Διωνυμικοί συντελεστές

i) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

iii) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

iv) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

ιδι+ς

Τύπος Newton:

$$(1+x)^n = (1+x)\cdot(1+x)\ldots(1+x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

$$(a+\beta)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\beta + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}\beta^k \ldots + \binom{n}{n}\beta^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\beta^k.$$

Άσκηση

Ν.Δ.Ο.: $\boxed{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n}$

Λύση

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n-1}+($$

2) Ν.Δ.Ο. :

$$\boxed{\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\dots+\binom{n}{2k+1}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{2k},\ \text{όταν } n=2p}$$

δηλαδή περιττ

Λύση

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{2k+1}=0$$

Άρα παίρνω

$$0=(1-1)^n=\sum\binom{n}{\cancel{2k+1}}(-1)^{n-k}=$$

$$=\binom{n}{0}(-1)^0+\binom{n}{1}(-1)^1+\binom{n}{2}(-1)^2+\dots+\binom{n}{2k}(-1)^{2k}+\binom{n}{2k+1}(-1)^{2k}$$

$$=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\dots+\binom{n}{2k}-\binom{n}{2k+1}$$

$$\Rightarrow\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{2k}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\dots+\binom{n}{2k+1}$$

3) Ν.Δ.Ο. :

$$\boxed{\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\dots+\binom{n}{2k-1}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{2k}}$$

, όταν $n=2p$. δηλαδή άρτιος

Λύση

$$0=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}=$$

$$=\binom{n}{0}(-1)+\binom{n}{1}(-1)+\binom{n}{2}(-1)^2+\dots+\binom{n}{2k-1}(-1)^{2k-1}+\binom{n}{2k}(-1)^{2k}$$

$$=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots-\binom{n}{2k-1}+\binom{n}{2k}$$

$$=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\dots+\binom{n}{2k-1}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{2k}.$$

4) Ν.Δ.Ο.:

$$\boxed{\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\dots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}}$$

Λύση

Από τον τύπο $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$ έχουμε:

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\dots+n\binom{n}{n}=$$

$$n\binom{n-1}{0}+n\binom{n-1}{1}+n\binom{n-1}{2}+\dots+n\binom{n-1}{n-1}=$$

$$n\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+\dots+\binom{n-1}{n-1}\right]=$$

$$n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}=n\sum\binom{n-1}{k}1^k=n2^{n-1}$$

5) Ν.Δ.Ο.:

$$\boxed{\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\dots+\binom{n+k-1}{n}=\binom{n+k}{n+1}}$$

Λύση

Από τον τύπο $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.

$$\binom{n+k}{n+1}=\binom{n+k-1}{n}+\cancel{\binom{n+k-1}{n+1}}$$

$$\cancel{\binom{n+k-1}{n+1}}=\binom{n+k-2}{n}+\cancel{\binom{n+k-2}{n+1}}$$

$$\vdots$$

$$\cancel{\binom{n+2}{n+1}}=\binom{n+1}{n}+\binom{n+1}{n+1}+$$

Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης ...

$$\binom{n+k}{n+1} = \binom{n+k-1}{n} + \binom{n+k-2}{n} + \dots + \binom{n+2}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+}{n+1}$$

$\binom{n}{n}$

6) <u>Ν.Δ.Ο.:</u>

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{k-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{i}{k-1}}$$

7) <u>Ν.Δ.Ο.:</u>

$$\boxed{\binom{n+k}{n} = \binom{n+k-1}{k} + \binom{n+k-2}{k-1} + \dots + \binom{n-1}{0}}$$

<u>~~8)~~ Άσκηση - Θέμα 2003</u>

Με συνδυαστικά επιχειρήματα ν.δ.ο.:

$$\boxed{\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}}$$

<u>Λύση</u>

~~$(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n =$~~

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \quad (1)$$

$$(1+x)^n (1+x)^n = \sum_{\lambda=0}^{n} \binom{n}{\lambda} x^\lambda \sum_{\rho=0}^{n} \binom{n}{\rho} x^\rho =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{n} \sum_{\rho=0}^{n} \binom{n}{\lambda}\binom{n}{\rho} x^{\lambda+\rho} \quad (2)$$

Πρέπει <u>$k=\lambda+\rho$</u>.

Θα εξισώσω τους συντελεστές του x^n από την (1) ξ (2).

Άρα <u>$\cancel{k}=n$</u>. Έστω $n=\lambda+\rho$ <u>και</u>

$\lambda = n + \rho$

$$\binom{2n}{n} = \sum_{p=0} \binom{n}{n-p}\binom{n}{p} =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}\binom{n}{p} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$$

Λύση 6

Από τον τύπο $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ έχουμε:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}$$

$$= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-} + \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k} = \dots$$

$$= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \dots + \binom{k-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{i}{k-1}$$

Λύση 7

$\binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{n+k-n} = \binom{n+k}{k}$. Από τον παραπάνω τύπο έχουμε:

$$\binom{n+k}{k} = \binom{n+k-1}{k} + \binom{n+k-1}{k-1}$$

$$= \binom{n+k-1}{k} + \binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-2}{k-2} = \dots$$

$$= \binom{n+k-1}{k} + \binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-3}{k-2} + \dots + \binom{n-1}{0}$$

Θέμα 2/2001

Ν.Δ.Ο.:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}=\binom{r+s}{n} \quad \left(\text{τύπος του Vandermorde}\right)$$

Λύση

$$(1+x)^{r+s}=\sum_{k=0}^{r+s}\binom{r+s}{k}x^k \quad (1)$$

$$(1+x)^{r+s}=(1+x)^r\cdot(1+x)^s=\sum_{\lambda=0}^{r}\binom{r}{\lambda}x^\lambda\sum_{\rho=0}^{s}\binom{s}{\rho}x^\rho$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{r}\sum_{\rho=0}^{s}\binom{r}{\lambda}\binom{s}{\rho}x^{\rho+\lambda} \quad (2)$$

Εξισώνω τα (1), (2) θα πρέπει $\rho+\lambda=n \Rightarrow \lambda=n-\rho$.

Άρα θα έχω:

$$\binom{r+s}{n}=\sum_{\rho=0}^{s}\binom{r}{n-\rho}\binom{s}{\rho}$$

Διανομή αντικειμένων σε υποδοχές.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε r αντικείμ διακεκριμένα ~~μετα~~ ή όχι σε n διακεκριμένες υποδοχές

i) Τα r αντικείμενα είναι διακεκριμένα και η σειρά στις υποδοχές δεν μετράει. (Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να τοποθετήσουμε παραπάνω από 1 αντικείμενο σε κάθε υποδοχή.

1ο αντικείμενο → n υποδοχές → n-τρόπους.

2ο αντικείμενο → n ,, → n – τρόπους

.

.

.

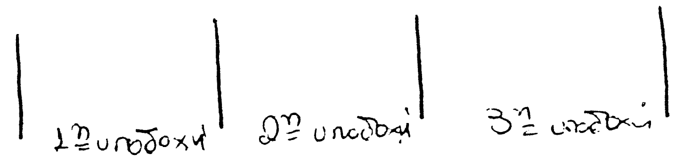
rο ,, → n ,, → n – τρόπους

Σύνολο n^r τρόποι

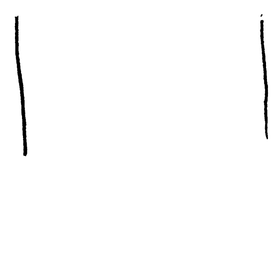
i) Τα r αντικείμενα είναι διακεκριμένα και η σειρά σε κάθε υποδ μετράει

1ο βήμα: Θεωρούμε n+1 κάθετες γραμμές

Έστω n=3



2ο βήμα: Αφαιρούμε τις 2 ακραίες κάθετες γραμμές και μένουν n-1



3ο βήμα: Έχουμε να διατάξουμε n-1+r αντικείμενα από τα οποία τα n-1 είναι όμοια. Δηλαδή έχουμε επαναληπτική μετάθεση. Επομένως υπάρχουν

$$\frac{(n-1+r)!}{(n-1)!} \text{ τρόποι}$$

iii) Τα r αντικείμενα δεν είναι διακεκριμένα

Όπως παραπάνω ~~μόνο~~ πρόκειται για επαναληπτική μετάθεση μόνο που εδώ έχουμε και τα αντικείμενα ίδια (όμοια) Δηλαδή υπάρχουν $\frac{(n-1+r)!}{(n-1)!\,r!}$ τρόποι $= \binom{n+r-1}{n-1}$

Ασκήσεις.

1) Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν 3 αριθμοί από τους αριθμούς 1-300 έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι διαιρετό δια 3. (1 αριθμός είναι τέλειος διαιρετέος του 3 όταν το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 3).

2) Να βρεθεί ο αριθμός (το πλήθος) των τετραψήφιων αριθμών του δεκαδικού συστήματος που δεν έχουν 2 ίδια ψηφία.

3) Με πόσους τρόπους μπορούν να βαφούν 12 δωμάτια έτσι ώστε 3 από αυτά να είναι κόκκινα, 2 ροζ, 2 λευκά και τα υπόλοιπα πράσινα.

4) Να βρεθεί (ο αριθμός) το πλήθος των διαιρετέων του 180.

5) Να υπολογιστεί ο σταθερός όρος στο ανάπτυγμα $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$.

6) Να υπολογιστεί ο συντελεστής του x^{23} στο $(1+x^5+x^9)^{100}$.

7)

7) SOS
Μεταξύ 2n αντικειμένων τα n είναι ίδια. Βρείτε το πλήθος των επιλογών n αντικειμένων από τα 2n αντικείμενα.

Λύση

Παίρνω από τα n όμοια n και 0 από τα άλλα $\binom{n}{0}$

" " " $n-1$ " 1 " $\binom{n}{1}$

" " " $n-2$ " 2 " $\binom{n}{2}$

. . . .

" " " 0 " n " $\binom{n}{n}$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n.$$

8) Να υπολογισθεί ο αριθμός των τρόπων που r διακεκριμένα (2ε
αντικείμενα μπορούν να τοποθετηθούν σε n υποδοχές; i) με τον
περιορισμό ότι καμία υποδοχή δε θα μείνει κενή $(r \geq n)$
ii) Ποιος είναι ο αριθμός αυτός αν υπάρχει δυνατότητα 1 το
πολύ υποδοχή να μείνει κενή

Λύση

Η μελέτη γίνεται ως προς τις υποδοχές

i) Τοποθετούμε από 1 αντικείμενο σε κάθε υποδοχή
Οπότε μένουν $r-n$ αντικείμενα να τοποθετηθούν σε
n υποδοχές. Άρα έχουμε:

$$\binom{n+(r-n)-1}{r-n} = \binom{r-1}{r-n} \text{ τρόπους} \qquad \binom{n-1+r-n}{n-1} = \binom{r-1}{n-1} = \binom{r-1}{r-n}$$

ii) 1ος τρόπος

$$\binom{n}{1}\binom{(n-1)+(r-n)-1}{r-(n-1)} + \binom{r-1}{r-n} =$$

$$= n\binom{r-2}{r-n+1} + \binom{r-1}{r-n} \qquad \binom{n}{1}\binom{n-2+r-(n-1)-1}{n-1} + \binom{r-1}{n-1} = n\cdot\binom{r-2}{n-1} + \binom{r-1}{n-1}$$

2ος τρόπος

1ο βήμα

Τοποθετώ $n-1$ όμοια αντικείμενα σε $n-1$ υποδοχές έτσι ώστε
να μείνει 1 κενή $\longrightarrow$ υπάρχουν n τρόποι

2ο βήμα

Τοποθετώ τα $r-(n-1)$ υπόλοιπα αντικείμενα σε n υποδοχές:

$$\binom{n+(r-n+1)-1}{r-n+1} = \binom{r}{r-n+1} = \binom{r}{n-1}$$

Σύνολο είναι $n \cdot \binom{r}{n-1}$

2

1) Λύση

Οι αριθμοί που διαιρούνται τέλεια με το 3

$A=\{3, 6, 9, 12, 15, \ldots, 297, 300\}$

Οι αριθμοί που αφήνουν υπόλοιπο 1 με τη διαίρεση με το 3:

$B=\{1, 4, 7, 10, \ldots, 295, 298\}$.

Οι αριθμοί που αφήνουν υπόλοιπο 2 με τη διαίρεση με το 3:

$\Gamma=\{2, 5, 8, 11, 14, \ldots, 296, 299\}$.

$\#A=\#B=\#\Gamma=100.$

Άρα μπορούμε να πάρουμε 3 απο το A ή 3 απο το B ή 3 απο το Γ ή 1 απο το καθένα

$$\binom{100}{3}+\binom{100}{3}+\binom{100}{3}+\binom{100}{1}\binom{100}{1}\binom{100}{1}$$

$$=3\binom{100}{3}+\binom{100}{1}^3.$$

2 Λύση

$$\binom{9}{1}\ \binom{9}{1}\ \binom{8}{1}\ \binom{7}{1}$$

γιατί δεν μπορεί να είναι το '0'

Άρα το πλήθος που δεν έχουν 2 ίδια ψηφία είναι: $9\times9\times8\times7=4.536$.

2ος τρόπος: Δ_4^{10} − οι διατάξεις με 0 το πρώτο ψηφίο ~~και τα υπόλοιπα με 9~~ και 3 υπόλοιπα ψηφία $=\Delta_4^{10}-\Delta_3^{9}=4.536$

3 Λύση

$$\frac{12!}{3!\,2!\,2!\,5!}$$

4) Λύση

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Οι δυνατοί διαιρέτες του 180, σύμφωνα με τη θεωρία Αριθμών είναι εκείνοι που έχουν τη μορφή $2^k 3^m 5^\lambda$, $0 \le k, m \le 2$, $0 \le \lambda \le 1$.
Συνεπώς έχουμε 3 τρόπους επιλογής του παράγοντα 2
3 — " — — " — 3
και 2 — " — — " — 5

Άρα ο αριθμός των δυνατών διαιρετών του 180 είναι: $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.

5) Λύση

Από το ανάπτυγμα του Newton:

$$(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (x^2)^k \left(\frac{1}{x}\right)^{12-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} \frac{x^{2k}}{x^{12-k}} = \sum_{k=0} \binom{12}{k} x^{3k-12}$$

Για να βρούμε το συντελεστή του σταθερού όρου θα πρέπει $3k-12=0 \Rightarrow k=4$. Ο οποίος θα είναι: $\binom{12}{4}$.

6) Λύση

Επίσης από το ανάπτυγμα Newton έχουμε:

$$(1+x^5+x^9)^{100} = \sum \binom{100}{k} (x^5+x^9)^k = \sum \binom{100}{k} \sum \binom{k}{\lambda} x^{5k} x^{9(k-\lambda)}$$

$$= \sum \binom{100}{k} \sum \binom{k}{\lambda} x^{5k+9k-9\lambda} = \sum \binom{100}{k} \sum \binom{k}{\lambda} x^{14k-9\lambda}$$

Πρέπει $14k-9\lambda=23 \Rightarrow k=1$ και $\lambda=-1$

άρα ο συντελεστής του x^{23} είναι $\binom{100}{1} \sum \binom{1}{-1} = 100$.

9) Κατά πόσους τρόπους μπορούν r όμοιες μπάλες να τοποθετηθούν σε n διακεκριμένα κουτιά έτσι ώστε κάθε κουτί να περιέχει τουλάχιστον 9 μπάλες.

<u>Λύση</u>

Όπως στην άσκηση 8 τοποθετούμε σε κάθε υποδοχή 9 μπαλάκια. Άρα μας μένουν $r-9n$ μπαλάκια τα οποία τα τοποθετούμε σε n διακεκριμένα κουτιά: Επομένως έχουμε:

$$\binom{n+(r-9n)-1}{r-9n} \text{ τρόπους}$$

10) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε $2t+1$ όμοιες μπάλες σε 3 διακεκριμένα κουτιά, έτσι ώστε κάθε 2 κουτιά μαζί να περιέχουν περισσότερες μπάλες από ότι το άλλο

$\boxed{x}$ $\boxed{y}$ $\boxed{z}$

<u>Λύση</u>

Ο περιορισμός είναι κάθε υποδοχή να έχει το πολύ t μπαλάκια. Αφού $\begin{cases} x+y+z=2t+1 \\ x+y \geq z \end{cases} \Rightarrow z \leq t+1/2 \Rightarrow z \leq t$ ομοίως και για x και y

Υπάρχουν $\binom{3}{1}$ τρόποι για να διαλέξεις ποιο από τα 3 θα έχει t μπάλες και οι υπόλοιπες θα μπουν στα άλλα 2 κουτιά με $\binom{t+1}{2}$ τρόπους. Δηλαδή $3\binom{t+1}{2}$.

Ομοίως για $t-1$ στο 1 κουτί και $t+2$ στα άλλα 2 κουτιά:

Δηλαδή: $3\binom{t+2}{2}$. κ.ο.κ.

Επομένως θα έχουμε

$$3\binom{t+1}{2}+3\binom{t+2}{2}+3\binom{t+3}{2}+ \dots +3\binom{t+(t+1)}{2}$$

$$= 3\sum_{k=1}^{t+1}\binom{t+k}{2}$$

11) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους r διακεκριμένες σημαίες μπορούν να τοποθετηθούν σε n διακεκριμένα ιστούς με δεδομένο ότι έχει σημασία η σειρά, έτσι ώστε κανένας ιστός να μην μένει κενός. (Ζ.

Λύση

Υπάρχουν Δ_n^r τρόποι για να διαλέξεις n από r διακεκριμένα αντικείμενα και να τα τοποθετήσεις σε n διακεκριμένες θέσεις ώστε να γεμίσουν και οι n ιστοί τουλάχιστον 1 φορά.

Οι υπόλοιπες $r-n$ σημαίες έχουν $\binom{n-1+r-n}{n-1}$ τρόπους για να τοποθετηθούν στους n ιστούς

Επομένως συνολικά υπάρχουν $\Delta_n^r \binom{r-1}{n-1}$

Γεννήτριες συναρτήσεις $\{a_{-1}, a_{-2}, \dots = 0\}$

2ο

Έστω $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \longrightarrow a_0, a_1, \dots$

(1) <u>Ιδιότητα Ολίσθησης</u> (προς τα δεξιά)

Αν $\beta_r = \begin{cases} 0, & r = 0, 1, \dots, n-1 \\ a_{r-n}, & r = n, n+1, \dots \end{cases}$

$\underbrace{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, \beta_{r+1}, \dots, \beta_{n-1}}_{n \text{ όροι}}, \beta_n, \beta_{n+1}, \dots$

$\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ όροι}}, a_0, a_1, a_2, \dots$

τότε $\boxed{B(x) = x^n A(x) \quad , \text{όπου} \quad A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r}$

Απόδειξη

$$B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r x^r = \sum_{r=0}^{n-1} \beta_r x^r + \sum_{r=n}^{\infty} \beta_r x^r =$$

$$= 0 + \sum_{r=n}^{\infty} \beta_r x^r = \sum_{r-n=0}^{\infty} a_{r-n} x^r$$

Θέτω $L = r - n \Rightarrow r = L + n$

Άρα έχουμε:

$$\sum_{L=0}^{\infty} a_L x^L x^n = x^n \sum_{L=0}^{\infty} a_L x^L \Rightarrow B(x) = x^n A(x)$$

Αν $A(x)=\sum_{n=0} a_n x^n$ ~~και~~ $B(x)=xA(x)=\sum_{n=0} a_{n-1}x^n$ θε

$\boxed{\text{Γενικά}}$

Αν $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ~~και~~ $B(x)=x^r A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-r}x^n$.

② <u>Ιδιότητα ολίσθησης (προς τ' αριστερά)</u>

Αν $\delta_r = a_{r+n}$

δηλ. $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \delta_{n+1}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$

τότε:

$$\Delta(x)=\left[A(x)-\sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r\right]x^{-n}$$

<u>Απόδειξη</u>

$$\left[A(x)-\sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r\right]x^{-n}=\left[\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r-\sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r\right]x^{-n}=$$

$$=\sum_{r=n}^{\infty} a_r x^r x^{-n}=\sum_{r=n}^{\infty} a_r x^{r-n} \quad (1)$$

θέτω $r-n=L \Rightarrow r=n+L$

τότε $\sum_{L=0}^{\infty} a_{n+L} x^L = \sum_{L=0}^{\infty} \delta_L x^L = \Delta(x)$

3) Ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων

Αν $\beta_k = \sum_{r=0}^{k} a_r$

δηλαδή $\beta_0 \;,\; \beta_1 \;,\; \beta_2 \;, \cdots$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$a_0 \quad a_0+a_1 \quad a_0+a_1+a_2, \cdots$

τότε $B(x) = \dfrac{A(x)}{1-x}$

Απόδειξη

$$a_k = \beta_k - \beta_{k-1} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k-1} x^k \quad (1)$$

όπου $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k-1} x^k = x\,B(x)$ (από ιδιότητα δεξιάς ολίσθησ...

Άρα η (1) γίνεται

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k-1} x^k$$

$$\Rightarrow A(x) = B(x) - x\,B(x)$$

$$\Rightarrow A(x) = (1-x)\,Bx$$

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$$

4) Ιδιότητα συμπληρωματικών μερικών αθροισμάτων

Αν $A(1) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r$

$$\beta_k = \sum_{r=k}^{\infty} a_r \qquad k = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

τότε $$B(x) = \frac{A(1) - A(x)}{1 - x}.$$

5) Ιδιότητα Παραγώγισης και ολοκλήρωσης

Αν $\beta_r = r a_r$

τότε $B(x) = x A'(x)$

ενώ $\delta_r = \dfrac{a_r}{r+1}$

τότε $$\Delta(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(t)\, dt.$$

6) Ιδιότητα συνέλιξης

Η ακολουθία

$$\delta_k = \sum_{r=0}^{k} a_r \beta_{k-r}$$

καλείται συνέλιξη των ακολουθιών a_r, β_r και

$$\Delta(x) = A(x) \cdot B(x).$$

Πίνακας ακολουθιών και γ. συναρτήσεων

① Αν $a_r = 1$ τότε $A(x) = \dfrac{1}{1-x}$

② Αν $a_r = r+1$ τότε $A(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

③ Αν $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_r = \dfrac{1}{r}, \ r \geq 1 \end{cases}$ τότε $A(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

④ Αν $a_r = \binom{n}{r}, \ n \in \mathbb{R}$ τότε $A(x) = (1+x)^n$

⑤ Αν $a_r = \dfrac{1}{r!}$ τότε $A(x) = e^x$

⑥ Αν $a_r = \dfrac{n^r}{r!}, \ n \in \mathbb{R}$ τότε $A(x) = e^{nx}$

Παράδειγμα ①

$a_n = 1 \quad A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} x^r = 1 + x + x^2 + \dots$

Παίρνουμε το μερικό άθροισμα $\boxed{S_n = 1 + x + \dots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x}}$

Όμως από το διάστημα σύγκλισης $-1 \leq x \leq 1$, οπότε

$\lim_{n \to \infty} S_n = \dfrac{1}{1-x}$ αφού $\lim_{n \to \infty} x^n = 0$

Άρα $A(x) = \dfrac{1}{1-x}$

Ασκήσεις

1) Να βρεθεί η ακολουθία της γεννήτριας συνάρτησης

$$A(x) = \frac{1}{1-4x}$$

Λύση αφού $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$

$$A(x) = \frac{1}{1-4x} = (1-4x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-4x)^k \quad (1)$$

όπου $\binom{-1}{k} = \frac{\Delta_k^{-1}}{k!} = \frac{(-1)(-2)(-3)\ldots\ldots(-k)}{k!}$

$$= \frac{(-1)^k k!}{k!} = (-1)^k$$

Άρα η (1) γίνεται

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (-1)^k 4^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^k$$

Άρα η ακολουθία είναι $a_k = 4^k$

2) $f(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ Να βρεθεί η ακολουθία που αντιστοιχεί στη γεννήτρια συνάρτηση αυτής.

Λύση

$$f(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3} = \frac{x}{(1-x)^3} + \frac{x^2}{(1-x)^3} = x\frac{1}{(1-x)^3} + x^2\frac{1}{(1-x)^3}$$

Αρκεί να βρω την ακολουθία ~~από~~ στην οποία αντιστοιχεί η γεννήτρια συνάρτηση $\frac{1}{(1-x)^3}$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = (1-x)^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3}{k} (-x)^k \quad (1)$$

όπου

$$\binom{-3}{k} = \frac{\Delta_k^{-3}}{k!} = \frac{(-3)(-4)(-5)\cdots(-3-k+1)}{k!} = \cancel{\frac{(-1)^{k-2}\, k!}{k!\, 2}}$$

$$= \frac{(-3)(-4)(-5)\cdots(-(2+k))}{k!} = \frac{(-1)^k\,(2+k)!}{2\,k!}$$

$$= \frac{(-1)^k}{2}(2+k)(1+k)$$

Επομένως η (1) γίνεται:

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2}(k+2)(k+1)(-1)^k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}(k+2)(k+1)\, x^k .$$

Άρα για την $A(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ η ακολουθία που της αντιστοιχεί είναι η

$$a_k = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

Άρα

$$x\frac{1}{(1-x)^3} = xA(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1+2)(n-1+1)}{2} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)n}{2} x^n$$

επίσης η $x^2\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0} a_{n-2}x^n = \sum_{n=0} \frac{(n-2+2)(n-2+1)}{2} x^n =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^n$$

Συνεπώς η $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)+n(n-1)}{2} x^n = \sum \frac{n(\cancel{n+1+n-1})}{2} x^n$$

$$= \sum \frac{n\,2n}{2} x^n = \sum n^2 x^n$$

Άρα η ακολουθία θα είναι n^2

3) $A(x) = (1+x+x^2+x^3+\dots)^n$

Λύση

Από το ανάπτυγμα Taylor έχουμε:

$$(1+x+x^2+x^3+\dots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k}(-x)^k$$

Άρα $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-1)^k x^k$ (1)

κόροι

Όμως $\binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)\dots(-n-k+1)}{k!}$

$$= (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} \quad (2)$$

Άρα Από (1), (2) έχουμε:

$$A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}(-1)^{2k}x^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}x^{k}$$

Επομένως $a_r=\dfrac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$

Άρα η ακολουθία $a_r=\dfrac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$ αντιστοιχεί στη γ. συναρτ.: $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{n}$

Συνδυασμοί με τη βοήθεια γεννητριών συναρτήσεων

→ Να υπολογιστεί ο αριθμός των επιλογών <u>r-αντικειμένων</u> <u>(χωρίς επανάληψη) από n-αντικείμενα</u>.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω τα αντικείμενα α, β, γ, δ

Με πόσους τρόπους μπορώ να τα πάρω ανά 2;

<u>Λύση</u>

α → β, α → γ, α → δ   β → γ, β → δ   γ → δ

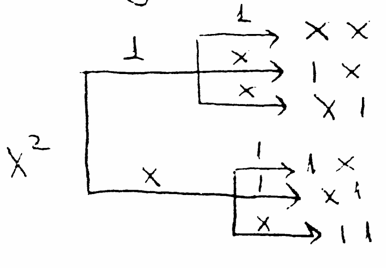
Ή

Αν κάθε αντικείμενο αντιστοιχεί στο $1+x$ (όπου 1 = δεν το παίρνω και x = το παίρνω μια φορά) τότε, ο συντελεστής του x^2 στο ανάπτυγμα

$$(1+x)^4 = (1+x)(1+x)(1+x)(1+x)$$ θα δώσει τους

δυνατούς τρόπους.

Πράγματι,



(1 1 x x)
(1 x 1 x)
(1 x x 1)
(x 1 1 x)
(x 1 x 1)
(x x 1 1)

έτσι, αν κάθε τετράδα είναι διατεταγμένη και σημαίνει β'
το αν παίρνουμε ή όχι τα $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ τότε

$(1\ 1\ x\ x) \to \gamma\delta$

$(1\ x\ 1\ x) \to \beta\delta$

$(1\ x\ x\ 1) \to \beta\gamma$

- - - - - - -

Άρα γενικά,

Ο συντελεστής του x^r στο ανάπτυγμα $(1+x)^n$ δίνει το πλήθος των επιλογών r αντικειμένων από n (ήδη είναι γνωστό πως αυτό ισούται με

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r}$$

→ Να υπολογιστεί ο αριθμός των επιλογών r-αντικειμένων με επανάθεση από n-αντικείμενα.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω τα αντικείμενα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Με πόσους τρόπους μπορώ να πάρω 2;

<u>Λύση</u>

$\alpha \to \alpha, \beta, \gamma, \delta$

$\beta \to \beta, \gamma, \delta$

$\gamma \to \gamma, \delta$

$\delta \to \delta$.

Η'

Ορίζω σύνολα

$A=\{\alpha,\alpha\}$, $B=\{\beta,\beta\}$ $\Gamma=\{\gamma,\gamma\}$ $\Delta=\{\delta,\delta\}$

Αν κάθε παρένθεση της μορφής $(1+x+x^2)$ συμβολίζει το γεγονός ότι μπορούμε να πάρουμε $1=$ κανένα από το Α ή Β ή Γ

$x=1$ από το Α ή Β ή Γ ή Δ

$x^2=2$ από το Α ή Β ή Γ ή Δ

τότε

ο συντελεστής του x^2 στο ανάπτυγμα

$$(1+x+x^2)(1+x+x^2)(1+x+x^2)(1+x+x^2)=(1+x+x^2)^4$$

Παριστάνει το ζητούμενο πλήθος

Πράγματι,

$$1 \xrightarrow{1} x\ x \quad (1\,1\,x\,x) \to \gamma\delta$$
$$1 \xrightarrow{1} 1\ x^2 \quad (1\,1\,1\,x^2) \to \delta\delta$$
$$1 \xrightarrow{1} x^2\ 1 \quad (1\,1\,x^2\,1) \to \gamma\gamma$$
$$1 \xrightarrow{x} 1\ x \quad (1\,x\,1\,x) \to \beta\delta$$
$$1 \xrightarrow{x} x\ 1 \quad (1\,x\,x\,1) \to \beta\gamma$$
$$1 \xrightarrow{x^2} 1\ 1 \quad (1\,x^2\,1\,1) \to \beta\beta$$

$$x \xrightarrow{1} 1\ x \quad (1\,x\,1\,x) \to \alpha\delta$$
$$x \xrightarrow{1} x\ 1 \quad (1\,x\,x\,1) \to \alpha\delta$$
$$x \xrightarrow{x} 1\ 1 \quad (x\,x\,1\,1) \to \alpha\beta$$

$$x^2 \xrightarrow{1} 1\ 1 \quad (x^2\,1\,1\,1) \to \alpha\alpha$$

ΓΕΝΙΚΑ

Αν m_i είναι το πλήθος της ομάδας i (η οποία αποτελείται από όμοια αντικείμενα), όπου $i=1, \dots, k$ τότε ο συντελεστής x^r του αναπτύγματος

$$\underbrace{(1+x+\dots+x^{m_1})(1+x+\dots+x^{m_2})\dots\dots(1+x+\dots+x^{m_k})}_{k\text{-στο πλήθος}}$$

είναι το ζητούμενο πλήθος.

<u>Παρατήρηση</u>: Κάθε παρένθεση παριστάνει <u>πόσες</u> φορές θα πάρουμε αντικείμενα από κάθε ομάδα. [ήδη είναι γνωστό πως αυτό ισούται με $\binom{n+r-1}{r}$].

→ Να υπολογιστεί ο αριθμός των επιλογών r-αντικειμένων ~~με απεριόριστες~~ επαναλήψεις από n-αντικείμενα.

<u>Λύση</u>

Ο συντελεστής του x^r στο ανάπτυγμα

$$(1+x+x^2+\dots\dots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \sum \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}x^r$$

παριστάνει το ζητούμενο πλήθος. Δηλαδή είναι $\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$

<u>Ασκήσεις</u>

1) Έστω ότι θέλουμε να τοποθετήσουμε r όμοια αντικείμενα σε n ~~όμοιες~~ διακεκριμένες υποδοχές, έτσι ώστε όλες οι υποδοχές να έχουν τουλάχιστον 1 αντικείμενο.

Λύση

Αφού δεχόμαστε να έχουμε τουλάχιστον 1 αντικείμενο σε $④$

κάθε υποδοχή δεν έχουμε την επιλογή

1 = κανένα αντικείμενο. Άρα

$$A(x) = (x + x^2 + \dots + \quad)^n$$

Όμως $1 + x + x^2 + \dots = \dfrac{1}{1-x} \Rightarrow$

$$x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} - 1 \Rightarrow x + x^2 + \dots = \frac{x}{1-x}.$$

Άρα

$$A(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^n = \frac{x^n}{(1-x)^n} = x^n (1-x)^{-n}$$

Όμως

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-1)^k x^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} (-1)^k (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} x^k.$$

Επομένως

$$A(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)} x^{k+n} \text{ Άρα } a_r = \binom{r-1}{r-n}$$

$$\Rightarrow A(x) = \sum \frac{(n+(k-n)-1)!}{(k-n)!\,(n-1)!} x^k = \sum \frac{(k-1)!}{(k-n)!\,(n-1)!}$$

Θέτω $k + n = r \Rightarrow k = r - n$. Άρα:

$$a_r = \frac{(n+r-n-1)!}{(r-n)!\,(n-1)!} = \frac{(r-1)!}{(r-n)!\,(n-1)!} = \binom{r-1}{r-n}$$

2) Σελ. 46 βιβλίο ασκήσεων 2.14

Να βρεθεί η Γ.Σ. της ακολουθίας $a_r =$ ~~...~~ ο αριθμός των τρόπων να επιλέξουμε r-αντικείμενα (με επαναλήψεις) από 10 συνολικά αντικείμενα μεταξύ των οποίων το αντικείμενο x μπορεί να επιλεγεί το πολύ 2 φορές, το y το πολύ 3 φορές και τα υπόλοιπα αντικείμενα το πολύ 1 φορά.

Λύση

$$(1+2x+3x^2+3x^3+2x^4+x^5)\sum \binom{8}{k}x^k = \sum\binom{8}{k}x^k + 2\sum\binom{8}{k}x^{k+1} + 3\sum\binom{8}{k}x^{k+2} + 3\ldots$$

$$A(x) = (1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)(1+x)^8$$

Πρέπει να βρούμε το συντελεστή a_r του x^r ο οποίος είναι: $\binom{8}{r}+2\binom{8}{r-1}+3\binom{8}{r-2}+3\binom{8}{r-3}+2\binom{8}{r-4}+\binom{8}{r-5}$

3) 2.18 σελ. 48

Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους $2t+1$ μπάλες, μπορούν να τοποθετηθούν σε 3 διακεκριμένα κουτιά έτσι ώστε κάθε κουτί, να μην περιέχει περισσότερες από t μπάλες (όμοιες).

Λύση

$$A(x) = (1+x+x^2+\ldots+x^t)^3$$

$$1+x+x^2+\ldots = \frac{1}{1-x}$$

$$\boxed{1+x+x^2+\ldots+x^t = \frac{1-x^{t+1}}{1-x}}$$

$$(a-\beta)^3 = a^3-3a^2\beta+3a\beta^2-\beta^3$$

Αρκεί να βρούμε το συντελεστή a_{2t+1} του x^{2t+1}.

$$A(x) = \left(\frac{1-x^{t+1}}{1-x}\right)^3 = (1-x^{t+1})^3(1-x)^{-3}$$

$$= (1-3x^{t+1}+3x^{2t+2}-x^{3t+3})\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-3}{r}(-x)^r$$

$$= (1-3x^{t+1}+3x^{2t+2}-x^{3t+3})\sum \frac{(-1)^r\,3\cdot4\cdot5\ldots(r+2)}{r!}(-1)^r x^r$$

$$= (1-3x^{t+1}+3x^{2t+2}-x^{3t+3})\sum \frac{(r+2)!}{2!\,r!}x^r$$

$$=\sum \frac{(r+2)!}{2!\,r!}x^r - 3\sum \frac{(r+2)!}{2!\,r!}x^{r+t+1} + 3\sum \frac{(r+2)!}{2!\,r!}x^{2t+r+2} - \sum \binom{2+r}{r}x^{3}$$

$$=\sum\binom{r+2}{r}x^r - 3\sum\binom{r+2}{r}x^{r+t+1} + 3\sum\binom{r+2}{r}x^{2t+r+2} - \sum\binom{r+2}{r}x^{3t}$$

Δοκιμάζω να βρω σε ποιο από τα αθροίσματα βρίσκεται και το $2t+1$:

για $r=2t+1$

για $r+t+1=2t+1 \Rightarrow r=t$.

για $2t+r+2=2t+1 \Rightarrow r=-1$ άτοπο.

για $3t+r+3=2t+1 \Rightarrow t+r=-2$ άτοπο.

Άρα ο συντελεστής του x^{2t+1} θα είναι:

$$\binom{2t+1+2}{2t+1} - 3\binom{t+2}{t} = \binom{2t+3}{2t+1} - 3\binom{t+2}{t}.$$

4) <u>2.21 σελ. 50</u>

Με πόσους τρόπους μπορεί ο ταγματάρχης να μοιράσει 24 σφαίρες σε 4 λοχίες έτσι ώστε κάθε λοχίας να πάρει τουλάχιστον 3 σφαίρες αλλά όχι περισσότερες από 8 σφαίρες.

<u>Λύση</u>

$$f(x)=(x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8)^4$$

$$= x^{12}(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4 = x^{12}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4 = x^{12}(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$$

$$= x^{12}\sum\binom{4}{r}(-x^6)^r\sum\binom{-4}{k}(-x)^k = x^{12}\sum\binom{4}{r}(-x^6)^r\sum\binom{3+k}{k}x^k$$

$$= x^{12}\sum(-1)^r\binom{4}{r}x^{6r}\sum\binom{3+k}{k}x^k = x^{12}\sum(-1)^r\binom{4}{r}\binom{3+k}{k}x^{6r+k}$$

Οπότε αρκεί να βρούμε το συντελεστή του x^{12} αφού με το x^{12} μπροστά από το Σ μας δίνει x^{24}. Άρα οι δυνατοί τρόποι που μπορούν να μας δώσουν στο πλήθος 12 είναι: $6r+k=12 \Rightarrow r=0,\ k=12$

$r=1,\ k=6$

$r=2,\ k=0$

Έτσι θα έχουμε:

$$(-1)^0\binom{4}{0}\binom{3+12}{12} + (-1)^1\binom{4}{1}\binom{3+6}{6} + (-1)^2\binom{4}{2}\binom{3+0}{0}$$

$$=\binom{15}{12} - 4\binom{9}{6} + \binom{4}{2} = 125$$

Άσκηση 223 σελ. 51

Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να τοποθετήσω 25 όμοιες σφαίρες σε 7 διαφορετικά κουτιά, με περιορισμό το 1ο κουτί να μην έχει πάνω από 10 σφαίρες;

Λύση

Υπάρχουν συνολικά a_{25} τρόποι που είναι ο συντελεστής του x^{25} από την παρακάτω Γ.Σ.:

$$A(x) = (1+x+x^2+x^3+\dots+x^{10})(1+x+x^2+\dots)^6 = \frac{1-x^{11}}{1-x}\left(\frac{1}{1-x}\right)^6 = (1-x^{11})(1-x)^{-7}$$

$$= (1-x^{11})\sum\binom{-7}{k}(-x)^k = (1-x^{11})\sum\frac{(6+k)!}{6!\,k!}x^k = \sum\frac{(6+k)!}{6!\,k!}x^k - \sum_{k=0}\frac{(6+k-11)!}{6!\,(k-11)!}x^k$$

Οι πιθανοί τρόποι να πάρουμε x^k είναι:

$$\frac{(6+k)!}{6!\,k!} - \frac{(6+k-11)!}{6!\,(k-11)!}$$ και για $k=25$ έχουμε:

$$\frac{(6+25)!}{6!\,25!} - \frac{(25-5)!}{6!\,(25-11)!} = \frac{31!}{25!\,6!} - \frac{20!}{6!\,14!} = \binom{31}{6} - \binom{20}{6}$$

Άσκηση 223 (σελ. 51)

Με πόσους τρόπους επιλέγω 25 παιχνίδια από 1 γκάμα 7 συνολικά παιχνιδιών, όταν μπορούμε να επιλέξουμε από 2-6 κομμάτια από κάθε παιχνίδι

Λύση

Υπάρχουν σύνολο a_{25} τρόποι που είναι ο συντελεστής του x^{25} από την παρακάτω Γ.Σ.:

$$A(x) = (x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^7 = \left(\frac{1-x^7}{1-x} - x - 1\right)^7 = \left(\frac{1-x^7+x^2-1}{1-x}\right)^7 = \left(\frac{x^2-x^7}{1-x}\right)^7$$

$$= x^{14}(1-x)^{-7}(1-x^5)^7 = x^{14} \sum \binom{-7}{k}(-x)^k \sum \binom{7}{r}(-x^5)^r$$

$$= x^{14} \sum (-1)^k \frac{(6+k)!}{6!\,k!} x^k (-1)^k \sum \frac{7!}{(7-r)!\,r!}(-1)^r x^{5r} = x^{14} \sum \frac{(6+k)!}{6!\,k!} \frac{7!}{(7-r)!\,r!}(-1)^r x^{k+5r}$$

Θέλουμε να βρούμε το συντελεστή του x^{25} δηλαδή πρέπει να βρούμε το άθροισμα των δυνατών τρόπων που $k+5r=11$

Συγκεκριμένα έχουμε:

για $k=1$, $r=2$

για $k=6$, $r=1$

για $k=11$, $r=0$

Συνεπώς για a_{11} θα έχουμε:

$$a_{11} = \frac{7!}{6!\,1!}\frac{7!}{5!\,2!} - \frac{12!}{6!\,6!}\frac{7!}{6!\,1!} + \frac{17!}{6!\,11!}\frac{7!}{7!} = 7\left[21 - \frac{12}{(6!)^2}\right] + \frac{17!}{6!\,11!}$$

$\simeq 12\,523$ τρόποι

Θέμα 2004 (3 μονάδες)

Να υπολογιστεί το πλήθος των τρόπων που 1 σύνολο από r όμοια αντικείμενα $(r \geq 6)$ μπορεί να χωριστεί σε 3 υποσύνολα διακεκριμένα ανά 2 ξένα μεταξύ τους, έτσι ώστε κάθε υποσύνολο να έχει τουλάχιστ 2 αντικείμενα.

α) χρησιμοποιώντας στοιχειώδη συνδυαστική ; ; ;

β) με Γ.Σ.

Λύση

(β) Το πλήθος των τρόπων είναι ο συντελεστής a_r του x^r, $r \geq 6$ της παρακάτω Γ.Σ.:

$$A(x) = (x^2+x^3+\dots)^3 = (x^2)^3(1+x+x^2+\dots)^3 = x^6(1+x+x^2+\dots)^3$$

$$= x^6\left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = x^6(1-x)^{-3} = x^6 \sum \binom{-3}{k}(-x)^k = x^6 \sum \frac{(2+k)!}{2!\,k!} x^k$$

$$= \sum \frac{(2+k-6)!}{2!\,(k-6)!} x^k = \sum \binom{k-4}{2} x^k$$

Συνεπώς το ζητούμενο πλήθος είναι ο συντελεστής a_r του x^r:

$$a_r = \binom{r-4}{2}$$

(α) . . .

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ 1.2.

Ξέρουμε ότι

$$\boxed{e^x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}}$$ και

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-r)!\,r!} x^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-r)!} \frac{x^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} \Delta_r^n \frac{x^r}{r!}$$

Άρα ο συντελεστής του $\frac{x^r}{r!}$ είναι ο αριθμός των διατάξεων r αντικειμένων από τα n αντικείμενα.

- Διάταξη r αντικειμένων επιλεγμένων από n με επανάληψη :

$$\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^n = (e^x)^n = e^{xn} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(nx)^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} n^r \frac{x^r}{r!}$$

Άρα θα υπάρχουν n^r - τρόποι

- Διάταξη r-διακεκριμένων αντικειμένων σε n-διακεκριμένες υποδοχές ώστε καμία να μην μείνει κενή. :

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^n = (e^x - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{(n-k)x} (-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n-k)^r x^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)^r \right) \frac{x^r}{r!}$$

Άρα υπάρχουν $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)^r$ τρόποι. $= n!\,S(r,n)$

• Καλάμε $S(r,n) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r$

αριθμός Stirling 2ου είδους. Συμβολίζουμε

$$S(r,n) = \left\{ {r \atop n} \right\}$$

- Τοποθέτηση r-διακεκριμένων αντικειμένων μέσα σε n-ομάδες υποδοχές χωρίς να μένει υποδοχή κενή. Είναι $S(r,n) = \left\{ {r \atop n} \right\}$

Επίσης,
Ισχύει: $\left\{ {k+1 \atop n+1} \right\} = \left\{ {k \atop n} \right\} + (n+1) \left\{ {k \atop n+1} \right\}$

Άσκηση

Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων να διαμερίσουμε 1 σύνολο απ k-διακεκριμένα αντικείμενα σε n υποσύνολα μη-κενά και ανά 2 ξένα

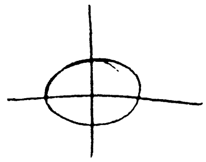
Λύση

Το πλήθος θα είναι:

$$n!\, S(k,n) = \left\{ {k \atop n} \right\} \cancel{n!} \frac{1}{\cancel{n!}} \sum (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r$$

$$\therefore a_n = (A_1+A_2)\cos\frac{n\pi}{3} + i(A_1-A_2)\sin\frac{n\pi}{3}$$

$\begin{cases}\cos(-\theta)=\cos\theta\\ \sin(-\theta)=\sin\theta\end{cases}$



$\therefore$ Από αρχικές συνθήκες έχω.

$$a_1 = |1| = 1$$

$$a_2 = \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 1-1=0$$

για $n=1$ $a_1=1$.

$$a_1 = (A_1+A_2)\cos\frac{\pi}{3} + i(A_1-A_2)\sin\frac{\pi}{3}$$

$$a_1 = (A_1+A_2)\frac{1}{2} + i(A_1-A_2)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_1+A_2 + i(A_1-A_2)\sqrt{3} = 2.} \quad (1) \Rightarrow \begin{cases} A_1+A_2=2\\ A_1-A_2=0.\end{cases}$$

για $n=2$ $a_2=0$.

$$a_2 = (A_1+A_2)\cos\frac{2\pi}{3} + i(A_1-A_2)\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$0 = (A_1+A_2)\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) + i(A_1-A_2)\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

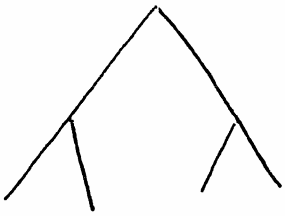
$$\Rightarrow (A_1+A_2)\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) + i(A_1-A_2)\sin\frac{\pi}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-(A_1+A_2) + i(A_1-A_2)\sqrt{3} = 0.} \quad (2)$$

Από (1), $\cancel{(2) \Rightarrow}$ $\begin{cases}\cancel{A_1+A_2 = -A_1-A_2} \Rightarrow \cancel{A_1 = -A_2}\\ \cancel{A_1-A_2 = A_1-A_2}\end{cases}$

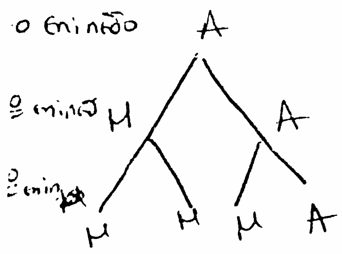
Θεωρία Μέτρησης Polya

Έστω το δέντρο

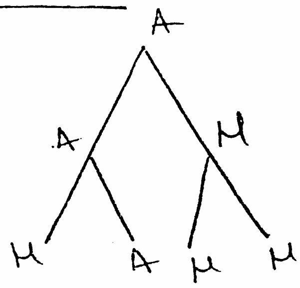


Το πρόβλημα είναι με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις κορυφές του, έτσι ώστε ανά δύο να είναι διαφορετικοί:

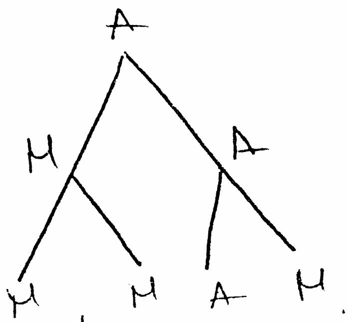
Ισοδύναμοι χρωματισμοί:



Φάση 1



Φάση 2



Φάση 3

Το δέντρο φάση 2 δίνει ισοδύναμο με το 1 με στροφή του 2ου επιπέδου.
Το δέντρο φάση 3 δίνει ισοδύναμο με το 1 με στροφή του 3ου επιπέδου

ΟΜΑΔΑ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΣΕΩΝ

Έστω το σύνολο $V = \{1, 2, \dots, n\}$

Θεωρούμε απεικόνιση $\pi : V \to V$ η οποία είναι "1-1". Το πλήθος των απεικονίσεων αυτών είναι $n!$, στον κύβο δηλαδή 8!

π.χ.

αν $V = \{1, 2, 3, 4\}$

θεωρούμε την

$\pi(1)=2$
$\pi(2)=4$
$\pi(3)=1$
$\pi(4)=3$

Η απεικόνιση αυτή γράφεται και ως εξής

$$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}=(1\,2\,4\,3)$$

Τότε λέμε ότι η π ~~ότι~~ είναι ένας κύκλος μήκους 4.

$\sigma(1)=2$
$\sigma(2)=1$
$\sigma(3)=4$
$\sigma(4)=3$

Τότε $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=(1\,2)(3\,4)$

Τότε η σ είναι δύο κύκλοι μήκους 2 ο καθένας.

Πράξεις μεταξύ αναμεταθέσεων

Έστω $\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}=(1\,2\,3)(4)$

και $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}=(1\,3\,4\,2)$

Τότε

$$\pi\sigma=\pi\circ\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}=(1)(2)($$

$$\sigma\pi=\sigma\circ\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=(1)(2\,4)(3)$$
$$=(1)(3)(2\,4)$$

Ενώ

αν $\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$ τότε

$$\pi^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$$

Παρατήρηση

Η ταυτοτική απεικόνιση είναι η αναμετάθεση, η οποία συμβολίζεται με e:

$$e=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$$ και σαφώς ισχύει $ee^{-1}=e^{-1}e=e$

Θεώρημα

Αν $V=\{1,2,\dots,n\}$ τότε το σύνολο των αντιμεταθέσεων $G=\{\pi: V\to V \,/\, \pi: 1-1\}$ αποτελούν ομάδα ως προς την σύνθεση,

δηλαδή αν i) $\pi,\sigma\in G \Rightarrow \pi\circ\sigma\in G$

ii) $\pi\circ(\sigma\circ\tau)=(\pi\circ\sigma)\circ\tau, \ \forall \pi,\sigma,\tau\in G$

iii) $\forall \pi\in G \Rightarrow \pi^{-1}\in G$

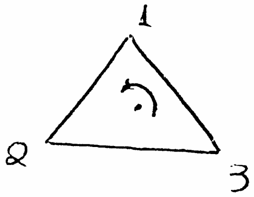
iv) $\forall \pi\in G, \ \exists e\in G: \pi\circ e=\pi=e\circ\pi$

Τότε η G ονομάζεται ομάδα αντιμεταθέσεων και τα στοιχεία της ονομάζονται συμμετρίες

Εφαρμογή

Τι παριστάνει η ομάδα αντιμεταθέσεων, όταν $V=\{1,2,3\}$

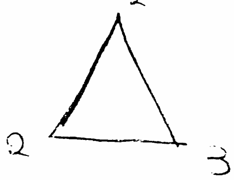
Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο



Θεωρούμε τους παρακάτω μετασχηματισμούς του τριγώνου

1) σ_0: στροφή του τριγώνου περί το κέντρο κατά 0°

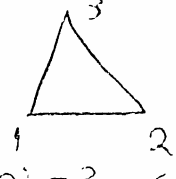
Τότε παίρνουμε



δηλ. $\sigma_0(1)=1$, $\sigma_0(2)=2$, $\sigma_0(3)=3 \Rightarrow \sigma_0=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=$ ταυτοτική $=$

2) σ_1: στροφή του τριγώνου περί το κέντρο κατά 120°

Τότε παίρνουμε



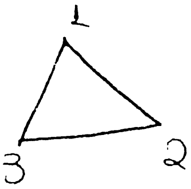
δηλ. $\sigma_1(1)=2$ $\sigma_1(2)=3$, $\sigma_1(3)=1 \Rightarrow \sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(123)$

3) σ_2: στροφή του σχήματος περί το κέντρο κατά 240°

Τότε $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,2)$

4) Π_1: περιστροφή περί τη διχοτόμο της γωνίας 1 κατά 180°

Τότε παίρνουμε



δηλ. $\Pi_1(1) = 1$
$\Pi_1(2) = 3$ $\Rightarrow \Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2\,3)$
$\Pi_1(3) = 2$

5) Π_2: περιστροφή περί τη διχοτόμο της γωνίας 2 κατά 180°

Τότε $\Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\,3)(2)$

6) Π_3: περιστροφή περί τη διχοτόμο της γωνίας 3 κατά 180°

Τότε $\Pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2)(3)$

Τότε η ~~ομάδα~~

$G = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\}$ είναι ομάδα αντιμεταθέσεων με $|G| = 3! = 6$.

Έστω $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ το σύνολο των κορυφών ενός δέντρου

και $C=\{\underset{\text{μαύρο}}{M}, \underset{\text{άσπρο}}{A}\}$ το σύνολο των χρωματισμών που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε.

Καλούμε χρωματισμό, μια απεικόνιση

$$f: V \to C$$

Έστω τώρα G, το σύνολο αντιμεταθέσεων του V. Προφανώς το G περιέχει το σύνολο των μη-ισοδύναμων τρόπων με τα οποίους μπορούμε να πάρουμε τις n-κορυφές.
Τα στοιχεία του G καλούνται συμμετρίες.

Θεωρούμε τα εξής:

$\pi \in G$ και f: χρωματισμός.
Τότε $\pi(f)$ παριστάνει ένα καινούριο χρωματισμό και είναι ο χρωματισμός που προκύπτει αν η συμμετρία π δράσει πάνω στο f.

ΤΥΠΟΣ BURNSIDE

Θεωρούμε το σύνολο

$$I(\pi)=\{f\in X \,/\, \pi(f)=f\}$$

όπου X ένα σύνολο χρωματισμών δηλ. $X=\{f / f: V\to C\}$
Τότε το $|I(\pi)|$ παριστάνει το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών που αντιστοιχεί σε κάθε συμμετρία π ή αλλιώς ο αριθμός των χρωματισμών δέντρων που παραμένουν αναλλοίωτα.
Αν με $|X|G|$ συμβολίσουμε το πλήθος των μη-ισοδύναμων χρωματισμών ενός δέντρου. Τότε

$$|X|G| = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|I(\pi)|$$: Τύπος του Burnside.

Βήματα για χρωματισμό

① Βρίσκω τους μη-ισοδύναμους τρόπους με τους οποίους μπορώ να πάρω τις κορυφές δηλ. το G
μέσω το |G|: σύνολο αντιμεταθέσεων, ισοδύναμων ή μη

② Για κάθε τέτοιο (ξεχωριστό) μη-ισοδύναμο τρόπο βρίσκω με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις κορυφές έχοντας δεδομένο το πλήθος των χρωμάτων.
δηλ. το $I(\pi)$.

Άσκηση 1

Να βρεθούν οι μη-ισοδύναμοι χρωματισμοί που υπάρχουν σ' ένα ισόπλευρο τρίγωνο

Απάντηση

Αν $C=\{A,M\}$ τότε υπάρχουν 4 διαφορετικοί μη-ισοδύναμοι χρωματισμοί $|X|G| = \frac{1}{|G|}\sum|I(\pi)| = \frac{2^3+2\cdot 2+3\cdot 2^2}{6} = \frac{8+4+12}{6} = 4$

Άσκηση 2

Έστω η συμμετρία

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Αν $C=\{A,H\}$ να υπολογιστούν οι μη-ισοδύναμοι χρωματισμοί που ορίζονται πάνω στην π.

Απάντηση

$\pi = (1)(2\ 3)(4\ 6)(5\ 7)$

$\boxed{\text{Τα στοιχεία κάθε κύκλου πρέπει να έχουν ίδιο χρώμα}}$. Άρα ελωμε [illegible] με [illegible] (χρωματια) [illegible] αν 4 (κύκλοι).

Άρα $|I(n)| = 2^4 = 16$.

Θεωρία POLYA

Έστω $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$: κορυφές

και $C = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$: χρώματα.

Θεωρούμε $f : V \to C$

Για κάθε χρωματισμό f, θεωρούμε ένα μονώνυμο m_f

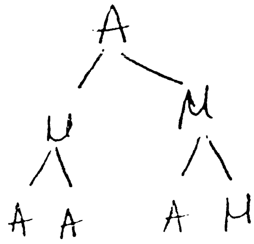
με

$$m_f = x_{f(v_1)} \cdot x_{f(v_2)} \cdots x_{f(v_n)} = x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r}$$

όπου $a_i =$ το πλήθος των κορυφών των οποίων το χρώμα είναι x_i.

Παράδειγμα:

Στο χρωματισμό

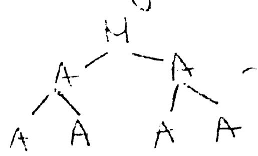


αν $\left.\begin{array}{l} x : \text{άσπρο} \\ y : \text{μαύρο} \end{array}\right\} m_f = x^4 y^3$

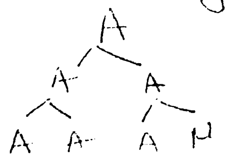
Παρατήρηση:

Αν 2 χρωματισμοί f, g είναι ισοδύναμοι $\Rightarrow m_f = m_g$. Είναι δυνατόν $m_f = m_g$ και οι χρωματισμοί f, g να μην είναι ισοδύναμοι

παράδειγμα:



$\leadsto x_A^6 x_M$



$\leadsto x_A^6 x_M$

την συμβολίσουμε με $P(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ το πλήθος των μη-ισοδύναμων χρωματισμών τότε

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \sum_{f \in X} m_f = \sum_{m \in M} a_m \cdot m$$

όπου M = το σύνολο όλων των μονωνύμων που σχηματίζονται από τις μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_r$

a_m = το πλήθος των μη-ισοδύναμων χρωματισμών που αντιστοιχεί σε κάθε μονώνυμο m.

Από Θ. Burnside

$$a_m = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |I_m(\pi)|$$

Πώς υπολογίζουμε το $\sum m_f$;;;

Έστω $\pi \in G$

Ορίζουμε δείκτρια συνάρτηση δ_π

$$\boxed{\delta_\pi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1^{b_1} \cdot y_2^{b_2} \cdots y_n^{b_n}}$$

όπου b_i = το πλήθος των κύκλων μήκους i στην ανάλυση του π.

Παράδειγμα

$$\delta_\pi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1^4 y_3^2$$

, όπου $y_i^{b_i}$, i: μήκος κύκλου

b: πόσοι κύκλοι ίδιου μήκ.

Η π αποτελείται από 2 κύκλους μήκους 3

και 4 κύκλους μήκους 1

Τότε έχουμε

$$\sum_{f \in I(n)} m_f = \delta_n (x_1+x_2+\ldots+x_r, x_1^2+x_2^2+\ldots+x_r^2, \ldots, x_1^n+x_2^n+\ldots+x_r^n)$$

ή αλλιώς

$$\sum_{f \in I(n)} m_f = (x_1+x_2+\ldots+x_r)^{b_1}(x_1^2+\ldots+x_r^2)^{b_2}\ldots(x_1^n+\ldots+x_r^n)^{b_n}$$

Άρα

$$\boxed{P(x_1,x_2,\ldots,x_r) = \frac{1}{|G|}\sum_{n\in G} \delta_n(x_1+x_2+\ldots+x_r,\ldots, x_1^n+x_2^n+\ldots+x_r^n)}$$

<u>Παράδειγμα 1</u>

Έστω ότι αναλύουμε τη συμμετρία π σε γινόμενο κύκλων και προκύπτουν 2 κύκλοι μήκους 3 και 1 κύκλος μήκους 4. Να βρεθεί το $\sum_{n\in I(n)} m_f$. (Δίνονται r χρωματισμοί).

<u>Λύση</u>

Έχουμε 1 συμμετρία π τ.ώ.:

$$\pi = (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5 a_6)(a_7 a_8 a_9 a_{10})$$

$$\delta_n(y_1 y_2 y_3 \ldots y_{10}) = y_3^2 y_4$$

Άρα

$$\sum_{f\in I(n)} m_f = \delta_n(x_1+x_2+\ldots+x_r, x_1^2+x_2^2+\ldots+x_r^2, \ldots, x_1^n+x_2^n+\ldots+x_r^n)$$
$$= (x_1^3+x_2^3+\ldots+x_r^3)^2(x_1^4+x_2^4+\ldots+x_r^4)$$

Παράδειγμα 2

Έστω ότι το π αναλύεται σε 3 κύκλους μήκους 2 και 5 κύκλους μήκους 3. Υπάρχουν 2 χρώματα. Να βρεθεί το $\sum m_f$.

Λύση

Έχουμε τη συμμετρία π, τέτοια ώστε:

$$\pi=(a_1 a_2)(a_3 a_4)(a_5 a_6)(a_7 a_8 a_9)(a_{10} a_{11} a_{12}) \dots (a_{19} a_{20} a_{21})$$

$$\delta_\pi(y_1 y_2 \dots y_{21}) = y_2^3 y_3^5$$

Άρα

$$\sum_{f\in X(\pi)} m_f = \delta_\pi(x_1+x_2, x_1^2+x_2^2, \dots, x_1^{21}+x_2^{21})$$

$$= (x_1^2+x_2^2)^3 (x_1^3+x_2^3)^5$$

Εφαρμογή στον κύβο

Έστω $V=\{u_1,u_2,\dots,u_8\}$ και $C=\{x_1,x_2\}$
δηλ. 2 χρώματα

Ⓐ Βρίσκουμε το πλήθος

$$|G| = 6\cdot 4 = \underline{24}$$

όπου $6 \to$ οι τρόποι να βρω τη βάση του κύβου
$4 \to$ να βρω ποια είναι η μπροστινή πλευρά.

Ⓑ Συμμετρίες του κύβου (ως προς κορυφές):

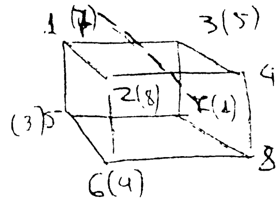
① Ταυτοτική:

$e=(u_1)(u_2)\dots(u_8) \to$ 8 κύκλοι μήκους 1

Άρα

$\delta_e(y_1,y_2,\dots,y_8)=y_1^8$ Επομένως $\delta_e(x_1+x_2, x_1^2+x_2^2, \dots)=(x_1+x_2)^8$

② { Άξονα που περνάει απο τα μέσα 2 απέναντι πλευρών (3)
| Άξονα που συνδέει μέσα απέναντι ακμών (6)



$\Downarrow$

Στροφή κατα 180°

- Οι συμμετρίες αυτές είναι της μορφής

$\pi = (u_1u_2)(u_3u_4)(u_5u_6)(u_7u_8) \to$ 4 κύκλοι μήκους 2

Άρα $\delta_\pi(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_2^4$

③ Άξονας που συνδέει τα κέντρα των απέναντι πλευρών (6)

$\Downarrow$

στροφή περί 90°

→ Οι συμμετρίες αυτές είναι της μορφής

$\pi = (u_1u_2u_3u_4)(u_5u_6u_7u_8) \to$ 2 κύκλοι μήκους 4

Άρα

$\delta_\pi(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_4^2$

④ Άξονας που συνδέει δυο απέναντι κορυφές (8)

$\Downarrow$

περιστροφή κατά 120° ή -120°

Οι συμμετρίες αυτές είναι της μορφής

$\pi = (u_1u_2u_3)(u_4u_5u_6)(u_7)(u_8) \to$ 2 κύκλοι μήκους 3 και
2 κύκλοι μήκους 1

Άρα

$\delta_\pi(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_3^2 y_1^2$

Άρα απο τον τύπο του Polya έχουμε

$$P(x_1, x_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \delta_\pi(x_1+x_2, x_1^2+x_2^2, \dots, x_1^8+x_2^8) =$$

$$\frac{1}{24} \cdot \left((x_1+x_2)^8 + 9(x_1^2+x_2^2)^4 + 6(x_1^4+x_2^4) + 8(x_1^3+x_2^3)^2 (x_1+x_2)^2 \right)$$

Ερώτηση

① Πόσοι είναι οι μη-ισοδύναμοι χρωματισμοί;

Βάζουμε όπου $x_1 = x_2 = 1$.

(Αρκεί να σκεφτούμε ότι αν έχουμε 1 πολυώνυμο που είναι αθροισμα μονωνύμων για να βρω το πλήθος αυτών των μονωνύμων αρκεί να θέσω $x_i = 1$).

Λύση

$$P(x_1, x_2) = P(1,1) = \frac{1}{24}\left(2^8 + 9\cdot 2^4 + 6\cdot 2^2 + 8\cdot 2^2 2^2\right)$$

$$= \frac{2^3}{24}\left(2^5 + 18 + 3 + 2^4\right) = \frac{1}{3}\left(2^5 + 21 + 2^4\right) = 2^4 + 7 = 23$$

Συμμετρίες του κύβου (ως προς όψεις)

Υπάρχουν 24 συμμετρίες. Άρα $|G| = 24$

① Ταυτοτική

$$\sigma_e(y_1, y_2, \dots, y_6) = y_1^6$$

Στροφή κατά 180° του ~~στροφή κατά 180°~~

② 1 άξονα που ενώνει τα κέντρα απέναντι πλευρών (3)

$$\sigma_n(y_1, y_2, y_3, \dots, y_6) = y_1^2 y_2^2$$

③ Στροφή κατά 90° του άξονα που ενώνει τα κέντρα των απέναντι πλευρών (6)

$$\sigma_n(y_1, \dots, y_6) = y_1^2 y_4$$

④ Στροφή κατά 180° του άξονα που ενώνει τα μέσα απέναντι ακμών (6)

$$\sigma_n(y_1, y_2, \dots, y_6) = y_2^3$$

5) Στροφή κατά 180° του άξονα που συνδέει απέναντι κορυφές

$$\delta_n(y_1, \dots, y_6) = y_3^2$$

Άρα

$$P(y_1, \dots, y_6) = \frac{1}{24}\left(y_1^6 + 3y_1^2y_2^2 + 6y_1^2y_4 + 6y_2^3 + 8y_3^2\right)$$

Άσκηση

Οι 6 όψεις ενός κύβου θα χρωματιστούν με ~~χρωματίσουμε~~ 6 διαφορετικά χρώματα, κάθε όψη με ένα διαφορετικό χρώμα. Με πόσους τρόπους μπορούμε να γίνει αυτό;

Λύση

Από το θεώρημα Burnside έχουμε:

$$|G|X| \quad \frac{1}{|G|} \sum_{n \in G} I(n)$$

όπου

Συμμετρίες	Κυκλική αναπαράσταση	$I(n)$
(Ταυτοτ.) e	$(1)(2)(3)(4)(5)(6)$	$6!$
π_1 = περιστροφ. κατά 180° άξονα που συνδέει κέντρα απέναντι εδρών	$(a_1)(a_2)(a_3a_4)(a_5a_6)$	0
π_2: περιστροφ. κατά 90° άξονα που συνδέει τα κέντρα απέναντι εδρών	$(a_1)(a_2)(a_3a_4a_5a_6)$	0
⋮		0
		0
		0

Άρα ∃

$$|X| \frac{1}{24} 6! = 30.$$

Άσκηση

Οι 6 όψεις 1 κύβου θα χρωματιστούν με 6 διαφορετικά χρώματα.

i) με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό

ii) αν το ένα χρώμα είναι κόκκινο, να βρείτε τον αριθμό των τρόπων να χρωματίσουμε τον κύβο έτσι ώστε ακριβώς 3 από τις όψεις του να είναι κόκκινες

Λύση

~~$P((x_1+x_2+\dots+x_6),(x_1^2+x_2+\dots+x_6^2)$~~

i) $P(x_1,x_2,\dots,x_6)=\frac{1}{|G|}\sum \delta_\pi=\frac{1}{24}\Big[(x_1+x_2+\dots+x_6)^6+3(x_1^2+x_2+\dots+x_6)^2(x_1^2+x_2^2+\dots$

$+6(x_1+x_2+\dots+x_6)^2(x_1^4+x_2^4+\dots+x_6^4)+6(x_1^2+x_2^2+\dots+x_6^2)^3+8(x_1^3+x_2^3+\dots+x_6^3$

Για $x_1=x_2=x_3=\dots=x_6=1$ έχουμε:

$$P(x_1,\dots x_6)=\frac{1}{24}\left[6^6+3\cdot 6^2 6^2+6\cdot 6^2 6+6\,6^3+8\,6^2\right]$$

$$=\frac{1}{24}\left[6^6+3\cdot 6^4+6^4+6^4+8\cdot 6^2\right]=\frac{6^5+5\,6^3+8\cdot 6}{4}=2.226.$$

ii) ~~1ος τρόπος~~

Ψάχνω το πλήθος των μονωνύμων $x_1^3x_2^{a_1}x_3^{a_2}x_4^{a_3}x_5^{a_4}x_6^{a_5}$ $a_i=0,1,2,3$

Έστω x_1: κόκκινο

1ος τρόπος

θέτω
$x_1+\dots+x_6=w$
$x_1^2+\dots+x_6^2=y$
$x_1^3+\dots+x_6^3=z$
$x_1^4+\dots+x_6^4=P.$

Τότε ο τύπος θα γίνει:

$$\frac{1}{24}\left[(x_1+\omega)^6+3(x_1+\omega)^2(x_1^2+y)^2+6(x_1+\omega)^2(x_1^4+p)+6(x_1^2+y)^3+8(x_1^3+z)^2\right.$$

$$=\frac{1}{24}\left[\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x_1^k\omega^{6-k}+3\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}x_1^k\omega^{2-k}\right.$$

Κρατώ μόνο τους όρους περιέχουν το x_1^3 και αυτοί είναι οι:

(1) $\sum_{k=0}\binom{6}{k}x_1^k\omega^{6-k}=(x_1+\omega)^6$

για $k=3$ ο συντελεστής του x_1^3 θα είναι: $\binom{6}{3}\omega^3$ (1)

(2) $3(x_1+\omega)^2(x_1^2+y)^2$ ο συντελεστής του x_1^3 προκύπτει από

$3\cdot 2x_1\omega\cdot 2x_1^2y=12\omega y x_1^3$ (2)

(3) $8(x_1^3+z)^2$ ο συντελεστής του x_1^3 προκύπτει από:

$8\cdot 2x_1^3 z$ (3)

Από (1), (2), (3) έχουμε:

$\frac{1}{24}\left[\binom{6}{3}\omega^3+12\omega y+16z\right]x_1^3$. θέτω $x_1=x_2=\dots=x_6=1$, ~~όπου~~ $\omega=y=z=5$

Άρα θα έχουμε:

$$\frac{1}{24}\left[\binom{6}{3}5^3+12\cdot5^2+16\cdot5\right]=\frac{20\cdot5^3+12\cdot5^2+16\cdot5}{24}=\frac{720}{6}=12$$

2ος τρόπος

$$\frac{\left.\frac{\partial^3 P}{\partial x_1^3}\right|_{(0,1,1,1,1,1)}}{3!} = \frac{1}{24}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2}\right.$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 6(x_1+x_2+\dots+x_6)^5 + 6(x_1+\dots+x_6)(x_1^2+\dots+x_6^2)^2 + 6(x_1+\dots+x_6)2(x_1^2+\dots+$$

$+ \dots$

Με την τρίτη παράγωγο μηδενίζονται όλες οι δυνάμεις του x_1 που είναι μικρότερες από 3 και θέτοντας μετά την παραγώγιση $x_1=0$ ~~και~~ μηδενίζω όλες τις δυνάμεις του x_1 που είναι μεγαλύτερες του 3. Η $\frac{\partial^3 P}{\partial x_1^3}\big/3!$ μου δίνει ~~το συντελεστή~~ το πλήθος των μονωνύμων της μορφής $x_1^3 \cdot x_2^{a_2} x_3^{a_3} x_4^{a_4} \cdots x_6^{a_6}$ $a_i = 0,1,2,3\dots$

$\boxed{\text{Άσκηση}}$

Οι 6 όψεις ενός κύβου θα χρωματιστούν με 4 διαφορετικά χρώματα Α, Β, Γ, Δ. Με πόσους τρόπους μπορεί να χρωματιστεί ο κύβος, έτσι ώστε 2 από τις όψεις του να χρωματιστούν Α, ~~και~~ 2 Β, 1 Γ και 1 Δ

Λύση Έστω $A=x_1$ $B=x_2$ $\Gamma=x_3$ $\Delta=x_4$. Ψάχνουμε το συντελεστή του μονωνύμου $x_1^2x_2^2x_3x_4$

Έχουμε

$$P(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{24}\Big[(x_1+x_2+x_3+x_4)^6 + 3(x_1+x_2+x_3+x_4)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2$$
$$+ 6(x_1+x_2+x_3+x_4)^2(x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4) + 6(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^3 + 8(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3)^2$$

Το $(x_1+x_2+x_3+x_4)$ δίνει μονώνυμα του τύπου $x_1 x_2 x_3 x_4$ με $a+\beta+\gamma+\delta=6$

Άρα είναι ικανό να δώσει $x_1^2 x_2^2 x_3 x_4$

Το $3(x_1+x_2+x_3+x_4)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2$

$$\left(x_1^{\alpha_1}+x_2^{\beta_1}+x_3^{\gamma_1}+x_4^{\delta_1}\right)\left((x_1^2)^{a_2}(x_2^2)^{\beta_2}(x_3^2)^{\gamma_2}(x_4^2)^{\delta_2}\right)$$

με $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1=2$ και $2a_2+2\beta_2+2\gamma_2+2\delta_2=4$

άρα είναι ικανό το παραπάνω γινόμενο $(2+4=6)$ να δώσει $x_1^2 x_2^2 x_3 x_4$ για $a_2=\beta_2=1$ και $\gamma_1=\delta_1=1$. τα υπόλοιπα '0'.

Το γινόμενο $(x_1+x_2+x_3+x_4)^2(x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4)$ δε θα δώσει ποτέ $x_1^2 x_2^2 x_3 x_4$ διότι οι δυνάμεις των x_1, x_2 είναι πάντα >4.

Το $(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^3$ δε θα δώσει ποτέ $x_1^2 x_2^2 x_3 x_4$ διότι οι δυνάμεις των x_3, x_4 είναι πάντα >2.

Το $(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3)^2$ δε θα δώσει ποτέ $x_1^2 x_2^2 x_3 x_4$ διότι οι δυνάμεις των x_1, x_2, x_3, x_4 είναι πάντα >3

Για το $(x_1+x_2+x_3+x_4)^6$ έχουμε

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(x_1+x_2)^k(x_3+x_4)^{6-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\sum_{v=0}^{k}\binom{k}{v}x_1^v x_2^{k-v}\sum_{p=0}^{6-k}\binom{6-k}{p}x_3^p x_4^{6-k-p}$$

Από το παραπάνω θέλουμε να πάρουμε $x_1^2 x_2^2 x_3 x_4$ αυτό γίνεται με:

$$\begin{cases} v=2 \\ k-v=2 \\ p=1 \\ 6-k-p=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=2 \\ k=4 \\ p=1 \\ k=4 \end{cases}$$

Άρα ο συντελεστής αυτός θα είναι:

$$\binom{6}{4}\binom{4}{2}\binom{2}{1}$$

Για το $3(x_1+x_2+x_3+x_4)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$ έχουμε:

$$3\Big[(x_1+x_2)^2+\underbrace{(x_3+x_4)^2}_{2x_3x_4}+2(x_1+x_2)(x_3+x_4)\Big]\Big[\underbrace{(x_1^2+x_2^2)^2}_{2x_1^2x_2^2}+(x_3^2+x_4^2)+2(x_1^2\ldots$$

Άρα ~~εχω~~ υπάρχουν $3\cdot 2\cdot 2$ τρόποι να πάρουμε το $x_1^2x_2^2x_3$

Επομένως συνολικά υπάρχουν

$$\frac{1}{24}\left[\binom{6}{4}\binom{4}{2}\binom{2}{1}+3\cdot 2\cdot 2\right]$$ τρόποι να χρωματιστεί ο κύβος έτσι ώστε 2 πλευρές να έχουν Α 2 Β 1 Γ και 1 Δ.

$$=\frac{192}{24}=8.$$

<u>2ος τρόπος</u>

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2}=f$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=g$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_3}=h$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x_4}\right|_{(0,0,0,0)}=\omega$$

Το ζητούμενο πλήθος είναι $\boxed{\dfrac{\omega}{2!2!1!1!}}=\dfrac{\omega}{4}$

Άσκηση

Βρείτε τον αριθμό των τρόπων που μπορούν να χρωματιστούν 5 από τις 8 κορυφές ενός κύβου μαύρες και οι υπόλοιπες άσπρες.

Λύση

Οι συμμετρίες του κύβου είναι 24 ως προς τις κορυφές.

~~Η δείκτρια συνάρτηση είναι~~:

$\delta_{pl}(y_1^8, y_2, \ldots, y_8) = \frac{1}{24}$

Το πολυώνυμο

$$P(x_1,x_2)=\frac{1}{24}\left[(x_1+x_2)^8+9(x_1^2+x_2^2)^4+6(x_1^4+x_2^4)^2+8(x_1^3+x_2^3)^2(x_1+x_2)^2\right]$$

Ψάχνουμε από το παραπάνω πολυώνυμο το συντελεστή του $x_1^5x_2^3$ όπου x_1: μαύρο και x_2: άσπρο

- από το $(x_1+x_2)^8$ παίρνουμε μονώνυμα ~~το ίδιο~~ $x_1^5x_2^3$ ως εξής

$$(x_1+x_2)^8=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}x_1^k x_2^{8-k}$$

για $k=5$ υπάρχουν $\binom{8}{5}$ στο πλήθος μονώνυμα $x_1^5x_2^3$

- από το $(x_1^2+x_2^2)^4 \to$ δεν 'παράγεται' το $x_1^5x_2^3$ γιατί προκύπτουν πάντα άρτιες δυνάμεις.

- από το $(x_1^4+x_2^4)^2 \to$ δεν 'παράγεται' το $x_1^5x_2^3$ αφού η δύναμη του x_2 είναι πάντα μεγαλύτερη του 4.

- από το $8(x_1^3+x_2^3)^2(x_1+x_2)^2$ παίρνουμε μονώνυμα $x_1^5x_2^3$ μόνο ως εξής:

$$8\cdot 2x_1^3x_2^3\cdot x_1^2 \to 8\cdot 2x_1^5x_2^3 = 16x_1^5x_2^3$$

Άρα υπάρχουν 16 στο πλήθος μονώνυμα $x_1^5x_2^3$

Στο σύνολο από το $P(x_1,x_2)=\frac{1}{24}\left[\binom{8}{5}+16\right]=\frac{72}{24}=3.$

2ος τρόπος

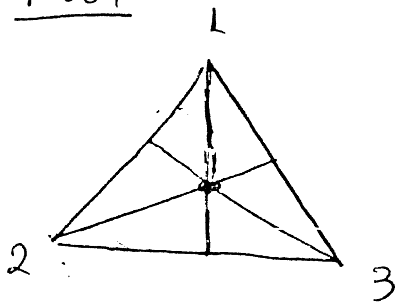
$$\frac{\partial^5 f}{\partial x_1^5} = f \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3} = g$$

Άρα συνολικά έχουμε $\frac{g(0,0)}{5!\,3!}$ τρόπους να χρωματίσουμε με μαύρο 5 κορυφές και με άσπρο 3.

Άσκηση $\boxed{\text{~~Θέμα εξέτασ~~}}$.

Να βρεθεί το πλήθος των μη-ισοδύναμων χρωματισμών των κορυφών ενός ισόπλευρου τριγώνου (θεωρώντας ως 4η κορυφή το κέντρο βάρος του τριγώνου) με 4 χρώματα έτσι ώστε το 1ο χρώμα να εμφανίζεται ακριβώς 2 φορές.

Λύση



(1) Ταυτοτική

$e=(1)(2)(3)(4)$

$\delta_e(y_1,y_2,y_3,y_4)=y_1^4$

(2) Περιστροφή κατά 180° ως προς άξονα που διέρχεται από την κορυφή και το κέντρο βάρους (3)

$\pi_1=(a_1a_2)(a_3)(a_4)$

$\delta_{\pi_1}(y_1,y_2,y_3,y_4)=y_1^2y_2$

(3) Περιστροφή κατά 120° ως προς το κέντρο βάρους (2)

$\pi_2=(a_1a_2a_3)(a_4)$

$\delta_{\pi_2}(y_1,y_2,y_3,y_4)=y_3y_1$

Το πολυώνυμο που υπολογίζει το σύνολο των μη-ισοδύναμων (4) χρωματισμών είναι το εξής:

$$P(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{|G|} \sum \delta_\pi(x_1+x_2+\dots, x_1^2+x_2^2+\dots, x_1^3+x_2^3+\dots, x_1^4+x_2^4+\dots)$$

$$= \frac{1}{6}\Big[(x_1+x_2+x_3+x_4)^4 + 3(x_1+x_2+x_3+x_4)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2) + 2(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1^3+\dots$$

Άρα ψάχνουμε το πλήθος των μονωνύμων τύπου $x_1^2 x_2^{a_1} x_3^{a_2} x_4^{a_3}$ που είναι:

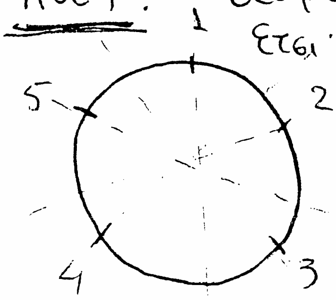
όπου $a_1, a_2, a_3 = \{0, 1,$

$$\left.\frac{\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2}}{2!}\right|_{(0,1,1,1)}$$

Άσκηση

Να βρεθεί το πλήθος των τρόπων που μπορούν να καθίσουν 3 φοιτητές παράταξης σε ένα κυκλικό τραπέζι 5 θέσεων.

Λύση: θεωρώ τις 5 θέσεις σαν 5 συμμετρικά σημεία πάνω στον κύκλο. Έτσι χωρίζουν τον κύκλο σε ίσα τόξα $360:5=72^\circ$ το καθένα.



(1) $e=(1)(2)(3)(4)(5)$

$$\delta_e(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5) = y_1^5$$

(2) (4) περιστροφές κατά 72° η καθε μια.

Άρα $\pi=(a_1a_2a_3a_4a_5)$

και $\delta_\pi(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)=y_5$

(3) (5) περιστροφές πέριξ του άξονα που ενώνει κάθε κορυφή με την μέση των 2 απέναντι (όχι προσκείμενων) κορυφών. $\delta_\pi = y_1 y_2^2$

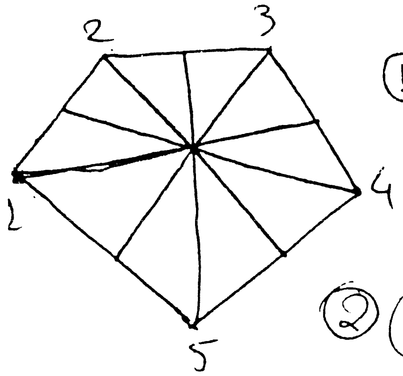
Επομένως

$$P(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{5}\Big[(x_1+x_2+x_3)^5 + 4(x_1^5+x_2^5+x_3^5) + 5(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+\dots\Big]$$

θέτω $x_1=x_2=x_3=1$. Άρα οι δυνατοί τρόποι να κάτσουν στο τραπέζι είναι:

$$\frac{1}{5}(3^5+4\cdot 3+5\cdot 3\cdot 3) = \frac{12+3^5+45}{5} = 60$$

Συμμετρίες κανονικού - πενταγώνου : 10 συμμετρίες (7)



① Ταυτοτική $e = (1)(2)(3)(4)(5)$

$\delta_e(y_1 y_2 y_3 y_4 y_5) = y_1^5$

②(5) αναδιπλώσεις περί του άξονα που ενώνει την κάθε κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς

$\pi_1 = (a_1)(a_2 a_5)(a_3 a_4)$

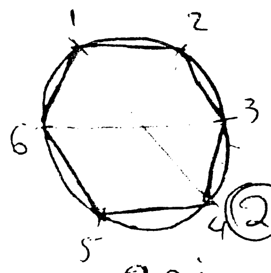
$\delta_{\pi_1}(y_1 y_2 y_3 y_4 y_5) = y_1 y_2^2$

③. (4) περιστροφές κατά 72° γύρω από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου,

$\pi_2 = (a_2 a_3 a_4 a_5 a_1)$

$\delta_{\pi_2}(y_1 y_2 y_3 y_4 y_5) = y_5$

Συμμετρίες κανονικού εξαγώνου : 12 συμμετρίες



① Ταυτοτική $e = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$

$\delta_e(y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6) = y_1^6$

② αναδιπλώσεις περί του άξονα που ενώνει τις απέναντι κορυφές (3)

$\pi_1 = (a_1 a_2)(a_3 a_4)(a_5)(a_6)$

$\delta_{\pi_1}(y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6) = y_1^2 y_2^2$

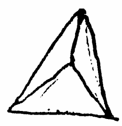
③ αναδιπλώσεις περί του άξονα που ενώνει τα μέσα των απέναντι πλευρών (3)

$\pi_2 = (a_1 a_2)(a_3 a_4)(a_5 a_6)$ άρα $\delta_{\pi_2}(y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6) = y_2^3$

④ περιστροφή κατά 60° γύρω από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκ

$\pi_3 = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)$ $\delta_{\pi_3}(y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6) = y_6$

Συμμετρίες Πυραμίδας (3 συμμετρίες)



3 ισόπλευρα τρίγωνα και άλλο ένα για βάση.

① ταυτοτική $e=(1)(2)(3)(4)$

$\delta_e(y_1 y_2 y_3 y_4) = y_1^4$

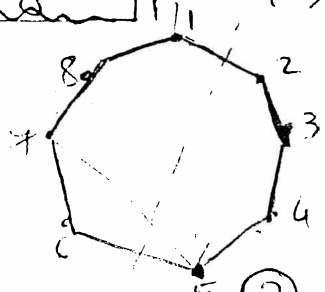
② περιστροφή περί του άξονα που ενώνει την επάνω κορυφή με το κέντρο του ισόπλευρου τριγώνου κατά 120° (2)

$\pi = (a_1)(a_2 a_3 a_4)$

$\delta_\pi(y_1 y_2 y_3 y_4) = y_1 y_3$

Άσκηση

Να βρεθούν οι μη-ισοδύναμοι τρόποι να χρωματίσουμε ένα κανονικό 8-γωνο με 4 χρώματα



Λύση

① ταυτοτική $e=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$

$\delta_e(y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 y_7 y_8) = y_1^8$

② ~~στροφή~~ αναδίπλωση περί του άξονα που ενώνει τις απέναντι κορυφές (4)

$\pi_1 = (a_1)(a_5)(a_2 a_8)(a_3 a_7)(a_4 a_6)$

$\delta_{\pi_1}(y_1 y_2 \ldots y_8) = y_1^2 y_2^3$

③ αναδίπλωση περί του άξονα που ενώνει 2 απέναντι πλευρές (4)

$\pi_2 = (a_1 a_2)(a_8 a_3)(a_7 a_4)(a_6 a_5)$

$\delta_{\pi_2}(y_1 y_2 \ldots y_8) = y_2^4$

④ στροφή κατά $\frac{180}{8} = 45°$ γύρω από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου (7)

$\pi_3 = (a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_1)$

$\delta_{\pi_3}(y_1 y_2 \ldots y_8) = y_8$

Επομένως παίρνουμε το πλήθος των μη ισοδύναμων χρωματισμών από το παρακάτω πολυώνυμο:

$$P(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{16}\Big[(x_1+x_2+x_3+x_4)^8 + 4(x_1+x_2+x_3+x_4)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_

$$+4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^4 + 7(x_1^8+x_2^8+x_3^8+x_4^8)\Big]$$

Οι μη-ισοδύναμοι τρόποι να χρωματίσουμε το κανονικό 8-γωνο με 4 χρώματα δίνεται για $x_1=x_2=x_3=x_4=1$ και θα έχουμε:

$$P(1,1,1,1) = \frac{1}{16}\left[4^8+4\cdot 4^2\cdot 4^3+4\cdot 4^4+7\cdot 4\right] = \frac{1}{4^2}\left(4^8+4^6+4^5+7\cdot 4\right)$$

$$= 4^6+4^4+4^3+\frac{7}{4}$$

Επανάληψη

Άσκηση 1

~~Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων να επιλέξουμε r αντικείμενα με επανάληψη από 10 αντικείμενα μεταξύ των οποίων το αντικείμενο x μπορεί να επιλεγεί το πολύ~~

Βρείτε την εκθετική γεν. συνάρτηση για τον αριθμό των τρόπων τοποθέτησης r ανθρώπων σε 3 διαφορ. αίθουσες με 1 τουλάχ. άνθρωπο σε κάθε αίθουσα. ii) με τον περιορισμό ότι θα τοποθετηθεί ζυγός αριθμός ανθρώπων στην αίθουσα.

Λύση

$$\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3 = \left(e^x-1\right)^3$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{3}{k} e^{x(3-k)}(-1)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{3}{k}(-1)^k \sum \frac{x^n(3-k)^n}{n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{3}{k}(-1)^k \sum_{n=0}^{\infty}(3-k)^n\frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3}{k}(-1)^k(3-k)^n\right)\frac{x^n}{n!}$$

ii) $$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^3 = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3$$

Άσκηση 2

Ένα πλοίο διαθέτει 48 σημαίες από τις οποίες 12 κόκκινες 12 άσπρες 12 μπλε και 12 μαύρες. 12 από αυτές τοποθετούνται σ' ένα ιστό για να στείλουν 1 μήνυμα. Πόσα από αυτά τα μηνύματα χρησιμοποιούν ζυγό αριθμό από μπλε σημαίες και μονό αριθμό μαύρων σημαιών.

Λύση

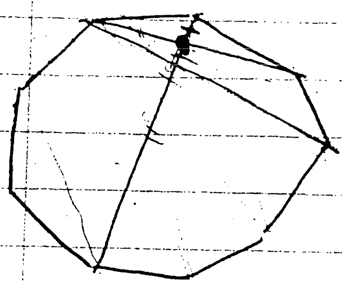
$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2$$

$$= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\left(e^x\right)^2 = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{4}\,e^{2x} = \frac{1}{4}\left(e^{4x}-1\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(4x)^r}{r!}-1\right)$$

Άσκηση

Σε πόσα ευθύγραμμα τμήματα χωρίζονται οι διαγώνιοι ενός κυρτού n-γωνού από τις τομές τους υπό την προϋπόθεση ότι οποιεσδήποτε 3 διαγώνιες δεν τέμνονται στο ίδιο σημείο.

Λύση



Έχουμε συνολικά $\binom{n}{2} - n$ διαγώνιοι.
Κάθε 2 διαγώνιοι τέμνονται σε ένα σημείο
και το πλήθος των σημείων τομής
είναι $\binom{n}{4}$ ~~τέτ~~.
Κάθε σημείο ορίζει 2 ευθύγραμμα τμήματα
σε 1 διαγώνιο. Άρα το πλήθος των
ευθυγράμμων τμημάτων είναι: $2\binom{n}{4} + \binom{n}{2} - n$

Τρόποι $= \binom{3+2t+1-1}{2t+1}$ − οι συνδυασμοί που

παίρνουμε τοποθετώντας σε ένα κουτί τουλάχιστον $t+1$ μπάλες. Οι τρόποι που μπορούμε να τοποθετήσουμε σε ένα κουτί $t+1$ μπάλες = τρόποι που μπορούμε να τοποθετήσεις σε 3 κουτιά t μπάλες.
Άρα αυτοί είναι

$$\binom{3+t-1}{t} = \binom{2+t}{t}$$

Όμως έχουμε 3 κουτιά $\rightarrow 3\binom{2+t}{t}$

Συνεπώς υπάρχουν

$$\binom{2t+3}{2t+1} - 3\binom{t+2}{t+1}$$

$4^2 + 7 \cdot 4 = 1 \quad 4(7+4) =$

$8 \cdot 4 = 32$

$4 \cdot S($

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{12}}{12!}\right)^4$$

$$\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{4}\left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(4x)^r}{r!} - 1\right] = \frac{1}{4}\left[\sum 4^r \frac{x^r}{r!} - 1\right]$$

$= \frac{1}{8} \sum \quad x^{12} \quad r = 12$

$= \frac{1}{4} \, 4^{12} \quad - \frac{1}{4} =$