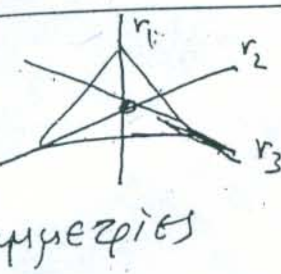
κατά r_3 : $X_1 X_2^2$

κατά r_4 : $X_1 X_2^2$

κατά r_5 = $X_1 X_2^2$

$|G| = 10$ συμμετρίες

τρίγωνο:



ταυτοτική : X_1^3

κατά 120° : X_3

–"– 240° : X_3

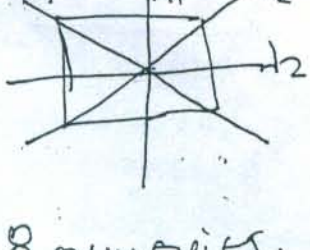
κατά r_1 : $X_1 X_2$

–"– r_2 : $X_1 X_2$

–"– r_3 : $X_1 X_2$

$|G| = 6$ συμμετρίες

τετράγωνο:



• ταυτοτική: X_1^4

• κατά 90°: X_4

• –"– 180°: X_2^2

• –"– 270°: X_4

• κατά r_1 : $X_1^2 X_2$

• –"– r_2 : $X_1^2 X_2$

• –"– d_1 : X_2^2

• –"– d_2 : X_2^2

$|G| = 8$ συμμετρίες.