Διακριτά Μαθηματικά Ι

Λευτέρης Κυρούσης
(Εύη Παπαϊωάννου)

Η ύλη συνοπτικά...

- Στοιχειώδης συνδυαστική
- Γεννήτριες συναρτήσεις
- Εγκλεισμός - Αποκλεισμός
- Θεωρία Polyá

Η ύλη συνοπτικά...

- Στοιχειώδης συνδυαστική
- Γεννήτριες συναρτήσεις
- Εγκλεισμός - Αποκλεισμός
- Θεωρία Polyá

Η ύλη συνοπτικά...

- Στοιχειώδης συνδυαστική
- Γεννήτριες συναρτήσεις
- Εγκλεισμός - Αποκλεισμός
- Θεωρία Polyá

Η ύλη συνοπτικά...

- Στοιχειώδης συνδυαστική
- Γεννήτριες συναρτήσεις
- Εγκλεισμός - Αποκλεισμός
- Θεωρία Polyá

Στοιχειώδης συνδυαστική

- Εισαγωγή
- Ομάδες ίδιων (μη διακεκριμένων) αντικειμένων
- Συνδυασμοί και διατάξεις με επανάληψη
- Υποσύνολα
- Διανομές αντικειμένων σε υποδοχές
- Διωνυμικοί συντελεστές

Στοιχειώδης συνδυαστική

- Εισαγωγή

Κανόνες γινομένου και αθροίσματος

- **Κανόνας αθροίσματος**: Αν ένα γεγονός μπορεί να συμβεί κατά m τρόπους και ένα άλλο γεγονός μπορεί να συμβεί κατά n τρόπους, τότε υπάρχουν $m + n$ τρόποι, κατά τους οποίους ένα από τα δυο γεγονότα μπορεί να συμβεί.
- **Κανόνας γινομένου**: Αν ένα γεγονός μπορεί να συμβεί κατά m τρόπους και ένα άλλο γεγονός μπορεί να συμβεί κατά n τρόπους, τότε υπάρχουν $m \times n$ τρόποι, κατά τους οποίους και τα δυο γεγονότα μπορεί να συμβούν.

Κανόνες γινομένου και αθροίσματος

- **Κανόνας αθροίσματος**: Αν ένα γεγονός μπορεί να συμβεί κατά m τρόπους και ένα άλλο γεγονός μπορεί να συμβεί κατά n τρόπους, τότε υπάρχουν $m + n$ τρόποι, κατά τους οποίους ένα από τα δυο γεγονότα μπορεί να συμβεί.

- **Κανόνας γινομένου**: Αν ένα γεγονός μπορεί να συμβεί κατά m τρόπους και ένα άλλο γεγονός μπορεί να συμβεί κατά n τρόπους, τότε υπάρχουν $m \times n$ τρόποι, κατά τους οποίους και τα δυο γεγονότα μπορεί να συμβούν.

Κανόνες γινομένου και αθροίσματος

Στο Τμήμα διατίθενται 7 πρωινά μαθήματα και 5 απογευματινά.

- **Κανόνας αθροίσματος**: Πόσες επιλογές έχει ένας φοιτητής που ενδιαφέρεται να πάρει 1 μόνο μάθημα;
  $7 + 5 = 12$

- **Κανόνας γινομένου**: Πόσες επιλογές έχει ένας φοιτητής για να πάρει 1 πρωινό και 1 απογευματινό μάθημα;
  $7 * 5 = 35$

Κανόνες γινομένου και αθροίσματος

Στο Τμήμα διατίθενται 7 πρωινά μαθήματα και 5 απογευματινά.

- **Κανόνας αθροίσματος**: Πόσες επιλογές έχει ένας φοιτητής που ενδιαφέρεται να πάρει 1 μόνο μάθημα; $7 + 5 = 12$
- **Κανόνας γινομένου**: Πόσες επιλογές έχει ένας φοιτητής για να πάρει 1 πρωινό και 1 απογευματινό μάθημα; $7 * 5 = 35$

Κανόνες γινομένου και αθροίσματος

Στο Τμήμα διατίθενται 7 πρωινά μαθήματα και 5 απογευματινά.

- **Κανόνας αθροίσματος**: Πόσες επιλογές έχει ένας φοιτητής που ενδιαφέρεται να πάρει 1 μόνο μάθημα;
  $7 + 5 = 12$

- **Κανόνας γινομένου**: Πόσες επιλογές έχει ένας φοιτητής για να πάρει 1 πρωινό και 1 απογευματινό μάθημα;
  $7 * 5 = 35$

Κανόνες γινομένου και αθροίσματος

Στο Τμήμα διατίθενται 7 πρωινά μαθήματα και 5 απογευματινά.

- **Κανόνας αθροίσματος**: Πόσες επιλογές έχει ένας φοιτητής που ενδιαφέρεται να πάρει 1 μόνο μάθημα;
  $7 + 5 = 12$

- **Κανόνας γινομένου**: Πόσες επιλογές έχει ένας φοιτητής για να πάρει 1 πρωινό και 1 απογευματινό μάθημα;
  $7 * 5 = 35$

Διατάξεις (Permutations)

- r αντικειμένων επιλεγμένων από n αντικείμενα χωρίς επανατοποθέτηση:

$$P(n,r) = \underbrace{n(n-1)...(n-r+1)}_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}, n, r \in N$$

- Έχει σημασία η σειρά
- Αντιμεταθέσεις r αντικειμένων: $P(r,r) = r!$

Διατάξεις (Permutations)

- **Παράδειγμα**: Με πόσους τρόπους μπορούμε να προγραμματίσουμε εξέταση 3 μαθημάτων σε 5 ημέρες ώστε να μην πέφτουν δύο μαθήματα την ίδια μέρα;
- **Απάντηση**:
- Μας ενδιαφέρει ποιες θα είναι οι 3 μέρες; Ναι. Άρα θέλουμε μεταθέσεις.
- $P(5,3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Διατάξεις (Permutations)

- **Παράδειγμα**: Με πόσους τρόπους μπορούμε να προγραμματίσουμε εξέταση 3 μαθημάτων σε 5 ημέρες ώστε να μην πέφτουν δύο μαθήματα την ίδια μέρα;
- **Απάντηση**:
- Μας ενδιαφέρει ποιες θα είναι οι 3 μέρες; Ναι. Άρα θέλουμε μεταθέσεις.
- $P(5,3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Συνδυασμοί (Combinations)

- r αντικειμένων επιλεγμένων από n αντικείμενα χωρίς επανατοποθέτηση:

  $$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r},$$

  $n, r \in N$
- Δεν έχει σημασία η σειρά

Συνδυασμοί (Combinations)

- **Παράδειγμα**: Με πόσους τρόπους μπορούμε να προγραμματίσουμε κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας 3 γεύματα με κρέας;
- **Απάντηση**:
- Μας ενδιαφέρει ποιες θα είναι οι 3 μέρες; Όχι. Απλά διαλέγουμε... Άρα θέλουμε συνδυασμούς.
- $C(7,3) = \frac{P(7,3)}{P(3,3)} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

Συνδυασμοί (Combinations)

- **Παράδειγμα**: Με πόσους τρόπους μπορούμε να προγραμματίσουμε κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας 3 γεύματα με κρέας;
- **Απάντηση**:
- Μας ενδιαφέρει ποιες θα είναι οι 3 μέρες; Όχι. Απλά διαλέγουμε... Άρα θέλουμε συνδυασμούς.
- $C(7,3) = \dfrac{P(7,3)}{P(3,3)} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

Πόσοι ακέραιοι υπάρχουν μεταξύ του 100 και του 199 οι οποίοι έχουν διαφορετικά ψηφία; Πόσοι από τους ακεραίους αυτούς είναι περιττοί;

- Οι ζητούμενοι αριθμοί αποτελούνται από 3 θέσεις στις οποίες το πρώτο ψηφίο είναι 1 και για τα άλλα 2 προκύπτουν από τις διατάξεις 2 ψηφίων από τα 9 διαθέσιμα (δε συμπεριλαμβάνουμε το ψηφίο 1 που έχει ήδη χρησιμοποιηθεί): $P(9,2) = 9 \cdot 8 = 72$
- Οι περιττοί αριθμοί θα καταλήγουν σε 2,5,7 ή 9 (αφού έχουν διαφορετικά ψηφία και το 1 αποκλείεται) $\Rightarrow$ Για κάθε μία από αυτές τις επιλογές υπάρχουν 8 επιλογές για το μεσαίο ψηφίο $\Rightarrow$ Επομένως, συνολικά, υπάρχουν $4 \cdot 8 = 32$ περιττοί ακέραιοι με διαφορετικά ψηφία μεταξύ 100 και 199

Πόσοι από τους πρώτους 10.000 θετικούς ακέραιους έχουν διαφορετικά ψηφία;

- Η απάντηση προκύπτει από το άθροισμα των απαντήσεων στις εξής ερωτήσεις:
  - πόσοι είναι οι 4-ψήφιοι ακέραιοι με διαφορετικά ψηφία; $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ (όχι 0 στην πρώτη θέση, όχι ό,τι επιλέχθηκε για την πρώτη θέση και το 0 στη δεύτερη, όχι ό,τι επιλέχθηκε για τις δύο πρώτες θέσεις στην τρίτη, όχι ό,τι επιλέχθηκε για τις τρεις πρώτες θέσεις στην τέταρτη)
  - πόσοι είναι οι 3-ψήφιοι ακέραιοι με διαφορετικά ψηφία; $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ (όχι 0 στην πρώτη θέση, όχι ό,τι επιλέχθηκε για την πρώτη θέση και το 0 στη δεύτερη, όχι ό,τι επιλέχθηκε για τις δύο πρώτες θέσεις στην τρίτη)
  - πόσοι είναι οι 2-ψήφιοι ακέραιοι με διαφορετικά ψηφία; $9 \cdot 9 = 81$ (όχι 0 στην πρώτη θέση, όχι ό,τι επιλέχθηκε για την πρώτη θέση και το 0 στη δεύτερη)
  - πόσοι είναι οι 1-ψήφιοι ακέραιοι με διαφορετικά ψηφία; 10
  - Επομένως, συνολικά: 5275

Πόσους περιττούς ακέραιους μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 1,2,3,4,5 οι οποίοι έχουν 4 ψηφία και τα ψηφία αυτά είναι διαφορετικά μεταξύ τους;

- Οι ζητούμενοι 4-ψήφιοι ακέραιοι πρέπει να έχουν 1 ή 3 ή 5 στη δεξιότερη θέση.
  4-ψήφιοι με 1 στη δεξιότερη θέση: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
  4-ψήφιοι με 3 στη δεξιότερη θέση: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
  4-ψήφιοι με 5 στη δεξιότερη θέση: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
- Επομένως, συνολικά $3 \cdot 24 = 72$ αριθμοί

Πόσοι πενταψήφιοι ακέραιοι υπάρχουν οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι του 53000 και έχουν ταυτόχρονα τις εξής ιδιότητες: α) τα ψηφία τους είναι διαφορετικά και β) δεν εμφανίζονται σε αυτούς τα ψηφία 0 και 9;

- Αριθμοί που ξεκινάνε από 53 και ακολουθούν 3 ψηφία που δε μπορούν να είναι 0 και 9, ούτε 5 και 3 και πρέπει να είναι και διαφορετικά μεταξύ τους: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
- Αριθμοί που ξεκινάνε από 5 και ακολουθούν 4 ψηφία που δε μπορούν να είναι 0 και 9, ούτε 5, πρέπει να είναι και διαφορετικά μεταξύ τους και τα ψηφία της αριστερότερης θέσης πρέπει να είναι μεγαλύτερα του 3: $4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 480$
- 5-ψήφιοι αριθμοί οι οποίοι στην αριστερότερη θέση έχουν ψηφίο μεγαλύτερο του 5 και όχι 0 ή 9, στην επόμενη θέση όχι ό,τι στην προηγούμενη ούτε 0 ή 9, στην επόμενη θέση όχι ό,τι στις δύο προηγούμενες ούτε 0 ή 9, κοκ: $3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 2520$
- Επομένως, συνολικά $120 + 480 + 2520 = 3120$ αριθμοί

Πόσες λέξεις με 0 και 1 υπάρχουν που έχουν 8 γράμματα και α) ξεκινάνε με 1100 β) περιέχουν ακριβώς δύο 1;

- Για το α) 2^4 λέξεις
- Για το β) $C(8,2) = \dfrac{P(8,2)}{P(2,2)} = \dfrac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$ λέξεις

Τα γράμματα Α,Β,Γ,Δ χρησιμοποιούνται για να σχηματίσουμε λέξεις μήκους 3.
α) Πόσες λέξεις υπάρχουν που περιέχουν το γράμμα Α επιτρεπομένων των επαναλήψεων;
β) Πόσες λέξεις υπάρχουν που αρχίζουν με Α επιτρεπομένων των επαναλήψεων;

- Όλες οι πιθανές λέξεις με 3 γράμματα από τα Α,Β,Γ,Δ είναι 4^3. Αυτές που δεν περιέχουν κανένα Α είναι 3^3. Επομένως, οι ζητούμενες είναι η διαφορά τους: $4^3 - 3^3 = 64 - 27 = 37$ λέξεις.
- Το αριστερότερο γράμμα είναι Α. Οπότε ζητάμε λέξεις 2 γραμμάτων που σχηματίζονται από τα 4 δοσμένα γράμματα: $4^2 = 16$ λέξεις.

Το αγγλικό αλφάβητο περιέχει 26 γράμματα εκ των οποίων τα 5 είναι φωνήεντα. α) Πόσες λέξεις μήκους 5 μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας 3 διαφορετικά σύμφωνα και 2 διαφορετικά φωνήεντα; β) Πόσες από αυτές περιέχουν το γράμμα b;

- Για το α):
  - Διαλέγω 3 από τα 5 γράμματα να είναι σύμφωνα με $C(5,3) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ τρόπους. Για καθέναν από αυτούς υπάρχουν $P(21,3) = 21 \cdot 20 \cdot 19 = 7980$ διατάξεις. Άρα συνολικά $10 \cdot 7980 = 79800$ τρόποι.
  - Διαλέγω 2 από τα 5 γράμματα να είναι φωνήεντα με $C(5,2) = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ τρόπους. Για καθέναν από αυτούς υπάρχουν $P(5,2) = 5 \cdot 4 = 20$ διατάξεις. Άρα συνολικά $10 \cdot 20 = 200$ τρόποι.
  - Άρα συνολικά $79800 \cdot 200 = 1596000$ τρόποι.

Το αγγλικό αλφάβητο περιέχει 26 γράμματα εκ των οποίων τα 5 είναι φωνήεντα. α) Πόσες λέξεις μήκους 5 μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας 3 διαφορετικά σύμφωνα και 2 διαφορετικά φωνήεντα; β) Πόσες από αυτές περιέχουν το γράμμα b;

- Για το β): υπολογίζω πόσες λέξεις δεν περιέχουν το b και τις αφαιρώ από αυτές της ερώτησης α)
  - Διαλέγω 3 από τα 5 γράμματα να είναι σύμφωνα με $C(5,3) = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10$ τρόπους. Για καθέναν από αυτούς υπάρχουν $P(20,3) = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ διατάξεις. Άρα συνολικά $10 \cdot 6840 = 68400$ τρόποι.
  - Διαλέγω 2 από τα 5 γράμματα να είναι φωνήεντα με $C(5,2) = \frac{5\cdot4}{1\cdot2} = 10$ τρόπους. Για καθέναν από αυτούς υπάρχουν $P(5,2) = 5 \cdot 4 = 20$ διατάξεις. Άρα συνολικά $10 \cdot 20 = 200$ τρόποι.
  - Άρα συνολικά $68400 \cdot 200 = 1368000$ τρόποι. Οπότε οι ζητούμενες λέξεις είναι: $1596000 - 1368000 = 228000$

Πόσοι ακέραιοι μεταξύ του 1 και του 10000000000 περιέχουν το ψηφίο 1 και πόσοι δεν το περιέχουν;

- Μεταξύ του 0 και του 9999999999, 9^{10} αριθμοί δεν περιέχουν το 1
  - Αυτός είναι ο αριθμός των διατάξεων 9 στοιχείων $(0, 2, 3, ..., 9)$ σε 10 θέσεις με επαναλήψεις
- Επομένως, μεταξύ του 1 και του 10000000000:
  - $9^{10} - 1$ αριθμοί δεν περιέχουν το ψηφίο 1 και
  - οι υπόλοιποι $10^{10} - 9^{10} + 1$ το περιέχουν

Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί του δεκαδικού συστήματος δεν έχουν δύο ψηφία ίδια;

- Για να είναι τετραψήφιος κάποιος αριθμός δεν πρέπει να έχει 0 στην αριστερότερη θέση, στην οποία μπορεί να βρίσκεται ένα από τα εναπομείναντα 9 ψηφία $(1, \ldots 9)$.
- Άρα, το πλήθος των ζητούμενων αριθμών είναι: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4.536$

Πόσες είναι οι συμβολοσειρές της μορφής ww^R μήκους 10 με κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου χωρίς τόνους;

- Τα πέντε πρώτα γράμματα καθορίζουν και τα πέντε επόμενα.
- Επομένως, ασχολούμαι μόνο με τα πέντε πρώτα και υπολογίζω πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να συνθέσω πεντάδες.
- Η επιλογή του κάθε γράμματος είναι ανεξάρτητη και καθένα μπορεί να πάρει 24 διαφορετικές τιμές. Άρα συνολικά, μπορούμε να φτιάξουμε $\underbrace{24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24}_{5 \text{ φορές}} = 24^5$ διαφορετικές λέξεις των πέντε γραμμάτων. (Κανόνας γινομένου)
- Τόσες είναι και οι ζητούμενες συμβολοσειρές, αφού τα πέντε πρώτα γράμματα καθορίζουν και τα πέντε επόμενα.

Έχω 24 αριθμημένες (διαφορετικές) πράσινες μπάλες και 24 αριθμημένες κόκκινες μπάλες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διαλέξω μία πράσινη και μία κόκκινη μπάλα;

- Πράσινη μπάλα μπορώ να διαλέξω με 24 τρόπους.
  Κόκκινη μπάλα μπορώ να διαλέξω με 24 τρόπους.
  Για να συμβαίνουν και τα δύο μαζί υπάρχουν $24 \cdot 24 = 576$ διαφορετικοί τρόποι. (Κανόνας γινομένου)

Έχω 24 αριθμημένες (διαφορετικές) πράσινες μπάλες και 24 αριθμημένες κόκκινες μπάλες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διαλέξω δύο μπάλες χωρίς περιορισμό χρώματος;

Μπορώ να διαλέξω δύο μπάλες με 3 διαφορετικούς τρόπους:

- Να διαλέξω μία κόκκινη και μία πράσινη: αυτό μπορεί να γίνει με $24 \cdot 24 = 24^2$ διαφορετικούς τρόπους (Κανόνας γινομένου)
- Να διαλέξω δύο κόκκινες: αυτό μπορεί να γίνει με $24 \cdot 23$ διαφορετικούς τρόπους, την πρώτη τη διαλέγω από 24 μπάλες και τη δεύτερη από τις υπόλοιπες 23
- Να διαλέξω δύο πράσινες: όμοια με πριν (Κανόνας γινομένου)

Επειδή μπορώ να διαλέξω 2 μπάλες με έναν από τους παραπάνω τρόπους (κανόνας αθροίσματος), αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν συνολικά: $24^2 + 24 \cdot 23 + 24 \cdot 23 = 1680$ διαφορετικοί τρόποι.

Έχω 5 Ελληνικά, 7 Αγγλικά και 10 Ισπανικά βιβλία (συνολικά 22).

- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διαλέξω δύο βιβλία;
  Το πρώτο το διαλέγω από 22 διαθέσιμα και το δεύτερο από τα υπόλοιπα 21 διαθέσιμα.
  Άρα συνολικά $22 \cdot 21 = 462$ διαφορετικοί τρόποι.
- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διαλέξω δύο βιβλία διαφορετικής γλώσσας;
  Μπορώ να διαλέξω Ελληνικό και Αγγλικό (35 τρόποι), Ελληνικό και Ισπανικό (50 τρόποι), Αγγλικό και Ισπανικό (70 τρόποι).
  Άρα συνολικά $35 + 50 + 70 = 155$ διαφορετικοί τρόποι.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διαλέξω και να βάλω σε σειρά 5 από 20 μαθητές;

- Με $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = P(20,5) = \frac{20!}{15!}$ διαφορετικούς τρόπους.

Με πόσους τρόπους μπορούν να καθήσουν 5 άτομα σε μια σειρά από 12 καθίσματα;

- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διατάξω τα 12 καθίσματα; $\Leftrightarrow$ Πόσες μεταθέσεις των 12 καθισμάτων υπάρχουν; 12!
- Θεωρώ ότι πάντα τοποθετώ τα 5 άτομα στα πρώτα 5 καθίσματα κάθε μετάθεσης
- Για τις 7-άδες που μένουν άδειες, δε με ενδιαφέρει η σειρά $\Rightarrow$ για κάθε μετάθεση κρατάω 1 από τις 7! διαφορετικές
- Άρα, έχω συνολικά: $\dfrac{12!}{7!} = 95.040$ τρόπους

Με πόσους τρόπους μπορούν να καθήσουν 5 άτομα σε μια σειρά από 12 καθίσματα; (Εναλλακτική λύση)

- Διαλέγω 7 από τα 12 καθίσματα να είναι άδεια $\Rightarrow$ Αυτό μπορώ να το κάνω με $\binom{12}{7}$ διαφορετικούς τρόπους
- 5 άτομα σε 5 θέσεις (που μένουν) με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να τα τοποθετήσω; Με 5!
- Επομένως, και τα δύο παραπάνω σημεία μπορούν να συμβούν με $\binom{12}{7} \cdot 5! = \frac{12!}{7!} = 95.040$ διαφορετικούς τρόπους

Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν 3 αριθμοί από το 1 έως το 300 έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι διαιρετό με 3;

- Χωρίζουμε τους αριθμούς από 1 έως 300, $U = \{1, ..., 300\}$, σε τρία υποσύνολα Α, Β και Γ έτσι ώστε:
- $A \cup B \cup \Gamma = S$
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cap \Gamma = \emptyset$ και $B \cap \Gamma = \emptyset$
-
  - $A = \{x \in S : x \mod 3 = 0\}$, $A = \{3, 6, 9, ..., 300\}$
  - $B = \{y \in S : y \mod 3 = 1\}$, $B = \{1, 4, 7, ..., 298\}$
  - $\Gamma = \{z \in S : z \mod 3 = 2\}$, $\Gamma = \{2, 5, 8, ..., 299\}$
  - $|A| = |B| = |\Gamma| = 100$
- Για να είναι το άθροισμα τριών αριθμών διαιρετό με 3, πρέπει
  - είτε και οι τρεις να ανήκουν στο A, είτε και οι τρεις στο B, είτε και οι τρεις στο Γ, δηλ. $\binom{100}{3} + \binom{100}{3} + \binom{100}{3}$
  - είτε ένας αριθμός να ανήκει σε καθένα από τα τρία αυτά υποσύνολα, δηλ. $\binom{100}{1}\binom{100}{1}\binom{100}{1}$
  - Άρα συνολικά: $3 \cdot \binom{100}{3} + 100^3 = 1.485.100$

Ποιος είναι ο αριθμός των διαιρετών του 180;

- $180 = 2 \cdot 90 = 2 \cdot 2 \cdot 45 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
- Από Θεωρία Αριθμών, διαιρέτες του 180 είναι οι αριθμοί της μορφής $2^k \cdot 3^n \cdot 5^m$ με $0 \leq k \leq 2$, $0 \leq n \leq 2$ και $0 \leq m \leq 1$
- Μπορώ να επιλέξω το k με 3 τρόπους, το n με 3 τρόπους και το m με 2 τρόπους και θέλω όλα αυτά να ισχύουν μαζί
- Έπομένως, έχω συνολικά, $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ τρόπους

Πόσους διαιρέτες έχει ο αριθμός 1400;

- $1400 = 2 \cdot 700 = 2 \cdot 2 \cdot 350 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 175 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 35 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$
- Από Θεωρία Αριθμών, διαιρέτες του 1400 είναι οι αριθμοί της μορφής $2^k \cdot 5^n \cdot 7^m$ με $0 \leq k \leq 3$, $0 \leq n \leq 2$ και $0 \leq m \leq 1$
- Μπορώ να επιλέξω το k με 4 τρόπους, το n με 3 τρόπους και το m με 2 τρόπους και θέλω όλα αυτά να ισχύουν μαζί
- Έπομένως, έχω συνολικά, $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ τρόπους

Στοιχειώδης συνδυαστική

- Συνδυασμοί και διατάξεις με επανάληψη

Διατάξεις με επανάληψη

- Με πόσους τρόπους μπορώ να διατάξω r από n αντικείμενα όταν επιτρέπονται επαναληπτικές εμφανίσεις των αντικειμένων;
  - Υπάρχουν n επιλογές για το πρώτο αντικείμενο, n επιλογές για το δεύτερο αντικείμενο, ..., n επιλογές για το r-τό αντικείμενο $\Rightarrow \underbrace{n \cdot n \ldots \cdot n}_{r \text{ φορές}} = n^r$
  - Στην αρχή έχω n αντικείμενα από τα οποία να διαλέξω ένα. Μετά την επιλογή μου αυτή, τοποθετώ το αντικείμενο που διάλεξα μαζί με τα υπόλοιπα. Άρα την δεύτερη φορά έχω πάλι n αντικείμενα στην διάθεσή μου για να διαλέξω. Όμοια για κάθε μια από τις r επιλογές μου.

Διατάξεις με επανάληψη

- Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί υπάρχουν στο δεκαδικό σύστημα;
  Καθένα από τα 4 ψηφία μπορώ να το διαλέξω με 10 διαφορετικούς τρόπους. Άρα συνολικά 10^4 τεραψήφιοι αριθμοί.
- Πόσα διαφορετικά υποσύνολα ενός συνόλου S με n στοιχεία υπάρχουν;
  Καθένα από τα n στοιχεία μπορώ να το διαλέξω με 2 διαφορετικούς τρόπους: να το επιλέξω ή να μην το επιλέξω. Άρα συνολικά 2^n υποσύνολα.

Συνδυασμοί με επανάληψη

- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω r από n αντικείμενα όταν επιτρέπονται επαναληπτικές εμφανίσεις των αντικειμένων;
  - Το σύνολο των αντικειμένων από το οποίο γίνεται η επιλογή είναι το $\{1, ..., n\}$
  - Ένας συνδυασμός r αντικειμένων από n με επανάληψη είναι μια ακολουθία $x_1, x_2, ..., x_r$ με $1 \leq x_i \leq n$ και $x_i \leq x_j$ όταν $1 \leq i \leq j \leq r$ ή αλλιώς τα αντικείμενα κάθε ακολουθίας που προκύπτει τα διατάσσω σε αύξουσα σειρά αφού τα αντικείμενα με ενδιαφέρουν και όχι η σειρά τους
  - Αλλά επειδή επιτρέπεται να διαλέξω σε διαφορετικές θέσεις το ίδιο αντικείμενο πρέπει να βρω έναν τρόπο να ορίσω τους όρους κάθε ακολουθίας μονοσήμαντα $\Rightarrow$ Χρησιμοποιώ την 1-1 και επί αντιστοιχία
    $(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow (x_1 + 0, x_2 + 1, ..., x_n + r - 1)$
  - Οπότε πλέον διαλέγω r αντικείμενα από $n + r - 1$ χωρίς επανάληψη, δηλ. $C(n + r - 1, r)$ (που ξέρω να το υπολογίζω)

Συνδυασμοί με επανάληψη

- r αντικειμένων επιλεγμένων από n αντικείμενα

$$\binom{n+r-1}{r}$$

Πόσες ζαριές υπάρχουν στο τάβλι;

- Κάθε ζάρι μπορεί να πάρει $n = 6$ διαφορετικές τιμές, έχω $r = 2$ ζάρια και μετράω τις επαναλήψεις
- Διαλέγω $r = 2$ από $n = 6$ αντικείμενα με επανάληψη $\Leftrightarrow$ Ψάχνω τους συνδυασμούς $r = 2$ από $n = 6$ αντικειμένων με επανάληψη
- Άρα, έχω συνολικά, $\binom{n+r-1}{r} = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$ ζαριές

Από έναν μεγάλο αριθμό από νομίσματα των 0,05E, 0,10E, 0,20E και 0,50E, με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 6 κέρματα;

- Διαλέγω 6 $(= r)$ κέρματα από ένα σύνολο με 4 $(= n)$ αντικείμενα και επιτρέπονται οι επαναλήψεις $\Rightarrow$
  $C(n + r - 1, r) = C(4 + 6 - 1, 6) = C(9, 6) = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = 84$

Στοιχειώδης συνδυαστική

- Ομάδες μη διακεκριμένων (δηλ. ίδιων) αντικειμένων

Μετρήσεις αντικειμένων σε ομάδες

- n αντικείμενα διαχωρισμένα σε t ομάδες, με πλήθος στοιχείων $q_1, q_2, ..., q_t$ αντίστοιχα
- Τα αντικείμενα κάθε ομάδας είναι ίδια (δεν είναι διακεκριμένα)

- Διατάξεις: $\dfrac{n!}{q_1!q_2!...q_t!}$
  Υπάρχουν $n!$ τρόποι να διατάξω n διαφορετικά (διακεκριμένα) αντικείμενα. Επειδή όμως τα αντικείμενα κάθε ομάδας είναι ίδια (δεν είναι διακεκριμένα) μεταξύ τους, διαιρώ με τον αριθμό των δυνατών διατάξεων κάθε ομάδας ($q_1!...q_t!$).
- Συνδυασμοί: $(q_1 + 1)(q_2 + 1)...(q_t + 1) - 1$
  Μπορώ να επιλέξω το πρώτο αντικείμενο των n με $(q_1 + 1)$ τρόπους: είτε να μην το επιλέξω, είτε να το επιλέξω μια φορά, είτε δυο φορές, ..., είτε q_1 φορές. Ομοίως για τα υπόλοιπα. Ο όρος '-1' μπαίνει στο τέλος για να μην μετρήσω το ενδεχόμενο να μην επιλέξω κανένα αντικείμενο.

Μετρήσεις αντικειμένων σε ομάδες

- n αντικείμενα διαχωρισμένα σε t ομάδες, με πλήθος στοιχείων $q_1, q_2, ..., q_t$ αντίστοιχα
- Τα αντικείμενα κάθε ομάδας είναι ίδια (δεν είναι διακεκριμένα)

- Διατάξεις: $\dfrac{n!}{q_1!q_2!...q_t!}$
  Υπάρχουν $n!$ τρόποι να διατάξω n διαφορετικά (διακεκριμένα) αντικείμενα. Επειδή όμως τα αντικείμενα κάθε ομάδας είναι ίδια (δεν είναι διακεκριμένα) μεταξύ τους, διαιρώ με τον αριθμό των δυνατών διατάξεων κάθε ομάδας $(q_1!...q_t!)$.
- Συνδυασμοί: $(q_1 + 1)(q_2 + 1)...(q_t + 1) - 1$
  Μπορώ να επιλέξω το πρώτο αντικείμενο των n με $(q_1 + 1)$ τρόπους: είτε να μην το επιλέξω, είτε να το επιλέξω μια φορά, είτε δυο φορές, ..., είτε q_1 φορές. Ομοίως για τα υπόλοιπα. Ο όρος '-1' μπαίνει στο τέλος για να μην μετρήσω το ενδεχόμενο να μην επιλέξω κανένα αντικείμενο.

Μετρήσεις αντικειμένων σε ομάδες

- n αντικείμενα διαχωρισμένα σε t ομάδες, με πλήθος στοιχείων $q_1, q_2, ..., q_t$ αντίστοιχα
- Τα αντικείμενα κάθε ομάδας είναι ίδια (δεν είναι διακεκριμένα)

- Διατάξεις: $\dfrac{n!}{q_1!q_2!...q_t!}$
  Υπάρχουν $n!$ τρόποι να διατάξω n διαφορετικά (διακεκριμένα) αντικείμενα. Επειδή όμως τα αντικείμενα κάθε ομάδας είναι ίδια (δεν είναι διακεκριμένα) μεταξύ τους, διαιρώ με τον αριθμό των δυνατών διατάξεων κάθε ομάδας $(q_1!...q_t!)$.
- Συνδυασμοί: $(q_1+1)(q_2+1)...(q_t+1)-1$
  Μπορώ να επιλέξω το πρώτο αντικείμενο των n με (q_1+1) τρόπους: είτε να μην το επιλέξω, είτε να το επιλέξω μια φορά, είτε δυο φορές, ..., είτε q_1 φορές. Ομοίως για τα υπόλοιπα. Ο όρος '-1' μπαίνει στο τέλος για να μην μετρήσω το ενδεχόμενο να μην επιλέξω κανένα αντικείμενο.

Έχω 7 α, 8 β, 5 γ και 4 δ. Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μπορώ να φτιάξω με αυτά;

- $\frac{24!}{7!8!5!4!}$

Με πόσους τρόπους μπορούν να χρωματιστούν 12 μπάλες έτσι ώστε 3 να είναι κόκκινες, 2 ροζ, 2 άσπρες και οι υπόλοιπες πράσινες;

- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διατάξω τις 12 μπάλες; $\Leftrightarrow$ Πόσες μεταθέσεις των 12 μπαλών υπάρχουν; 12!
- Θεωρώ ότι πάντα χρωματίζω κόκκινες τις 3 πρώτες, ροζ τις 2 επόμενες, άσπρες τις 2 επόμενες και πράσινες τις υπόλοιπες, χωρίς να με ενδιαφέρει η σειρά μέσα στις ομάδες αυτές $\Rightarrow$ Μετράω 1 από τις 3! αρχικές (κόκκινες) τριάδες, 1 από τις 2! επόμενες (ροζ) δυάδες, μία από τις 2! επόμενες (άσπρες) δυάδες και 1 από τις επόμενες 5! (πράσινες) πεντάδες
- Άρα, έχω συνολικά $\dfrac{12!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 5!} = 166.320$ τρόπους

Στοιχειώδης συνδυαστική

- Υποσύνολα

Υποσύνολα

- Δεν επιτρέπονται επαναλήψεις και δε μετράει η διάταξη. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω ένα ή περισσότερα από n αντικείμενα;
  - Για κάθε ένα από τα n αντικείμενα υπάρχουν 2 τρόποι: να το επιλέξω ή να μην το επιλέξω και θέλω να επιλέξω τουλάχιστον 1 αντικείμενο

$$\Rightarrow \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ φορές}} - 1 = 2^n - 1 \text{ τρόποι}$$

    (αφαιρώ 1 για να εξαιρέσω την περίπτωση που δεν επιλέγω κανένα αντικείμενο)
- Υπάρχουν $C(n, k)$ τρόποι να διαλέξω k αντικείμενα από n $\Rightarrow$

$$2^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} C(n, k) \Leftrightarrow 2^n = \sum_{k=1}^{n} C(n, k) + 1 \Leftrightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)$$

Υποσύνολα

- Έχουμε t ομάδες που περιέχουν αντίστοιχα $q_1, q_2, ..., q_t$ ίδια (μη διακεκριμένα) αντικείμενα. Δε μετράει η διάταξη. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω ένα ή περισσότερα αντικείμενα;
  - Για κάθε ομάδα t_i έχω q_{t_i} επιλογές $+ 1$ (δεν επιλέγω κανένα στοιχείο από την ομάδα)
  - Άρα συνολικά έχω $(q_1 + 1)(q_2 + 1)...(q_t + 1) - 1$ τρόπους

Ποιος είναι ο αριθμός των διαιρετών του 180; (Εναλλακτική λύση)

- $180 = 2 \cdot 90 = 2 \cdot 2 \cdot 45 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
- Οι διαιρέτες σχηματίζονται από συνδυασμούς από τις εξής τρεις ομάδες: $A = \{2, 2\}$, $B = \{3, 3\}$ και $\Gamma = \{5\}$
  - Από την ομάδα A μπορώ να επιλέξω 1, 2 ή κανένα στοιχείο (3 επιλογές)
  - από την ομάδα B μπορώ να επιλέξω 1, 2 ή κανένα στοιχείο (3 επιλογές)
  - από την ομάδα Γ μπορώ να επιλέξω 1 ή κανένα στοιχείο (2 επιλογές)
- Έπομένως, ο αριθμός των διαιρετών του 180 είναι $(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 18$. Δεν αφαιρώ 1 για την περίπτωση $2^0 3^0 5^0 = 1$ γιατί δίνει διαιρέτη του 180

Ποιος είναι ο αριθμός των διαιρετών του 1400; (Εναλλακτική λύση)

- $1400 = 2 \cdot 700 = 2 \cdot 2 \cdot 350 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 175 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 35 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$
- Οι διαιρέτες σχηματίζονται από συνδυασμούς από τις εξής τρεις ομάδες: $A = \{2, 2, 2\}$, $B = \{5, 5\}$ και $\Gamma = \{7\}$
  - Από την ομάδα A μπορώ να επιλέξω 1, 2, 3 ή κανένα στοιχείο (4 επιλογές)
  - από την ομάδα B μπορώ να επιλέξω 1, 2 ή κανένα στοιχείο (3 επιλογές)
  - από την ομάδα Γ μπορώ να επιλέξω 1 ή κανένα στοιχείο (2 επιλογές)
- Έπομένως, ο αριθμός των διαιρετών του 1400 είναι $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$. Δεν αφαιρώ 1 για την περίπτωση $2^0 5^0 7^0 = 1$ γιατί δίνει διαιρέτη του 1400

Σύντομη επανάληψη...

- Ένα γεγονός μπορεί να συμβεί κατά m τρόπους και ένα άλλο κατά n τρόπους τότε ένα από τα δύο μπορεί να συμβεί με $m+n$ τρόπους ενώ και τα δύο μπορούν να συμβούν κατά mn τρόπους.
- Χωρίς επαναλήψεις στοιχείων
  - $P(n,r) = \underbrace{n(n-1)\ldots)n-r+1)}_{r \text{ όροι}} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
  - $C(n,r) = \dbinom{n}{r} = \dfrac{P(n,r)}{P(r,r)} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
- Με επαναλήψεις στοιχείων
  - $P(n,r) = \underbrace{n \cdot n \ldots \cdot n}_{r \text{ φορές}} = n^r$
  - $C(n,r) = \dbinom{n+r-1}{r}$

Σύντομη επανάληψη...

Δίνονται n αντικείμενα διαχωρισμένα σε t ομάδες, με πλήθος στοιχείων $q_1, q_2, ..., q_t$ αντίστοιχα, και τα αντικείμενα κάθε ομάδας είναι ίδια (δεν είναι διακεκριμένα)

- Διατάξεις: $\dfrac{n!}{q_1!q_2!...q_t!}$
- Συνδυασμοί: $(q_1 + 1)(q_2 + 1)...(q_t + 1) - 1$

Δεν επιτρέπονται επαναλήψεις και δε μετράει η σειρά. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω ένα ή περισσότερα από n αντικείμενα;

- $\Rightarrow \underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{n \text{ φορές}} - 1 = 2^n - 1$ τρόποι
- Υπάρχουν $C(n, k)$ τρόποι να διαλέξω k αντικείμενα από n $\Rightarrow$

$$2^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} C(n, k) \Leftrightarrow 2^n = \sum_{k=1}^{n} C(n, k) + 1 \Leftrightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)$$

Να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί 1) $\frac{(3n)!}{2^n 3^n}$ και 2) $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ είναι ακέραιοι.

Για το 1):

- Έχουμε $3n$ στοιχεία χωρισμένα σε n ομάδες.
- Κάθε μία από τις n ομάδες περιέχει 3 ίδια στοιχεία.
- Ο αριθμός των μεταθέσεων των $3n$ στοιχείων είναι:

$$\frac{(3n)!}{3!3!\ldots3!} = \frac{(3n)!}{(3!)^n} = \frac{(3n)!}{(2\cdot3)^n} = \frac{(3n)!}{2^n\cdot3^n}$$

που είναι ακέραιος γιατί αναπαριστά αριθμό μεταθέσεων.

Να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί 1) $\dfrac{(3n)!}{2^n 3^n}$ και 2) $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ είναι ακέραιοι.

Για το 2):

- Έχουμε n^2 στοιχεία χωρισμένα σε n ομάδες.
- Κάθε μία από τις n ομάδες περιέχει n ίδια στοιχεία.
- Ο αριθμός των μεταθέσεων των n^2 στοιχείων είναι:

$$\frac{(n^2)!}{n!n!\dots n!} = \frac{(n^2)!}{(n!)^n}$$

που είναι αριθμός διαιρετός με $n!$ αφού για κάθε μια από τις μεταθέσεις των n στοιχείων έχουμε ίσο αριθμό μεταθέσεων των n^2 στοιχείων. Επομένως και ο αριθμός $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ είναι ακέραιος.

(α) Πόσες από τις 2^r ακολουθίες r δυαδικών ψηφίων περιέχουν ζυγό αριθμό μονάδων;
(β) Πόσες από τις 5^r ακολουθίες r δυαδικών ψηφίων περιέχουν ζυγό αριθμό μονάδων;

Για το (α):

- Χωρίζω τις 2^n δυαδικές ακολουθίες μήκους r σε 2^{r-1} ζευγάρια έτσι ώστε οι ακολουθίες σε κάθε ζευγάρι να διαφέρουν μόνο στο δεξιότερο ψηφίο τους (δηλ. στο στοιχείο της r-ής θέσης τους).
- Σε κάθε ένα από τα ζεύγη αυτά μόνο μία από τις ακολουθίες έχει άρτιο αριθμό μονάδων.
- Επομένως, υπάρχουν 2^{r-1} ακολουθίες r δυαδικών ψηφίων με ζυγό αριθμό μονάδων.

(α) Πόσες από τις 2^r ακολουθίες r δυαδικών ψηφίων περιέχουν ζυγό αριθμό μονάδων;
(β) Πόσες από τις 5^r πενταδικές ακολουθίες r ψηφίων περιέχουν ζυγό αριθμό μονάδων;

Για το (β):

- Από τις 5^r πενταδικές ακολουθίες 3^r περιέχουν μόνο τα ψηφία 2,3 και 4. Αυτές συμπεριλαμβάνονται σε εκείνες που έχουν άρτιο αριθμό μονάδων.
- Τις υπόλοιπες $5^r - 3^r$ ακολουθίες τις χωρίζουμε σε ομάδες ανάλογα με το σχηματισμό των ψηφίων 2,3 και 4 που περιέχουν. Σε κάθε μια από αυτές τις ομάδες οι μισές ακολουθίες θα περιέχουν άρτιο αριθμό μονάδων.
- Επομένως, ο συνολικός αριθμός των πενταδικών ακολουθιών r ψηφίων με άρτιο πλήθος μονάδων είναι: $3^r + \frac{1}{2}(5^r - 3^r)$

Μεταξύ $2n$ αντικειμένων τα n είναι ίδια. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω n από τα δοσμένα $2n$ αντικείμενα;

Μπορούμε να διαλέξουμε n αντικείμενα από τα $2n$ ως εξής:

- διαλέγω με 1 τρόπο n ίδια αντικείμενα και με $\binom{n}{0}$ τρόπους 0 από τα διαφορετικά n αντικείμενα,
- διαλέγω με 1 τρόπο $n-1$ ίδια αντικείμενα και με $\binom{n}{1}$ τρόπους 1 από τα διαφορετικά n αντικείμενα,
- διαλέγω με 1 τρόπο $n-2$ ίδια αντικείμενα και με $\binom{n}{2}$ τρόπους 2 από τα διαφορετικά n αντικείμενα,
- κόκ
- διαλέγω με 1 τρόπο 0 ίδια αντικείμενα και με $\binom{n}{n}$ τρόπους n από τα διαφορετικά n αντικείμενα.

Άρα συνολικά: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ τρόπους.

Μεταξύ $2n$ αντικειμένων τα n είναι ίδια. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω n από τα δοσμένα $2n$ αντικείμενα;

Εναλλακτική λύση:

- Θεωρούμε n διαδοχικές θέσεις όπου κάθε μία αντιπροσωπεύει ένα από τα n διαφορετικά αντικείμενα.
- Για κάθε μία από αυτές τις θέσεις έχουμε 2 επιλογές: να επιλέξουμε το αντικείμενό της ή να μην το επιλέξουμε και να βάλουμε στη θέση του ένα από τα n ίδια αντικείμενα.
- Άρα συνολικά: 2^n τρόποι.

Μεταξύ $3n+1$ αντικειμένων τα n είναι ίδια. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω n από τα δοσμένα $3n+1$ αντικείμενα;

Μπορούμε να διαλέξουμε n αντικείμενα από τα $3n+1$ ως εξής:

- διαλέγω με 1 τρόπο n ίδια αντικείμενα και με $\binom{2n+1}{0}$ τρόπους 0 από τα διαφορετικά $2n+1$ αντικείμενα,
- διαλέγω με 1 τρόπο $n-1$ ίδια αντικείμενα και $\binom{2n+1}{1}$ τρόπους 1 από τα διαφορετικά $2n+1$ αντικείμενα,
- διαλέγω με 1 τρόπο $n-2$ ίδια αντικείμενα και $\binom{2n+1}{2}$ τρόπους 2 από τα διαφορετικά $2n+1$ αντικείμενα,
- κόκ
- διαλέγω με 1 τρόπο 0 ίδια αντικείμενα και $\binom{2n+1}{n}$ τρόπους n από τα διαφορετικά $2n+1$ αντικείμενα.

Άρα συνολικά:

$$\binom{2n+1}{0}+\binom{2n+1}{1}+\ldots+\binom{2n+1}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{i}=2^{2n} \text{ τρόπους.}$$

Μεταξύ $3n+1$ αντικειμένων τα n είναι ίδια. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω n από τα δοσμένα $3n+1$ αντικείμενα;

$$2^{2n+1} = \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \ldots + \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} + \ldots + \binom{2n+1}{2n+1} \Rightarrow$$
$$2^{2n+1} = \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \ldots + \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n} + \ldots + \binom{2n+1}{0} \Rightarrow$$
$$2^{2n+1} = 2 \cdot \left[\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \ldots + \binom{2n+1}{n}\right] \Rightarrow$$
$$\left[\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \ldots + \binom{2n+1}{n}\right] = 2^{2n}$$

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ Γιατί;
  Έχω k ίδια καπέλα και θέλω να τα δώσω σε n άτομα. Είτε διαλέξω τα k άτομα στα οποία θα δώσω καπέλο είτε τα $n-k$ στα οποία δε θα δώσω είναι το ίδιο.

Στοιχειώδης συνδυαστική

- Διανομή αντικειμένων σε υποδοχές

Διανομή Αντικειμένων σε Υποδοχές

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να διανείμουμε r αντικείμενα (διακεκριμένα ή όχι) σε n υποδοχές.
- Διακρίνουμε περιπτώσεις:
  1. Τα αντικείμενα είναι διαφορετικά (διακεκριμένα) και η σειρά στις υποδοχές δε μετράει.

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r} = n^r$$

     Για το πρώτο αντικείμενο έχουμε n επιλογές ως προς το που θα το τοποθετήσουμε. Όμοια για το δεύτερο, αφού δεν απαγορεύεται να ρίξουμε δυο αντικείμενα στην ίδια υποδοχή, κοκ. Άρα συνολικά μπορώ να τοποθετήσω τα r αντικείμενα στις n υποδοχές με n^r τρόπους.

Διανομή Αντικειμένων σε Υποδοχές

2. Τα αντικείμενα είναι διαφορετικά (διακεκριμένα) και η σειρά σε κάθε υποδοχή μετράει.

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$$

Αρχικά διατάσσω τα r αντικείμενα. Θα προσομοιώσω τις n υποδοχές με $(n+1)$ κάθετες γραμμές που θα τοποθετήσω ανάμεσα στα διατεταγμένα αντικείμενα. Αντικείμενα που βρίσκονται μεταξύ της i-στής και της $(i+1)$-στής γραμμής θα θεωρούμε ότι βρίσκονται στην i-στή υποδοχή.

$$\underbrace{|\alpha_1\alpha_3\alpha_5|\alpha_2\alpha_6|........|}_{n \text{ υποδοχές}}$$

Διανομή Αντικειμένων σε Υποδοχές

2. Τα αντικείμενα είναι διαφορετικά (διακεκριμένα) και η σειρά σε κάθε υποδοχή μετράει.

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$$

$$\underbrace{|\alpha_1\alpha_3\alpha_5|\alpha_2\alpha_6|........|}_{n \text{ υποδοχές}}$$

Από τις $n+1$ γραμμές που τοποθέτησα, μόνο οι $n-1$ ορίζουν τις υποδοχές (μπορώ να αγνοήσω τις ακραίες). Ο συνολικός αριθμός αντικειμένων που έχω είναι $r+(n-1)$ (r αρχικά αντικείμενα και $n-1$ γραμμές), και μπορώ να τα διατάξω με $(n+r-1)!$ τρόπους. Όμως τα $n-1$ αντικείμενα (οι γραμμές) είναι ίδια (δεν είναι διακεκριμένα), άρα έχω μόνο $\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$ διαφορετικούς τρόπους.

Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να περάσουν k (διαφορετικά) αυτοκίνητα από n διαφορετικούς υπαλλήλους διοδίων όταν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία κάθε υπάλληλος εξυπηρετεί τα αυτοκίνητα;

- Το πρώτο αυτοκίνητο έχει n επιλογές όσοι και οι υπάλληλοι.
- Το δεύτερο αυτοκίνητο έχει $n+1$ επιλογές: αν πάει στον υπάλληλο που πήγε και το πρώτο αυτοκίνητο να πάει πρίν ή μετά από αυτό.
- Το τρίτο αυτοκίνητο έχει $n+2$ επιλογές: αν πάει στον υπάλληλο που πήγε και το πρώτο αυτοκίνητο να πάει πρίν ή μετά από αυτό, αν πάει στον υπάλληλο που πήγε και το δεύτερο αυτοκίνητο να πάει πρίν ή μετά από αυτό.
- Το k αυτοκίνητο έχει $n+k-1$ επιλογές: όμοια όπως προηγουμένως.

Άρα συνολικά (από κανόνα γινομένου) υπάρχουν
$n(n+1)...(n+k-1) = \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$ διαφορετικοί τρόποι.

Διανομή Αντικειμένων σε Υποδοχές

3. Τα αντικείμενα είναι ίδια (δεν είναι διακεκριμένα).

$$\binom{n+r-1}{r}$$

Όπως στην προηγούμενη περίπτωση, μόνο που αυτή τη φορά και τα r αντικείμενα είναι ίδια (δεν είναι διακεκριμένα), επομένως έχουμε μόνο $\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$ διαφορετικούς τρόπους να τα διατάξουμε.

Διανομή αντικειμένων σε υποδοχές: με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε r διαφορετικά (διακεκριμένα) αντικείμενα σε n διαφορετικές (διακεκριμένες) υποδοχές όταν δε μετράει η σειρά

- Για το αντικείμενο 1 έχουμε n τρόπους (δηλ. μπορούμε να το τοποθετήσουμε σε κάθε μία από τις n διαθέσιμες υποδοχές)
- Για το αντικείμενο 2 έχουμε n τρόπους (δηλ. μπορούμε να το τοποθετήσουμε σε κάθε μία από τις n διαθέσιμες υποδοχές)
- ...
- Για το αντικείμενο r έχουμε n τρόπους (δηλ. μπορούμε να το τοποθετήσουμε σε κάθε μία από τις n διαθέσιμες υποδοχές)
- Άρα, συνολικά $\underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{r \text{ φορές}} = n^r$

Διανομή αντικειμένων σε υποδοχές: με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε r διαφορετικά (διακεκριμένα) αντικείμενα σε n διαφορετικές (διακεκριμένες) υποδοχές όταν μετράει η σειρά

- 1ος τρόπος
  - Οι n υποδοχές είναι τα διαστήματα που ορίζονται από $n+1$ σημεία πάνω σε μια ευθεία.
  - Το πρώτο από αυτά τα σημεία μπαίνει πάντα στην αρχή και το τελευταίο πάντα στο τέλος, επομένως υπάρχουν $n-1$ ίδια (μη διακεκριμένα) σημεία που πρέπει να διαχωρίσουν r διαφορετικά (διακεκριμένα) αντικείμενα
  - Επομένως, ζητάμε τις διατάξεις $r+n-1$ αντικειμένων από τα οποία τα $n-1$ είναι ίδια (μη διακεκριμένα). Αυτός είναι: $\frac{(r+n-1)!}{(n-1)!}$

Διανομή αντικειμένων σε υποδοχές: με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε r διαφορετικά (διακεκριμένα) αντικείμενα σε n διαφορετικές (διακεκριμένες) υποδοχές όταν μετράει η σειρά

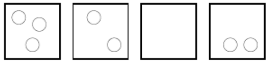
- 2ος τρόπος
  - Για το 1ο από τα r αντικείμενα, υπάρχουν n τρόποι τοποθέτησης σε κάθε μία από τις n διαθέσιμες υποδοχές. Αφού επιλεγεί μία, αυτή χωρίζεται στα δύο.
  - Για το 2ο από τα r αντικείμενα, υπάρχουν $n+1$ τρόποι τοποθέτησης σε κάθε μία από τις n διαθέσιμες υποδοχές και τη 1 νέα. Αφού επιλεγεί μία, αυτή χωρίζεται στα δύο.
  - Για το 3ο από τα r αντικείμενα, υπάρχουν $n+2$ τρόποι τοποθέτησης σε κάθε μία από τις n διαθέσιμες υποδοχές και τις 2 νέες. Αφού επιλεγεί μία, αυτή χωρίζεται στα δύο, κοκ
  - Για το r-ό από τα r αντικείμενα, υπάρχουν $n+r-1$ τρόποι τοποθέτησης σε κάθε μία από τις n διαθέσιμες υποδοχές και τις $r-1$ νέες.
  - Άρα, συνολικά: $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+r-1)$ τρόποι

Διανομή αντικειμένων σε υποδοχές: με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε r ίδια (μη διακεκριμένα) αντικείμενα σε n διαφορετικές (διακεκριμένες) υποδοχές όταν μετράει η σειρά

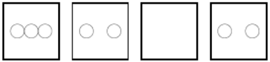
- 1ος τρόπος
  - Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε r διαφορετικά (διακεκριμένα) αντικείμενα σε n διαφορετικές (διακεκριμένες) υποδοχές όταν μετράει η σειρά; $\frac{(r+n-1)!}{(n-1)!}$
  - Αλλά τώρα τα r αντικείμενα είναι ίδια (μη διακεκριμένα) $\Rightarrow$ οι ζητούμενοι τρόποι είναι $\frac{(r+n-1)!}{(n-1)!r!}$

Διανομή αντικειμένων σε υποδοχές: με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε r ίδια (μη διακεκριμένα) αντικείμενα σε n διαφορετικές (διακεκριμένες) υποδοχές όταν μετράει η σειρά

- 2ος τρόπος
  - Όπως πριν με τα διαστήματα στην ευθεία, μόνο που τώρα τόσο η ομάδα που περιέχει τα $n-1$ σημεία όσο και αυτή που περιέχει τα r αντικείμενα περιέχουν ίδια (μη διακεκριμένα) στοιχεία: $\frac{(r+n-1)!}{(n-1)!r!}$



Έστω ότι τοποθετούμε με κάποιον τρόπο τις ίδιες μπάλες στα διαφορετικά κουτιά.



Δεν αλλάζει κάτι αν ευθυγραμμίσουμε τις μπάλες.

Δεν αλλάζει κάτι αν σβήσουμε κάποια όρια από τα κουτιά. Το πώς τοποθετήσαμε τις μπάλες στα κουτιά μπορεί να παρασταθεί με μια ακολουθία από 0 και 1: 0001001100

Αν υπάρχουν r μπάλες και n κουτιά τότε πρέπει να τοποθετήσουμε r ‘0’ και $n-1$ ‘1’ σε $n+r-1$ θέσεις. Αυτό γίνεται με $C(r+n-1,r)$ τρόπους.

Παραδείγματα

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε r ίδιες μπάλες σε n διαφορετικά κουτιά αν κάθε κουτί χωράει μία μόνο μπάλα;
- $C(n, r)$
- Πόσες δυαδικές ακολουθίες 32 ψηφίων έχουν ακριβώς 7 άσσους;
- $C(32, 7)$

Παραδείγματα

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε r ίδιες μπάλες σε n διαφορετικά κουτιά αν κάθε κουτί χωράει μία μόνο μπάλα;
- $C(n, r)$
- Πόσες δυαδικές ακολουθίες 32 ψηφίων έχουν ακριβώς 7 άσσους;
- $C(32, 7)$

Παραδείγματα

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε r ίδιες μπάλες σε n διαφορετικά κουτιά αν κάθε κουτί χωράει μία μόνο μπάλα;
- $C(n, r)$
- Πόσες δυαδικές ακολουθίες 32 ψηφίων έχουν ακριβώς 7 άσσους;
- $C(32, 7)$

Παραδείγματα

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε r ίδιες μπάλες σε n διαφορετικά κουτιά αν κάθε κουτί χωράει μία μόνο μπάλα;
- $C(n, r)$
- Πόσες δυαδικές ακολουθίες 32 ψηφίων έχουν ακριβώς 7 άσσους;
- $C(32, 7)$

Με πόσους τρόπους r ίδιες μπάλες μπορούν να τοποθετηθούν σε n διαφορετικά κουτιά έτσι ώστε κάθε κουτί να περιέχει τουλάχιστον 9 μπάλες;

- 'τουλάχιστον 9 μπάλες σε κάθε κουτί': $9n$ μπάλες.
- Μένουν $r - 9n$ ίδιες μπάλες τις οποίες μπορούμε να τοποθετήσουμε στα n διαφορετικά κουτιά με όλους τους δυνατούς τρόπους $\Rightarrow \frac{(r-9n+n-1)!}{(n-1)!(r-9n)!} = \binom{r-9n+n-1}{r-9n}$

Με πόσους τρόπους r ίδια αντικείμενα μπορούν να τοποθετηθούν σε n υποδοχές έτσι ώστε όλες οι υποδοχές να πάρουν τουλάχιστον 1 αντικείμενο;

- Τοποθετούμε 1 αντικείμενο σε κάθε μία από τις n υποδοχές για να μη μείνει καμία άδεια. Μένουν $r - n$ αντικείμενα.
- Έχουμε $r - n$ ίδια αντκείμενα τα οποία μπορούμε να τοποθετήσουμε στις n υποδοχές με $\binom{n+r-n-1}{r-n}$ τρόπους

Έχω 7 α, 8 β, 5 γ και 4δ. Πόσες συμβολοσειρές μπορώ να φτιάξω αν δεν πρέπει να εμφανίζεται το ‘γα’ σε καμία από αυτές;

- Μόνο με τα 7 α, τα 8 β και τα 4δ μπορώ να φτιάξω $\frac{19!}{7!8!4!}$ διατάξεις χωρίς κανέναν περιορισμό.
- Για κάθε μία από τις παραπάνω διατάξεις, θεωρώ ότι τα 5 γ είναι 5 ίδια αντικείμενα που τοποθετούνται σε διαφορετικές υποδοχές που σχηματίζονται από την υπάρχουσα διάταξη. Έχουμε συνολικά 19 γράμματα που σχηματίζουν 20 διαφορετικές υποδοχές: μία πριν από κάθε γράμμα και μία στο τέλος. Το γ δε μπορεί να τοποθετηθεί πριν από α γιατί θα σχηματιστεί γα. Οπότε μένουν 13 υποδοχές για να τοποθετηθεί το γ: πριν από κάποιο β, πριν από κάποιο δ ή στο τέλος. Οι διαφορετικοί τρόποι να τοποθετηθούν τα 5 γ είναι: $\binom{13+5-1}{5} = \frac{17!}{5!12!}$.
  Άρα συνολικά: $\frac{19!}{7!8!4!} + \frac{17!}{5!12!}$

Έχω n θέσεις στη σειρά και θέλω να τοποθετήσω k φοιτητές για να γράψουν εξετάσεις ώστε μεταξύ κάθε δύο φοιτητών να υπάρχει μία κενή θέση ($n \geq 2k - 1$). Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να το κάνω;

- Βγάζω φοιτητές και θρανία από την αίθουσα.
- Δίνω ένα θρανίο σε κάθε φοιτητή (1 τρόπος υπάρχει αφού τα θρανία είναι ίδια, δεσμεύω k).
- Διατάσσω τους φοιτητές με τα θρανία τους: υπάρχουν $k!$ διαφορετικοί τρόποι αφού οι φοιτητές είναι διαφορετικοί.
- Τοποθετώ ένα άδειο θρανίο ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι φοιτητών (1 τρόπος αφού τα θρανία είναι ίδια, δεσμεύω $k - 1$ θρανία).
- Μοιράζω τα $n - 2k + 1$ ίδια θρανία που περίσσεψαν σε $k + 1$ διαφορετικές υποδοχές. Αυτό γίνεται με $\binom{k+1+n-2k+1-1}{n-2k+1} = \binom{n-k+1}{n-2k+1}$

Άρα συνολικά υπάρχουν $k! \cdot \binom{n-k+1}{n-2k+1}$ διαφορετικοί τρόποι.

Σύντομη επανάληψη: Με πόσους τρόπους μπορούμε να διανείμουμε r αντικείμενα σε n υποδοχές;

- Διαφορετικά αντικείμενα:
  - Δε μετράει η σειρά: $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r} = n^r$
  - Μετράει η σειρά: $\dfrac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$
- Ιδια αντικείμενα: $\dfrac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \dbinom{n+r-1}{r}$

Θέλουμε να στείλουμε ένα μήνυμα με 12 διαφορετικά σύμβολα πάνω από ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι. Επιπλέον των συμβόλων θέλουμε να στείλουμε και 45 κενά μεταξύ των συμβόλων, με τουλάχιστον 3 κενά μεταξύ διαφορετικών συμβόλων. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να μεταδώσουμε το μήνυμα;

- Διαφορετικοί τρόποι για να μεταδώσω μόνο τα 12 διαφορετικά σύμβολα: 12!
- Για καθέναν από αυτούς τους τρόπους, σχηματίζονται 11 θέσεις μεταξύ των 12 συμβόλων, σε κάθε μία από τις οποίες πρέπει να βάλουμε τουλάχιστον 3 κενά: άρα χρησιμοποιούμε άλλους 33 από τους 45 κενούς χαρακτήρες. Μένουν 12 κενά.
- 12 κενά που μένουν $\Leftrightarrow$ 12 ίδια αντικείμενα που θέλουμε να τοποθετήσουμε σε 11 διαφορετικά κουτιά $\Leftrightarrow$ τις θέσεις που είπαμε πριν. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{11+12-1}{12}$ διαφορετικούς τρόπους.

Θέλουμε να στείλουμε ένα μήνυμα με 12 διαφορετικά σύμβολα πάνω από ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι. Επιπλέον των συμβόλων θέλουμε να στείλουμε και 45 κενά μεταξύ των συμβόλων, με τουλάχιστον 3 κενά μεταξύ διαφορετικών συμβόλων. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να μεταδώσουμε το μήνυμα;

Επομένως μπορούμε να μεταδώσουμε το μήνυμα με $12! \cdot \binom{11+12-1}{12} = 3.097 \times 10^{1}4$ διαφορετικούς τρόπους.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε r διαφορετικές σημαίες σε r διαφορετικούς ιστούς με δεδομένα ότι (α) έχει σημασία η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι σημαίες στους ιστούς και (β) κανένας ιστός δεν πρέπει να μείνει άδειος ($r \geq n$);

- Για να ισχύει το (β):
  $P(r, n) = r(r-1)...(r-n+1) = \dfrac{r!}{(r-n)!}$ τρόποι
- Για να ισχύει και το (α): $\dfrac{(r-n+n-1)!}{(n-1)!} = \dfrac{(r-1)!}{(n-1)!}$ τρόποι

Επομένως, συνολικά: $\dfrac{r!}{(r-n)!} \cdot \dfrac{(r-1)!}{(n-1)!}$ τρόποι.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 4 ίδια πορτοκάλια και 6 διαφορετικά μήλα σε 5 διαφορετικά κουτιά; Σε ποιο ποσοστό αυτών των τρόπων τοποθετούνται 2 ακριβώς φρούτα σε κάθε κουτί;

- Τα 4 ίδια πορτοκάλια μπορούμε να τα τοποθετήσουμε στα 5 κουτιά με $\frac{(4+5-1)!}{4!(5-1)!} = \frac{8!}{4!4!} = 70$ διαφορετικούς τρόπους.
- Τα 6 διαφορετικά μήλα μπορούμε να τα τοποθετήσουμε στα 5 κουτιά (χωρίς να μετράει η σειρά) με $5^6 = 15.625$ διαφορετικούς τρόπους.

Επομένως, συνολικά έχουμε $70 \cdot 15.625 = 1.093.750$ διαφορετικούς τρόπους.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 4 ίδια πορτοκάλια και 6 διαφορετικά μήλα σε 5 διαφορετικά κουτιά; Σε ποιο ποσοστό αυτών των τρόπων τοποθετούνται 2 ακριβώς φρούτα σε κάθε κουτί;

Για να έχουμε 2 ακριβώς φρούτα σε κάθε κουτί, ασχολούμαστε πρώτα με τα 4 πορτοκάλια που είναι ίδια:

- Βάζουμε από 2 σε 2 από τα πέντε κουτιά. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι να διαλέξω τα κουτιά αυτά υπάρχουν; $C(5,2) = \frac{5!}{2!3!} = 10$.
  Τα 6 διαφορετικά μήλα μπορώ να τα χωρίσω σε 3 διμελείς ομάδες (μία για καθένα από τα υπόλοιπα 3 κουτιά) με $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ τρόπους.
  Άρα συνολικά $10 \cdot 90 = 900$ τρόποι.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 4 ίδια πορτοκάλια και 6 διαφορετικά μήλα σε 5 διαφορετικά κουτιά; Σε ποιο ποσοστό αυτών των τρόπων τοποθετούνται 2 ακριβώς φρούτα σε κάθε κουτί;

- Βάζουμε 2 πορτοκάλια σε 1 κουτί με $C(5,1) = \frac{5!}{1!4!} = 5$ τρόπους, και από ένα πορτοκάλι σε 2 από τα πέντε κουτιά με $C(4,2) = \frac{4!}{2!2!} = 6$ τρόπους.
  Τα 6 διαφορετικά μήλα μπορώ να τα χωρίσω σε 2 διμελείς ομάδες (μία για καθένα από τα υπόλοιπα 2 κουτιά) με $\frac{6!}{2!2!} = 180$ τρόπους.
  Άρα συνολικά $5 \cdot 6 \cdot 180 = 5.400$ τρόποι.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 4 ίδια πορτοκάλια και 6 διαφορετικά μήλα σε 5 διαφορετικά κουτιά; Σε ποιο ποσοστό αυτών των τρόπων τοποθετούνται 2 ακριβώς φρούτα σε κάθε κουτί;

- Βάζουμε από 1 πορτοκάλια σε 4 κουτιά με $C(5,4) = \frac{5!}{4!1!} = 5$ τρόπους.
  Τα 6 διαφορετικά μήλα μπορώ να τα χωρίσω σε ζευγάρια (για το κουτί που μένει) με $\frac{6!}{2!} = 360$ τρόπους.
  Άρα συνολικά $5 \cdot 360 = 1.800$ τρόποι.

Επομένως, συνολικά $900 + 5.400 + 1.800 = 8.100$ τρόποι. Οπότε το ζητούμενο ποσοστό είναι $\frac{8.100 \times 100}{1.093.750}\% = 7.4\%$

(α) Πόσες ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ με $x_i \geq 0$ υπάρχουν;
(β) Πόσες με $x_i > 0$;
(γ) Πόσες με $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \geq 0$;

- (α) Το πρόβλημα είναι ίδιο με την εύρεση των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης 12 ίδιων αντικειμένων (των μονάδων) σε 4 διαφορετικά κουτιά (τους όρους της εξίσωσης). Επομένως υπάρχουν $\dfrac{(12+4-1)!}{12!(4-1)!} = 455$ τρόποι, δηλ., διαφορετικές λύσεις.

(α) Πόσες ακέραιες λύσεις της εξίσωσης
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ με $x_i \geq 0$ υπάρχουν;
(β) Πόσες με $x_i > 0$;
(γ) Πόσες με $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \geq 0$;

- (β) Το πρόβλημα είναι ίδιο με την εύρεση των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης 12 ίδιων αντικειμένων (των μονάδων) σε 4 διαφορετικά κουτιά (τους όρους της εξίσωσης) αλλά κάνενα κουτί να μην είναι άδειο. Επομένως υπάρχουν $\dfrac{(8+4-1)!}{8!(4-1)!} = 165$ τρόποι, δηλ., διαφορετικές λύσεις.

(α) Πόσες ακέραιες λύσεις της εξίσωσης
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ με $x_i \geq 0$ υπάρχουν;
(β) Πόσες με $x_i > 0$;
(γ) Πόσες με $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \geq 0$;

- (γ) Το πρόβλημα είναι ίδιο με την εύρεση των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης 12 ίδιων αντικειμένων (των μονάδων) σε 4 διαφορετικά κουτιά (τους όρους της εξίσωσης) με τους δοσμένους περιορισμούς. Επομένως υπάρχουν $\dfrac{(4+4-1)!}{4!(4-1)!} = 35$ τρόποι, δηλ., διαφορετικές λύσεις.

(α) Πόσες μη αρνητικές ακέραιες λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + ... + x_6 = 10$;

(β) Πόσες μη αρνητικές ακέραιες λύσεις έχει η ανίσωση $x_1 + x_2 + ... + x_6 < 10$;

- (α) Το πρόβλημα είναι ίδιο με την εύρεση των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης 10 ίδιων αντικειμένων (των μονάδων) σε 6 διαφορετικά κουτιά (τους όρους της εξίσωσης). Επομένως υπάρχουν $\frac{(6+10-1)!}{10!(6-1)!} = 3003$ τρόποι, δηλ., διαφορετικές λύσεις.
- (β) Αντί να ασχοληθώ με την ανίσωση $x_1 + x_2 + ... + x_6 < 10$ ψάχνω ισοδύναμα τις λύσεις της εξίσωσης: $x_1 + x_2 + ... + x_6 + x_7 = 10$ με τους περιορισμούς: $x_i \geq 0, 0 \leq i \leq 6$ και $x_7 > 0$. Το πρόβλημα είναι ίδιο με την εύρεση των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης 10 ίδιων αντικειμένων (των μονάδων) σε 7 διαφορετικά κουτιά, αλλά 1 κουτί πρέπει πάντα να μην είναι άδειο. Επομένως υπάρχουν $\frac{(7+9-1)!}{9!(7-1)!} = 5005$ τρόποι, δηλ., διαφορετικές λύσεις.

Σε ένα μαγαζί τα αντικείμενα Α, Β και Γ κοστίζουν από 5 ευρώ και το αντικείμενο Δ 20 ευρώ. Αν θέλω να ξοδέψω συνολικά 100 ευρώ πόσες διαφορετικές αγορές μπορώ να κάνω;

- Το μικρότερο ποσό είναι τα 5 ευρώ και τα άλλα είναι πολλαπλάσιά του. Οπότε θεωρώ αυτό ως μονάδα και μπορώ να διατυπώσω την παραπάνω ερώτηση ως: $A + B + \Gamma + 4\Delta = 20$ με $A, B, \Gamma, \Delta \geq 0$.
- Επειδή το Δ έχει συντελεστή 4, πρέπει να πούμε ρητά πόσα αντικείμενα τύπου Δ αγοράζουμε. Έστω i το πλήθος τους. Οπότε η εξίσωση γίνεται: $A + B + \Gamma + 4i = 20 \Leftrightarrow A + B + \Gamma = 20 - 4i$ με $A, B, \Gamma, \Delta \geq 0$ και $0 \leq i \leq 5$.

Σε ένα μαγαζί τα αντικείμενα Α, Β και Γ κοστίζουν από 5 ευρώ και το αντικείμενο Δ 20 ευρώ. Αν θέλω να ξοδέψω συνολικά 100 ευρώ πόσες διαφορετικές αγορές μπορώ να κάνω;

- Το πρόβλημα είναι ίδιο με την εύρεση των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης $20 - 4i$ ίδιων αντικειμένων (των μονάδων) σε 3 διαφορετικά κουτιά, για κάθε τιμή $0 \leq i \leq 5$. Επομένως υπάρχουν $\sum_{i=0}^{5} \frac{(20-4i+3-1)!}{(20-4i)!(3-1)!} =$ $\sum_{i=0}^{5} \frac{(20-4i+3-1)!}{(20-4i)!2!} = \sum_{i=0}^{5} \frac{(11-2i)!}{(20-4i)!} = 536$ τρόποι, δηλ., διαφορετικές λύσεις.

Σύνοψη-Πρακτικά (1)

Έχω 10 ψηφία (διακεκριμένα αντικείμενα).

- Μπορώ να φτιάξω $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ διαφορετικές 4-άδες (διατάξεις 4 από 10 αντικειμένων $= P(10,4)$).
  ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: η τετράδα 1,2,3,4 είναι διαφορετική από την τετράδα 4,3,2,1
- Μπορώ να διαλέξω $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!}$ διαφορετικές 4-άδες (συνδυασμοί 4 από 10 αντικειμένων $= C(10,4) = \frac{P(10,4)}{P(4,4)}$).
  ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: η τετράδα 1,2,3,4 μετράει 1 φορά και δεν είναι διαφορετική από την τετράδα 4,3,2,1

Σύνοψη-Πρακτικά (2)

- Έχω 100 μπάλες (μη διακεκριμένα αντικείμενα).
  Τις χωρίζω σε ομάδες από πράσινες, κόκκινες και μπλε μπάλες.
  Οι πράσινες μπάλες είναι 60, οι κόκκινες 30 και οι μπλε 10.
  Υπάρχουν $\frac{100!}{60!30!10!}$ τρόποι να διατάξω τις 100 μπάλες.
- Έχω 2 διαφορετικά δυαδικά ψηφία (διακεκριμένα αντικείμενα): 0 και 1.
  Έχω όσα θέλω από αυτά (επιτρέπονται οι επαναλήψεις).
  Μπορώ να φτιάξω 2^5 διαφορετικές 5-άδες.
- Έχω 2 ζάρια αλλά δε με ενδιαφέρει η σειρά που πέφτουν (συνδυασμοί).
  Κάθε ζάρι έχει 6 πιθανές τιμές και μπορεί να φέρνει την ίδια τιμή συνεχώς (επιτρέπονται επαναλήψεις).
  Υπάρχουν συνολικά $C(6+2-1,2)$ ζαριές.

Σύνοψη-Πρακτικά (3)

- Έχω n αντικείμενα, ένα από το καθένα και δε με νοιάζει η σειρά.
  Υπάρχουν $2^n - 1$ τρόποι για να επιλέξω ένα ή περισσότερα από αυτά.
  - 2: επιλέγω/δεν επιλέγω κάποιο αντικείμενο
  - -1: πρέπει να επιλέξω τουλάχιστον ένα
- Έχω t ομάδες μη διακεκριμένων αντικειμένων, κάθε μία με μέγεθος $q_1, q_2, ..., q_t$, αντίστοιχα.
  - Μπορώ να διαλέξω ένα ή περισσότερα αντικείμενα με $(q_1 + 1)(q_2 + 1)...(q_t + 1) - 1$ τρόπους.

Σύνοψη-Πρακτικά (4)

- n διακεκριμένες υποδοχές, r διακεκριμένα αντικείμενα, δε μετράει η σειρά στις υποδοχές: n^r τρόποι (μπορεί να υπάρχουν και άδειες υποδοχές)
- n διακεκριμένες υποδοχές, r διακεκριμένα αντικείμενα, μετράει η σειρά στις υποδοχές: $\dfrac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$ τρόποι (μπορεί να υπάρχουν και άδειες υποδοχές)
- n διακεκριμένες υποδοχές, r μη διακεκριμένα αντικείμενα: $\dbinom{n+r-1}{r} = \dfrac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}$ τρόποι (μπορεί να υπάρχουν και άδειες υποδοχές)

Στοιχειώδης συνδυαστική

- Διωνυμικοί Συντελεστές

Διωνυμικοί Συντελεστές

$$(1+x)^n = \underbrace{\overbrace{(1+x)}^{\text{διώνυμο}} \cdot (1+x) \cdot \ldots \cdot (1+x)}_{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

- Για τον συντελεστή του x^k:
  Από κάθε διώνυμο μπορούμε να πάρουμε ένα 'x' για να σχηματίσουμε το x^k, μπορεί και όχι. Επομένως έχουμε n ευκαιρίες (όσα και τα διώνυμα) να πάρουμε k αντικείμενα 'x'. Ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να πάρουμε k αντικείμενα από n χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά, είναι $\binom{n}{k}$.
- Γενικά:
  $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Ιδιότητες Διωνυμικών Συντελεστών

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
   Οι τρόποι που μπορώ να διαλέξω k αντικείμενα από n είναι ίσοι με τους τρόπους που μπορώ να διαλέξω τα (υπόλοιπα) $n-k$ αντικείμενα από τα n.

2. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$
   Έστω ότι ξεχωρίζω ένα αντικείμενο από τα $n+1$. Αν πάρω $k+1$ αντικείμενα συνολικά, μπορώ να συμπεριλάβω και αυτό που ξεχώρισα ή όχι. Στην πρώτη περίπτωση πρέπει να πάρω τα υπόλοιπα k αντικείμενα από τα (υπόλοιπα) n, ενώ στην δεύτερη, πρέπει να πάρω και τα $k+1$ αντικείμενα από τα n.

3. $\binom{n+r+1}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k}$

Ιδιότητες Διωνυμικών Συντελεστών

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
   Οι τρόποι που μπορώ να διαλέξω k αντικείμενα από n είναι ίσοι με τους τρόπους που μπορώ να διαλέξω τα (υπόλοιπα) $n-k$ αντικείμενα από τα n.

2. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$
   Έστω ότι ξεχωρίζω ένα αντικείμενο από τα $n+1$. Αν πάρω $k+1$ αντικείμενα συνολικά, μπορώ να συμπεριλάβω και αυτό που ξεχώρισα ή όχι. Στην πρώτη περίπτωση πρέπει να πάρω τα υπόλοιπα k αντικείμενα από τα (υπόλοιπα) n, ενώ στην δεύτερη, πρέπει να πάρω και τα $k+1$ αντικείμενα από τα n.

3. $\binom{n+r+1}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k}$

Ιδιότητες Διωνυμικών Συντελεστών

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
   Οι τρόποι που μπορώ να διαλέξω k αντικείμενα από n είναι ίσοι με τους τρόπους που μπορώ να διαλέξω τα (υπόλοιπα) $n-k$ αντικείμενα από τα n.

2. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$
   Έστω ότι ξεχωρίζω ένα αντικείμενο από τα $n+1$. Αν πάρω $k+1$ αντικείμενα συνολικά, μπορώ να συμπεριλάβω και αυτό που ξεχώρισα ή όχι. Στην πρώτη περίπτωση πρέπει να πάρω τα υπόλοιπα k αντικείμενα από τα (υπόλοιπα) n, ενώ στην δεύτερη, πρέπει να πάρω και τα $k+1$ αντικείμενα από τα n.

3. $\binom{n+r+1}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k}$

Ιδιότητες Διωνυμικών Συντελεστών

4. $\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r}$

5. $\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$

   Για να διαλέξω r αντικείμενα από n αρκεί να διαλέξω πρώτα ένα αντικείμενο, και τα υπόλοιπα $r-1$ αντικείμενα να τα διαλέξω από τα υπόλοιπα $n-1$. Το 'πρώτο' αντικείμενο μπορώ να το επιλέξω με n τρόπους, και τα υπόλοιπα $r-1$ με $\binom{n-1}{r-1}$ τρόπους. Επειδή όμως δεν έχει σημασία ποιο από τα r αντικείμενα είναι πρώτο (δηλαδή θα μπορουσε να είναι πρώτο οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα $r-1$ αντικείμενα που επελέγησαν στον συνδυασμό, χωρίς να προκύπτει διαφορετικός συνδυασμός), διαιρώ με r.

Ιδιότητες Διωνυμικών Συντελεστών

4. $\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r}$
5. $\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$
   Για να διαλέξω r αντικείμενα από n αρκεί να διαλέξω πρώτα ένα αντικείμενο, και τα υπόλοιπα $r-1$ αντικείμενα να τα διαλέξω από τα υπόλοιπα $n-1$. Το 'πρώτο' αντικείμενο μπορώ να το επιλέξω με n τρόπους, και τα υπόλοιπα $r-1$ με $\binom{n-1}{r-1}$ τρόπους. Επειδή όμως δεν έχει σημασία ποιο από τα r αντικείμενα είναι πρώτο (δηλαδή θα μπορουσε να είναι πρώτο οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα $r-1$ αντικείμενα που επελέγησαν στον συνδυασμό, χωρίς να προκύπτει διαφορετικός συνδυασμός), διαιρώ με r.

Ιδιότητες

- $C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1)$
  Ένας συνδυασμός μπορεί είτε να περιέχει το n-στό στοιχείο είτε όχι.
  Υπάρχουν $C(n-1,r)$ συνδυασμοί που δεν περιέχουν το n-στό στοιχείο και $C(n-1,r-1)$ συνδυασμοί που το περιέχουν.
- $C(n,r) = \frac{n}{r}C(n-1,r-1)$
  Κάθε στοιχείο μετέχει σε $C(n-1,r-1)$ συνδυασμούς των n ανά r.
  Συνολικές συμμετοχές για τα n στοιχεία: $n \cdot C(n-1,r-1)$
  Οι συνολικές συμμετοχές στοιχείων είναι $r \cdot C(n,r)$.

Διωνυμικοί συντελεστές

- $(1+x)$: διώνυμο
- $(1+x)^n$: πολυώνυμο βαθμού n
- Ο συντελεστής του x^r στο πολυώνυμο ισούται με το πλήθος των τρόπων να επιλέξουμε r από τους n όρους x που εμφανίζονται στο γινόμενο $\underbrace{(1+x)\ldots(1+x)}_{n \text{ φορές}}$
- Επομένως, συντελεστής του x^r στο πολυώνυμο $(1+x)^n = C(n,r)$
- ανάπτυγμα διωνύμου του Νεύτωνα: $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)x^r$
- Γενικά: $(s+t)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)s^r t^{n-r}$

Ποιο είναι ο σταθερός όρος στο ανάπτυγμα του $(x^2 + \frac{1}{x})^{12}$;

- Ισχύει $(s+t)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r) s^r t^{n-r}$
- Για $s = x^2$ και $t = \frac{1}{x} = x^{-1}$ έχουμε:
- $(x^2 + \frac{1}{x})^{12} = (x^2 + x^{-1})^{12} = \sum_{r=0}^{12} C(n,r) x^{2r} x^{-12+r} =$

  $\sum_{r=0}^{12} C(12,r) x^{3r-12}$
- Ο σταθερός όρος είναι ο συνετελεστής του x^0. Δηλαδή, πρέπει $3r - 12 = 0 \Leftrightarrow r = 4$. Επομένως, ο ζητούμενος συντελεστής είναι ο $C(12,4) = 495$

Ποιος είναι ο συντελεστής του x^{40} στην παράσταση $(1+x^4+x^5)^{100}$; Παρατηρήστε ότι στην εξίσωση $4i+5j=40$ οι ακέραιες λύσεις είναι οι $(i,j) \in \{(0,8),(5,4),(10,0)\}$

- Ισχύει $(s+t)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r) s^r t^{n-r}$
- Για $s=x^5$ και $t=1+x^4$ έχουμε:
- $(1+x^4+x^5)^{100} = \sum_{r=0}^{100} \binom{100}{r} x^{5\cdot r}(1+x^4)^{100-r}$
- $(1+x^4)^{100-j} = \sum_{k=0}^{100-r} \binom{100-r}{k} x^{4\cdot k} \Rightarrow$

- $(1+x^4+x^5)^{100} = \sum_{r=0}^{100} \binom{100}{r} x^{5\cdot r} \sum_{k=0}^{100-r} \binom{100-r}{k} x^{4\cdot k}$
- Για να υπολογίσουμε το συντελεστή του x^{40} πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλα ζεύγη τιμών για k και r τέτοια ώστε $4k+5r=40$, με k και r θετικούς ακέραιους μικρότερους του 100. Αυτά δίνονται από την εκφώνηση: $\{(0,8),(5,4),(10,0)\}$
- Οπότε ο συντελεστής του x^{40} είναι: $\binom{100}{8}\binom{92}{0} + \binom{100}{4}\binom{96}{5} + \binom{100}{0}\binom{100}{10}$

Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

- Για κάθε x ισχύει: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$
- Για $x = 1$ η παραπάνω σχέση δίνει: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = (1+1)^n = 2^n$

Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = 3^n$

- Για κάθε x ισχύει: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$
- Για $x = 2$ η παραπάνω σχέση δίνει:
  $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = (1+2)^n = 3^n$

Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$

- Για κάθε x ισχύει: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$
- Για $x = -1$ η παραπάνω σχέση δίνει: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = 0$
- $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \binom{n}{5} + \ldots = 0 \Rightarrow$
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$

Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $\sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} = n2^{n-1}$

- Για κάθε x ισχύει: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$
- Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας:
  $\sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} x^{i-1} = n(1+x)^{n-1}$
- Θέτουμε $x = 1$ και η παραπάνω σχέση δίνει:
  $\sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$

Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$

- Επειδή $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$, είναι $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$
- $\binom{2n}{n}$ σημαίνει να διαλέξουμε n από $2n$ αντικείμενα. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:
  - Χωρίζουμε τα $2n$ αντικείμενα σε 2 ομάδες ώστε κάθε μία να έχει n αντικείμενα.
  - Για $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$, διαλέγουμε i αντικείμενα από την πρώτη ομάδα με $\binom{n}{i}$ τρόπους και $n - i$ αντικείμενα από τη δεύτερη ομάδα με $\binom{n}{n-i}$ τρόπους.
  - Για $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$, υπάρχουν $\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$ τρόποι επιλογής.
  - Τα ενδεχόμενα για διαφορετικές τιμές του i είναι αμοιβαία αποκλειόμενα, οπότε με κανόνα αθροίσματος έχουμε:
    $$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$$

Αποδείξτε ότι: $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$

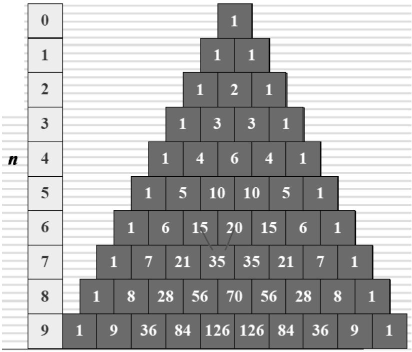
- $\binom{m+n}{r}$: με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω r από ένα σύνολο με m αριθμημένες πράσινες μπάλες και n αριθμημένες κόκκινες μπάλες.
- Είναι σαν να διαλέγω (1) $r-k$ από τις m αριθμημένες πράσινες μπάλες και (2) τις υπόλοιπες k από τις n αριθμημένες κόκκινες μπάλες.
- Το (1) μπορεί να γίνει με $\binom{m}{r-k}$ τρόπους και το (2) με $\binom{n}{k}$ τρόπους. Άρα συνολικά υπάρχουν $\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$ τρόποι για κάθε τιμή του k.
- Τα γεγονότα είναι αμοιβαία αποκλειόμενα για διαφορετικές τιμές του k. Οπότε από κανόνα αθροίσματος, υπάρχουν συνολικά $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$ τρόποι.

Αποδείξτε ότι: $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} \binom{n}{k}$

- Άμεση συνέπεια: $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

Τρίγωνο του Pascal

- Αναδρομικός τρόπος υπολογισμού διωνυμικών συντελεστών.



$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, & \text{αν } 0 < k < n \\ 1, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η ύλη συνοπτικά...

- Στοιχειώδης συνδυαστική
- Γεννήτριες συναρτήσεις
- Εγκλεισμός - Αποκλεισμός
- Θεωρία Polyá

Η ύλη συνοπτικά...

- Γεννήτριες συναρτήσεις

Τι είναι η γεννήτρια

- Στην ακολουθία των αριθμών

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...$$

αντιστοιχεί η γεννήτρια συνάρτηση:

$$A(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + ...$$

που γράφεται πιο σύντομα:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$$

- Αν η ακολουθία είναι πεπερασμένη (σταματάει π.χ., στον όρο α_{10}) τότε και η γεννήτρια έχει πεπερασμένο μήκος: $\sum_{n=0}^{10} \alpha_n z^n$

Τι είναι η γεννήτρια

- Έστω η ακολουθία $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 5$ ενώ για $n \geq 4$ είναι $\alpha_n = 0$.
- Η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση είναι η:

$$\sum_{n=0}^{3} \alpha_n z^n = 1 + 2z^2 + 5z^3$$

Χρησιμότητα γεννητριών συναρτήσεων

- Σε ορισμένα πολύπλοκα προβλήματα είναι δύσκολο να δουλέψουμε με ακολουθίες.
- Μετατρέπουμε τις ακολουθίες σε γεννήτριες συναρτήσεις (τις οποίες μπορούμε να διαχειριστούμε ευκολότερα γιατί μοιάζουν με πολυώνυμα), καταλήγουμε σε μια τελική γεννήτρια συνάρτηση και επιστρέφουμε στην τελική ακολουθία που δίνει λύση στο πρόβλημά μας.

Χρήσιμες σχέσεις

- Από γεωμετρικές προόδους θα χρειαστούμε τους τύπους:

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + ... + \lambda^n = \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}$$

- ενώ όταν έχουμε άπειρους όρους:

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + ... = \frac{1}{1 - \lambda}, \text{ ισχύει μόνον όταν } \lambda < 1$$

- Η εκθετική συνάρτηση e^x μπορεί να γραφεί και ως άπειρη σειρά ως:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Παράδειγμα

Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση της σταθερής ακολουθίας $5, 5, ...$;

- Πρόκειται για την ακολουθία $\alpha_n = 5$, για κάθε n. Επομένως η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5z^n = 5 + 5z + 5z^2 + 5z^3 + ... = 5(1 + z + z^2 + z^3 + ...) =$$

$$5\frac{1}{1-z} = \frac{5}{1-z}$$

Παράδειγμα

Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση της σταθερής ακολουθίας $\alpha_n = n + 1$;

- Πρόκειται για την ακολουθία $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 4$, ... Επομένως η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση είναι:
$$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + ...$$
- Για να βρούμε 'κλειστό' τύπο, παρατηρούμε ότι οι όροι είναι παράγωγοι των δυνάμεων του z:

$$z' + (z^2)' + (z^3)' + (z^4)' + ... = (z + z^2 + z^3 + z^4 + ...)' =$$

$$\left[z(1 + z + z^2 + z^3 + ...)\right]' = \left[z\frac{1}{1-z}\right]' =$$

$$(\frac{z}{1-z})' = \frac{1}{(1-z)^2}$$

Γεννήτριες συναρτήσεις σε προβλήματα συνδυαστικής

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε n αντικείμενα όταν...;
- Αφού κάνουμε διεργασίες (θα δούμε στη συνέχεια πώς) καταλήγουμε σε μία γεννήτρια συνάρτηση

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + ...$$

  και η απάντηση βρίσκεται στο συντελεστή του z^n, δηλ. μπορούμε να διαλέξουμε $\underline{n \text{ αντικείμενα με } \alpha_n \text{ τρόπους}}$:
  3 αντικείμενα με α_3 τρόπους
  100 αντικείμενα με α_{100} τρόπους...
- Δηλ. δε χρειάζεται να λύσουμε το πρόβλημα χωριστά για $n = 3$, για $n = 100$ κτλ: το λύνουμε μια και καλή και οι συντελεστές α_n δίνουν την απάντηση για κάθε n

Πρακτικά στις ασκήσεις

Όταν επιλέγουμε αντικείμενα ενός συγκεκριμένου είδους, αντιστοιχεί ένας παράγοντας που είναι κομμάτι του:

$$z^0 + z^1 + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots$$

Οι εκθέτες δείχνουν τις επιλογές που μπορούμε να κάνουμε:

- Αν θέλουμε να επιλέξουμε από 3 μέχρι 6 αντικείμενα:
$$(z^3 + z^4 + z^5 + z^6)$$
- Αν θέλουμε να επιλέξουμε από 0 είτε 1 είτε 5 είτε 7 αντικείμενα:
$$(z^0 + z^1 + z^5 + z^7) = (1 + z + z^5 + z^7)$$
- Αν θέλουμε να επιλέξουμε το πολύ 2 αντικείμενα:
$$(z^0 + z^1 + z^2) = (1 + z + z^2)$$
- Αν θέλουμε να επιλέξουμε τουλάχιστον 5 αντικείμενα:
$$(z^5 + z^6 + z^7 + \ldots)$$

Πρακτικά στις ασκήσεις

Όταν επιλέγουμε αντικείμενα ενός συγκεκριμένου είδους, αντιστοιχεί ένας παράγοντας που είναι κομμάτι του:

$$z^0 + z^1 + z^2 + z^3 + z^4 + \dots$$

Οι εκθέτες δείχνουν τις επιλογές που μπορούμε να κάνουμε:

- Αν θέλουμε να επιλέξουμε περιττό πλήθος αντικειμένων, το πολύ 5:
$$(z^1 + z^3 + z^5) = (z + z^3 + z^5)$$
- Αν δεν υπάρχει περιορισμός, τότε αντιστοιχεί ολόκληρη η παραπάνω παράσταση.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για κάθε είδος ίδιων αντικειμένων ξεχωριστά, και στο τέλος <u>πολλαπλασιάζουμε τους παράγοντες που βρήκαμε</u>.

Έχουμε 2 άσπρες και 3 μαύρες μπάλες. Θέλουμε να διαλέξουμε μερικές μπάλες (δε μάς ενδιαφέρει η σειρά) αλλά με τον εξής περιορισμό:
να διαλέξουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες

- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 0 μπάλες;
  Με κανέναν αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 1 μπάλα;
  Με κανέναν αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 2 μπάλες;
  Με 1: 2 μαύρες - αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.

Έχουμε 2 άσπρες και 3 μαύρες μπάλες. Θέλουμε να διαλέξουμε μερικές μπάλες (δε μάς ενδιαφέρει η σειρά) αλλά με τον εξής περιορισμό: να διαλέξουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες

- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 0 μπάλες;
  Με κανέναν αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 1 μπάλα;
  Με κανέναν αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 2 μπάλες;
  Με 1: 2 μαύρες - αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.

Έχουμε 2 άσπρες και 3 μαύρες μπάλες. Θέλουμε να διαλέξουμε μερικές μπάλες (δε μάς ενδιαφέρει η σειρά) αλλά με τον εξής περιορισμό:
να διαλέξουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες

- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 0 μπάλες;
  Με κανέναν αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 1 μπάλα;
  Με κανέναν αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 2 μπάλες;
  Με 1: 2 μαύρες - αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.

Έχουμε 2 άσπρες και 3 μαύρες μπάλες. Θέλουμε να διαλέξουμε μερικές μπάλες (δε μάς ενδιαφέρει η σειρά) αλλά με τον εξής περιορισμό: <u>να διαλέξουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες</u>

- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 0 μπάλες;
  Με κανέναν αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 1 μπάλα;
  Με κανέναν αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 2 μπάλες;
  Με 1: 2 μαύρες - αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.

Έχουμε 2 άσπρες και 3 μαύρες μπάλες. Θέλουμε να διαλέξουμε μερικές μπάλες (δε μάς ενδιαφέρει η σειρά) αλλά με τον εξής περιορισμό: να διαλέξουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες

- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 0 μπάλες;
  Με κανέναν αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 1 μπάλα;
  Με κανέναν αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 2 μπάλες;
  Με 1: 2 μαύρες - αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.

Έχουμε 2 άσπρες και 3 μαύρες μπάλες. Θέλουμε να διαλέξουμε μερικές μπάλες (δε μάς ενδιαφέρει η σειρά) αλλά με τον εξής περιορισμό: να διαλέξουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες

- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 0 μπάλες;
  Με κανέναν αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 1 μπάλα;
  Με κανέναν αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 2 μπάλες;
  Με 1: 2 μαύρες - αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.

Έχουμε 2 άσπρες και 3 μαύρες μπάλες. Θέλουμε να διαλέξουμε μερικές μπάλες (δε μάς ενδιαφέρει η σειρά) αλλά με τον εξής περιορισμό:
<u>να διαλέξουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες</u>

- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 3 μπάλες;
  Με 2: 3 μαύρες ή 1 άσπρη και 2 μαύρες μπάλες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 4 μπάλες;
  Με 2: 3 μαύρες και 1 άσπρη ή 2 μαύρες και 2 άσπρες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 5 μπάλες;
  Με 1: να τις επιλέξω όλες - 3 μαύρες και 2 άσπρες.

Πώς μπορούμε να πάρουμε τα ίδια αποτελέσματα με μια γεννήτρια συνάρτηση;

Έχουμε 2 άσπρες και 3 μαύρες μπάλες. Θέλουμε να διαλέξουμε μερικές μπάλες (δε μάς ενδιαφέρει η σειρά) αλλά με τον εξής περιορισμό:

<u>να διαλέξουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες</u>

- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 3 μπάλες;
  Με 2: 3 μαύρες ή 1 άσπρη και 2 μαύρες μπάλες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 4 μπάλες;
  Με 2: 3 μαύρες και 1 άσπρη ή 2 μαύρες και 2 άσπρες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 5 μπάλες;
  Με 1: να τις επιλέξω όλες - 3 μαύρες και 2 άσπρες.

Πώς μπορούμε να πάρουμε τα ίδια αποτελέσματα με μια γεννήτρια συνάρτηση;

Έχουμε 2 άσπρες και 3 μαύρες μπάλες. Θέλουμε να διαλέξουμε μερικές μπάλες (δε μάς ενδιαφέρει η σειρά) αλλά με τον εξής περιορισμό:
να διαλέξουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες

- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 3 μπάλες;
  Με 2: 3 μαύρες ή 1 άσπρη και 2 μαύρες μπάλες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 4 μπάλες;
  Με 2: 3 μαύρες και 1 άσπρη ή 2 μαύρες και 2 άσπρες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 5 μπάλες;
  Με 1: να τις επιλέξω όλες - 3 μαύρες και 2 άσπρες.

Πώς μπορούμε να πάρουμε τα ίδια αποτελέσματα με μια γεννήτρια συνάρτηση;

Έχουμε 2 άσπρες και 3 μαύρες μπάλες. Θέλουμε να διαλέξουμε μερικές μπάλες (δε μάς ενδιαφέρει η σειρά) αλλά με τον εξής περιορισμό:

<u>να διαλέξουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες</u>

- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 3 μπάλες;
  Με 2: 3 μαύρες ή 1 άσπρη και 2 μαύρες μπάλες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 4 μπάλες;
  Με 2: 3 μαύρες και 1 άσπρη ή 2 μαύρες και 2 άσπρες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 5 μπάλες;
  Με 1: να τις επιλέξω όλες - 3 μαύρες και 2 άσπρες.

Πώς μπορούμε να πάρουμε τα ίδια αποτελέσματα με μια γεννήτρια συνάρτηση;

Έχουμε 2 άσπρες και 3 μαύρες μπάλες. Θέλουμε να διαλέξουμε μερικές μπάλες (δε μάς ενδιαφέρει η σειρά) αλλά με τον εξής περιορισμό:
<u>να διαλέξουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες</u>

- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 3 μπάλες;
  Με 2: 3 μαύρες ή 1 άσπρη και 2 μαύρες μπάλες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 4 μπάλες;
  Με 2: 3 μαύρες και 1 άσπρη ή 2 μαύρες και 2 άσπρες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 5 μπάλες;
  Με 1: να τις επιλέξω όλες - 3 μαύρες και 2 άσπρες.

Πώς μπορούμε να πάρουμε τα ίδια αποτελέσματα με μια γεννήτρια συνάρτηση;

Έχουμε 2 άσπρες και 3 μαύρες μπάλες. Θέλουμε να διαλέξουμε μερικές μπάλες (δε μάς ενδιαφέρει η σειρά) αλλά με τον εξής περιορισμό: να διαλέξουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες

- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 3 μπάλες;
  Με 2: 3 μαύρες ή 1 άσπρη και 2 μαύρες μπάλες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 4 μπάλες;
  Με 2: 3 μαύρες και 1 άσπρη ή 2 μαύρες και 2 άσπρες.
- Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 5 μπάλες;
  Με 1: να τις επιλέξω όλες - 3 μαύρες και 2 άσπρες.

Πώς μπορούμε να πάρουμε τα ίδια αποτελέσματα με μια γεννήτρια συνάρτηση;

Έχουμε 2 άσπρες και 3 μαύρες μπάλες. Θέλουμε να διαλέξουμε μερικές μπάλες (δε μάς ενδιαφέρει η σειρά) αλλά με τον εξής περιορισμό: να διαλέξουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες

Έχουμε 2 άσπρες μπάλες, άρα στην επιλογή των άσπρων μπαλών αντιστοιχεί ο παράγοντας:

$$(z^0 + z^1 + z^2) = (1 + z + z^2)$$

Έχουμε 3 μαύρες μπάλες και πρέπει υποχρεωτικά να επιλέξουμε 2 μαύρες μπάλες, άρα στην επιλογή των μαύρων μπαλών αντιστοιχεί ο παράγοντας:

$$(z^2 + z^3)$$

Επομένως, η γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$A(x) = (1 + z + z^2)(z^2 + z^3) = z^2 + 2z^3 + 2z^4 + z^5 =$$

$$0z^0 + 0z^1 + 1z^2 + 2z^3 + 2z^4 + 1z^5$$

Παρατήρηση

Αν σε μια ομάδα έχουμε άπειρα αντικείμενα από τα οποία μπορούμε να διαλέξουμε, ο αντίστοιχος παράγοντας είναι κομμάτι του

$$(1 + z + z^2 + z^3 + ...)$$

το οποίο αν το δούμε σαν άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου ισούται με:

$$\frac{1}{1 - z} = (1 - z)^{-1}$$

Έχουμε 2 άσπρες και άπειρες μαύρες μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε n μπάλες όταν διαλέγουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες;

Στην επιλογή των άσπρων μπαλών αντιστοιχεί ο παράγοντας

$$(1 + z + z^2)$$

Στην επιλογή των μαύρων μπαλών, επειδή θέλουμε τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες, αντιστοιχεί ο παράγοντας

$$(z^2 + z^3 + z^4 + ...)$$

Επομένως, η γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$A(x) = (1 + z + z^2)(z^2 + z^3 + z^4 + ...) =$$

$$(z^2 + z^3 + z^4 + ...) + (z^3 + z^4 + z^5 + ...) + (z^4 + z^5 + z^6 + ...) =$$

$$z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 3z^5 + 3z^6 + ...$$

Οι συνετελεστές δείχουν τις αντίστοιχες απαντήσεις.

Έχουμε 2 άσπρες και άπειρες μαύρες μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε n μπάλες όταν διαλέγουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες;

$$z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 3z^5 + 3z^6 + \dots$$

Παράδειγμα: Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 5 μπάλες;
Η απάντηση βρίσκεται στο συντελεστη του z^5: με 3 τρόπους.
Πράγματι, οι δυνατές επιλογές είναι:
5 μαύρες μπάλες
4 μαύρες και 1 άσπρη μπάλα
3 μαύρες μπάλες και 2 άσπρες μπάλες

Όταν τα αντικείμενα έχουν κάποιο μέγεθος (π.χ., βάρος, νομισματική αξία, κτλ)

Παράδειγμα: Έχουμε 2 άσπρες **των 5 κιλών** και άπειρες μαύρες μπάλες **των 10 κιλών**.
Αλλάζει κάτι στο ερώτημα "Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 5 μπάλες;"
ΟΧΙ, αφού το βάρος δεν παίζει κανένα ρόλο, η απάντηση και πάλι είναι 3.
Άλλο ερώτημα "Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω μπάλες ώστε να συγκεντρώσω βάρος 40 κιλών;"
Πρακτικά, οι τρόποι είναι 2:
$5+5+10+10+10$ και $10+10+10+10$
Πώς θα πέρναμε αυτή την απάντηση με γεννήτριες;

Όταν τα αντικείμενα έχουν κάποιο μέγεθος (π.χ., βάρος, νομισματική αξία, κτλ)

Παράδειγμα: Έχουμε 2 άσπρες **των 5 κιλών** και άπειρες μαύρες μπάλες **των 10 κιλών**.
Αλλάζει κάτι στο ερώτημα ''Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 5 μπάλες;''
ΟΧΙ, αφού το βάρος δεν παίζει κανένα ρόλο, η απάντηση και πάλι είναι 3.
Άλλο ερώτημα ''Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω μπάλες ώστε να συγκεντρώσω βάρος 40 κιλών;''
Πρακτικά, οι τρόποι είναι 2:
$5+5+10+10+10$ και $10+10+10+10$
Πώς θα πέρναμε αυτή την απάντηση με γεννήτριες;

‘‘Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω μπάλες ώστε να συγκεντρώσω βάρος 40 κιλών;’’

Σε κάθε παράγοντα της γεννήτριας συνάρτησης οι δυνάμεις του z θα δείχνουν πόσα κιλά μπορούμε να συγκεντρώσουμε:

Στην επιλογή των 5-κιλων (άσπρων) μπαλών αντιστοιχεί ο παράγοντας

$$(z^0 + z^5 + z^{10})$$

αφού με δύο 5-κιλες μπάλες μπορούμε να συγκεντρώσουμε 0 ή 5 ή 10 κιλά.

Στην επιλογή των 10-κιλων (μαύρων) μπαλών, επειδή θέλουμε τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες, αντιστοιχεί ο παράγοντας

$$(z^{20} + z^{30} + z^{40} + \ldots)$$

Επομένως, η γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$A(x) = (1 + z^5 + z^{10})(z^{20} + z^{30} + z^{40} + \ldots) =$$

$$(z^{20}+z^{30}+z^{40}+\ldots)+(z^{25}+z^{35}+z^{45}+\ldots)+(z^{30}+z^{40}+z^{50}+\ldots) =$$

$$z^{20} + 2z^{30} + z^{35} + 2z^{40} + z^{45} + 2z^{50} + \ldots$$

Πράγματι, η συνετελεστής του z^{40} που μάς ενδιαφέρει είναι 2.

Χρήσιμες σχέσεις για υπολογισμό γεννητριών συναρτήσεων

1. $1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$
2. $(1 + z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k$
3. $(1 + z)^{-n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-n}{k} z^k$ όπου $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ και $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{k+n-1}{k}$

Αν στις παραπάνω σχέσεις στη θέση του z βάλουμε $-z$ έχουμε:

Χρήσιμες σχέσεις για υπολογισμό γεννητριών συναρτήσεων

4. $(1-z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-z)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k z^k$

5. $(1-z)^{-n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-n}{k}(-z)^k =$

   $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{k+n-1}{k}(-1)^k z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+n-1}{k} z^k$

Παραδείγματα

Ακολουθία: $1, 0, 0, 1$

Γεννήτρια συνάρτηση: $1 \cdot z^0 + 0 \cdot z^1 + 0 \cdot z^2 + 1 \cdot z^3 = 1 + z^3$

Ακολουθία: $1, 2, 1, 0, 0, 0, \ldots$

Γεννήτρια συνάρτηση:

$1 \cdot z^0 + 2 \cdot z^1 + 1 \cdot z^2 + 0 \cdot z^3 + 0 \cdot z^4 + \ldots = 1 + 2z + z^2 = (1+z)^2$

Ακολουθία: $\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{n+1 \text{ όροι}}$

Γεννήτρια συνάρτηση: $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

Ακολουθία: $1, -1, 1, -1, \ldots$

Γεννήτρια συνάρτηση: $1 - z + z^2 - z^3 + \ldots = \dfrac{1}{1+z}$

Ακολουθία: $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$

Γεννήτρια συνάρτηση:

$\binom{n}{0} \cdot z^0 + \binom{n}{1} \cdot z^1 + \binom{n}{2} \cdot z^2 + \binom{n}{3} \cdot z^3 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot z^n = (1+x)^n$

Παραδείγματα

Ακολουθία: $1, 0, 0, 1$

Γεννήτρια συνάρτηση: $1 \cdot z^0 + 0 \cdot z^1 + 0 \cdot z^2 + 1 \cdot z^3 = 1 + z^3$

Ακολουθία: $1, 2, 1, 0, 0, 0, ...$

Γεννήτρια συνάρτηση:

$1 \cdot z^0 + 2 \cdot z^1 + 1 \cdot z^2 + 0 \cdot z^3 + 0 \cdot z^4 + ... = 1 + 2z + z^2 = (1+z)^2$

Ακολουθία: $\underbrace{1, 1, 1, ..., 1}_{n+1 \text{ όροι}}$

Γεννήτρια συνάρτηση: $1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

Ακολουθία: $1, -1, 1, -1, ...$

Γεννήτρια συνάρτηση: $1 - z + z^2 - z^3 + ... = \dfrac{1}{1+z}$

Ακολουθία: $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, ..., \binom{n}{n}$

Γεννήτρια συνάρτηση:

$\binom{n}{0} \cdot z^0 + \binom{n}{1} \cdot z^1 + \binom{n}{2} \cdot z^2 + \binom{n}{3} \cdot z^3 + ... + \binom{n}{n} \cdot z^n = (1+x)^n$

Παραδείγματα

Ακολουθία: $1, 0, 0, 1$

Γεννήτρια συνάρτηση: $1 \cdot z^0 + 0 \cdot z^1 + 0 \cdot z^2 + 1 \cdot z^3 = 1 + z^3$

Ακολουθία: $1, 2, 1, 0, 0, 0, \ldots$

Γεννήτρια συνάρτηση:

$$1 \cdot z^0 + 2 \cdot z^1 + 1 \cdot z^2 + 0 \cdot z^3 + 0 \cdot z^4 + \ldots = 1 + 2z + z^2 = (1+z)^2$$

Ακολουθία: $\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{n+1 \text{ όροι}}$

Γεννήτρια συνάρτηση: $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

Ακολουθία: $1, -1, 1, -1, \ldots$

Γεννήτρια συνάρτηση: $1 - z + z^2 - z^3 + \ldots = \dfrac{1}{1+z}$

Ακολουθία: $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$

Γεννήτρια συνάρτηση:

$$\binom{n}{0} \cdot z^0 + \binom{n}{1} \cdot z^1 + \binom{n}{2} \cdot z^2 + \binom{n}{3} \cdot z^3 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot z^n = (1+x)^n$$

Παραδείγματα

Ακολουθία: $1, 0, 0, 1$

Γεννήτρια συνάρτηση: $1 \cdot z^0 + 0 \cdot z^1 + 0 \cdot z^2 + 1 \cdot z^3 = 1 + z^3$

Ακολουθία: $1, 2, 1, 0, 0, 0, \ldots$

Γεννήτρια συνάρτηση:

$1 \cdot z^0 + 2 \cdot z^1 + 1 \cdot z^2 + 0 \cdot z^3 + 0 \cdot z^4 + \ldots = 1 + 2z + z^2 = (1 + z)^2$

Ακολουθία: $\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{n+1 \text{ όροι}}$

Γεννήτρια συνάρτηση: $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

Ακολουθία: $1, -1, 1, -1, \ldots$

Γεννήτρια συνάρτηση: $1 - z + z^2 - z^3 + \ldots = \dfrac{1}{1 + z}$

Ακολουθία: $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$

Γεννήτρια συνάρτηση:

$\binom{n}{0} \cdot z^0 + \binom{n}{1} \cdot z^1 + \binom{n}{2} \cdot z^2 + \binom{n}{3} \cdot z^3 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot z^n = (1 + x)^n$

Παραδείγματα

Ακολουθία: $1, 0, 0, 1$

Γεννήτρια συνάρτηση: $1 \cdot z^0 + 0 \cdot z^1 + 0 \cdot z^2 + 1 \cdot z^3 = 1 + z^3$

Ακολουθία: $1, 2, 1, 0, 0, 0, ...$

Γεννήτρια συνάρτηση:

$1 \cdot z^0 + 2 \cdot z^1 + 1 \cdot z^2 + 0 \cdot z^3 + 0 \cdot z^4 + ... = 1 + 2z + z^2 = (1 + z)^2$

Ακολουθία: $\underbrace{1, 1, 1, ..., 1}_{n+1 \text{ όροι}}$

Γεννήτρια συνάρτηση: $1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

Ακολουθία: $1, -1, 1, -1, ...$

Γεννήτρια συνάρτηση: $1 - z + z^2 - z^3 + ... = \dfrac{1}{1 + z}$

Ακολουθία: $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, ..., \binom{n}{n}$

Γεννήτρια συνάρτηση:

$\binom{n}{0} \cdot z^0 + \binom{n}{1} \cdot z^1 + \binom{n}{2} \cdot z^2 + \binom{n}{3} \cdot z^3 + ... + \binom{n}{n} \cdot z^n = (1 + x)^n$

Έχουμε 10 άσπρες μπάλες και διαλέγουμε κάποιες από αυτές. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

- Μπορούμε να διαλέξουμε 0,1,2,...,10 άσπρες μπάλες με 1 τρόπο κάθε φορά, ενώ 10,11,... με κανέναν τρόπο.
- Άρα, η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^{10} + 0 + 0 + ... = \frac{1 - z^{11}}{1 - z}$$

Έχουμε άσπρες μπάλες και διαλέγουμε κάποιες από αυτές. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

- Μπορούμε να διαλέξουμε 0,1,2,... άσπρες μπάλες με 1 τρόπο κάθε φορά.
- Άρα, η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$1 + z + z^2 + z^3 + ... = \frac{1}{1-z}$$

Έχουμε άσπρες, πράσινες και κόκκινες μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε r από αυτές;

- Από τις άσπρες μπάλες μπορούμε να διαλέξουμε με 1 τρόπο κάθε φορά 0,1,2,3,... από αυτές $\Rightarrow$
  Γεννήτρια συνάρτηση για τις άσπρες μπάλες είναι:

$$1 + z + z^2 + z^3 + ... = \frac{1}{1-z}$$

- Από τις πράσινες μπάλες μπορούμε να διαλέξουμε με 1 τρόπο κάθε φορά 0,1,2,3,... από αυτές $\Rightarrow$
  Γεννήτρια συνάρτηση για τις πράσινες μπάλες:

$$1 + z + z^2 + z^3 + ... = \frac{1}{1-z}$$

- Από τις κόκκινες μπάλες μπορούμε να διαλέξουμε με 1 τρόπο κάθε φορά 0,1,2,3,... από αυτές $\Rightarrow$
  Γεννήτρια συνάρτηση για τις κόκκινες μπάλες:

$$1 + z + z^2 + z^3 + ... = \frac{1}{1-z}$$

Έχουμε άσπρες, πράσινες και κόκκινες μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε r από αυτές;

- Άρα, η τελική γεννήτρια συνάρτηση για το ''διαλέγω κάποιες από άσπρες, πράσινες και κόκκινες μπάλες '' είναι η: $(\frac{1}{1-z})^3$
- Το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορώ να διαλέξω r από αυτές δίνεται από το συντελεστή του z^r στο $(\frac{1}{1-z})^3$
- $(\frac{1}{1-z})^3 = (1-z)^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2+k}{k} z^k$
- Οπότε ο συντελεστής του z^r στο $(\frac{1}{1-z})^3$ είναι: $\binom{2+r}{r}$, που είναι το πλήθος των ζητούμενων τρόπων.

Έχουμε άσπρες, πράσινες και κόκκινες μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε r από αυτές;

Με απλή συνδυαστική: θέλω να διαλέξω r από 3 αντικείμενα με επαναλήψεις: αυτό μπορεί να γίνει με

$$\binom{3+r-1}{r} = \binom{2+r}{r}$$

τρόπους.

Έχουμε άσπρες, πράσινες και κόκκινες μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε r από αυτές όταν πρέπει να πάρουμε περιττό αριθμό από άσπρες και άρτιο αριθμό από κόκκινες μπάλες;

- Για τις άσπρες μπάλες ο απαριθμητής είναι:
$$z + z^3 + z^5 ... = z(1 + z^2 + z^4 ...)$$
- Για τις κόκκινες μπάλες ο απαριθμητής είναι:
$$1 + z^2 + z^4 + ...$$
- Για τις πράσινες μπάλες ο απαριθμητής είναι:
$$1 + z + z^2 + z^3 + ... = \frac{1}{1-z}$$
- Το πλήθος των τρόπων που ζητάω δίνεται από το συντελεστή του z^r στο
$$z(1 + z^2 + z^4 ...)^2 \frac{1}{1-z} = \frac{z}{1-z}\left(\frac{1}{1-z^2}\right)^2$$

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε $2n+1$ ίδιες μπάλες σε 3 διαφορετικά κουτιά ώστε κάθε κουτί να έχει το πολύ n μπάλες;

- Για κάθε κουτί η γεννήτρια συνάρτηση είναι:
  $$1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$
- Επομένως, η τελική γεννήτρια συνάρτηση είναι:
  $$A(z)=\left(\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right)^3$$
- Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από το συντελεστή του z^{2n+1} στην παραπάνω παράσταση.
- $A(z)=(1-3z^{n+1}+3z^{2n+2}-z^{3n+3})(1-z)^{-3}=$
  $$(1-3z^{n+1}+3z^{2n+2}-z^{3n+3})\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{k+2}{2}z^k\right)$$
- Ο συντελεστής του z^{2n+1} είναι: $\binom{2n+3}{2}-3\binom{n+2}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Ποιος είναι ο αριθμός λύσεων της εξίσωσης $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 30$ στους φυσικούς αν z_1 άρτιος ≤ 10, z_2 περιττός ≤ 11, $3 \leq z_3 \leq 10$, $0 \leq z_4 \leq 15$;

Οι γεννήτριες συναρτήσεις είναι:
Για τη μεταβλητή z_1: $1 + x^2 + x^4 + ... + x^{10}$
Για τη μεταβλητή z_2: $x + x^3 + x^5 + ... + x^{11}$
Για τη μεταβλητή z_3: $x^3 + x^4 + x^5 + ... + x^{10}$
Για τη μεταβλητή z_4: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^{15}$
Δηλ. τελικά: $(1 + x^2 + x^4 + ... + x^{10})(x + x^3 + x^5 + ... + x^{11})(x^3 + x^4 + x^5 + ... + x^{10})(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^{15})$
Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από το συντελεστή του x^{30} στην παραπάνω παράσταση που είναι 185.
ΠΡΟΣΟΧΗ: Είναι διαφορετικός από το συντελεστή του x^{30} στην παράσταση: $(1 + x^2 + x^4 + ...)(x + x^3 + x^5 + ...)(x^3 + x^4 + x^5 + ...)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...)$

Έχουμε κέρματα των 20 λεπτών, 50 λεπτών, 1 ευρώ και 2 ευρώ. Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω κέρματα συνολικής αξίας n ευρώ, διαλέγοντας υποχρεωτικά τουλάχιστον 1 κέρμα από κάθε είδος;

Κωδικοποιούμε στον εκθέτη την αξία των κερμάτων σε λεπτά.
Οι γεννήτριες συναρτήσεις είναι:
Για τα 20-λεπτα: $z^{20} + z^{40} + z^{60} + \dots$
Για τα 50-λεπτα: $z^{50} + z^{100} + z^{150} + \dots$
Για τα 1-ευρα: $z^{100} + z^{200} + z^{300} + \dots$
Για τα 2-ευρα: $z^{200} + z^{400} + z^{600} + \dots$
Δηλ. τελικά: $(z^{20} + z^{40} + z^{60} + \dots)(z^{50} + z^{100} + z^{150} + \dots)(z^{100} + z^{200} + z^{300} + \dots)(z^{200} + z^{400} + z^{600} + \dots)$
Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από το συντελεστή του z^{100n} στην παραπάνω παράσταση.

Έχουμε 20 μαρκαδόρους, 6 μαύρους, 10 πράσινους και 4 κόκκινους. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους μοιράσουμε σε 2 άτομα ώστε καθένα να πάρει 10 μαρκαδόρους και τουλάχιστον 1 από κάθε χρώμα;

Υπολογίζουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να δώσουμε μαρκαδόρους στο 1ο άτομο σύμφωνα με τους περιορισμούς αφού αυτό καθορίζει μοναδικά αυτούς που θα πάρει το 2ο άτομο.
Οι γεννήτριες συναρτήσεις είναι:
Για τους μαύρους μαρκαδόρους: $z + z^2 + z^3 + ... + z^5$
Για τους πράσινους μαρκαδόρους: $z + z^2 + z^3 + ... + z^9$
Για τους κόκκινους μαρκαδόρους: $z + z^2 + z^3$
Δηλ. τελικά:
$(z + z^2 + z^3 + ... + z^5)(z + z^2 + z^3 + ... + z^9)(z + z^2 + z^3)$
Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από το συντελεστή του z^{10} στην παραπάνω παράσταση που είναι 15.

Με πόσους τρόπους 100 ίδιοι επιβάτες μπορούν να κατεβούν σε 4 διαφορετικές στάσεις;

- Αναζητούμε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$ με $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- Η γεννήτρια συνάρτηση για κάθε στάση είναι: $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$ - δε σταματάω στο 100 γιατί μπορεί να υπάρχουν κι άλλοι επιβάτες
- Η τελική γεννήτρια συνάρτηση είναι: $$(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots)^4 = \left(\frac{1}{1-z}\right)^4 = \frac{1}{(1-z)^4}$$
- Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από το συντελεστή του z^{100} στην παραπάνω παράσταση που είναι $C(103, 100)$.

Με πόσους τρόπους 100 ίδιοι επιβάτες μπορούν να κατεβούν σε 4 διαφορετικές στάσεις όταν πρέπει πλήθος επιβατών στην 3η στάση $\geq$ πλήθος επιβατών στην 2η στάση $\geq$ πλήθος επιβατών στην 1η στάση;

- Πρέπει $x_2 = x_1 + k, k \geq 0$, $x_3 = x_2 + \lambda = x_1 + k + \lambda, \lambda \geq 0$
- Αναζητούμε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $3x_1 + 2k + \lambda + x_4 = 100$ με $x_1, k, \lambda, x_4 \geq 0$
- Η γεννήτρια συνάρτηση είναι: $(1 + z^3 + z^6 + ... + z^{99})(1 + z^2 + z^4 + ... + z^{100})(1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^{100})(1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^{100}) = (1 + z^3 + z^6 + ... + z^{99})(1 + z^2 + z^4 + ... + z^{100})(1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^{100})^2$
- Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από το συντελεστή του z^{100} στην παραπάνω παράσταση που είναι 30.787.

Εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις

Όταν ενδιαφερόμαστε για ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ και όχι για ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥΣ χρησιμοποιούμε **εκθετική γεννήτρια συνάρτηση**.

Σκεφτόμαστε ακριβώς όπως πριν μόνο που τώρα παίρνουμε **κομμάτια της σειράς**:

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = e^x$$

ΓΙΑΤΙ; Σε ό,τι έχουμε δει έως τώρα, ο συντελεστής του z^r δείχνει το πλήθος των συνδυασμών r αντικειμένων από n αντικείμενα.

Όμως $C(n,k) = \dfrac{P(n,r)}{P(r,r)}$.

Οπότε για να δείχνει ο συντελεστής του z^r διατάξεις πρέπει να διαιρούμε με $P(r,r)$.

Όταν υπολογίσουμε την τελική εκθετική γεννήτρια συνάρτηση, η απάντηση στο ερώτημα ‘‘**με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε** n **αντικείμενα όταν**...’’ θα βρίσκεται στο συντελεστή του $\dfrac{z^n}{n!}$

Με πόσους τρόπους μπορούμε να εκτυπώσουμε 25 διαφορετικά αρχεία σε 3 διαφορετικούς εκτυπωτές με τον περιορισμό ότι κάθε εκτυπωτής πρέπει να εκτυπώσει τουλάχιστον ένα αρχείο;

- Ουσιαστικά ψάχνουμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διατάξουμε 25 αντικείμενα επιλεγμένα από 3 αντικείμενα όταν επιτρέπονται επαναλήψεις των 3 αντικειμένων.
- Για τον 1ο εκτυπωτή - αφού πρέπει οπωσδήποτε να λάβει ένα τουλάχιστον αρχείο - η γεννήτρια συνάρτηση είναι: $z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^{25}}{25!} = e^z - 1$.
Όμοια για το 2ο και 3ο εκτυπωτή.
- Η τελική γεννήτρια συνάρτηση για όλους τους εκτυπωτές είναι: $(e^z - 1)^3$ και το πλήθος των ζητούμενων τρόπων δίνεται από το συντελεστή του $\frac{z^{25}}{25!}$ στο $(e^z - 1)^3$.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να εκτυπώσουμε 25 διαφορετικά αρχεία σε 3 διαφορετικούς εκτυπωτές με τον περιορισμό ότι κάθε εκτυπωτής πρέπει να εκτυπώσει τουλάχιστον ένα αρχείο;

Κάνουμε πράξεις:

$$(e^z - 1)^3 = 3^{3z} - 3e^{2z} + 3e^z - 1 =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} 3^r \frac{z^r}{r!} - 3\sum_{r=0}^{\infty} 2^r \frac{z^r}{r!} + 3\sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!} - 1 =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} (3^r - 3 \cdot 2^r + 3)\frac{z^r}{r!} - 1$$

Επομένως, ο συντελεστής του $\frac{z^{25}}{25!}$ είναι $3^{25} - 3 \cdot 2^{25} + 3$.

Ποιο είναι το πλήθος των πενταδικών συμβολοσειρών μήκους n με άρτιο πλήθος 1 και περιττό πλήθος 0 στις οποίες τα ψηφία 2,3,4 εμφανίζονται τουλάχιστον 1 φορά;

Εκθετικός απαριθμητής για τα ψηφία 2,3,4: $(e^x-1)^3$
Εκθετικός απαριθμητής για το ψηφίο 1:
$$x^0+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots=\frac{(e^x+e^{-x})}{2}$$
Εκθετικός απαριθμητής για το ψηφίο 0:
$$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots=\frac{(e^x-e^{-x})}{2}$$
Η τελική γεννήτρια συνάρτηση είναι:
$$(e^x-1)^3\cdot\frac{(e^x+e^{-x})}{2}\cdot\frac{(e^x-e^{-x})}{2}$$
Ο συντελεστής του $\frac{x^n}{n!}$ που δείχνει το ζητούμενο πλήθος τρόπων είναι: $5^n-3\cdot 4^n+3^{n+1}-2^n+(-2)^n-3\cdot(-1)^n-1$

Χρήσιμοι τύποι

- Άθροισμα n αρχικών όρων γεωμετρικής προόδου:
  $1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$
- Άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου (όταν $x \leq 1$):
  $1 + x + x^2 + x^3 + ... = \dfrac{1}{1 - x}$
- Διωνυμικό ανάπτυγμα: $(1 + x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$
- Για $-n$: $(1 + x)^{-n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k$
- Όταν $n < 0$: $\dbinom{n}{k} = (-1)^k \dbinom{k - n - 1}{k}$ ή
  $\dbinom{-n}{k} = (-1)^k \dbinom{k + n - 1}{k}$

Χρήσιμοι τύποι

- Για $-x$:
$$(1-x)^n = (1+(-x))^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} x^k$$
- $$(1-x)^{-n} = (1+(-x))^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (-1)^k \binom{k+n-1}{k} x^k =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^2 k \binom{k+n-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} x^k$$

Χρήσιμοι τύποι

- $1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}=e^x$
- $e^{\alpha x}=\sum_{r=0}^{\infty}\alpha^r\frac{x^r}{r!}$
- $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
- $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Ποιο είναι το πλήθος των πενταδικών συμβολοσειρών μήκους n με άρτιο πλήθος 1;

Εκθετικός απαριθμητής για τα ψηφία 0,2,3,4:

$$(1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...)^4=(e^x)^4$$

Εκθετικός απαριθμητής για το ψηφίο 1:

$$x^0+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+...=\frac{(e^x+e^{-x})}{2}$$

Η τελική γεννήτρια συνάρτηση είναι: $e^{4x}\cdot\frac{(e^x+e^{-x})}{2}=$

$$\frac{(e^{5x}+e^{3x})}{2}=\frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{\infty}5^k\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}3^k\frac{x^k}{k!})=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(5^k+3^k)\frac{x^k}{k!}$$

Ο συντελεστής του $\frac{x^n}{n!}$ που δείχνει το ζητούμενο πλήθος τρόπων είναι: $\frac{1}{2}(5^n+3^n)$

Με πόσους τρόπους ένα σύνολο από $r \geq 6$ ίδια αντικείμενα μπορεί να διαχωριστεί σε 3 διαφορετικά υποσύνολα, ανά δύο ξένα μεταξύ τους, ώστε κάθε υποσύνολο να έχει τουλάχιστον 2 αντικείμενα (η ένωση των 3 υποσυνόλων θα περιέχει όλα τα r αντικείμενα);

- Για να έχει κάθε ένα από τα 3 υποσύνολα τουλάχιστον δύο αντικείμενα, παίρνουμε 6 αντικείμενα και τα τοποθετούμε από 2 σε κάθε υποσύνολο. Αφού τα αντικείμενα είναι ίδια, δε μάς ενδιαφέρει ποια αντικείμενα θα τοποθετήσουμε σε κάθε υποσύνολο, αρκεί να είναι 2.
- Ο συνολικός αριθμός των τρόπων να μοιράσουμε τα υπόλοιπα $r-6$ ίδια αντικείμενα προκύπτει ως εξής:
  - Σε κάθε αντικείμενο από τα $r-6$ αναθέτουμε ένα υποσύνολο από τα 3.
  - Αυτό γίνεται με τους τρόπους που μπορούμε να διαλέξουμε $(r-6)$ αντικείμενα από 3 με επανάληψη:
    $$\binom{r-6+3-1}{r-6} = \binom{r-4}{r-6} = \frac{(r-4)(r-5)}{2}$$

Με πόσους τρόπους ένα σύνολο από $r \geq 6$ ίδια αντικείμενα μπορεί να διαχωριστεί σε 3 διαφορετικά υποσύνολα, ανά δύο ξένα μεταξύ τους, ώστε κάθε υποσύνολο να έχει τουλάχιστον 2 αντικείμενα (η ένωση των 3 υποσυνόλων θα περιέχει όλα τα r αντικείμενα);

- Η γεννήτρια συνάρτηση έχει σα συντελεστές τον αριθμό των τρόπων που μπορούμε να τοποθετήσουμε τα r αντικείμενα στα 3 υποσύνολα, με τον περιορισμό ότι κάθε υποσύνολο έχει τουλάχιστον 2 αντικείμενα.

$$A(x) = (x^2+x^3+x^4+\ldots)(x^2+x^3+x^4+\ldots)(x^2+x^3+x^4+\ldots)$$

$$A(x) = x^6(1+x+x^2+\ldots)(1+x+x^2+\ldots)(1+x+x^2+\ldots) = x^6\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$x^6(1-x)^{-3} = x^6\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-3}{k}x^k = x^6\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{k}x^k$$

Με πόσους τρόπους ένα σύνολο από $r \geq 6$ ίδια αντικείμενα μπορεί να διαχωριστεί σε 3 διαφορετικά υποσύνολα, ανά δύο ξένα μεταξύ τους, ώστε κάθε υποσύνολο να έχει τουλάχιστον 2 αντικείμενα (η ένωση των 3 υποσυνόλων θα περιέχει όλα τα r αντικείμενα);

$$A(x) = x^6 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3+k-1}{k} x^k$$

- Για να βρούμε το συντελεστή του x^r που είναι η απάντηση στην ερώτηση θέτουμε $k = r - 6$ και έχουμε $\binom{r-6+3-1}{r-6} = \binom{r-4}{r-6} = \frac{(r-4)(r-5)}{2}$

Δείξτε ότι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_r = \binom{2r}{r}$ είναι η $A(x) = (1-4x)^{-1/2}$.

Από το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε: $(1+x)^n =$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!} x^r \Rightarrow (1-4x)^{-1/2} =$$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)...(-\frac{1}{2}-r+1)}{r!} (-4x)^r =$$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{4^r(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})...(\frac{2r-1}{2})}{r!} x^r =$$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2^r(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2r-1))}{r!} x^r =$$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2^r r!(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2r-1))}{r!r!} x^r =$$

Δείξτε ότι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_r = \binom{2r}{r}$ είναι η $A(x) = (1-4x)^{-1/2}$.

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2r)(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2r-1))}{r!r!} x^r =$$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2r)!}{r!r!} x^r =$$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \binom{2r}{r} x^r =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{2r}{r} x^r$$

Άρα η ακολουθία $\alpha_r = \binom{2r}{r}$ έχει γεννήτρια συνάρτηση τη $A(x) = (1-4x)^{-1/2}$

Ποια ακολουθία αντιστοιχεί στη γεννήτρια συνάρτηση $\frac{1}{1+x}$;

- Από το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε:

  $$(1+x)^n = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!} x^r \Rightarrow$$

  $$(1+x)^{-1} =$$

  $$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)...(-1-r+1)}{r!} x^r \Rightarrow$$

  $$(1+x)^{-1} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)(-2)(-3)...(-r)}{r!} x^r \Rightarrow$$

  $$(1+x)^{-1} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot r}{r!} x^r \Rightarrow$$

  $$(1+x)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r x^r$$

- Άρα, η ζητούμενη ακολουθία είναι: $1, -1, 1, -1, ..., (-1)^n, ...$

Έχουμε απεριόριστο αριθμό κερμάτων των 50, 20 και 10 λεπτών και θέλουμε να διαλέξουμε 10 κέρματα. Δώστε τη γεννήτρια συνάρτηση και το πλήθος των τρόπων για αυτή την επιλογή.

- Έστω α_k ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να διαλέξουμε k κέρματα.
- Για κάθε είδος κερμάτων, μπορούμε να διαλέξουμε κανένα, 1,2,.... Αυτό κωδικοποιείται στη ΓΣ $1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x}$.
- Αφού έχουμε 3 διαφορετικά είδη κερμάτων, η ΓΣ για την α_k είναι $(1-x)^{-3}$.
- Το ζητούμενο δίνεται από το α_{10} που είναι ο συντελεστής του x^{10} στο ανάπτυγμα της ΓΣ.
- Εφαρμόζουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα και βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος συντελεστής είναι: $\binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$
- Η λύση προκύπτει και με συνδυασμούς αντικειμένων με επανάληψη.

Έχουμε απεριόριστο αριθμό κερμάτων των 50, 20 και 10 λεπτών και θέλουμε να διαλέξουμε 10 κέρματα ώστε να έχουμε τουλάχιστον 1 κέρμα και το πολύ 8 κέρματα των 50 λεπτών, άρτιο αριθμό κερμάτων των 10 λεπτών και ο αριθμός των κερμάτων των 20 λεπτών να είναι περιττός και να μην ξεπερνά το 5. Δώστε τη γεννήτρια συνάρτηση και το πλήθος των τρόπων για αυτή την επιλογή.

- Έστω α_k ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να διαλέξουμε k κέρματα με τους παραπάνω περιορισμούς.
- Για τα 50-λεπτα, η ΓΣ είναι: $x + x^2 + x^3 + ... + x^8$.
- Για τα 10-λεπτα, η ΓΣ είναι: $1 + x^2 + x^4 + x^6 + ...$
- Για τα 20-λεπτα, η ΓΣ είναι: $x + x^3 + x^5$.

Έχουμε απεριόριστο αριθμό κερμάτων των 50, 20 και 10 λεπτών και θέλουμε να διαλέξουμε 10 κέρματα ώστε να έχουμε τουλάχιστον 1 κέρμα και το πολύ 8 κέρματα των 50 λεπτών, άρτιο αριθμό κερμάτων των 10 λεπτών και ο αριθμός των κερμάτων των 20 λεπτών να είναι περιττός και να μην ξεπερνά το 5. Δώστε τη γεννήτρια συνάρτηση και το πλήθος των τρόπων για αυτή την επιλογή.

- Πολλαπλασιάζοντας τις ΓΣ για κάθε είδος κερμάτων έχουμε τη ΓΣ για την ακολουθία α_k

$$(x + x^2 + x^3 + ... + x^8)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + ...)(x + x^3 + x^5)$$

- Το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του x^{10} στο ανάπτυγμα της ΓΣ που (κάνοντας πράξεις) είναι 11.

Έχουμε απεριόριστο αριθμό κερμάτων των 50, 20 και 10 λεπτών. Δώστε τη γεννήτρια συνάρτηση και το πλήθος των τρόπων για να σχηματίσουμε το ποσό των 2 ευρώ.

- Έστω α_k ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να σχηματίσουμε το ποσό των k λεπτών διαλέγοντας από τα παραπάνω κέρματα.
- Για τα 50-λεπτα, η ΓΣ είναι: $1 + x^{50} + x^{100} + \ldots = \frac{1}{1-x^{50}}$.
- Για τα 10-λεπτα, η ΓΣ είναι: $1 + x^{20} + x^{40} + \ldots = \frac{1}{1-x^{20}}$.
- Για τα 20-λεπτα, η ΓΣ είναι: $1 + x^{10} + x^{20} + \ldots = \frac{1}{1-x^{10}}$.
- Πολλαπλασιάζοντας τις ΓΣ για κάθε είδος κερμάτων έχουμε τη ΓΣ για την ακολουθία α_k

$$\left(\frac{1}{1-x^{50}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{20}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{10}}\right)$$

- Αφού θέλουμε να σχηματίσουμε το ποσό των 200 λεπτών (=2 ευρώ), το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του x^{200} στο ανάπτυγμα της ΓΣ που (κάνοντας πράξεις) είναι 29. Γιατί;

$$(\frac{1}{1-x^{50}})(\frac{1}{1-x^{20}})(\frac{1}{1-x^{10}}) =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(-1)^k x^{50k} + \sum_{l=0}^{\infty}\binom{-1}{l}(-1)^l x^{20l} +$$
$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-1}{r}(-1)^r x^{10r} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{50k} + \sum_{l=0}^{\infty} x^{20l} + \sum_{r=0}^{\infty} x^{10r} =$$
$$\sum_{k,l,r=0}^{\infty} x^{50k+20l+10r}$$

Ουσιαστικά αναζητώ το συντελεστή του x^{200} στο παραπάνω ανάπτυγμα, δηλ., τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης:
$50k + 20l + 10r = 200 \Rightarrow 5k + 2l + r = 20$ με
$0 \leq k \leq 4, 0 \leq l \leq 10, 0 \leq r \leq 20.$
Για $k = 0$, προκύπτουν 11 λύσεις
Για $k = 1$, προκύπτουν 8 λύσεις
Για $k = 2$, προκύπτουν 6 λύσεις
Για $k = 3$, προκύπτουν 3 λύσεις
Για $k = 4$, προκύπτουν 1 λύση
Άρα, συνολικά: $11 + 8 + 6 + 3 + 1 = 29$ λύσεις.

Μια ομάδα δίνει 30 αγώνες. Τα δυνατά αποτελέσματα για κάθε αγώνα είναι νίκη, ήττα, ισοπαλία. Με χρήση γεννητριών συναρτήσεων να υπολογιστεί ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων αν ο συνολικός αριθμός των νικών είναι περιττός, ο συνολικός αριθμός των ηττών είναι άρτιος, ενώ οι ισοπαλίες είναι τουλάχιστον 2.

- Έστω α_k ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων με τους παραπάνω περιορισμούς για k αγώνες συνολικά.
- Για τις νίκες η ΓΣ είναι: $z + z^3 + z^5 + \ldots z^{29}$.
- Για τις ήττες η ΓΣ είναι: $1 + z^2 + z^4 + \ldots z^{30}$.
- Για τις ισοπαλίες η ΓΣ είναι: $z^2 + z^3 + z^4 + \ldots z^{30}$.
- Πολλαπλασιάζοντας τις ΓΣ για κάθε είδος κερμάτων έχουμε τη ΓΣ για την ακολουθία α_k

$$(z + z^3 + z^5 + \ldots z^{29})(1 + z^2 + z^4 + \ldots z^{30})(z^2 + z^3 + z^4 + \ldots z^{30})$$

- Το ζητούμενο προκύπτει από το συντελεστή του x^{30} στο ανάπτυγμα της παραπάνω ΓΣ.

Μια ομάδα δίνει 30 αγώνες. Τα δυνατά αποτελέσματα για κάθε αγώνα είναι νίκη, ήττα, ισοπαλία. Με χρήση γεννητριών συναρτήσεων να υπολογιστεί ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων αν ο συνολικός αριθμός των νικών είναι περιττός, ο συνολικός αριθμός των ηττών είναι άρτιος, ενώ οι ισοπαλίες είναι τουλάχιστον 2.

- Για να υπολογίσουμε το συντελεστή, επεκτείνουμε το άθροισμα μέχρι το άπειρο (και έχουμε άπειρους όρους γεωμετρικής προόδου). Αυτό δεν επηρεάζει το συντελεστή του x^{30} επειδή οι όροι που προστίθενται έχουν εκθέτη μεγαλύτερο του 30. Έτσι η ΓΣ γίνεται:
  $A(x) = (z + z^3 + z^5 + \ldots)(1 + z^2 + z^4 + \ldots)(z^2 + z^3 + z^4 + \ldots) =$
  $\dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{x^2}{1-x} + \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{x^3}{(1-x)^3(1+x)^2} =$
  $\dfrac{x^3}{(1-x^2)^3} + \dfrac{x^4}{(1-x^2)^3}$

Μια ομάδα δίνει 30 αγώνες. Τα δυνατά αποτελέσματα για κάθε αγώνα είναι νίκη, ήττα, ισοπαλία. Με χρήση γεννητριών συναρτήσεων να υπολογιστεί ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων αν ο συνολικός αριθμός των νικών είναι περιττός, ο συνολικός αριθμός των ηττών είναι άρτιος, ενώ οι ισοπαλίες είναι τουλάχιστον 2.

- Εφαρμόζουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα και έχουμε:
  $$\frac{x^3}{(1-x^2)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{2k+3} \text{ και}$$
  $$\frac{x^4}{(1-x^2)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{2k+4}$$
- Στο πρώτο ανάπτυγμα δεν υπάρχει το x^{30}, ενώ στο δεύτερο το x^{30} εμφανίζεται για $k = 13$ και ο αντίστοιχος συντελεστής είναι $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ δίνει το συνολικό αριθμό αποτελεσμάτων για 30 αγώνες με τους δοσμένους περιορισμούς.

Θέλουμε να μοιράσουμε 24 καραμέλες σε 4 παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον 3 και το πολύ 8 καραμέλες. Δώστε τη γεννήτρια συνάρτηση και το πλήθος των τρόπων για να γίνει αυτό.

- Η ΓΣ για καθένα από τα 4 παιδιά είναι: $z^3 + z^4 + \ldots + z^8$.
- Η τελική ΓΣ είναι:
  $$(z^3+z^4+\ldots+z^8)^4 = z^{12}(1+z+z^2+\ldots+z^5)^4 = z^{12}\left(\frac{1-z^6}{1-z}\right)^4.$$
- Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από το συντελεστή του z^{24} στο ανάπτυγμα της παραπάνω ΓΣ ο οποίος είναι ίδιος με το συντελεστή του z^{12} στο ανάπτυγμα της συνάρτησης $\left(\frac{1-z^6}{1-z}\right)^4$.
- ΠΡΟΣΟΧΗ: Δε μπορούμε να επεκτείνουμε το άθροισμα στο άπειρο γιατί τα $z^9, \ldots, z^{24}$ συνεισφέρουν στο συντελεστή του z^{24}.

Θέλουμε να μοιράσουμε 24 καραμέλες σε 4 παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον 3 και το πολύ 8 καραμέλες. Δώστε τη γεννήτρια συνάρτηση και το πλήθος των τρόπων για να γίνει αυτό.

- Εφαρμόζουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα για τη συνάρτηση: $\left(\dfrac{1-z^6}{1-z}\right)^4$.
- $(1-z^6)^4(1-z)^{-4} = (1-4z^6+6z^{12}+\ldots)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}z^k$
- Το z^{12} σχηματίζεται από το z^0 στον πρώτο όρο και από το z^{12} στο δεύτερο όρο (συντελεστής $\binom{15}{3}$), από το z^6 από κάθε όρο (συντελεστής $-4\binom{9}{3}$) και το z^{12} στον πρώτο όρο και το z^0 στο δεύτερο όρο (συντελεστής 6).
- Άρα ο ζητούμενος συντελεστής είναι: $\binom{15}{3}+(-4)\binom{9}{3}+6=125$.

Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να μοιράσει 24 (ίδια) αντικείμενα σε 4 άτομα έτσι ώστε κάθε άτομο να πάρει τουλάχιστον 3 και όχι παραπάνω από 8 αντικείμενα;

- Για κάθε άτομο η ΓΣ είναι: $x^3 + x^4 + ... + x^8$, οπότε και για τα 4 άτομα η ΓΣ είναι: $(x^3 + x^4 + ... + x^8)^4$
- Το πλήθος των ζητούμενων τρόπων δίνεται από το συντελεστή του x^{24} στο ανάπτυγμα της παραπάνω ΓΣ.
- $(x^3+x^4+...+x^8)^4 = x^{12}(1+x+x^2+...+x^5)^4 = x^{12}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4$
- Άρα αναζητούμε το συντελεστή του x^{24} στο ανάπτυγμα του $\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4 = (1-x^6)^4(1-x)^{-4} =$ $[1-\binom{4}{1}x^6+\binom{4}{2}x^{12}-...+x^{24}][\binom{-4}{0}+\binom{-4}{1}(-x)+\binom{-4}{2}(-x)^2+...]$
- Ο συντελεστής του x^{12} είναι:

$$[\binom{-4}{12}(-1)^{12} - \binom{4}{1}\binom{-4}{6}(-1)^6 + \binom{4}{2}\binom{-4}{0}] =$$

$$[\binom{15}{12} - \binom{4}{1}\binom{9}{6} + \binom{4}{2}] = 125$$

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση $\dfrac{1+2x-x^2-x^3}{1+x-x^2-x^3}$

- $A(x) = \dfrac{1+x-x^2-x^3}{1+x-x^2-x^3} + \dfrac{x}{1+x-x^2-x^3} = 1 + \dfrac{x}{1+x-x^2(1+x)} = 1 + \dfrac{x}{(1+x)(1-x^2)} = 1 + \dfrac{x}{(1+x)^2(1-x)}$
- Αναλύουμε το κλάσμα $\frac{x}{(1+x)^2(1-x)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων. Έχουμε:
- $A(x) = 1 + \dfrac{1}{4}(1-x)^{-1} + \dfrac{1}{4}(1+x)^{-1} - \dfrac{1}{2}(1+x)^{-2} =$
  $1 + \dfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(-1)^k x^k + \dfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}x^k - \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}x^k =$
  $1 + \dfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}x^k + \dfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k - \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k =$

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση $\dfrac{1+2x-x^2-x^3}{1+x-x^2-x^3}$

- $$1+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(-1)^k-\frac{1}{2}(-1)^k(1+k)\right]x^k =$$
  $$1+x-x^2+2x^3-2x^4+3x^5-3x^6+\ldots$$

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση $\dfrac{2+3x-6x^2}{1+2x}$

- $A(x) = \dfrac{2+3x-6x^2}{1+2x} = -3x + 3 - \dfrac{1}{2x+1} =$
  $3 - 3x - (1+2x)^{-1} = 3 - 3x - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} 2^k x^k =$
  $3 - 3x - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k x^k = 2 - x - 4x^2 + 8x^3 - 16x^4 + \ldots$

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση $\dfrac{2}{1-4x^2}$

- $A(x) = \dfrac{2}{1-4x^2} = 2(1-4x^2)^{-1} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(-1)^k(4x^2)^k = 2\sum_{k=0}^{\infty}4^k x^{2k} = 2 + 0\cdot x + 8x^2 + 0\cdot x^3 + 32x^4 + \ldots$

Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $2, 5, 13, 35, ..., 2^n + 3^n, ...$

- $A(x) = 2^0 + 3^0 + (2^1 + 3^1)x + (2^2 + 3^2)x + ... =$
  $(2^0 + 2x + 2^2x^2 + ...) + (3^0 + 3x + 2^3x^2 + ...)$
  $[(2x)^0 + (2x)^1 + (2x)^2 + ...] + [(3x)^0 + (3x)^1 + (3x)^2 + ...] =$
  $\dfrac{1}{1-2x} + \dfrac{1}{1-3x} = \dfrac{1-3x+1-2x}{1-5x+6x^2} = \dfrac{2-5x}{1-5x+6x^2}$

Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $1, 2, 3, ..., r, ...$

- $A(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + rx^{r-1} + ... =$
  $(x+x^2+x^3+...+x^r+...)' = [(1+x+x^2+x^3+...+x^r+...)-1]' =$
  $\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$

Να αποδειχθεί με χρήση γεννητριών συναρτήσεων η σχέση $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

- $\binom{n}{k}$ είναι οι συντελεστές του z^r στο ανάπτυγμα του $(1+z)^n$.
- Όμως
  $(1+z)^n = (1+z)(1+z)^{n-1} = (1+z)^{n-1} + z(1+z)^{n-1}$
- Στο παραπάνω άθροισμα, οι συντελεστές του z^r είναι: $\binom{n-1}{k}$ από τον πρώτο όρο και $\binom{n-1}{k-1}$ από το δεύτερο όρο, δηλ. συνολικά $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$, όπου α_r είναι ο αριθμός των τρόπων να επιλέξουμε (με επαναλήψεις) r γράμματα από το αλφάβητο $0, 1, 2$ με τον περιορισμό ότι το γράμμα 0 θα επιλεγεί άρτιο αριθμό φορών. Με βάση τη γεννήτρια συνάρτηση υπολογίστε το α_r.

- Η ΓΣ είναι:

$$A(x) = \underbrace{(1 + x^2 + x^4 + \ldots)}_{\text{για το } 0} \underbrace{(1 + x + x^2 + \ldots)}_{\text{για το } 1} \underbrace{(1 + x + x^2 + \ldots)}_{\text{για το } 2} =$$

$$\frac{1}{1 - x^2} \frac{1}{(1 - x)^2} = \frac{1}{1 + x} \frac{1}{(1 - x)^3}$$

- Αναλύοντας σε απλά κλάσματα:
$A(x) = \frac{1}{8}(1 + x)^{-1} + \frac{1}{8}(1 - x)^{-1} + \frac{1}{4}(1 - x)^{-2} + \frac{1}{2}(1 - x)^{-3} =$

$$\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-3}{k}x^k + \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(-1)^k x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}(-1)^k x^k$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-3}{k}(-1)^k x^k =$$

$$\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k + \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)}{2}x^k \Rightarrow$$

$$\alpha_r = \frac{1}{8}(-1)^r + \frac{1}{8} + \frac{r+1}{4} + \frac{(r+1)(r+2)}{4} =$$

$$\frac{1}{8}[1+(-1)^r] + \frac{(r+1)(r+3)}{4}$$

Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$, όπου ο όρος α_r ισούται με τον αριθμό των τρόπων να επιλέξουμε (με επαναλήψεις) r από 10 συνολικά αντικείμενα, μεταξύ των οποίων το αντικείμενο Χ μπορεί να επιλεγεί το πολύ 2 φορές, το αντικείμενο Υ το πολύ 3 φορές και τα υπόλοιπα αντικείμενα από μία φορά το πολύ.

- ΓΣ για το Χ: $z^0 + z^1 + z^2 = 1 + z + z^2$
- ΓΣ για το Υ: $z^0 + z^1 + z^2 + z^3 = 1 + z + z^2 + z^3$
- ΓΣ για καθένα από τα υπόλοιπα 8 αντικείμενα: $z^0 + z^1 = 1 + z$
- Η τελική ΓΣ είναι: $A(z) = (1 + z + z^2)(1 + z + z^2 + z^3)(1 + z)^8$
- Το πλήθος των τρόπων να επιλέξουμε r από τα αντικείμενα αυτά δίνεται από το συντελεστή του z^r στο ανάπτυγμα της $A(z)$.

Να βρεθεί με χρήση απαριθμητών ο αριθμός των τρόπων να επιλέξουμε r αντικείμενα με απεριόριστες επαναλήψεις από n αντικείμενα.

- ΓΣ για καθένα από τα n αντικείμενα: $1 + x + x^2 + x^3 + ...$
- Η τελική ΓΣ είναι: $A(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + ...)^n$
  $A(x) = (1 + x + x^2 + ...)^n = (\frac{1}{1-x})^n = (1 - x)^{-n} =$
  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)...(-n-k+1)}{k!}(-1)^k x^k =$
  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)(n+1)...(n+k-1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} x^k =$
  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$
- Το πλήθος των τρόπων να επιλέξουμε r από τα αντικείμενα αυτά δίνεται από το συντελεστή του x^r στο ανάπτυγμα της $A(x)$ που είναι $\binom{n+r-1}{r}$.

Να βρεθεί ο για τις επιλογές r αντικειμένων από n αντικείμενα ($r \geq n$) με απεριόριστες επαναλήψεις όταν κάθε αντικείμενο επιλέγεται κάθε φορά.

- Αφού "κάθε αντικείμενο επιλέγεται κάθε φορά" η ΓΣ για καθένα από τα n αντικείμενα: $x + x^2 + x^3 + \ldots$
- Η τελική ΓΣ είναι:
  $A(x) = (x + x^2 + \ldots)^n = (\frac{1}{1-x} - 1)^n = \left(\frac{1-1+x}{1-x}\right)^n =$
  $\left(\frac{x}{1-x}\right)^n = x^n(1-x)^{-n} = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-1)^k x^k =$
  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^{n+k}$
- Το πλήθος των τρόπων να επιλέξουμε r από τα αντικείμενα αυτά με τους δοσμένους περιορισμούς δίνεται από το συντελεστή του x^r στο ανάπτυγμα της $A(x)$ που προκύπτει για $k = r - n$ και είναι $\binom{r-1}{r-n}$.

Να προσδιοριστεί ο συντελεστής του x^{15} στο ανάπτυγμα της $f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + ...)^4$.

- $(x^2 + x^3 + x^4 + ...)^4 = \left[x^2(1 + x + x^2 + ...)\right]^4 = \left[x^2(\frac{1}{1-x})\right]^4 = x^8(\frac{1}{1-x})^4 = x^8(1-x)^{-4} = x^8 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{-4}{k} x^k = x^8 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3+k}{k} x^k$
- Ουσιαστικά αναζητώ το συντελεστή του x^7 στον όρο $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{3+k}{k} x^k$ που είναι: $\binom{10}{7} = 120$

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 25 (ίδια) αντικείμενα σε 7 διαφορετικά κουτιά με τον περιορισμό ότι το πρώτο κουτί δεν επιτρέπεται να έχει πάνω από 10 αντικείμενα;

- Η ΓΣ για το 1ο κουτί είναι: $1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}$
- Η ΓΣ για καθένα από τα υπόλοιπα 6 κουτιά είναι: $1 + x + x^2 + \ldots$
- Οπότε, η τελική ΓΣ για τα 7 κουτιά είναι: $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{10})(1 + x + x^2 + \ldots)^7 = \left(\frac{1 - x^{11}}{1 - x}\right)\left(\frac{1}{1 - x}\right) = (1 - x)^{-7}(1 - x^{11}) = \left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-7}{k}x^k\right](1 - x^{11}) = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{6 + k}{k}x^k\right](1 - x^{11})$

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 25 (ίδια) αντικείμενα σε 7 διαφορετικά κουτιά με τον περιορισμό ότι το πρώτο κουτί δεν επιτρέπεται να έχει πάνω από 10 αντικείμενα;

- Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από το συντελεστή του x^{25} στο ανάπτυγμα του $\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{6+k}{k}x^k\right](1-x^{11})$
- Αυτός μπορεί να προκύψει είτε για $k = 25$ είτε για $k = 14$ και είναι: $\binom{6+25}{25} - \binom{6+14}{14} = \binom{31}{25} - \binom{20}{14} = 697521$

Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 25 παιχνίδια από 7 διαφορετικά που υπάρχουν συνολικά όταν μπορούμε να επιλέξουμε από 2 έως 6 κομμάτια από κάθε παιχνίδι;

- Η ΓΣ για κάθε παιχνίδι είναι: $x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$
- Η ΓΣ για όλα τα παιχνίδια είναι:
  $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^7 = \left(x^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)\right)^7 = x^{14}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^7 = x^{14}\left(\frac{1 - x^5}{1 - x}\right)^7 = x^{14}(1 - x)^{-7}(1 - x^5)^7 = x^{14}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-7}{k}x^k \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-7}{r}x^{5r}$
- Ουσιαστικά αναζητώ το συντελεστή του x^{11} στον όρο
  $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-7}{k}x^k \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{7}{r}x^{5r} =$
  $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{6+k}{k}x^k \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{7}{r}x^{5r}$
- Αυτός προκύπτει είτε για $k = 11, r = 0$, είτε για $k = 6, r = 1$, είτε για $k = 1, r = 2$.
- Άρα:
  $\binom{17}{11} + \binom{12}{6}(-1)\binom{7}{1} + \binom{7}{1}\binom{7}{2} = 12.376 - 6.468 + 147 = 6.055$

Να βρεθεί γεννήτρια συνάρτηση για την ακολουθία α_r που έχει ως όρους της τους αριθμούς των τρόπων έκφρασης του r σαν άθροισμα διαφορετικών ακεραίων.

- Για κάθε ακέραιο k, το άθροισμα $1 + x^k$ εκφράζει το ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ακέραιο k καμία ή μία φορά στο άθροισμα για το σχηματισμό του ακεραίου r.
- Οπότε, για όλους τους ακέραιους η ΓΣ είναι: $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4)...(1 + x^k)...$
- Η ΓΣ δείχνει ότι ο r μπορεί να σχηματιστεί με χρήση κάθε ακεραίου το πολύ μία φορά.

Να βρεθεί η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό α_r των διαφορετικών μεταθέσεων r αντικειμένων που επιλέγονται από 4 διαφορετικούς τύπους αντικειμένων, εκ των οποίων τα αντικείμενα κάθε τύπου επιλέγονται τουλάχιστον 2 και όχι περισσότερες από 5 φορές.

- Η ΓΣ για κάθε αντικείμενο κάθε τύπου είναι: $\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$
- Η ΓΣ για τους 4 τύπους αντικειμένων είναι: $\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)^4$
- Ο ζητούμενος αριθμός α_r δίνεται από το συντελεστή του $\frac{x^r}{r!}$ στο ανάπτυγμα της παραπάνω συνάρτησης.

Να βρεθεί η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό α_r των τρόπων τοποθέτησης r (διαφορετικών) ανθρώπων σε 3 διαφορετικές αίθουσες με 1 τουλάχιστον άνθρωπο σε κάθε αίθουσα. Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση όταν τεθεί ο περιορισμός ότι πρέπει να τοποθετηθεί άρτιος αριθμός ανθρώπων σε κάθε αίθουσα;

Και οι άνθρωποι και οι αίθουσες είναι διαφορετικές, οπότε αναζητούμε διατάξεις με τον περιορισμό ότι 1 τουλάχιστον άτομο θα πάει σε κάθε αίθουσα.

- Η ΓΣ για κάθε αίθουσα είναι:
  $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots - 1 = e^x - 1$
- Επομένως, η ΓΣ για τις 3 αίθουσες είναι:
  $(e^x - 1)^3 = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1 =$
  $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{x^k}{k!} - 3 \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{x^k}{k!} + 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} (3^k - 3 \cdot 2^k + 3) \frac{x^k}{k!} - 1$

Να βρεθεί η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό α_r των τρόπων τοποθέτησης r (διαφορετικών) ανθρώπων σε 3 διαφορετικές αίθουσες με 1 τουλάχιστον άνθρωπο σε κάθε αίθουσα. Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση όταν τεθεί ο περιορισμός ότι πρέπει να τοποθετηθεί άρτιος αριθμός ανθρώπων σε κάθε αίθουσα;

Και οι άνθρωποι και οι αίθουσες είναι διαφορετικές, οπότε αναζητούμε διατάξεις με τον περιορισμό ότι 1 τουλάχιστον άτομο θα πάει σε κάθε αίθουσα.

- Η ΓΣ για κάθε αίθουσα είναι:
  $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots - 1 = e^x - 1$
- Επομένως, η ΓΣ για τις 3 αίθουσες είναι:

$$(e^x - 1)^3 = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{x^k}{k!} - 3\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{x^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(3^k - 3 \cdot 2^k + 3)}_{\alpha_r \text{ για } k=r} \frac{x^k}{k!} - 1$$

Να βρεθεί η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό α_r των τρόπων τοποθέτησης r (διαφορετικών) ανθρώπων σε 3 διαφορετικές αίθουσες με 1 τουλάχιστον άνθρωπο σε κάθε αίθουσα. Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση όταν τεθεί ο περιορισμός ότι πρέπει να τοποθετηθεί άρτιος αριθμός ανθρώπων σε κάθε αίθουσα;

Και οι άνθρωποι και οι αίθουσες είναι διαφορετικές, οπότε αναζητούμε διατάξεις με τον περιορισμό ότι άρτιο πλήθος ατόμων θα πάει σε κάθε αίθουσα.

- Η ΓΣ για κάθε αίθουσα είναι:
  $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
- Επομένως, η ΓΣ για τις 3 αίθουσες είναι:
  $[\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})]^3 = \frac{1}{8}(e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}) =$
  $$\frac{1}{8}(\sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{x^k}{k!} - 3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} 3^k (-1)^k \frac{x^k}{k!})$$

Να βρεθεί η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό α_r των τρόπων τοποθέτησης r (διαφορετικών) ανθρώπων σε 3 διαφορετικές αίθουσες με 1 τουλάχιστον άνθρωπο σε κάθε αίθουσα. Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση όταν τεθεί ο περιορισμός ότι πρέπει να τοποθετηθεί άρτιος αριθμός ανθρώπων σε κάθε αίθουσα;

- $\frac{1}{8}(\sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{x^k}{k!} - 3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} 3^k(-1)^k \frac{x^k}{k!}) =$
  $\frac{1}{8}\left(\sum_{k=0}^{\infty}[3^k - 3 + 3(-1)^k - 3^k(-1)^k]\frac{x^k}{k!}\right)$

Να βρεθεί η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό α_r των τρόπων τοποθέτησης r (διαφορετικών) ανθρώπων σε 3 διαφορετικές αίθουσες με 1 τουλάχιστον άνθρωπο σε κάθε αίθουσα. Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση όταν τεθεί ο περιορισμός ότι πρέπει να τοποθετηθεί άρτιος αριθμός ανθρώπων σε κάθε αίθουσα;

- $$\frac{1}{8}(\sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{x^k}{k!} - 3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} 3^k(-1)^k \frac{x^k}{k!}) =$$
  $$\frac{1}{8}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{[3^k - 3 + 3(-1)^k - 3^k(-1)^k]}_{\alpha_r \text{για } k=r} \frac{x^k}{k!}\right)$$

Βρείτε μια απλή έκφραση για τη γεννήτρια συνάρτηση της αριθμητικής ακολουθίας $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots$.

$$\Rightarrow (1 - z^2)A(z) = \frac{1}{1 - z}$$

$$\Rightarrow A(z) = \frac{1}{(1 - z^2)(1 - z)} = \frac{1}{(1 + z)(1 - z)^2}$$

- Άρα η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας δίνεται από τη σχέση:

$$A(z) = \frac{1}{(1 + z)(1 - z)^2}$$

Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε r διαφορετικά αντικείμενα που επιλέγονται από απεριόριστο αριθμό αντικειμένων n διαφορετικών ειδών;

- Η ΓΣ για κάθε αντικείμενο είναι: $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
- Επομένως, η ΓΣ για όλα τα n αντικείμενα είναι: $\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)^n = (e^x)^n = e^{xn}$
- Ισχύει ότι: $e^{\alpha x} = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha^r \frac{x^r}{r!}$, οπότε:
- $e^{xn} = \sum_{r=0}^{\infty} n^r \frac{x^r}{r!}$
- Το ζητούμενο πλήθος διατάξεων δίνεται από το συντελεστή του $\frac{x^r}{r!}$ στο παραπάνω ανάπτυγμα που είναι n^r.

Ένα πλοίο έχει 48 σημαίες, από τις οποίες 12 κόκκινες, 12 άσπρες, 12 μπλε και 12 μαύρες. 12 από αυτές τις σημαίες τοποθετούνται σε έναν κατακόρυφο ιστό για να ανταλλάσσονται μηνύματα με άλλα πλοία. Πόσα από αυτά τα μηνύματα χρησιμοποιούν άρτιο αριθμό μπλε σημαιών και περιττό αριθμό μαύρων σημαιών;

- ΓΣ για άρτιο αριθμό μπλε σημαιών: $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$
- ΓΣ για περιττό αριθμό μαύρων σημαιών: $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$
- ΓΣ για κόκκινες και άσπρες (δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός): $(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots)^2$
- Επομένως, η τελική ΓΣ είναι:

$$f(x) = (e^x)^2 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{4}e^{2x}(e^{2x} - e^{-2x})$$

$$= \frac{1}{4}(e^{4x} - 1) = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(4x)^i}{i!} - 1\right) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(4x)^i}{i!}$$

Ένα πλοίο έχει 48 σημαίες, από τις οποίες 12 κόκκινες, 12 άσπρες, 12 μπλε και 12 μαύρες. 12 από αυτές τις σημαίες τοποθετούνται σε έναν κατακόρυφο ιστό για να ανταλλάσσονται μηνύματα με άλλα πλοία. Πόσα από αυτά τα μηνύματα χρησιμοποιούν άρτιο αριθμό μπλε σημαιών και περιττό αριθμό μαύρων σημαιών;

- Επομένως, ο συντελεστής του $\frac{x^{12}}{12!}$ στη συνάρτηση $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(4x)^i}{i!}$ που δίνει το ζητούμενο αριθμο μηνυμάτων είναι: $\frac{1}{4}4^{12} = 4^{11} = 4.194.304$

Μια εταιρεία προσλαμβάνει 11 νέους υπαλλήλους. Κάθε υπάλληλος τοποθετείται σε ένα από τα 4 υποκαταστήματα της εταιρείας και κάθε υποκατάστημα ενισχύεται με έναν τουλάχιστον νέο υπάλληλο. Με πόσους τρόπους μπορούν να γίνουν οι τοποθετήσεις των νεοπροσληφθέντων υπαλλήλων;

- Ονομάζουμε Α, Β, Γ και Δ τα 4 υποκαταστήματα.
- Οι ζητούμενοι τρόποι είναι ουσιαστικά απαντήσεις στην ερώτηση: καθένας από τους υπαλλήλους σε ποιο κατάστημα πηγαίνει (υπό τους δοσμένους περιορισμούς).
- Άρα αναζητούμε το πλήθος των διαφορετικών 11-άδων που μπορούμε να πάρουμε χρησιμοποιώντας τα ''γράμματα'' Α, Β, Γ και Δ, με τον περιορισμό ότι το καθένα πρέπει να εμφανίζεται οπωσδήποτε μία φορά στην 11-άδα. Προφανώς, η σειρά έχει σημασία, άρα αναζητούμε διατάξεις και επομένως εκθετική γεννήτρια συνάρτηση.

Μια εταιρεία προσλαμβάνει 11 νέους υπαλλήλους. Κάθε υπάλληλος τοποθετείται σε ένα από τα 4 υποκαταστήματα της εταιρείας και κάθε υποκατάστημα ενισχύεται με έναν τουλάχιστον νέο υπάλληλο. Με πόσους τρόπους μπορούν να γίνουν οι τοποθετήσεις των νεοπροσληφθέντων υπαλλήλων;

- Για το ‘‘γράμμα’’ A (όμοια και για τα υπόλοιπα) η ΓΣ είναι: $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
- Άρα τελικά η ΓΣ είναι:

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)^4 = (e^x - 1)^4 = e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1$$

- Ο ζητούμενος αριθμός τοποθετήσεων δίνεται από το συντελεστή του $\frac{x^{11}}{11!}$ στο ανάπτυγμα της ΓΣ.
- $\sum_{r=0}^{\infty} 4^r \frac{x^r}{r!} - 4 \sum_{r=0}^{\infty} 3^r \frac{x^r}{r!} + 6 \sum_{r=0}^{\infty} 2^r \frac{x^r}{r!} - 4 \sum_{r=0}^{\infty} 1^r \frac{x^r}{r!} + 1 =$

Μια εταιρεία προσλαμβάνει 11 νέους υπαλλήλους. Κάθε υπάλληλος τοποθετείται σε ένα από τα 4 υποκαταστήματα της εταιρείας και κάθε υποκατάστημα ενισχύεται με έναν τουλάχιστον νέο υπάλληλο. Με πόσους τρόπους μπορούν να γίνουν οι τοποθετήσεις των νεοπροσληφθέντων υπαλλήλων;

- $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}(4^r - 4\cdot 3^r + 6\cdot 2^r - 4r)\frac{x^r}{r!} + 1$
- Υπολογίζουμε το συντελεστή του $\frac{x^{11}}{11!}$ θέτοντας $r = 11$ στην παράσταση: $(4^r - 4\cdot 3^r + 6\cdot 2^r - 4r)$
- $4^r - 4\cdot 3^r + 6\cdot 2^r - 4r =$
  $4^{11} - 4\cdot 3^{11} + 6\cdot 2^{11} - 4\cdot 11 =$
  $4^{11} - 4\cdot 3^{11} + 6\cdot 2^{11} - 4$

Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων να ρίξουμε k διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές έτσι ώστε κάθε υποδοχή να δεχθεί τουλάχιστον ένα αντικείμενο.

Σε κάθε υποδοχή πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα αντικείμενο και μετράει η σειρά.

- Η ΓΣ για κάθε υποδοχή είναι: $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = e^x - 1$
- Η ΓΣ για όλες τις n υποδοχές είναι:

$$(e^x - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (e^x)^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{x(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{r=0}^{\infty} (n-k)^r \frac{x^r}{r!} =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)^r \right) \frac{x^r}{r!}$$

Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων να διαμερίσω ένα σύνολο από k διακεκριμένα αντικείμενα σε n υποσύνολα μη κενά και ανά δυο ξένα.

- Αν θεωρήσουμε ότι τα n υποσύνολα αντιστοιχούν σε n υποδοχές, τότε οι απαιτήσεις για τα υποσύνολα να είναι ανά δυο ξένα και μη κενά μετατρέπονται στους περιορισμούς για τις υποδοχές να είναι διακεκριμένες και να έχουν τουλάχιστον ένα αντικείμενο αντίστοιχα.
- Επομένως, ο αριθμός που ψάχνουμε είναι το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος, με τη διαφορά ότι αφού δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των στοιχείων μέσα στα υποσύνολα (ή των αντικειμένων στις υποδοχές αντίστοιχα), θα πρέπει να διαιρέσουμε με $n!$. Άρα:
$$\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(n-k)^r\right)\frac{1}{n!}$$

Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων να διαμερίσω ένα σύνολο από k διακεκριμένα αντικείμενα σε n υποσύνολα μη κενά και ανά δυο ξένα.

- Ο προηγούμενος αριθμός λέγεται και αριθμός Stirling δευτέρου είδους και συμβολίζεται με:
  $S(k,n) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (n-1)^k (-1)^i \right) \frac{1}{n!}$
- Για τους αριθμούς Stirling δευτέρου είδους ισχύει ο παρακάτω αναδρομικός τύπος:
  $S(k+1,n+1) = S(k,n) + (n+1)S(k,n+1)$

Ιδιότητες γεννητριών συναρτήσεων

Θεωρούμε ακολουθίες $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ και $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, ...$ με γεννήτριες συναρτήσεις $A(x)$ και $B(x)$ αντίστοιχα.

Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- Γραμμική ιδιότητα
- Ιδιότητα κλίμακας
- Ιδιότητα ολίσθησης
- Ιδιότητα μερικών αθροισμάτων
- Ιδιότητα συμπληρωματικών μερικών αθροισμάτων
- Ιδιότητα παραγώγου
- Ιδιότητα ολοκλήρωσης
- Ιδιότητα συνέλιξης

Γραμμική ιδιότητα

Η ακολουθία $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r$.

Η ακολουθία $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, ...$ έχει γεννήτρια συνάρτηση τη $B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$.

Έστω c, d σταθερές.

Η ΓΣ της ακολουθίας $c \cdot \alpha + d \cdot \beta$ είναι η $c \cdot A(x) + d \cdot B(x)$. Γιατί;

Η ΓΣ της $c \cdot \alpha + d \cdot \beta$ θα είναι η

$$\Gamma(x) = \sum_{r=0}^{\infty}(c \cdot \alpha_r + d \cdot \beta_r)x^r = \sum_{r=0}^{\infty}(c \cdot \alpha_r x^r + d \cdot \beta_r x^r) =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} c \cdot \alpha_r x^r + \sum_{r=0}^{\infty} d \cdot \beta_r x^r = c \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r + d \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r x^r = cA(x) + dB(x)$$

Γραμμική ιδιότητα

- Η ΓΣ της ακολουθίας $4^n + 9 \cdot 2^n$ είναι η
  $\dfrac{1}{1-4x} + \dfrac{9}{1-2x} = \dfrac{10-38x}{1-6x+8x^2}$
- Αντίστροφα, η ακολουθία με ΓΣ $\dfrac{9-47x}{1-10x+21x^2}$ προκύπτει αν αναλύσουμε τη ΓΣ σε μερικά κλάσματα
  $\dfrac{5}{1-3x} + \dfrac{4}{1-7x}$. Η ακολουθία είναι η $5 \cdot 3^n + 4 \cdot 7^n$.

Ιδιότητα κλίμακας

Η ακολουθία $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r$.

Η ΓΣ της ακολουθίας $b_r = \lambda^r \alpha_r$ είναι η $A(\lambda x)$. Γιατί;

$$B(x) = \lambda^0 \alpha_0 x^0 + \lambda^1 \alpha_1 x^1 + \lambda^2 \alpha_2 x^2 + ... + \lambda^r \alpha_r x^r + ... =$$
$$\alpha_0 \lambda^0 x^0 + \alpha_1 \lambda^1 x^1 + \alpha_2 \lambda^2 x^2 + ... + \alpha_r \lambda^r x^r + ... =$$
$$\alpha_0 (\lambda x)^0 + \alpha_1 (\lambda x)^1 + \alpha_2 (\lambda x)^2 + ... + \alpha_r (\lambda x)^r + ... =$$
$$\sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r (\lambda x)^r = A(\lambda x)$$

Ιδιότητα ολίσθησης

Η ακολουθία $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r$.

Η ΓΣ της ακολουθίας:
$b_r = 0$ για $r = 0, ..., n-1$ και
$b_r = \alpha_{r-n}$ για $r = n, n+1, ...$
είναι η $B(x) = x^n A(x)$. Γιατί;

$$B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r = \sum_{r=0}^{n-1} b_r x^r + \sum_{r=n}^{\infty} b_r x^r = 0 + \sum_{r=n}^{\infty} \alpha_{r-n} x^r$$

Θέτουμε $r - n = k$, οπότε:

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^{n+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k x^n = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k = x^n A(x)$$

Ιδιότητα ολίσθησης

- Η ακολουθία 0,0,0,0,1,1,1,1,... προκύπτει από την 1,1,1,1,... αν την ολισθήσουμε προς τα δεξιά κατά 4 θέσεις:
  0,0,0,0,1,1,1,1,...
  Οπότε, η ΓΣ της ακολουθίας 0,0,0,0,1,1,1,1,... είναι
  $x^4 A(x) = x^4 \frac{1}{1-x} = \frac{x^4}{1-x}$
- Η ακολουθία $0,0,1,2,4,8,\ldots,2^n,\ldots$ προκύπτει από την $1,2,4,8,\ldots,2^n,\ldots$ αν την ολισθήσουμε προς τα δεξιά κατά 2 θέσεις: $0,0,1,2,4,8,\ldots,2^n,\ldots$
  Οπότε, η ΓΣ της ακολουθίας $0,0,1,2,4,8,\ldots,2^n,\ldots$ είναι
  $x^2 A(x) = x^2 \frac{1}{1-2x} = \frac{x^2}{1-2x}$

Βρείτε τη διακριτή αριθμητική συνάρτηση που αντιστοιχεί στη γεννήτρια συνάρτηση $A(z) = \dfrac{z^5}{5-6z+z^2}$.

- Η γεννήτρια συνάρτηση $A(z)$ ισούται με $z^5 B(z)$ όπου $B(z) = \dfrac{1}{5-6z+z^2}$.
- Αν βρούμε την αριθμητική συνάρτηση b_n που αντιστοιχεί στη γεννήτρια συνάρτηση $B(z)$, η αριθμητική συνάρτηση α_n που αντιστοιχεί στη γεννήτρια συνάρτηση $A(z)$ θα είναι η $\alpha_n = S^5 b_n$.
- $B(z) = \dfrac{1}{5-6z+z^2} = \dfrac{1}{(5-z)(1+z)} = -\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{5-z} + \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1-z} = -\dfrac{1}{20}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{5}z} + \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1-z}$

Βρείτε τη διακριτή αριθμητική συνάρτηση που αντιστοιχεί στη γεννήτρια συνάρτηση $A(z) = \dfrac{z^5}{5 - 6z + z^2}$.

- $B(z) = \dfrac{1}{5 - 6z + z^2} = \dfrac{1}{(5 - z)(1 + z)} =$
  $-\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{5 - z} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{1 - z} = -\dfrac{1}{20} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{1}{5}z} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{1 - z}$
- Η γεννήτρια συνάρτηση $\frac{1}{1-\frac{1}{5}z}$ αντιστοιχεί στην αριθμητική συνάρτηση $\left(\frac{1}{5}\right)^n, n \geq 0$
- Η γεννήτρια συνάρτηση $\frac{1}{1-z}$ αντιστοιχεί στην (σταθερή) αριθμητική συνάρτηση 1
- Άρα: $b_n = -\frac{1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4}, n \geq 0$
- Επομένως: $\alpha_n = \begin{cases} 0, & 0 \leq n \leq 4, \\ -\frac{1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-5} + \frac{1}{4}, & n \geq 5. \end{cases}$

Ιδιότητα μερικών αθροισμάτων

Η ακολουθία $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r$.

Η ΓΣ της ακολουθίας $b_k = \sum_{r=0}^{k} \alpha_r, k = 0, 1, 2, ...$ είναι $B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$. Γιατί;

$$\alpha_k = b_k - b_{k-1} \underset{\text{γραμμική ιδιότητα}}{\Longrightarrow}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} b_{k-1} x^k \underset{\text{ιδιότητα ολίσθησης}}{\Longrightarrow}$$

$$A(x) = B(x) - xB(x) \Rightarrow B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$$

Ιδιότητα μερικών αθροισμάτων

- Η ακολουθία $\gamma_n = n + 1$ μπορεί να θεωρηθεί σαν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\alpha_n = 1$: $\gamma_n = 1, 1+1, 1+1+1, ...$
- Η ΓΣ της $\alpha_n = 1$ είναι η $A(x) = \frac{1}{1-x}$
- Οπότε η ΓΣ της $\gamma_n = n + 1$ θα είναι η $\frac{A(x)}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$
- Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ολίσθησης, έχουμε ότι η ΓΣ της ακολουθίας $\gamma_{n-1} = n$ είναι η $x\Gamma(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$
- Χρησιμοποιώντας ξανά την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων, έχουμε ότι η ακολουθία $\delta_n = \sum_{i=0}^{n} i$ έχει σα ΓΣ τη $\Delta(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$

Δώστε κλειστό τύπο για την ακολουθία $\Delta(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$

- Η $\Delta(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$ είναι ΓΣ της ακολουθίας $\delta_n = \sum_{i=0}^{n} i$
- Εφαρμόζουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα και έχουμε:

$$(1-x)^{-3} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{3+k-1}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k$$

- Από την ιδιότητα ολίσθησης:

$$x(1-x)^{-3} = 0x^0 + 1x + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{k+1}$$

$$= 0 + x + \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k+1}{2} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+1}{2} x^k$$

- Ο όρος δ_n είναι ο συντελεστής του x^n στο παραπάνω ανάπτυγμα, δηλ. $\binom{n+1}{2}$.

Να υπολογιστεί κλειστός τύπος για το άθροισμα $1^1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ με χρήση γεννητριών συναρτήσεων. Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_k = k^2$.

Για τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_k = k^2$ έχουμε:

$$A(x) = 0 + 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + ... =$$

$$x(1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + ...) = x(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + ...)' =$$

$$x\left[x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...)\right]' = x\left[x(x + x^2 + x^3 + x^4 ...)'\right]' =$$

$$x\left[x\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)'\right]' = x\left[x\frac{x}{(1-x)^2}\right]' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

Να υπολογιστεί κλειστός τύπος για το άθροισμα $1^1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ με χρήση γεννητριών συναρτήσεων. Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_k = k^2$.

Από την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $b = 0^2, 0^2 + 1^2, 0^2 + 1^2 + 2^2, ..., 0^2 + 1^2 + ... + r^2, ...$ για την οποία είναι $b_k = \sum_{r=0}^{k} \alpha_r$ είναι η $S(x) = \frac{A(x)}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$

Οπότε για να υπολογίσουμε το ζητούμενο άθροισμα, πρέπει να υπολογίσουμε το συντελεστή του x^r στην παραπάνω συνάρτηση.

Από το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε για το συντελεστή του x^r στο $(1-x)^{-4}$:

$$\frac{(-4)(-4-1)...(-4-r+1)}{r!}(-1)^r = \frac{4 \cdot 5 \cdot ... \cdot (r+3)}{r!}$$

$$= \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Να υπολογιστεί κλειστός τύπος για το άθροισμα $1^1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ με χρήση γεννητριών συναρτήσεων.
Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_k = k^2$.

Πώς μπορούμε να έχουμε x^r στη δική μας παράσταση; Είτε σαν $x^r = x^1 \cdot x^{r-1}$ είτε σαν $x^r = x^2 \cdot x^{r-2}$
Οπότε ο συντελεστής του x^r στη συνάρτηση $S(x) = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^4}$ είναι ο:

$$\frac{r(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(r-1)r(r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$$

Άρα: $1^1 + 2^2 + 3^2 + ... + r^2 = \dfrac{r(r+1)(2r+1)}{6}$

Ιδιότητα συμπληρωματικών μερικών αθροισμάτων

Η ακολουθία $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r$.

Η ΓΣ της ακολουθίας $b_k = \sum_{r=k}^{\infty} \alpha_r, k = 0, 1, 2, ...$ είναι

$B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1 - x}$. Γιατί;

$$b_k = \sum_{r=k}^{\infty} \alpha_r = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r - \sum_{r=0}^{k-1} \alpha_r \Rightarrow$$

$$b_k = A(1) - \sum_{r=0}^{k-1} \alpha_r \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} A(1) x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{r=0}^{k-1} \alpha_r) x^k \Rightarrow$$

$$B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1 - x}$$

Ιδιότητα παραγώγου

- Η ακολουθία $\gamma_n = n\alpha_n$ έχει ΓΣ τη $\Gamma(x) = xA'(x)$, όπου $A'(x)$ είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $A(x)$.
- ΓΙΑΤΙ;

$$\Gamma(x) = xA'(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n x^n)' = x\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n\alpha_n)x^n$$

Ιδιότητα ολοκληρώματος

- Η ακολουθία $\delta_n = \frac{\alpha_n}{n+1}$ έχει ΓΣ τη $\Delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(z)dz$.
- Η παράγουσα του z^n είναι $\frac{z^{n+1}}{n+1}$, οπότε έχουμε:

$$\Delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(z)dz = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \alpha_n z^n dz =$$

$$\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n+1}x^n$$

Να υπολογιστεί η ΓΣ της ακολουθίας $\alpha_n = n(n+1)$.

- Η ακολουθία $\beta_n = n$ έχει ΓΣ τη $B(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.
- Από την ιδιότητα της παραγώγου, η $\gamma_n = n^2 = nb_n$ έχει ΓΣ $\Gamma(x) = xB'(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$.
- Από τη γραμμική ιδιότητα, η ακολουθία $\alpha_n = n(n+1) = n^2 + n$ έχει ΓΣ τη

$$\Gamma(x) + B(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

Ιδιότητα συνέλιξης

Η ακολουθία $d_k = \sum_{r=0}^{k} \alpha_r \beta_{k-r}, k = 0, 1, 2, ...$ ονομάζεται συνέλιξη των ακολουθιών α και β και συμβολίζεται $\alpha * \beta$.
Η ΓΣ της ακολουθίας d_k είναι η $D(x) = A(x)B(x)$, όπου $A(x)$ είναι η ΓΣ της ακολουθίας α_r και $B(x)$ είναι η ΓΣ της ακολουθίας b_r. Γιατί;

$$A(x)B(x) = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ...)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ...) =$$

$$(\alpha_0 b_0) + (\alpha_1 b_1)x + (\alpha_2 b_2)x^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty}(d_k x^k)x^k = D(x)$$

Ιδιότητα συνέλιξης

- Η ακολουθία $\gamma_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{n-1}$ ονομάζεται συνέλιξη των ακολουθιών α και β και συμβολίζεται $\alpha * \beta$.
- Έστω $\Gamma(x)$ η ΓΣ της ακολουθίας γ. Είναι $\Gamma(x) = A(x)B(x)$ ή πιο απλά η ΓΣ της συνέλιξης δύο ακολουθιών δίνεται από το γινόμενο των ΓΣ τους.
- Αυτό προκύπτει εύκολα από τον ορισμό του γινομένου πολυωνύμων: ο συνετελεστής του x^n στο γινόμενο $A(x)B(x)$ ισούται με $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \beta_{n-i}$ επειδή όλοι οι δυνατοί τρόποι να πάρουμε το x^n στο γινόμενο προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας το x^i στο $A(x)$ με το x^{n-i} στο $B(x)$, για όλα τα $i = 0, ..., n$.

Αποδείξτε ότι η πράξη της συνέλιξης είναι πράξη αντιμεταθετική, δηλ., ότι για οποιεσδήποτε ακολουθίες α και β ισχύει ότι $\alpha * \beta = \beta * \alpha$.

- Το γινόμενο πολυωνύμων είναι αντιμεταθετική πράξη.
- Από την ιδιότητα της συνέλιξης, οι ακολουθίες $\alpha * \beta$ και $\beta * \alpha$ έχουν την ίδια ΓΣ.
- Άρα πρόκειται για τις ίδιες ακολουθίες.

Αποδείξτε την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης.

- Η συνέλιξη της ακολουθίας α με την ακολουθία $\beta_n = 1$ είναι $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i$, δηλ., η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της α.
- Έστω $A(x)$ η ΓΣ της α.
- Η ΓΣ της $\beta_n = 1$ είναι $B(x) = (1-x)^{-1}$.
- Από την ιδιότητα της συνέλιξης, η ΓΣ της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της α είναι $\frac{A(x)}{1-x}$.

Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{i=0}^{n} 3^i 2^{n-i}$ χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις.

- Το ζητούμενο άθροισμα είναι ο n-οστός όρος της συνέλιξης των ακολουθιών $\alpha_n = 3^n$ και $\beta_n = 2^n$.
- Η α_n έχει ΓΣ $\frac{1}{1-3x}$ και η β_n έχει ΓΣ $B(x) = \frac{1}{1-2x}$.
- Η ΓΣ της συνέλιξής τους είναι

$$\frac{1}{(1-3x)(1-2x)} = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x}$$

  Αυτό προκύπτει με μερική κλασματική ανάλυση.
- Από τη γραμμική ιδιότητα, η ακολουθία που αντιστοιχεί σε αυτή τη ΓΣ έχει n-οστό όρο $3^{n+1} - 2^{n+1}$.
- Επομένως, $\sum_{i=0}^{n} 3^i 2^{n-i} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

Ανάλυση σε κλάσματα και αντιστροφή γεννητριών συναρτήσεων

- Θέλουμε να υπολογίσουμε την ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση $\frac{P(x)}{D(x)}$, όπου $P(x)$ και $D(x)$ είναι πολυώνυμα ως προς x.
- Εφαρμόζουμε μερική κλασματική ανάλυση είτε απευθείας στη συνάρτηση $\frac{P(x)}{D(x)}$ είτε στη συνάρτηση $\frac{1}{D(x)}$.
- Από το αποτέλεσμα της ανάλυσης σε μερικά κλάσματα υπολογίζουμε την ακολουθία με την αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση.
- Αν έχουμε την $\frac{1}{D(x)}$ χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της ολίσθησης και τη γραμμική ιδιότητα.

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση την $F(x) = \dfrac{4x^2(1-8x)}{(1-4x)(1-2x)^2}$

- Βρίσκουμε πρώτα τη ΓΣ του παράγοντα:
  $G(x) = \dfrac{1-8x}{(1-4x)(1-2x)^2}$
- Με κλασματική ανάλυση:
  $G(x) = \dfrac{1-8x}{(1-4x)(1-2x)^2} = \dfrac{-4}{(1-4x)} + \dfrac{3}{(1-2x)^2} + \dfrac{2}{(1-2x)}$
- Η ακολουθία που αντιστοιχεί στη γεννήτρια συνάρτηση $G(x)$ είναι η:

$$\alpha_r = -4 \cdot 4^r + 3 \cdot (r+1)2^r + 2 \cdot 2^r, r = 0, 1, 2, \ldots$$

- Επομένως, η $F(x) = 4x^2 G(x)$ (με βάση ιδιότητα ολίσθησης) είναι η ΓΣ της ακολουθίας $4\alpha_{r-2}$,
  δηλ.:$\alpha_r = \begin{cases} 3(r+1)2^r - 4^r, & \text{αν } r = 2, 3, 4, \ldots, \\ 0, & \text{αν } r < 2. \end{cases}$

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση $\dfrac{2}{1-4x^2}$

- Με κλασματική ανάλυση: $\dfrac{2}{1-4x^2} = \dfrac{1}{1-2x} + \dfrac{1}{1+2x}$
- Για τη γεννήτρια συνάρτηση $\dfrac{1}{1-2x}$ η ακολουθία είναι η $\beta_n = 2^n$.
- Για τη γεννήτρια συνάρτηση $\dfrac{1}{1+2x}$ η ακολουθία είναι η $\gamma_n = (-2)^n$.
- Από τη γραμμική ιδιότητα η ζητούμενη ακολουθία είναι:
$$\alpha_n = \begin{cases} 2^{n+1}, & \text{αν } n \text{ άρτιος,} \\ 0, & \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση $\dfrac{22x^3-9x^2-14x-1}{(1+x)(1+3x)(1-2x)^2}$

- Με κλασματική ανάλυση: $\dfrac{1}{(1+x)(1+3x)(1-2x)^2} = \dfrac{-1/18}{1+x} + \dfrac{27/50}{1+3x} + \dfrac{56/225}{1-2x} + \dfrac{4/15}{(1-2x)^2}$
- Η ακολουθία με ΓΣ $(1+x)^{-1}$ είναι η $(-1)^n$. Με γραμμική ιδιότητα και ιδιότητα ολίσθησης: ακολουθία με ΓΣ $\dfrac{(-1/18)(22x^3-9x^2-14x-1)}{(1+x)}$ είναι η: $-\frac{1}{18}\left[22(-1)^{n-3}-9(-1)^{n-2}-14(-1)^{n-1}-(-1)^n\right] =$ $-\frac{1}{18}\left[-22-9+14-1\right](-1)^n = (-1)^n$

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση $\dfrac{22x^3 - 9x^2 - 14x - 1}{(1+x)(1+3x)(1-2x)^2}$

- Η ακολουθία με ΓΣ $(1+3x)^{-1}$ είναι η $(-3)^n$. Με γραμμική ιδιότητα και ιδιότητα ολίσθησης: ακολουθία με ΓΣ $\dfrac{(27/50)(22x^3 - 9x^2 - 14x - 1)}{(1+3x)}$ είναι η:
$\frac{27}{50}\left[22(-3)^{n-3} - 9(-3)^{n-2} - 14(-3)^{n-1} - (-3)^n\right] =$
$\frac{27}{50}\left[-22/27 - 9/9 + 14/3 - 1\right](-3)^n = (-3)^n$
- Η ακολουθία με ΓΣ $(1-2x)^{-1}$ είναι η 2^n. Με γραμμική ιδιότητα και ιδιότητα ολίσθησης: ακολουθία με ΓΣ $\dfrac{(56/225)(22x^3 - 9x^2 - 14x - 1)}{(1+3x)}$ είναι η:
$\frac{56}{225}\left[22 \cdot 2^{n-3} - 9 \cdot 2^{n-2} - 14 \cdot 2^{n-1} - \cdot 2^n\right] =$
$\frac{56}{225}\left[-22/8 - 9/4 - 14/2 - 1\right]2^n = -\frac{28}{15}2^n$

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση $\dfrac{22x^3 - 9x^2 - 14x - 1}{(1+x)(1+3x)(1-2x)^2}$

- Η ακολουθία με ΓΣ $(1-2x)^{-2}$ είναι η $(n+1)2^n$. Με γραμμική ιδιότητα και ιδιότητα ολίσθησης: ακολουθία με ΓΣ $\dfrac{(4/15)(22x^3 - 9x^2 - 14x - 1)}{(1-2x)^2}$ είναι η:
  $\frac{4}{15}\left[22(n-2)2^{n-3} - 9(n-1)2^{n-2} - 14n2^{n-1} - (n+1)2^n\right] =$
  $\frac{4}{15}\left[22/8 - 9/4 - 14/2 - 1\right] n2^n +$
  $\frac{4}{15}\left[(-2)22/8 + 9/4 - 1\right] 2^n = -2n2^n - \frac{17}{15}2^n$
- Από όλα τα παραπάνω, καταλήγουμε ότι η ζητούμενη ακολουθία είναι η:

$$\alpha_n = (-1)^n + (-3)^n - 2n2^n - \frac{28+17}{15}2^n =$$

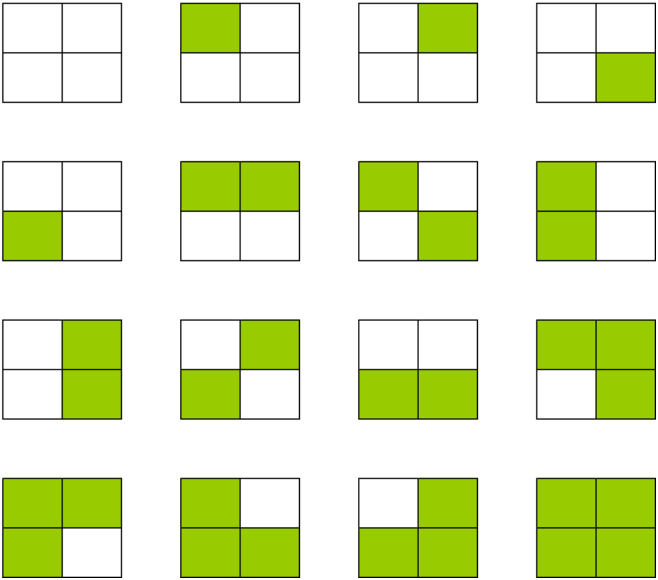
$$(-1)^n + (-3)^n - n2^{n+1} - 3 \cdot 2^n$$

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση $\dfrac{22x^3 - 9x^2 - 14x - 1}{(1+x)(1+3x)(1-2x)^2}$

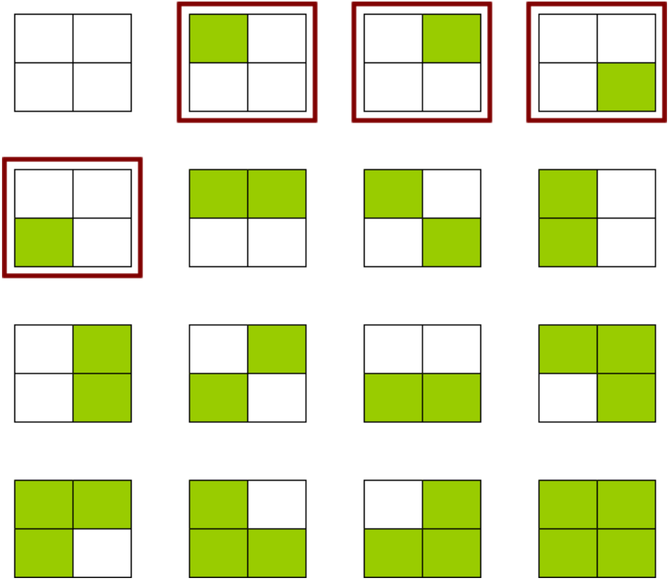
- Η ανάλυση είναι ευκολότερη αν χρησιμοποιήσουμε τη διάσπαση: $\dfrac{1}{(1+x)(1+3x)(1-2x)^2} =$ $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+3x} - \dfrac{1}{1-2x} - \dfrac{2}{(1-2x)^2}$

Η ύλη συνοπτικά...

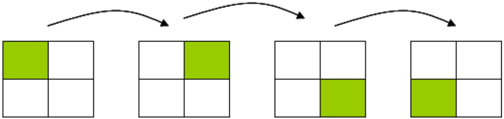
- Στοιχειώδης συνδυαστική
- Γεννήτριες συναρτήσεις
- Εγκλεισμός - Αποκλεισμός
- Θεωρία Polyá



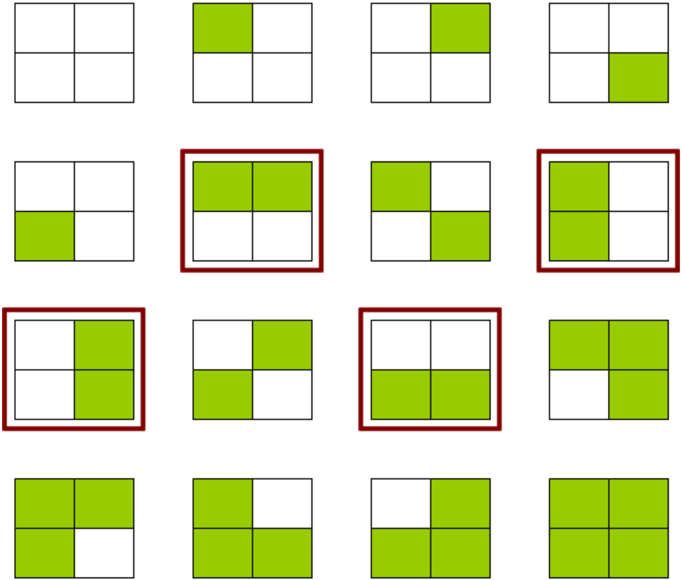
Πόσες από αυτές τις σκακιέρες είναι αλήθεια διαφορετικές;



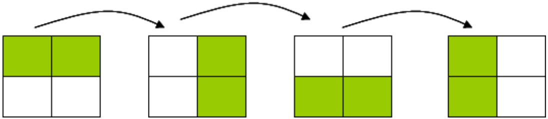
Αυτές οι σκακιέρες είναι στην ουσία ίδιες... δηλ. ισοδύναμες!



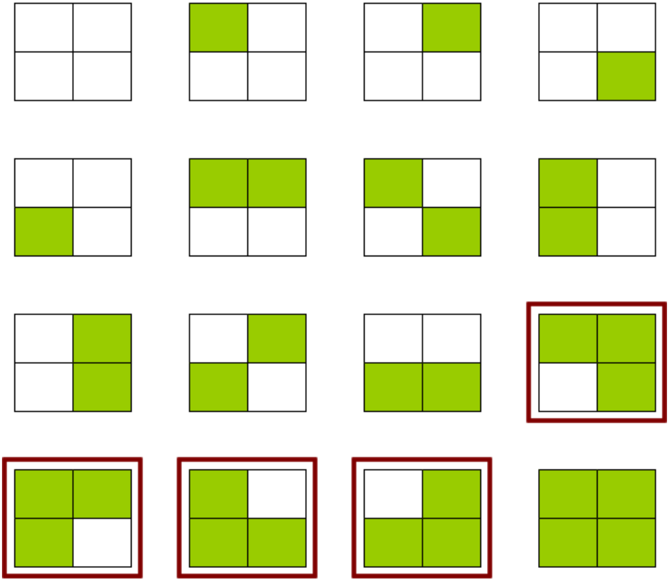
Η κάθε μία προκύπτει από την προηγούμενη με δεξιόστροφη περιστροφή κατά 90^o



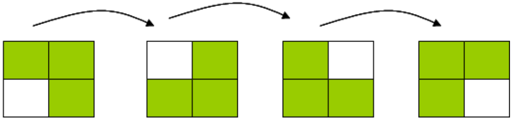
Αυτές οι σκακιέρες είναι στην ουσία ίδιες... δηλ. ισοδύναμες!



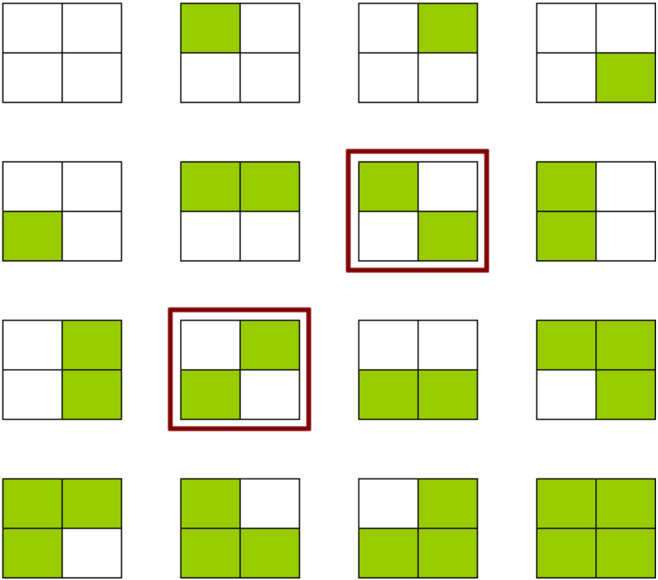
Η κάθε μία προκύπτει από την προηγούμενη με δεξιόστροφη περιστροφή κατά 90^o



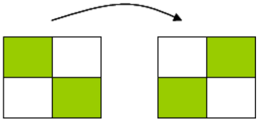
Αυτές οι σκακιέρες είναι στην ουσία ίδιες... δηλ. ισοδύναμες!



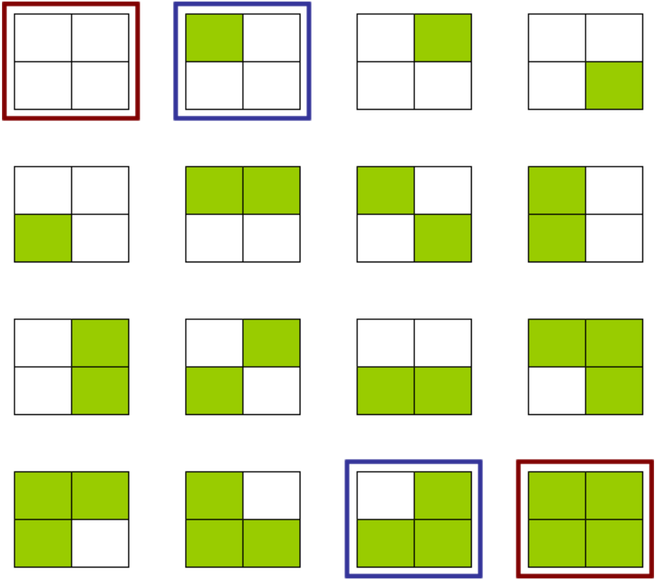
Η κάθε μία προκύπτει από την προηγούμενη με δεξιόστροφη περιστροφή κατά 90^o



Αυτές οι σκακιέρες είναι στην ουσία ίδιες... δηλ. ισοδύναμες!



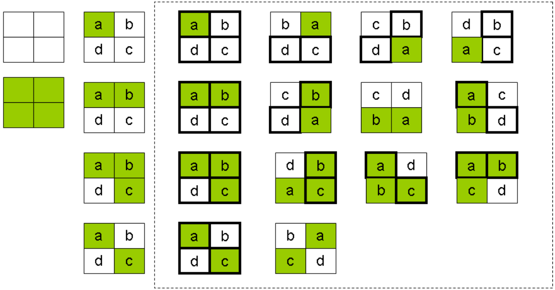
Η κάθε μία προκύπτει από την προηγούμενη με δεξιόστροφη περιστροφή κατά 90^o



Αυτές οι σκακιέρες είναι ισοδύναμες ως προς την αντίθεση χρωμάτων...!

- Προφανώς, δεν είναι αποδοτικό για κάθε παραπλήσια ερώτηση να κάνουμε την εξαντλητική αναζήτηση που κάναμε πριν ή να βασιζόμαστε απλά στην παρατήρηση για να μετρήσουμε το πλήθος των διαφορετικών αντικειμένων όταν εμφανίζονται ομοιότητες λόγω κάποιας μορφής συμμετρίας στη δομή των αντικειμένων...
- Υπάρχει κάποια ιδιότητα που να έχουν τα διαφορετικά (ή τα ίδια) αντικείμενα βάσει της οποίας να έχουμε ένα συστηματικό τρόπο προσδιορισμού των ‘‘διαφορετικών’’ αντικειμένων;
- Στη συνέχεια θα δούμε τη θεωρία μέτρησης διαφορετικών αντικειμένων όταν λαμβάνονται υπόψη θέματα συμμετρίας που αναπτύχθηκε από τον Pólya το 1938.

Βασική ιδέα 1... (Θεώρημα Burnside)



- Πόσους τρόπους να αναδιατάξω τη σκακιέρα έχω; 6
- Κάθε φορά που κάποια αναδιάταξη ενός αντικειμένου δίνει άλλα ισοδύναμα αντικείμενα, πόσα επιμέρους στοιχεία του αντικειμένου μένουν ίδια; 4,0,10,8,10,4, συνολικά: 36
- Οι 'πραγματικά διαφορετικές ' μορφές είναι: $\frac{36}{6} = 6$
- ΙΔΕΑ: Μεταξύ ισοδύναμων μορφών που προκύπτουν από αναδιάταξη, πόσα επιμέρους στοιχεία μένουν ίδια;

Βασική ιδέα 1... (Θεώρημα Burnside)

- Δίνεται το σύνολο $S = \{a, b, c, d\}$.
- Ξεκινώντας από την τετράδα (a, b, c, d) μπορώ είτε να την αφήσω ως έχει (a, b, c, d) είτε να την αδιατάξω με τους εξής τρόπους: $(b, a, c, d), (a, b, d, c), (b, a, d, c)$.

$$\begin{array}{cccc} (abcd) & (abcd) & (abcd) & (abcd) \\ (abcd) & (bacd) & (abdc) & (badc) \end{array}$$

- ΙΔΕΑ: Μεταξύ ισοδύναμων μορφών που προκύπτουν από αναδιάταξη, πόσα επιμέρους στοιχεία μένουν ίδια;

	a	b	c	d
a	✓	✓		
b	✓	✓		
c			✓	✓
d			✓	✓

Βασική ιδέα 1... (Θεώρημα Burnside)

- Δίνεται το σύνολο $S = \{a, b, c, d\}$.
- Ξεκινώντας από την τετράδα (a, b, c, d) μπορώ είτε να την αφήσω ως έχει (a, b, c, d) είτε να την αδιατάξω με τους εξής τρόπους: $(b, a, c, d), (a, b, d, c), (b, a, d, c)$.

$$\begin{array}{cccc} (abcd) & (abcd) & (abcd) & (abcd) \\ (abcd) & (bacd) & (abdc) & (badc) \end{array}$$

- ΙΔΕΑ: Μεταξύ ισοδύναμων μορφών που προκύπτουν από αναδιάταξη, πόσα επιμέρους στοιχεία μένουν ίδια;
  - Πόσες αναδιατάξεις υπάρχουν; 4
  - Συνολικά πόσα στοιχεία μένουν αναλλοίωτα στις αναδιατάξεις; 8
  - Υπάρχουν $\frac{8}{4} = 2$ 'πραγματικά διαφορετικές ' τετράδες.

Καλή η μέθοδος, αλλά...

- Το μέτρημα των στοιχείων που δεν αλλάζουν (και μπορεί να είναι πολλά) παραμένει μη αποδοτική διαδικασία...
- Αν μάς ενδιαφέρουν και παραπάνω ιδιότητες/λεπτομέρειες για τις αναδιατάξεις, π.χ., αναζητώ τον αριθμό των διαφορετικών σκακιέρων με 2 μαύρα και 2 άσπρα τετραγωνάκια;
- Θεωρία μέτρησης Pólya...

Βασική ιδέα 2... (Θεώρημα Pólya)

- Ονόμασε τα τετραγωνάκια της σκακιέρας με γράμματα από το σύνολο $D = \{a, b, c, d\}$.

a	b
d	c

x	y

- Ονόμασε τα χρώματα με τα γράμματα από το σύνολο $R = \{x, y\}$, δώστους βάρη $w(x) = x, w(y) = y$ και προς το παρόν ξέχνα τα.

Βασική ιδέα 2... (Θεώρημα Pólya)

- Με ποιους τρόπους μπορώ να αναδιατάξω τα κουτάκια της σκακιέρας;

$(abcd)$	$(abcd)$	$(abcd)$	$(abcd)$
$(bcda)$	$(cdab)$	$(dabc)$	$(abcd)$
1 κύκλος	2 κύκλοι	1 κύκλος	4 κύκλοι
μήκους 4	μήκους 2	μήκους 4	μήκους 1

- Πίσω στα χρώματα:
  για κύκλους μήκους 1: $x + y$ τρόποι να χρωματιστούν,
  για κύκλους μήκους 2: $x^2 + y^2$ τρόποι να χρωματιστούν,
  για κύκλους μήκους 4: $x^4 + y^4$ τρόποι να χρωματιστούν

Βασική ιδέα 2... (Θεώρημα Pólya)

- Διαφορετικές σκακιέρες που μπορώ να φτιάξω:
$$P_G = \frac{(x+y)^4 + (x^2+y^2)^2 + (x^4+y^4)^2}{4} =$$
$$\frac{2x^4 + 4x^3y + 8x^2y^2 + 4xy^3 + 2y^4 + x^8 + y^8 + 2x^4y^4}{4}$$
- Θέτουμε $x = y = 1$ στην παραπάνω σχέση και οπότε προκύπτει ότι $P_G = 6$ που είναι το πλήθος των διαφορετικών σκακιέρων

Βασικά στοιχεία θεωρίας συνόλων

- Σύνολο, υποσύνολο, γνήσιο υποσύνολο
- Ένωση, Τομή, Διαφορά
- Διαμέριση
- Διατεταγμένο ζεύγος
- Καρτεσιανό γινόμενο
- Δυαδικές σχέσεις

Σύνολο, υποσύνολο, γνήσιο υποσύνολο

- Σύνολο: συλλογή διαφορετικών αντικειμένων που καλούνται στοιχεία του συνόλου, π.χ., $S = \{a, b, c, x, z\}$
  - Δε μετράει η σειρά των στοιχείων: $\{a, b, c\} = \{c, b, a\}$
  - Δεν έχουν νόημα οι επαναλήψεις ίδιων στοιχείων: $\{a, a, b, c\} = \{a, b, c\}$
  - $\{\} = \emptyset$: σύνολο χωρίς στοιχεία
- $T \subseteq S$: Το T είναι υποσύνολο του S δηλ., κάθε στοιχείο του T είναι και στοιχείο του S, π.χ., $\{a, b, x\} \subseteq \{a, b, c, x, z\}$, $\{a, b, y\} \not\subseteq \{a, b, c, x, z\}$ – Κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του.
- $T \subset S$: Το T είναι γνήσιο υποσύνολο του S δηλ., το T είναι υποσύνολο του S και υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο στο S που δεν είναι στοιχείο του T.
- $\alpha \in S$: το α είναι στοιχείο του συνόλου S
- $|S|$: πλήθος στοιχείων του συνόλου S
- Το S είναι ένα $k-$σύνολο αν περιέχει k στοιχεία.

Ένωση, Τομή, Διαφορά, Διαμέριση

Έστω δύο σύνολα A και B.

- $A \cup B$: Ένωση των συνόλων A και B, περιέχει όλα τα στοιχεία των συνόλων A και B.
  –$\{a, b, c, d\} \cup \{a, d, e, j\} = \{a, b, c, d, e, j\}$
- $A \cap B$: Τομή των συνόλων A και B, περιέχει τα κοινά στοιχεία των συνόλων A και B.
  –$\{a, b, c, d\} \cap \{a, d, e, j\} = \{a, d\}$
- $A - B$: Διαφορά των συνόλων A και B, περιέχει τα στοιχεία του συνόλου A που δεν ανήκουν στο B.
  –$\{a, b, c, d\} - \{a, d, e, j\} = \{b, c\}$
- Διαμέριση ενός συνόλου είναι η υποδιαίρεση των στοιχείων του σε ξένα μεταξύ τους υποσύνολα ή ΑΛΛΙΩΣ
  Διαμέριση ενός συνόλου είναι μια συλλογή υποσυνόλων του τέτοια ώστε κάθε στοιχείο του συνόλου να ανήκει σε ακριβώς ένα υποσύνολο,
  π.χ., το σύνολο $\{\{a, b, x\}, \{d\}, \{c, z\}\}$ είναι μια διαμέριση του συνόλου $\{a, b, c, d, x, z\}$.

Διατεταγμένο ζεύγος, Καρτεσιανό γινόμενο, Δυαδική σχέση

- Διατεταγμένο ζεύγος (a, b) είναι μια διάταξη δύο - όχι απαραίτητα διαφορετικών - στοιχείων a και b.
  Τα (a, b) και (b, a) είναι δύο διαφορετικά διατεταγμένα ζεύγη.
- Καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων S και T - $S \times T$ - είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (x, y) στα οποία $x \in S$ και $y \in T$, π.χ.,
  –$\{a, b, c\} \times \{1, 2\} = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$
- Μια Δυαδική σχέση μεταξύ των συνόλων S και T είναι ένα υποσύνολο διατεταγμένων ζευγών από το καρτεσιανό γινόμενο $S \times T$, π.χ.,
  – $\{(a, 1), (a, 2), (c, 2)\}$ είναι μια δυαδική σχέση μεταξύ των συνόλων $\{a, b, c\}$ και $\{1, 2\}$.

Διατεταγμένο ζεύγος, Καρτεσιανό γινόμενο, Δυαδική σχέση

- Μια Δυαδική σχέση μεταξύ δύο συνόλων αναπαρίσταται με έναν πίνακα, π.χ., η δυαδική σχέση $\{(a,1),(a,3),(b,4),(d,2),(d,4)\}$ μεταξύ των συνόλων $\{a,b,c,d\}$ και $\{1,2,3,4,5\}$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

	1	2	3	4	5
a	✓		✓		
b				✓	
c					
d		✓		✓	

- Μια Δυαδική σχέση σε ένα σύνολο S είναι μια δυαδική σχέση μεταξύ του S και του εαυτού του, π.χ., $\{(a,a),(a,c),(b,a),(b,c),(c,b)\}$ είναι μια δυαδική σχέση στο σύνολο $\{a,b,c\}$

Σχέση ισοδυναμίας

- Μια Δυαδική σχέση σε ένα σύνολο S καλείται ``Σχέση ισοδυναμίας '' αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:
  1. Κάθε στοιχείο στο σύνολο σχετίζεται με τον εαυτό του (ανακλαστική ιδιότητα)
  2. Για οποιαδήποτε στοιχεία a, b του συνόλου, αν το a σχετίζεται με το b τότε και το b σχετίζεται με το a (συμμετρική ιδιότητα)
  3. Για οποιαδήποτε στοιχεία a, b, c του συνόλου, αν το a σχετίζεται με το b και b σχετίζεται με το c το τότε και το a σχετίζεται με το c (μεταβατική ιδιότητα)

	a	b	c	d	e
a	✓	✓			
b	✓	✓			
c			✓	✓	✓
d			✓	✓	✓
e			✓	✓	✓

	a	b	c	d	e
a	✓	✓			
b		✓			
c				✓	✓
d			✓	✓	
e	✓		✓	✓	✓

- Η δυαδική σχέση αριστερά είναι σχέση ισοδυναμίας ενώ αυτή στα δεξιά δεν είναι.

Κλάσεις ισοδυναμίας και διαμερίσεις

- Αν έχουμε μια σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο S, μπορούμε να χωρίσουμε τα στοιχεία του S σε κλάσεις - που καλούνται κλάσεις ισοδυναμίας - έτσι ώστε δύο στοιχεία να ανήκουν στην ίδια κλάση μόνο αν σχετίζονται μεταξύ τους.
  - Κάθε στοιχείο ανήκει σε κάποια κλάση ισοδυναμίας αφού μπορεί να είναι σε τουλάχιστον μία κλάση από μόνο του (λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας).
  - Δεν υπάρχει ασάφεια σχετικά με το αν κάποιο στοιχείο ανήκει σε κάποια κλάση ισοδυναμίας (λόγω της συμμετρικής ιδιότητας)
  - Κάθε στοιχείο δε μπορεί να ανήκει σε παραπάνω από μία κλάσεις ισοδυναμίας (λόγω της μεταβατικής ιδιότητας)

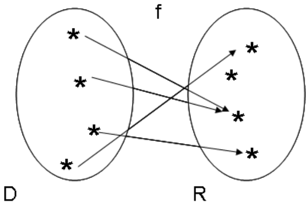
	a	b	c	d	e
a	✓	✓			
b	✓	✓			
c			✓	✓	✓
d			✓	✓	✓
e			✓	✓	✓

Κλάσεις ισοδυναμίας και διαμερίσεις

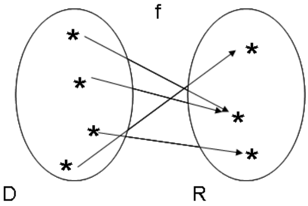
	a	b	c	d	e
a	✓	✓			
b	✓	✓			
c			✓	✓	✓
d			✓	✓	✓
e			✓	✓	✓

- Μια σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο ορίζει μια διαμέριση του συνόλου στην οποία τα ξένα μεταξύ τους υποσύνολα είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας, π.χ.,
  – η διαμέριση που ορίζεται από τη σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\{a, b, c, d, e\}$ είναι η $\{\{a, b\}, \{c, d, e\}\}$.
- Δύο στοιχεία είναι ισοδύναμα αν ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας.

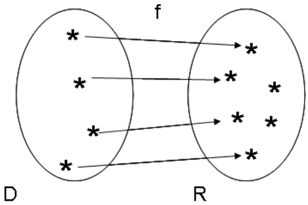
Συναρτήσεις



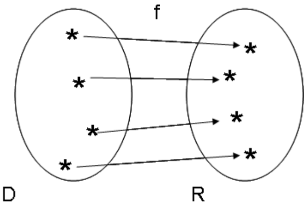
Συνάρτηση



Συνάρτηση «επί»



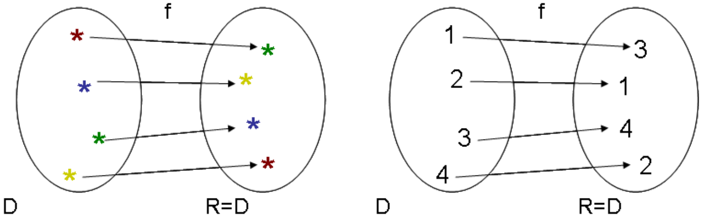
Συνάρτηση 1-1



Συνάρτηση 1-1 και επί
(αντιστοιχία)

Μεταθέσεις

- Μετάθεση, Σύνολο μεταθέσεων G



- Η μετάθεση που αντιστοιχεί κάθε στοιχείο στον εαυτό του, αφήνει δηλ. τα στοιχεία ως έχουν, λέγεται ταυτοτική.
- Δυαδική σχέση επαγόμενη από σύνολο μεταθέσεων G είναι σχέση ισοδυναμίας

Μεταθέσεις

- Δίνεται σύνολο $S = \{a, b, \ldots\}$ και ένα σύνολο μεταθέσεων G για τα στοιχεία του S
- Μια Δυαδική σχέση στο S είναι δυαδική σχέση επαγόμενη από το G όταν ένα στοιχείο a σχετίζεται με ένα στοιχείο b αν και μόνον αν υπάρχει μετάθεση στο G που απεικονίζει το a στο b.
- Έστω $G = \{\begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ bacd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ abdc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ badc \end{pmatrix}\}$.
- Η Δυαδική σχέση που επάγεται από το G φαίνεται στον πίνακα:

	a	b	c	d
a	✓	✓		
b	✓	✓		
c			✓	✓
d			✓	✓

- Η Δυαδική σχέση σε ένα σύνολο που επάγεται από σύνολο μεταθέσεων G είναι σχέση ισοδυναμίας.

Θεώρημα Burnside

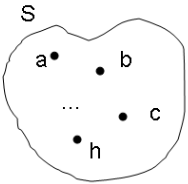
- Ζητούμενο: Πόσες διαφορετικές μορφές, π.χ., χρωματισμοί, στοιχείων ενός συνόλου υπάρχουν όταν εμφανίζονται ισοδύναμοι σχηματισμοί λόγω συμμετρίας;
- Ιδέα:
  - Πάρε τις ενδεχόμενες μεταθέσεις των στοιχείων του συνόλου.
  - Κάποιες από αυτές είναι ισοδύναμες και φτιάχνουν κλάσεις ισοδυναμίας. Όσες είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας τόσοι είναι και οι διαφορετικοί σχηματισμοί που ψάχνεις.
  - Πόσες είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας που δημιουργούνται από τις μεταθέσεις;
  - Για να το βρεις μέτρα τα στοιχεία που μένουν ίδια από τις μεταθέσεις, δηλ. στοιχεία που η μετάθεση τα απεικονίζει στον εαυτό τους, άθροισέ τα και διαίρεσε το άθροισμα με το πλήθος των μεταθέσεων.

Θεώρημα Burnside

- Ζητούμενο: να μετρήσω διαφορετικές μορφές ενός συνόλου (αντικειμένου) όταν αναδιατάσσονται τα στοιχεία (μέρη) του.
- Παρατήρηση: πλήθος κλάσεων ισοδυναμίας = πλήθος διαφορετικών μεταθέσεων
- Διατύπωση: Το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας στις οποίες διαμερίζεται ένα σύνολο S από τη σχέση ισοδυναμίας που επάγεται από ένα σύνολο μεταθέσεων G του S είναι: $\frac{1}{|G|}\sum_{\pi \in G} \psi(\pi)$
- Εφαρμογή: Δίνεται ένα σύνολο S.
  1. Βρίσκω (εκτός αν δίνεται) το σύνολο μεταθέσεων G.
  2. Σε κάθε μετάθεση στο G βρίσκω το πλήθος των στοιχείων που δεν αλλάζουν.
  3. Τα αθροίζω για όλες τις μεταθέσεις και διαιρώ το άθροισμα με το πλήθος των μεταθέσεων $|G|$ και έχω το ζητούμενο.

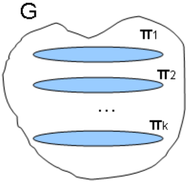
Θεώρημα Burnside: Απόδειξη

- Έστω σύνολο S και σύνολο μεταθέσεων G στοιχείων του S.
- Πόσα στοιχεία του S μένουν ίδια συνολικά σε όλες τις μεταθέσεις του G; Υπάρχουν δύο τρόποι να τα μετρήσουμε: είτε ανά στοιχείο είτε ανά μετάθεση:



n(s): πλήθος μεταθέσεων που αφήνουν ένα στοιχείο s ίδιο.
Για όλα τα στοιχεία του S:

$$\sum_{s\in S} n(s)$$



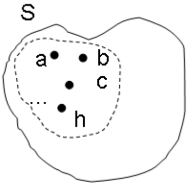
y(π): πλήθος στοιχείων που αφήνει ίδια μια μετάθεση π.
Για όλα τα στοιχεία του G:

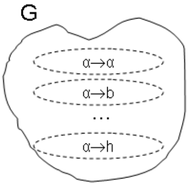
$$\sum_{\pi\in G} y(\pi)$$

- Προφανώς: $\sum_{s\in S} n(s) = \sum_{\pi\in G} y(\pi)$

Θεώρημα Burnside: Απόδειξη

- Έστω στοιχεία α και b του S που είναι ισοδύναμα $\Rightarrow$ υπάρχει μετάθεση στο G με $\alpha \to b$. Πόσε τέτοιες μεταθέσεις υπάρχουν;
- Όσες - $n(\alpha)$ - αφήνουν το στοιχείο α ίδιο, δηλ., περιέχουν $\alpha \to \alpha$ αφού για κάθε μία μπορούμε να έχουμε $\alpha \to b$ ως εξής: $\alpha \to \alpha \to b$.
- Για τον ίδιο λόγο $n(\alpha)$ είναι και οι μεταθέσεις με $\alpha \to c$ ...$\alpha \to h$, για κάθε άλλο στοιχείο στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με το α.





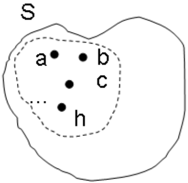
Θεώρημα Burnside: Απόδειξη

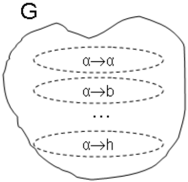
- Οι μεταθέσεις του G μπορούν να ομαδοποιηθούν σε αυτές που αφήνουν το α ίδιο, αυτές με $\alpha \to b$, αυτές με $\alpha \to c$... για κάθε στοιχείο της κλάσης ισοδυναμίας που περιέχει το α.
- Κάθε μία από τις ομάδες αυτές περιέχει $n(\alpha)$ μεταθέσεις, όπως δείξαμε πριν, δηλ., $n(\alpha) = n(b) = ... = n(h)$.
- Άρα

$$n(a) * \# \text{ στοιχείων στην κλ. ισοδυναμίας που περιέχει το } a = |G|$$

$$\Rightarrow$$

$$n(a) = \frac{|G|}{\# \text{ στοιχείων στην κλάση ισοδυναμίας που περιέχει το } a}$$





Θεώρημα Burnside: Απόδειξη

- Οπότε για όλα τα στοιχεία στην κλάση ισοδυναμίας είναι:
$$\sum_{\text{όλα τα } s \text{ στην κλάση ισοδυναμίας}} n(s) = |G|$$
- Και για όλες τις κλάσεις ισοδυναμίας, δηλ., όλα τα στοιχεία του S:

$$\Rightarrow$$

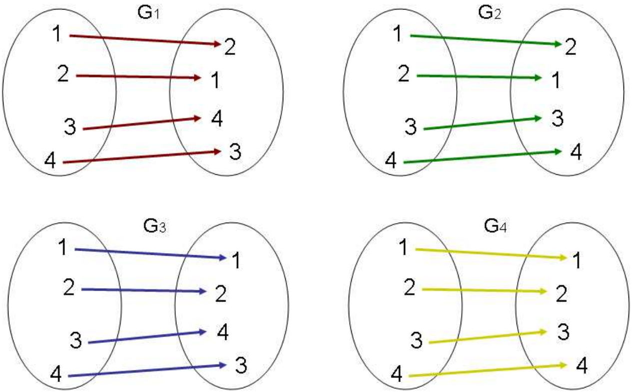
$$\#\text{κλάσεων ισοδυναμίας στις οποίες χωρίζεται το } S = \frac{\sum_{s \in S} n(s)}{|G|}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\#\text{κλάσεων ισοδυναμίας στις οποίες χωρίζεται το } S = \frac{\sum_{\pi \in G} y(\pi)}{|G|}$$

αφού $\sum_{s \in S} n(s) = \sum_{\pi \in G} y(\pi)$

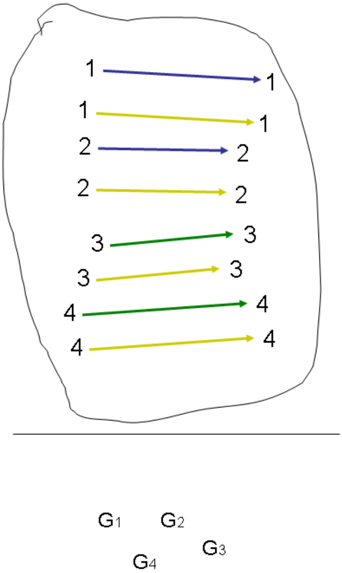
Θεώρημα Burnside



	1	2	3	4
1	✓	✓		
2	✓	✓		
3			✓	✓
4			✓	✓

Θεώρημα Burnside

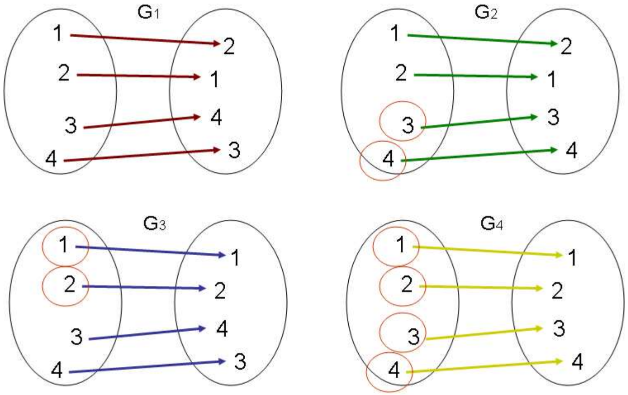
	1	2	3	4
1	✓	✓		
2	✓	✓		
3			✓	✓
4			✓	✓



Θεώρημα Burnside: απόδειξη

- Το να μετρήσω τα συνολικά στοιχεία που μένουν ίδια για όλες τις μεταθέσεις είναι σαν να μετράω για κάθε στοιχείο του δοσμένου συνόλου το πλήθος των μεταθέσεων που δεν το αλλάζουν (δηλ., το απεικονίζουν στον εαυτό του).
- Αν έχουμε δύο στοιχεία a και b στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, υπάρχουν τόσες μεταθέσεις που απεικονίζουν το a στο b όσες είναι οι μεταθέσεις που αφήνουν το a ίδιο (δηλ., το απεικονίζουν στον εαυτό του). Γιατί;

Θεώρημα Burnside



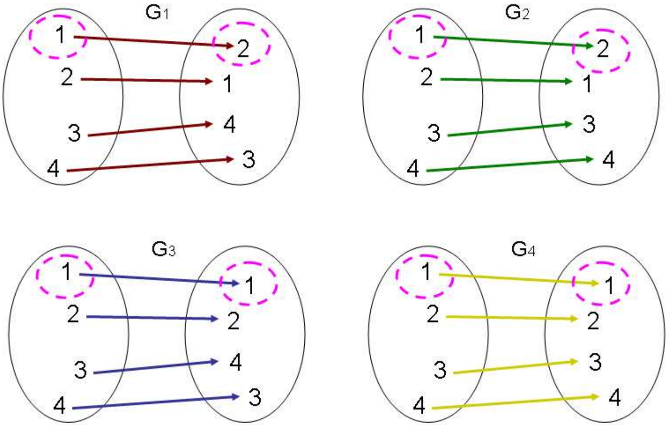
1 G3 G4

2 G3 G4

3 G2 G4

4 G2 G4

Θεώρημα Burnside

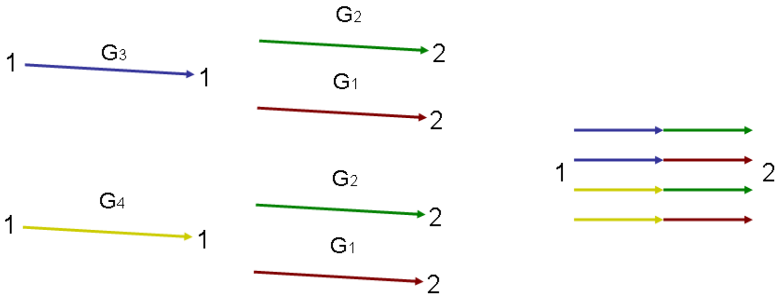


	1	2	3	4
1	✓	✓		
2	✓	✓		
3			✓	✓
4			✓	✓

Θεώρημα Burnside: απόδειξη

- Αν έχουμε δύο στοιχεία a και b στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, υπάρχουν τόσες μεταθέσεις που απεικονίζουν το a στο b όσες είναι οι μεταθέσεις που αφήνουν το a ίδιο (δηλ., το απεικονίζουν στον εαυτό του). Γιατί;
  - Αφού τα a και b είναι ισοδύναμα, υπάρχει τουλάχιστον μία μετάθεση που απεικονίζει το a στο b.
  - Κοίτα τώρα συνολικά τις μεταθέσεις που αφήνουν το a ως έχει.
  - Μπορώ να φτιάξω ένα σύνολο μεταθέσεων που απεικονίζουν το a στο b ως εξής: κάνω πρώτα κάποια από τις μεταθέσεις που αφήνουν το a ως έχει και μετά τη μετάθεση που απεικονίζει το a στο b. Οι μεταθέσεις στο σύνολο αυτό:
    – είναι μεταθέσεις που απεικονίζουν το a στο b,
    – είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους, γιατί αν δεν ήταν και τις έκανα αντίστροφα θα έδιναν δυο διαφορετικές μορφές για το ίδιο στοιχείο a
    – αυτές είναι οι μόνες δυνατές μεταθέσεις που απεικονίζουν το a στο b

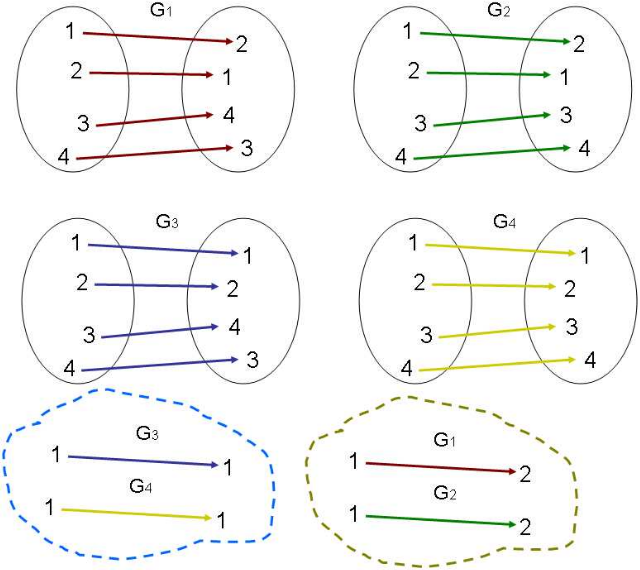
Θεώρημα Burnside



Θεώρημα Burnside: απόδειξη

- Το να μετρήσω τα συνολικά στοιχεία που μένουν ίδια για όλες τις μεταθέσεις είναι σαν να μετράω για κάθε στοιχείο του δοσμένου συνόλου το πλήθος των μεταθέσεων που δεν το αλλάζουν (δηλ., το απεικονίζουν στον εαυτό του).
- Αν έχουμε δύο στοιχεία a και b στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, υπάρχουν τόσες μεταθέσεις που απεικονίζουν το a στο b όσες είναι συνολικά οι μεταθέσεις που αφήνουν το a ίδιο (δηλ., το απεικονίζουν στον εαυτό του). Γιατί;
- Κοιτάω τώρα τα στοιχεία του S που είναι σε μία κλάση ισοδυναμίας: $\{a, b, c, \ldots, h\}$.
- Ομαδοποιώ τις μεταθέσεις του G σε αυτές που απεικονίζουν το a στο a, το a στο b, το a στο c, …, το a στο h.
- Όπως ήδη δείξαμε σε κάθε μια από αυτές τις ομάδες υπάρχουν τόσες μεταθέσεις όσες είναι συνολικά οι μεταθέσεις που αφήνουν το a ίδιο (δηλ., το απεικονίζουν στον εαυτό του), τις οποίες συμβολίζω $n(a)$.

Θεώρημα Burnside



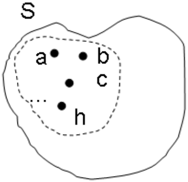
Θεώρημα Burnside: Απόδειξη

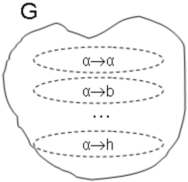
- Οι μεταθέσεις του G μπορούν να ομαδοποιηθούν σε αυτές που αφήνουν το α ίδιο, αυτές με $\alpha \rightarrow b$, αυτές με $\alpha \rightarrow c \ldots$ για κάθε στοιχείο της κλάσης ισοδυναμίας που περιέχει το α.
- Κάθε μία από τις ομάδες αυτές περιέχει $n(\alpha)$ μεταθέσεις, όπως δείξαμε πριν.
- Άρα

$$n(a) * \#\text{ στοιχείων στην κλ. ισοδυναμίας που περιέχει το } a = |G|$$

$$\Rightarrow$$

$$n(a) = \frac{|G|}{\#\text{ στοιχείων στην κλάση ισοδυναμίας που περιέχει το } a}$$





Θεώρημα Burnside: απόδειξη

- Δηλ.,

$$n(a) = \frac{|G|}{\#\text{ στοιχείων στην κλάση ισοδυναμίας που περιέχει το } a}$$

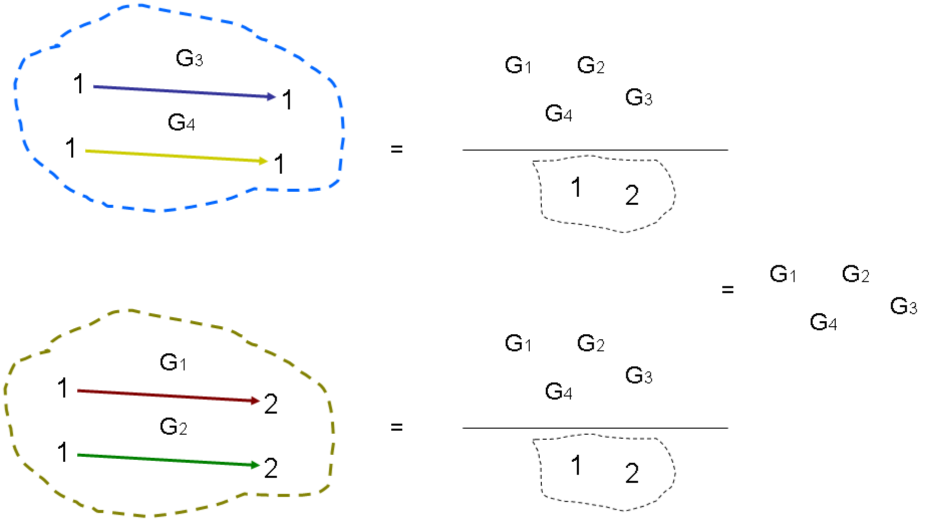
- Κάνω το παραπάνω για κάθε στοιχείο $b, c, ..., h$, οπότε: $n(a) + n(b) + ... + n(h) = |G|$. Επομένως για κάθε κλάση ισοδυναμίας στο S είναι:

$$\sum_{\text{όλα τα } s \text{ στην κλάση ισοδυναμίας}} n(s) = |G|$$

- Άρα για όλο το S ισχύει:

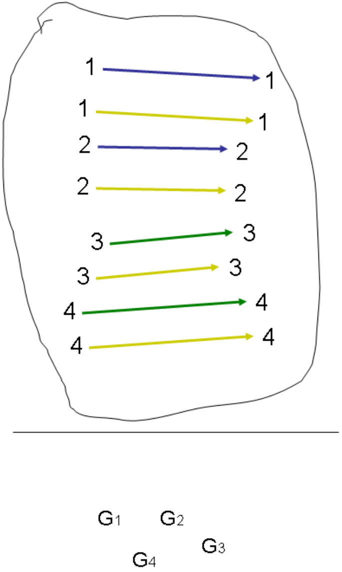
$$\sum_{s \in S} n(s) = \#\text{κλάσεων ισοδυναμίας στις οποίες χωρίζεται το } S \cdot |G|$$

Θεώρημα Burnside



Θεώρημα Burnside

	1	2	3	4
1	✓	✓		
2	✓	✓		
3			✓	✓
4			✓	✓



Παράδειγμα

Δίνεται σύνολο $S = \{a, b, c, d\}$ και σύνολο μεταθέσεων $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$, με $\pi_1 = \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} abcd \\ bacd \end{pmatrix}$, $\pi_3 = \begin{pmatrix} abcd \\ abdc \end{pmatrix}$, $\pi_4 = \begin{pmatrix} abcd \\ badc \end{pmatrix}$. Πόσοι διαφορετικοί σχηματισμοί υπάρχουν στο S λόγω του G;

Περιμένουμε να βρούμε δύο διαφορετικούς σχηματισμούς αφού 2 είναι και οι κλάσεις ισοδυναμίας στο S λόγω του G:

	a	b	c	d
a	✓	✓		
b	✓	✓		
c			✓	✓
d			✓	✓

Στη μετάθεση π_1 μένουν ίδια 4 στοιχεία, στην π_2 2, στην π_3 2 και στην π_4 0 στοιχεία. Συνολικά, υπάρχουν 4 μεταθέσεις στο G. Οπότε το πλήθος κλάσεων ισοδυναμίας είναι $\frac{1}{4}(4+2+2+0) = 2$.

Πόσα διαφορετικά βραχιολάκια που να έχουν 2 χάντρες, μπλε και κίτρινες, μπορούμε να φτιάξουμε όταν οι χάντρες μπορούν να περιστρέφονται;

Δύο βραχιολάκια είναι τα ίδια αν περιστρέφοντας το ένα προκύπτει το άλλο.

- Οι πιθανές δυάδες από χάντρες είναι οι: bb, by, yb, yy.
- Οι δυνατές μεταθέσεις - να μείνουν ως έχουν ή να εναλλαγούν τα άκρα τους - είναι 2:
$\pi_1 = \begin{pmatrix} bb, by, yb, yy \\ bb, by, yb, yy \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} bb, by, yb, yy \\ bb, yb, by, yy \end{pmatrix}$
- Στην π_1 υπάρχουν 4 στοιχεία αναλλοίωτα.
- Στην π_2 υπάρχουν 2 στοιχεία αναλλοίωτα.
- Άρα οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι: $\frac{1}{2}(4+2) = 3$

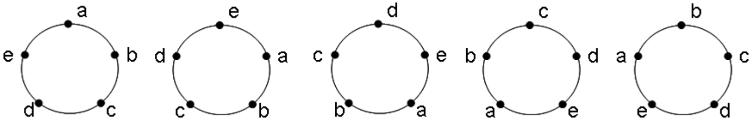
Πόσα διαφορετικά βραχιολάκια που να έχουν 3 χάντρες, μπλε και κίτρινες, μπορούμε να φτιάξουμε όταν οι χάντρες μπορούν να περιστρέφονται;

Δύο βραχιολάκια είναι τα ίδια αν περιστρέφοντας το ένα προκύπτει το άλλο.

- Οι πιθανές τριάδες από χάντρες είναι οι: $bbb, bby, byb, byy, ybb, yby, yyb, yyy$.
- Οι δυνατές μεταθέσεις - να μείνουν ως έχουν ή να εναλλαγούν τα άκρα τους - είναι 2:
$$\pi_1 = \begin{pmatrix} bbb, bby, byb, byy, ybb, yby, yyb, yyy \\ bbb, bby, byb, byy, ybb, yby, yyb, yyy \end{pmatrix},$$
$$\pi_2 = \begin{pmatrix} bbb, bby, byb, byy, ybb, yby, yyb, yyy \\ bbb, ybb, byb, yyb, bby, yby, byy, yyy \end{pmatrix}$$
- Στην π_1 υπάρχουν 8 στοιχεία αναλλοίωτα.
- Στην π_2 υπάρχουν 4 στοιχεία αναλλοίωτα.
- Άρα οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι: $\frac{1}{2}(8+4) = 6$

Πόσα διαφορετικά βραχιολάκια που να έχουν 5 χάντρες, μπλε, κίτρινες και άσπρες, μπορούμε να φτιάξουμε όταν οι χάντρες μπορούν να περιστρέφονται;

- Έστω S το σύνολο από τα $3^5 = 243$ βραχιολάκια (δηλ. όλες τις δυνατές 5-άδες χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη συμμετρίες).
- Οι δυνατές μεταθέσεις είναι:



- Στην π_1 μένουν ίδια 243 στοιχεία. Για κάθε μια από τις υπόλοιπες μεταθέσεις, 3 5-άδες θα δίνουν ίδια βραχιολάκια: όταν όλες οι χάντρες έχουν το ίδιο χρώμα, γιατί μόνο τότε η περιστροφή αφήνει αναλλοίωτο το βραχιολάκι.
- Άρα, υπάρχουν $\frac{1}{5}(243 + 3 + 3 + 3 + 3) = 51$ κλάσεις ισοδυναμίας (= διαφορετικά βραχιολάκια).

Με πόσους τρόπους μπορώ να βάλω *n* άτομα να καθήσουν σε κύκλο;

- Υπάρχουν $n!$ μεταθέσεις για τα n άτομα αν δε λάβουμε υπόψη τις συμμετρίες.
- Υπάρχουν $G = \{\pi_1, ...\pi_n\}$ μεταθέσεις: π_1, η ταυτοτική και κάθε μία από τις επόμενες προκύπτει από την προηγούμενη με μετατόπισή της κατά μία θέση κατά τη φορά του ρολογιού.
- Στην π_1 μένουν ίδιες όλες οι θέσεις, δηλ., $n!$ στοιχεία. Σε κάθε μια από τις υπόλοιπες μεταθέσεις καμία θέση δε μένει η ίδια, άρα αναλλοίωτα μένουν 0 στοιχεία.
- Άρα, ο συνολικός αρθμός των κλάσεων ισοδυναμίας είναι $\frac{1}{n}(n! + 0 + ... + 0) = (n-1)!$.

Θέλω να τυπώσω 5-ψήφια νούμερα σε χαρτάκια, ένα σε κάθε χαρτάκι. Πόσα διαφορετικά χαρτάκια πρέπει να τυπώσω για να έχω όλα τα νούμερα;

- Υπάρχουν 10^5 διαφορετικά 5-ψήφια νούμερα αν δε λάβουμε υπόψη τις συμμετρίες.
- Πόσες μεταθέσεις υπάρχουν στο σύνολο G;
  - Τα ψηφία 0,1,6,8,9 είναι ίδια αν τα διαβάσω ‘πάνω κάτω’ και ‘δεξιά και πάνω’ (π.χ., 89166 - 99168)
- Οπότε είναι $G = \{\pi_1, \pi_2\}$

  π_1: ταυτοτική μετάθεση - αφήνει όλα τα νούμερα όπως είναι - μένουν ίδια 10^5 στοιχεία

  π_2: αφήνει τον αριθμό ίδιο όταν δε μπορεί να διαβαστεί ‘πάνω κάτω’ ($13765 \to 13765$) και κάνει τον αριθμό ίδιο με τον αντίστοιχο όταν μπορεί να διαβαστεί ανάποδα (π.χ., $89166 \to 99168$). Εδώ μένουν ίδια $(10^5 - 5^5) + 3 \cdot 5^2$ στοιχεία. Γιατί;
- Άρα, ο συνολικός αρθμός των κλάσεων ισοδυναμίας είναι $\frac{1}{2}(10^5 + 10^5 - 5^5 + 3 \cdot 5^2)$.

Θέλω να τυπώσω 5-ψήφια νούμερα σε χαρτάκια, ένα σε κάθε χαρτάκι. Πόσα διαφορετικά χαρτάκια πρέπει να τυπώσω για να έχω όλα τα νούμερα;

- Τα ψηφία 2,3,4,5,7 δε μπορούν να διαβαστούν ανάποδα και μπορούν να δώσουν 5^5 πενταψήφιους.
- Για να διαβάζονται πενταψήφιοι ίδια είτε πάνω κάτω είτε δεξιά και πάνω πρέπει
  – το μεσαίο ψηφίο να είναι 0,1,8 (3 επιλογές)
  – το πρώτο ψηφίο πρέπει να είναι το τελευταίο γυρισμένο ανάποδα: 0,1,8,6,9 (5 επιλογές)
  – το δεύτερο ψηφίο πρέπει να είναι το τέταρτο γυρισμένο ανάποδα: 0,1,8,6,9 (5 επιλογές)

Θέλω να τυπώσω 5-ψήφια νούμερα σε χαρτάκια, ένα σε κάθε χαρτάκι. Πόσα διαφορετικά χαρτάκια πρέπει να τυπώσω για να έχω όλα τα νούμερα;

- Υπάρχουν 10^5 διαφορετικά 5-ψήφια νούμερα αν δε λάβουμε υπόψη τις συμμετρίες.
- Πόσες μεταθέσεις υπάρχουν στο σύνολο G;
  - Τα ψηφία 0,1,6,8,9 είναι ίδια αν τα διαβάσω ‘πάνω κάτω’ και ‘δεξιά και πάνω’ (π.χ., 89166 - 99168)
- Οπότε είναι $G = \{\pi_1, \pi_2\}$
  π_1: ταυτοτική μετάθεση - αφήνει όλα τα νούμερα όπως είναι - μένουν ίδια 10^5 στοιχεία
  π_2: αφήνει τον αριθμό ίδιο όταν δε μπορεί να διαβαστεί ‘πάνω κάτω’ ($13765 \to 13765$) και κάνει τον αριθμό ίδιο με τον αντίστοιχο όταν μπορεί να διαβαστεί ανάποδα (π.χ., $89166 \to 99168$). Εδώ μένουν ίδια $(10^5 - 5^5) + 3 \cdot 5^2$ στοιχεία. Γιατί;
- Άρα, ο συνολικός αρθμός των κλάσεων ισοδυναμίας είναι $\frac{1}{2}(10^5 + 10^5 - 5^5 + 3 \cdot 5^2)$.

Θέλω να τυπώσω 5-ψήφια νούμερα σε χαρτάκια, ένα σε κάθε χαρτάκι. Πόσα διαφορετικά χαρτάκια πρέπει να τυπώσω για να έχω όλα τα νούμερα;

- Τα ψηφία 2,3,4,5,7 δε μπορούν να διαβαστούν ανάποδα και μπορούν να δώσουν 5^5 πενταψήφιους.
- Για να διαβάζονται πενταψήφιοι ίδια είτε πάνω κάτω (π.χ., 10801) είτε δεξιά και πάνω (π.χ., 16891) πρέπει
  – το μεσαίο ψηφίο να είναι 0,1,8 (3 επιλογές)
  – το πρώτο ψηφίο πρέπει να είναι το τελευταίο γυρισμένο ανάποδα: 0,1,8,6,9 (5 επιλογές)
  – το δεύτερο ψηφίο πρέπει να είναι το τέταρτο γυρισμένο ανάποδα: 0,1,8,6,9 (5 επιλογές)

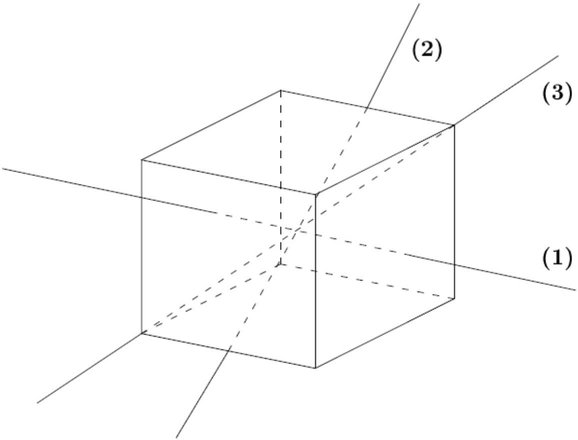
Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις όψεις ενός κύβου με 6 χρώματα ώστε κάθε χρώμα να χρησιμοποιείται ακριβώς μία φορά;

Αριθμούμε τις όψεις του κύβου ως εξής: 1 την πάνω, 2 την κάτω, 3,4,5,6 τις πλαϊνές κατά τη φορά του ρολογιού. Οι συμμετρίες στον κύβο είναι οι εξής:

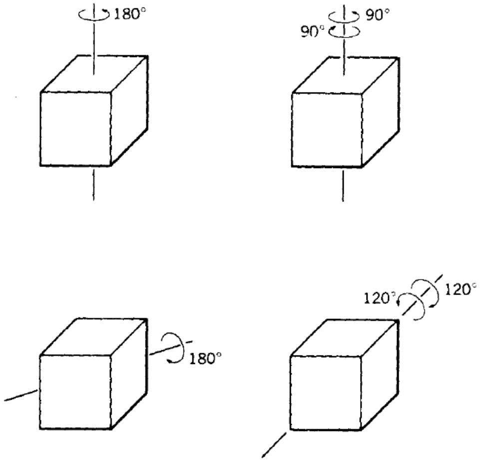
- Να αφήσω τον κύβο όπως είναι. 6! στοιχεία μένουν ως έχουν.
- Να κρατήσω σταθερές την πάνω και την κάτω όψη, δηλ., τις 1 και 2 και να επιτρέψω εναλλαγές της μπροστά με την πίσω και της δεξιά με την αριστερά. Υπάρχουν 3 περιπτώσεις ανάλογα με το αν κοιτάω τον κατακόρυφο, τον οριζόντιο ή τον άξονα βάθους. Κανένα στοιχείο δεν παραμένει ίδιο. (άξονας 1)

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις όψεις ενός κύβου με 6 χρώματα ώστε κάθε χρώμα να χρησιμοποιείται ακριβώς μία φορά;

- Να κρατήσω σταθερές την πάνω και την κάτω όψη, δηλ., τις 1 και 2 και να περιστρέψω κατά μία θέση τις πλάγιες όψεις, μία φορά προς τη φορά του ρολογιού και μία φορά προς την αντίθετη. Υπάρχουν 3 περιπτώσεις ανάλογα με το αν κοιτάω τον κατακόρυφο, τον οριζόντιο ή τον άξονα βάθους. Συνολικά 6. Κανένα στοιχείο δεν παραμένει ίδιο. (άξονας 1)
- Στρίβω το ζάρι. Υπάρχουν 3 περιπτώσεις ανάλογα με το αν κοιτάω τον κατακόρυφο, τον οριζόντιο ή τον άξονα βάθους. Σε κάθε περίπτωση μπορώ να στρίψω το ζάρι προς τη φορά του ρολογιού ή προς την αντίστροφη. Συνολικά 6 περιπτώσεις. Κανένα στοιχείο δε μένει το ίδιο. (άξονας 2)
- Κυλάω το ζάρι πίσω και δεξιά (μπροστά και αριστερά, αντίστοιχα). Υπάρχουν 4 τρόποι να το κάνω αυτό. Συνολικά 8. Κανένα στοιχείο δε μένει σταθερό. (άξονας 3)



(2)
(3)
(1)


180°
90°
90°
180°
120°
120°

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις όψεις ενός κύβου με 6 χρώματα ώστε κάθε χρώμα να χρησιμοποιείται ακριβώς μία φορά;

- Άρα συνολικά $|G| = 24$ και το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας είναι:
  $\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \psi(\pi) = \frac{1}{24}(6! + 0 + 0 + 0 + 0) = 30$

Θα μπορούσαμε και απλούστερα...

- ΕΡΩΤΗΣΗ: Έχω ένα ζάρι και ταμπελάκια με τους αριθμούς 1 έως 6. Κάθε ταμπελάκι πρέπει να χρησιμοποιηθεί ακριβώς μία φορά. Πόσα διαφορετικά ζάρια μπορώ να φτιάξω κολλώντας τα ταμπελάκια στις πλευρές του ζαριού;
- ΑΠΑΝΤΗΣΗ: ... Σκέψη...!

- Δύο αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας είναι ισοδύναμα όταν περιστρέφοντας ένα από αυτά στο χώρο θα έδινε το άλλο.
  Ή αλλιώς: βάζω και τα δυο ζάρια να στέκονται με τον ίδιο αριθμό στο πάνω μέρος και τσεκάρω τι συμβαίνει με τον αριθμό στο κάτω μέρος τους: αν είναι ο ίδιος οι αριθμήσεις των ζαριών είναι ισοδύναμες, αλλιώς όχι.
- Γιατί;
  Αν το πάνω και το κάτω μέρος είναι τα ίδια τότε αφήνοντας τα ζάρια ως έχουν μπορώ να τα περιστρέψω και αν σε κάθε θέση μπορώ να ταιριάξω τα ταμπελάκια τους τότε τα ζάρια είναι ίδια. Αλλιώς δεν είναι.
- Με δεδομένη αυτή τη μέθοδο για να αποφασίζουμε αν δύο αριθμήσεις ζαριών είναι ίδιες, πόσες διαφορετικές αριθμήσεις υπάρχουν;

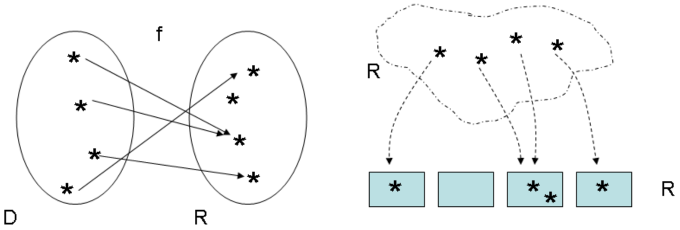
- Και στα δύο ζάρια υπάρχει το ταμπελάκι 1. Οπότε τοποθέτησά τα και τα δύο με το 1 στο πάνω μέρος. Το κάτω μέρος τους μπορεί να αριθμηθεί με 5 διαφορετικούς τρόπους.
- Τώρα αυτό που ψάχνουμε είναι ουσιαστικά οι διαφορετικές αριθμήσεις στα υπόλοιπα μέρη τους.
  Ανάλογα με τι διάλεξα πριν, μένουν 4 διαφορετικοί αριθμοί να τοποθετηθούν στο μεσαίο τμήμα. Υπάρχουν $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ διάταξεις των 4 αριθμών. Όμως κρατώντας το ζάρι σταθερό μπορώ να το περιστρέψω προς 4 κατευθύνσεις - οπότε οι διατάξεις ανά 4 θα είναι ίδιες, δηλ., διαφορετικές είναι μόνο οι $\dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4}$.
- Άρα συνολικά, οι διαφορετικές αριθμήσεις είναι $5 \cdot \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 30$

Μπορώ καλύτερα...;;;

- Θεώρημα Burnside βοηθάει πολύ αφού αντί να μετράω κλάσεις ισοδυναμίας κοιτάω τις μεταθέσεις και μετράω μόνο τα στοιχεία που οι μεταθέσεις αφήνουν αναλλοίωτα... ΑΛΛΑ
  - Πάλι μετράω ''πολλά'' στοιχεία και η διαδικασία παραμένει πολύπλοκη...
  - Εκτός από το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας δε μπορώ να έχω πληροφορία και για άλλες ιδιότητες ισοδύναμων στοιχείων
    –π.χ., αν θέλαμε να βρούμε τον αριθμό από διαφορετικές σκακιέρες που να έχουν 2 πράσινα και 2 άσπρα τετραγωνάκια; Το θεώρημα Burnside δε βοηθάει...

Ιδέα...

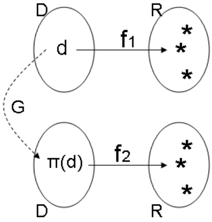
- f: τρόπος να ρίξω $|D|$ αντικείμενα σε $|R|$ κουτιά



- πλήθος f από $D \to R$: πλήθος τρόπων να ρίξω $|D|$ αντικείμενα σε $|R|$ κουτιά

Κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων

- Έστω D και R σύνολα και G σύνολο μεταθέσεων των στοιχείων του D.
- Ορίζουμε την εξής διμελή σχέση στο σύνολο των συναρτήσεων από το D στο R: f_1, f_2 σχετίζονται αν $f_1(d) = f_2(\pi(d)), \forall d \in D$ που είναι σχέση ισοδυναμίας.



- Επομένως, οι συναρτήσεις από $D \to R$ χωρίζονται σε κλάσεις ισοδυναμίας που καλούνται πρότυπα (patterns): αντιστοιχούν σε διαφορετικούς τρόπους να μοιράσω $|D|$ αντικείμενα σε $|R|$ κουτιά όταν η ισοδυναμία μεταξύ των μοιρασμάτων καθορίζεται από το G.

Παράδειγμα

- Έστω $D = \{a, b, c, d\}$, $R = \{x, y\}$ και σύνολο μεταθέσεων $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$, με $\pi_1 = \begin{pmatrix} abcd \\ bcda \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} abcd \\ cdab \end{pmatrix}$, $\pi_3 = \begin{pmatrix} abcd \\ dabc \end{pmatrix}$, $\pi_4 = \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}$.
- Οι 16 συναρτήσεις $f : D \to R$ είναι οι εξής:

	f(a)	f(b)	f(c)	f(d)
f(1)	x	x	x	x
f(2)	y	x	x	x
f(3)	x	y	x	x
f(4)	x	x	y	x
f(5)	x	x	x	y
f(6)	y	y	x	x
f(7)	y	x	y	x
f(8)	y	x	x	y
f(9)	x	y	y	x
f(10)	x	y	x	y
f(11)	x	x	y	y
f(12)	y	y	y	x
f(13)	y	y	x	y
f(14)	y	x	y	y
f(15)	x	y	y	y
f(16)	y	y	y	y

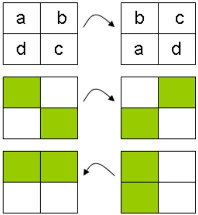
Παράδειγμα

- Έστω $D = \{a, b, c, d\}$, $R = \{x, y\}$ και σύνολο μεταθέσεων $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$, με $\pi_1 = \begin{pmatrix} abcd \\ bcda \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} abcd \\ cdab \end{pmatrix}$, $\pi_3 = \begin{pmatrix} abcd \\ dabc \end{pmatrix}$, $\pi_4 = \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}$.
- Οι 16 συναρτήσεις $f : D \rightarrow R$ είναι οι εξής:

	f(a)	f(b)	f(c)	f(d)
f(1)	x	x	x	x
f(2)	y	x	x	x
f(3)	x	y	x	x
f(4)	x	x	y	x
f(5)	x	x	x	y
f(6)	y	y	x	x
f(7)	y	x	y	x
f(8)	y	x	x	y
f(9)	x	y	y	x
f(10)	x	y	x	y
f(11)	x	x	y	y
f(12)	y	y	y	x
f(13)	y	y	x	y
f(14)	y	x	y	y
f(15)	x	y	y	y
f(16)	y	y	y	y

Ξανά το θέμα με τις σκακιέρες...

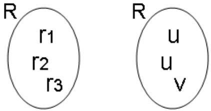
- Ονομάζω τα κουτάκια της σκακιέρας.
- Έχω δύο χρώματα: άσπρο (x)-πράσινο (y)
- Οπότε $D = \{a, b, c, d\}$, $R = \{x, y\}$
- $f : D \rightarrow R$ δείχνει τη σκακιέρα
- Το σύνολο μεταθέσεων που προκύπτουν με περιστροφή των cells είναι
$$G = \{\begin{pmatrix} abcd \\ bcda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ cdab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ dabc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}\}.$$



- Ακριβώς το προηγούμενο παράδειγμα. Υπάρχουν 6 κλάσεις ισοδυναμίας, δηλ., 6 διαφορετικοί σχηματισμοί 2 χρωμάτων.

Ανάθεση βαρών στα στοιχεία του R

- Μέχρι εδώ: μετρήσαμε τον αριθμό κλάσεων ισοδυναμίας συναρτήσεων.
- Θέλουμε ΚΑΙ: πληροφορία για ιδιότητες συναρτήσεων στις κλάσεις ισοδυναμίας.
- Τι κάνουμε; Αναθέτουμε ''βάρη'' (που μπορεί να είναι αριθμοί ή σύμβολα) στα στοιχεία του R.



- $r_1 + r_2 + r_3$ σημαίνει ότι κάποιο στοιχείο του D μπορεί να πάρει ''βάρος '' r_1 ή r_2 ή r_3.
- Αν έχουμε 2 στοιχεία με ''βάρος '' u και 1 στοιχείο με ''βάρος '' v στο R σημαίνει ότι κάποιο στοιχείο του D μπορεί να διαλέξει στοιχεία τύπου u ή τύπου v.
- Χοντρικά, με αυτόν τον τρόπο γενικεύεται η έννοια των γεννητριών συναρτήσεων.

Ανάθεση βαρών στα στοιχεία του R

- Το βάρος μιας συνάρτησης $f : D \to R$ είναι το γινόμενο των βαρών των εικόνων των στοιχείων του D στο R: $\sum_{d \in D} w(f(d))$.
- Το βάρος ενός συνόλου συναρτήσεων από $D \to R$ είναι το άθροισμα των βαρών τους.
- Άρα: το βάρος μιας συνάρτησης δείχνει πώς (τον τρόπο) $|D|$ αντικείμενα ρίχνονται σε $|R|$ κουτιά.
- Το βάρος ενός συνόλου συναρτήσεων δείχνει τους τρόπους (το πλήθος των τρόπων) που κατανέμονται τα αντικείμενα.
- Συναρτήσεις στην ίδια κλάση ισοδυναμίας έχουν το ίδιο βάρος που καλείται βάρος προτύπου, δηλ. βάρος της κλάσης ισοδυναμίας. (Φυσικά, μπορεί συναρτήσεις με το ίδιο βάρος να μην ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας)

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε 3 μπάλες όταν έχουμε 3 χρώματα: ακριβό κόκκινο, φθηνό κόκκινο και μπλε;

- $D = \{$οι τρεις μπάλες$\}$
- $R = \{$τα τρία χρώματα$\}$
  - r_1: βάρος ακριβού κόκκινου χρώματος
  - r_2: βάρος φθηνού κόκκινου χρώματος
  - b: βάρος μπλε χρώματος
- $r_1 + r_2 + b$: τρόποι που μπορεί να χρωματιστεί μια μπάλα με r_1 ή με r_2 ή με b
- $(r_1 + r_2 + b)^3$: τρόποι που μπορούν να χρωματιστούν και οι 3 μπάλες και είναι το συνολικό βάρος της $f : D \to R$
- $(r_1 + r_2 + b)^3 =$ $r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 + 3r_1^2 r_2 + 3r_1 r_2^2 + 3r_1^2 b + 3r_2^2 b + 3r_1 b^2 + 3r_2 b^2 + 3r_1 r_2 b$
- Το παραπάνω έχει όλη την πληροφορία για τους διαφορετικούς τρόπους που μπορούμε να χρωματίσουμε τις 3 μπάλες.
- $3r_1 r_2^2$: υπάρχουν 3 τρόποι να χρωματίσουμε 1 μπάλα με ακριβό κόκκινο χρώμα και 2 με φθηνό κόκκινο χρώμα.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε 3 μπάλες όταν έχουμε 3 χρώματα: ακριβό κόκκινο, φθηνό κόκκινο και μπλε;

- Αν δε μάς ενδιαφέρει η διάκριση μεταξύ των κόκκινων χρωμάτων, θέτουμε $w(r_1) = w(r_2) = r$ οπότε έχουμε $(r + r + b)^3 = (2r + b)^3 = \dots$
- $2r + b$: υπάρχουν 2 τρόποι να χρωματίσουμε μια μπάλα κόκκινη και 1 τρόπος να την κάνουμε μπλε.

8 άτομα θέλουν να πάνε ταξίδι σε 3 πόλεις. 3 από τα 8 άτομα ανήκουν στην ίδια οικογένεια, και 2 από τα 8 άτομα ανήκουν επίσης σε μια άλλη οικογένεια. Άτομα στην ίδια οικογένεια πρέπει να πάνε ταξίδι μαζί. Με πόσους τρόπους τα 8 άτομα μπορούν να κανονίσουν το ταξίδι τους;

- $D = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, τα άτομα
  – a, b, c μία οικογένεια, d, e άλλη οικογένεια
- $R = \{c_1, c_2, c_3\}$, οι πόλεις με βάρη A, B, Γ
- Για τους a, b, c, τα διαφορετικά ταξίδια που μπορούν να κάνουν είναι $A^3 + B^3 + \Gamma^3$ αφού πρέπει να πάνε μαζί είτε στην πόλη c_1 είτε στη c_2 είτε στη c_3
- Αντίστοιχα, για τους d, e είναι $A^2 + B^2 + \Gamma^2$
- Για τους f, g, h είναι $A + B + \Gamma$
- Συνολικά οι τρόποι είναι:
  $(A^3 + B^3 + \Gamma^3)(A^2 + B^2 + \Gamma^2)(A + B + \Gamma)^3$

Προχωρώντας...

Στόχος: να βρω το βάρος όλων των κλάσεων ισοδυναμίας συναρτήσεων από $D \to R$

Έχω μια μετάθεση π.χ., $\pi = \begin{pmatrix} abcdef \\ cedabf \end{pmatrix}$.

- Τα στοιχεία $a \to c, c \to d, d \to a$ σχηματίζουν κύκλο, οπότε $\{a, c, d\}$ είναι ένας κύκλος στην π με μήκος 3, δηλ. με 3 στοιχεία.
- Άλλος κύκλος: $b \to e, e \to b$, $\{e, b\}$ είναι ένας κύκλος στην π με μήκος 2.
- $x_{\text{βάρος}}^{\text{πλήθος}}$: για την π έχουμε x_3^1, x_2^1
- Όταν πω με τέτοιο συμβολισμό πόσοι κύκλοι υπάρχουν σε μια μετάθεση π έχω μια αναπαράσταση δομής κύκλου της π

Προχωρώντας...

- Αν μάς δώσουν ένα σύνολο μεταθέσεων G ορίζουμε το δείκτη κύκλου P_G του G σαν το άθροισμα των κυκλικών αναπαραστάσεων των μεταθέσεων του G διά το πλήθος των μεταθέσεων του G: $P_G = \dfrac{\displaystyle\sum_{\pi \in G} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_k^{b_k}}{|G|}$

Παράδειγμα

Δίνεται το $G = \{ \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ bacd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ abdc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ badc \end{pmatrix} \}$.

- Έχουμε 4 μεταθέσεις: $|G| = 4$
- $\pi_1 : x_1^4$
- $\pi_2 : x_1^2 x_2$
- $\pi_3 : x_1^2 x_2$
- $\pi_4 : x_2^2$
- Οπότε: $P_G = \dfrac{x_1^4 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2 + x_2^2}{4} = \dfrac{x_1^4 + x_2^2 + 2x_1^2 x_2}{4}$

Θεώρημα Pólya

- Δεδομένα: σύνολα D, R, συναρτήσεις $f : D \to R$, σύνολο μεταθέσεων G, βάρη στοιχείων του R.
- Ζητούμενο: το συνολικό βάρος των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων f.
- Διατύπωση: Ο κατάλογος των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού D και σύνολο τιμών R είναι

$$P_G\left(\sum_{r\in R} w(r), \sum_{r\in R}[w(r)]^2, \ldots, \sum_{r\in R}[w(r)]^k, \ldots\right)$$

  δηλαδή ο κατάλογος των προτύπων προκύπτει αντικαθιστώντας το x_1 με $\sum_{r\in R} w(r)$, το x_2 με $\sum_{r\in R}[w(r)]^2$, ..., το x_k με $\sum_{r\in R}[w(r)]^k$,... στην έκφραση του δείκτη κύκλων P_G του συνόλου μεταθέσεων G.

Θεώρημα Pólya

- Δεδομένα: σύνολα D, R, συναρτήσεις $f : D \rightarrow R$, σύνολο μεταθέσεων G, βάρη στοιχείων του R.
- Ζητούμενο: το συνολικό βάρος των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων f.
- Εφαρμογή:
  1. Βρίσκω κύκλους στα $\pi \in G$
  2. Φτιάχνω το P_G
  3. Σε κάθε όρο του P_G αντικαθιστώ το

  – x_1 με $w(r_1) + w(r_2) + ..., \forall r_i \in R$
  – x_2 με $w^2(r_1) + w^2(r_2) + ..., \forall r_i \in R$
  – κοκ

Ποιο είναι το πλήθος των διαφορετικών βραχιολιών με 3 χάντρες, μπλε και κίτρινες;

Ισοδύναμα είναι βραχιόλια που προκύπτουν από εναλλαγή των άκρων τους.

- $D = \{1, 2, 3\}$, οι χάντρες
- $R = \{b, y\}$, τα χρώματα με $w(b) = b, w(y) = y$
- Έχουμε τις εξής μεταθέσεις: $\pi_1 = \left(\begin{array}{c} 123 \\ 123 \end{array} \right)$ και $\pi_2 = \left(\begin{array}{c} 123 \\ 321 \end{array} \right)$, δηλ. $|G| = 2$.
- Στη μετάθεση π_1 υπάρχουν 3 κύκλοι μήκους 1, δηλ. x_1^3
- Στη μετάθεση π_2 υπάρχουν 1 κύκλος μήκους 1 και 1 κύκλος μήκους 2, δηλ. $x_1^1 x_2^1$
- Οπότε: $P_G = \dfrac{x_1^3 + x_2 x_1}{2}$

Ποιο είναι το πλήθος των διαφορετικών βραχιολιών με 3 χάντρες, μπλε και κίτρινες;

Ισοδύναμα είναι βραχιόλια που προκύπτουν από εναλλαγή των άκρων τους.

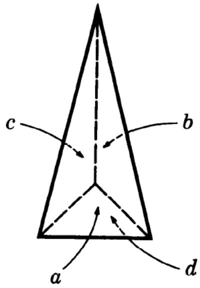
- Έχουμε 2 χρώματα με βάρη b, y, οπότε:
- Οπότε:
  $$P_G = \frac{(b+y)^3 + (b^2+y^2)(b+y)}{2} = b^3 + 2b^2y + 2by^2 + y^3$$
- Θέτοντας $b = y = 1$ έχουμε: $1 + 2 + 2 + 1 = 6$ τρόποι δηλ. διαφορετικά βραχιόλια.

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις πλευρές μιας πυραμίδας με 2 χρώματα;

Η βάση της πυραμίδας παραμένει σταθερή και οι συμμετρίες προκύπτουν μετά από περιστροφή της γύρω από τον κατακόρυφο άξονα.

- $D = \{a, b, c, d\}$, οι πλευρές
- $R = \{x, y\}$, τα χρώματα με $w(x) = x, w(y) = y$
- Έχουμε τις εξής μεταθέσεις: $\pi_1 = \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} abcd \\ bcad \end{pmatrix}$ και $\pi_3 = \begin{pmatrix} abcd \\ cabd \end{pmatrix}$, δηλ. $|G| = 3$.
- Για την π_1 είναι: x_1^4
- Για την π_2 είναι: $x_1^1 x_3^1$
- Για την π_3 είναι: $x_1^1 x_3^1$
- Οπότε: $P_G = \dfrac{x_1^4 + x_1^1 x_3^1 + x_1^1 x_3^1}{3} = \dfrac{x_1^4 + 2x_1^1 x_3^1}{3}$

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις πλευρές μιας πυραμίδας με 2 χρώματα;



Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις πλευρές μιας πυραμίδας με 2 χρώματα;

- Έχουμε 2 χρώματα με βάρη x, y, οπότε:
- Οπότε: $P_G = \dfrac{(x+y)^4 + 2(x+y)(x^3+y^3)}{3} = x^4 + y^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3$
- Θέτοντας $x = y = 1$ έχουμε: $1+1+2+2+2 = 8$ τρόποι δηλ. διαφορετικοί χρωματισμοί.

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις όψεις ενός κύβου με 3 χρώματα;

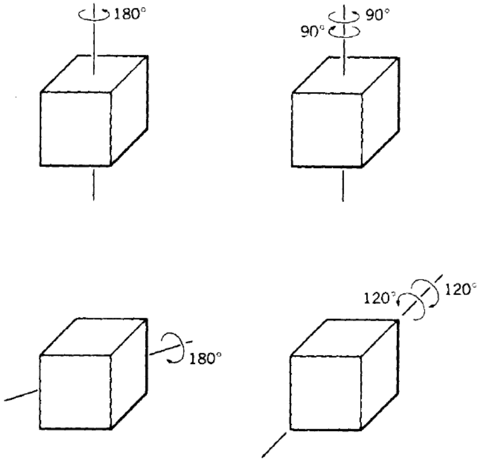
- $D = \{a, b, c, d, e, f\}$, οι πλευρές
- $R = \{c_1, c_2, c_3\}$, τα χρώματα με $w(c_i) = i, 1 \leq i \leq 3$
- Αριθμούμε τις όψεις του κύβου ως εξής: 1 την πάνω, 2 την κάτω, 3,4,5,6 τις πλαϊνές κατά τη φορά του ρολογιού. Οι συμμετρίες στον κύβο είναι οι εξής:

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις όψεις ενός κύβου με 3 χρώματα;

- Να αφήσω τον κύβο όπως είναι. (1)(2)(3)(4)(5)(6). Με κυκλική αναπαράσταση: x_1^6
- Να κάνω περιστροφές 180^o γύρω από τον άξονα που ενώνει μέσα απέναντι όψεων. (1)(2)(35)(46). Υπάρχουν 3 περιπτώσεις ανάλογα με το αν κοιτάω τον κατακόρυφο, τον οριζόντιο ή τον άξονα βάθους. Με κυκλική αναπαράσταση: $3x_1^2x_2^2$
- Να κάνω περιστροφές 90^o και -90^o γύρω από τον άξονα που ενώνει μέσα απέναντι όψεων. (1)(2)(3456). Υπάρχουν 3 περιπτώσεις ανάλογα με το αν κοιτάω τον κατακόρυφο, τον οριζόντιο ή τον άξονα βάθους. Συνολικά 6. Με κυκλική αναπαράσταση: $6x_1^2x_4^1$

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις όψεις ενός κύβου με 3 χρώματα;

- Να κάνω περιστροφές 180^o γύρω από άξονες που ενώνουν μέσα απέναντι ακμών. (15)(23)(46). Υπάρχουν 6 περιπτώσεις. Με κυκλική αναπαράσταση: $6x_2^3$
- Να κάνω περιστροφές 120^o και -120^o γύρω από άξονες που ενώνουν απέναντι κορυφές. (154)(236). Υπάρχουν 8 περιπτώσεις. Με κυκλική αναπαράσταση: $8x_3^2$



180°
90°
90°
180°
120°
120°

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις όψεις ενός κύβου με 3 χρώματα;

- Άρα συνολικά $|G| = 24$ και
  $P_G = \dfrac{x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4^1 + 6x_2^3 + 8x_3^2}{24}$
- Έχουμε 3 χρώματα: $c_1 + c_2 + c_3$, οπότε:
  $P_G = \dfrac{1}{24}[(c_1+c_2+c_3)^6+3(c_1+c_2+c_3)^2(c_1^2+c_2^2+c_3^2)^2+6(c_1+c_2+c_3)^2(c_1^4+c_2^4+c_3^4)^1+6(c_1^2+c_2^2+c_3^2)^3+8(c_1^3+c_2^3+c_3^3)^2]$
- Θέτοντας $w(c_1) = w(c_2) = w(c_3) = 1$ έχουμε:
  $P_G = \dfrac{3^6 + 3 \cdot 3^2 3^2 + 6 \cdot 3^2 3 + 6 \cdot 3^3 + 8 \cdot 3^2}{24} = \dfrac{729 + 243 + 162 + 162 + 72}{24} = \dfrac{1368}{24} = 57$

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις όψεις ενός κύβου με 6 χρώματα;

- Έχουμε ήδη δει ότι για τον κύβο είναι: $|G| = 24$ και $P_G = \dfrac{x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4^1 + 6x_2^3 + 8x_3^2}{24}$
- Έχουμε 6 χρώματα: $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6$, οπότε: $P_G = \frac{1}{24}[(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6)^6 + 3(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6)^2 (c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2+c_5^2+c_6^2)^2 + 6(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6)^2(c_1^4+c_2^4+c_3^4+c_4^4+c_5^4+c_6^4)^1 + 6(c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2+c_5^2+c_6^2)^3 + 8(c_1^3+c_2^3+c_3^3+c_4^3+c_5^3+c_6^3)^2]$
- Θέτοντας $w(c_1) = w(c_2) = w(c_3) = w(c_4) = w(c_5) = w(c_6) = 1$ έχουμε: $P_G = \dfrac{6^6 + 3\cdot 6^2 6^2 + 6\cdot 6^2 6 + 6\cdot 6^3 + 8\cdot 6^2}{24} = 2226$

Χρωματίζω τις όψεις ενός κύβου με 6 χρώματα. Ένα από αυτά είναι το κόκκινο. Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις όψεις ενός κύβου ώστε ακριβώς 3 από τις όψεις να είναι κόκκινες;

Στο προηγούμενο ανάπτυγμα για το P_G, θεωρούμε το c_1 να αντιπροσωπεύει το κόκκινο χρώμα και αθροίζουμε τους όρους που περιέχουν το c_1^3. Έχουμε:

$$\frac{1}{24}[\binom{6}{3}(c_2+c_3+c_4+c_5+c_6)^3 c_1^3 + 3\cdot 4(c_2+c_3+c_4+c_5+c_6)(c_2^2+c_3^2+c_4^2+c_5^2+c_6^2)c_1^3 + 8\cdot 2(c_2^3+c_3^3+c_4^3+c_5^3+c_6^3)c_1^3]$$

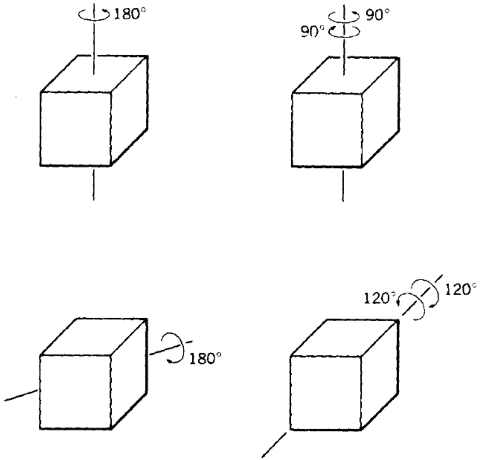
Θέτουμε $c_1=c_2=c_3=c_4=c_5=c_6=1$, οπότε ο παραπάνω συντελεστής έχει την τιμή 120.

Χρωματίζω τις όψεις ενός κύβου με 4 χρώματα, A, B, C, D. Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις όψεις ενός κύβου ώστε 2 από αυτές να χρωματιστούν με το χρώμα A, 2 με το χρώμα B, 1 με το C και 1 με το χρώμα D;

- Έχουμε ήδη δει ότι για τον κύβο είναι: $|G| = 24$ και $P_G = \dfrac{x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4^1 + 6x_2^3 + 8x_3^2}{24}$
- Έχουμε 4 χρώματα: $c_1 + c_2 + c_3 + c_4$, οπότε: $P_G = \dfrac{1}{24}[(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)^6 + 3(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)^2 (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2)^2 + 6(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)^2(c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 + c_4^4)^1 + 6(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2)^3 + 8(c_1^3 + c_2^3 + c_3^3 + c_4^3)^2]$
- Θεωρούμε ότι $c_1 = A, c_2 = B, c_3 = C, c_4 = D$ και από το παραπάνω ανάπτυγμα αθροίζουμε τους συντελεστές του όρου $c_1^2c_2^2c_3c_4$
- Το αποτέλεσμα είναι: $\dfrac{180 + 12}{24} = 8$

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις κορυφές ενός κύβου με 2 χρώματα;

- Έστω G το σύνολο μεταθέσεων που αντιστοιχούν σε όλες τις περιστροφές του κύβου. Υπάρχουν 24 μεταθέσεις στο G που ομαδοποιούνται στισπαρακάτω 5 κατηγορίες:
  1. Ταυτοτική μετάθεση. Κυκλική αναπαράσταση: x_1^8
  2. 3 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180^o γύρω από άξονες που συνδέουν τα μέσα απέναντι όψεων. Κυκλική αναπαράσταση: $3x_2^4$
  3. 6 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 90^o γύρω από άξονες που συνδέουν τα μέσα απέναντι όψεων. Κυκλική αναπαράσταση: $6x_4^2$
  4. 6 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180^o γύρω από άξονες που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών. Κυκλική αναπαράσταση: $6x_2^4$
  5. 8 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120^o γύρω από άξονες που συνδέουν απέναντι κορυφές. Κυκλική αναπαράσταση: $8x_1^2x_3^2$

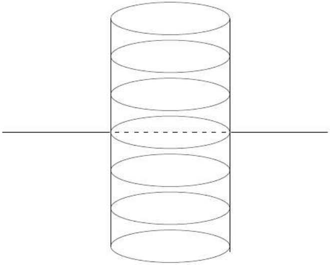

180°
90°
90°
180°
120°
120°

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις κορυφές ενός κύβου με 2 χρώματα;

- Επομένως, ο δείκτης κύκλων του συνόλου μεταθέσεων G είναι: $P_G = \frac{1}{24}(x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_3^2)$
- Αφού έχουμε δύο χρώματα, ο κατάλογος προτύπων είναι: $P_G = \frac{1}{24}((x+y)^8 + 9(x^2+y^2)^4 + 6(x^4+y^4)^2 + 8(x+y)^2(x^3+y^3)^2)$
- Θέτοντας $w(x) = w(y) = 1$ στην παραπάνω σχέση, το πλήθος των προτύπων είναι 23 που δίνει και το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών των 8 κορυφών του κύβου με 2 χρώματα.

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω έναν κύλινδρο που έχει χωριστεί σε 6 τμήματα (οριζόντια) με 1 ή περισσότερα χρώματα;

- Έστω G το σύνολο μεταθέσεων που αντιστοιχούν σε όλες τις συμμετρίες του κυλίνδρου. Υπάρχουν 2 μεταθέσεις στο G:
  1. Ταυτοτική μετάθεση. Κυκλική αναπαράσταση: x_1^6
  2. Περιστροφή 180^o γύρω από τον οριζόντιο άξονα που χωρίζει το τρίτο από το τέταρτο μέρος. Κυκλική αναπαράσταση: x_2^3

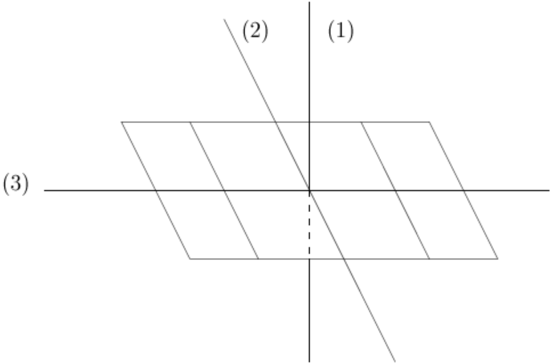


Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω έναν κύλινδρο που έχει χωριστεί σε 6 τμήματα (οριζόντια) με 1 ή περισσότερα χρώματα;

- Επομένως, ο δείκτης κύκλων του συνόλου μεταθέσεων G είναι: $P_G = \frac{1}{2}(x_1^6 + x_2^3)$
- Αφού έχουμε n χρώματα, ο κατάλογος προτύπων είναι: $P_G = \frac{1}{4}((x_1 + ... + x_n)^6 + (x_1^2 + ... + x_n^2)^3)$
- Θέτοντας $w(x_1) = ... = w(x_n) = 1$ στην παραπάνω παράσταση, το πλήθος των προτύπων, δηλ. το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών, είναι $\frac{1}{2}(n^6 + n^3) = \frac{n^3(n^3+1)}{2}$.

Έχουμε σκακιέρες διαστάσεων 2×4 που έχουν άσπρα και κόκκινα τετράγωνα. Πόσες διαφορετικές από αυτές υπάρχουν με 3 κόκκινα και 5 άσπρα τετράγωνα;

- Έστω G το σύνολο μεταθέσεων που αντιστοιχούν σε όλες τις περιστροφές της σκακιέρας. Υπάρχουν 4 μεταθέσεις στο G που ομαδοποιούνται στις παρακάτω 4 κατηγορίες:
  1. Ταυτοτική μετάθεση. Κυκλική αναπαράσταση: x_1^8
  2. Η μετάθεση που αντιστοιχεί σε περιστροφή 180^o της σκακιέρας γύρω από άξονα που είναι κάθετος στη σκακιέρα και διέρχεται από το κέντρο της. Κυκλική αναπαράσταση: x_2^4
  3. Η μετάθεση που αντιστοιχεί σε περιστροφή 180^o γύρω από τον οριζόντιο άξονα που κόβει τις δύο γραμμές της σκακιέρας. Κυκλική αναπαράσταση: x_2^4
  4. Η μετάθεση που αντιστοιχεί σε περιστροφή 180^o γύρω από τον κάθετο άξονα που κόβει στη μέση τις 4 στήλες της σκακιέρας. Κυκλική αναπαράσταση: x_2^4

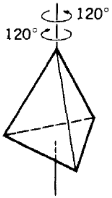

(2)
(1)
(3)

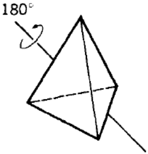
Έχουμε σκακιέρες διαστάσεων 2×4 που έχουν άσπρα και κόκκινα τετράγωνα. Πόσες διαφορετικές από αυτές υπάρχουν με 3 κόκκινα και 5 άσπρα τετράγωνα;

- Επομένως, ο δείκτης κύκλων του συνόλου μεταθέσεων G είναι: $P_G = \frac{1}{4}(x_1^8 + 3x_2^4)$
- Αφού έχουμε δύο χρώματα, ο κατάλογος προτύπων είναι: $P_G = \frac{1}{4}((x+y)^8 + 3(x^2+y^2)^4) =$ $\frac{1}{4}[\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} x^k y^{8-k} + 3\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^{2k} y^{8-2k}]$
- Αναζητούμε το συντελεστή του όρου x^3y^5 στην παραπάνω παράσταση. Κάνοντας πράξεις, αυτός προκύπτει ότι είναι: $\frac{1}{4}[\binom{8}{3} + 3 \cdot 0] = 14.$

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις κορυφές μιας πυραμίδας με 4 χρώματα;

- Έστω G το σύνολο μεταθέσεων που αντιστοιχούν σε όλες τις περιστροφές της πυραμίδας. Υπάρχουν 12 μεταθέσεις στο G που ομαδοποιούνται στις παρακάτω 3 κατηγορίες:
  1. Ταυτοτική μετάθεση. Κυκλική αναπαράσταση: x_1^4
  2. 8 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120^o γύρω από άξονες που συνδέουν μία κορυφή με το κέντρο της απέναντι όψης. Κυκλική αναπαράσταση: $8x_1x_3$
  3. 3 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180^o γύρω από άξονες που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών. Κυκλική αναπαράσταση: $3x_2^2$





Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις κορυφές μιας πυραμίδας με 4 χρώματα;

- Επομένως, ο δείκτης κύκλων του συνόλου μεταθέσεων G είναι: $P_G = \frac{1}{12}(x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)$
- Αφού έχουμε τέσσερα χρώματα, ο κατάλογος προτύπων είναι: $P_G = \frac{1}{24}((a+b+c+d)^4 + 8(a+b+c+d)(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2)$
- Θέτοντας $w(a) = w(b) = w(c) = w(d) = 1$ στην παραπάνω σχέση, το πλήθος των προτύπων είναι 36 που δίνει και το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών.

Γενικευμένη μορφή θεωρήματος Pólya

- Δεδομένα: σύνολα D, R, συναρτήσεις $f : D \to R$, σύνολο μεταθέσεων G για τα στοιχεία του D, σύνολο μεταθέσεων H για τα στοιχεία του R, βάρη στοιχείων του R.
- Ζητούμενο: το συνολικό βάρος των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων f.
- Διατύπωση: Ο κατάλογος των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού D και σύνολο τιμών R είναι $\frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{\pi\in G;\tau\in H}\psi[(\pi,\tau)']$, όπου $\psi[(\pi,\tau)']$ είναι το πλήθος των συναρτήσεων για τις οποίες ισχύει $\tau f(d) = f[\pi(d)]$ για κάθε στοιχείο $d \in D$
- Εφαρμογή: Το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας συναρτήσεων από το D στο R είναι η τιμή της έκφρασης $P_G((\frac{\partial}{\partial z_1})^{b_1}, (\frac{\partial}{\partial z_2})^{b_2}, (\frac{\partial}{\partial z_3})^{b_3}, \ldots) \times P_H[e^{c_1(z_1+z_2+z_3+\ldots)}, e^{2c_2(z_2+z_4+z_6+\ldots)}, e^{3c_3(z_3+z_6+z_9+\ldots)}, \ldots]$ για $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = 0$, με b_i κύκλους μεγέθους i στο G και c_i κύκλους μεγέθους i στο H.

Έχουμε μία σκακιέρα διαστάσεων 2×2 και 2 διαθέσιμα χρώματα x, y. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί σχηματισμοί χρωματικών αντιθέσεων;

- Έστω $D = \{a, b, c, d\}$ τα 4 κουτάκια της σκακιέρας και $R = \{x, y\}$ τα 2 διαθέσιμα χρώματα.
- Έστω $G = \{\begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ bcda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ cdab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ dabc \end{pmatrix}\}$ το σύνολο μεταθέσεων που αντιστοιχεί σε περιστροφές της σκακιέρας και $H = \{\begin{pmatrix} xy \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ yx \end{pmatrix}\}$ στο σύνολο μεταθέσεων που αντιστοιχεί σε εναλλαγές των χρωμάτων x, y.
- Το σύνολο G περιέχει 1 μετάθεση με 4 κύκλους μεγέθους 1 (z_1^4), 2 μεταθέσεις με 1 κύκλο μεγέθους 4 ($2z_4^1$), και 1 μετάθεση με 2 κύκλοι μεγέθους 2 (z_2^2).
- Το σύνολο H περιέχει 1 μετάθεση με 2 κύκλους μεγέθους 1 (z_1^2), 1 μετάθεση με 1 κύκλο μεγέθους 2 (z_2^1).

Έχουμε μία σκακιέρα διαστάσεων 2×2 και 2 διαθέσιμα χρώματα x, y. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί σχηματισμοί χρωματικών αντιθέσεων;

G: $z_1^4 + 2z_4^1 + z_2^2$
H: $z_1^2 + z_2^1$

- Εφαρμόζοντας τη γενικευμένη μορφή του θεωρήματος Pólya έχουμε ότι οι ζητούμενοι σχηματισμοί είναι:
$\frac{1}{4}\frac{1}{2}((\frac{\partial}{\partial z_1})^4 + (\frac{\partial}{\partial z_2})^2 + 2(\frac{\partial}{\partial z_4})^1) \times [e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + e^{2\cdot 1(z_2+z_4)}]|_{z_1=z_2=z_3=z_4=0} =$
$\frac{1}{8}(\frac{\partial^4}{\partial z_1^4}e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}e^{2(z_2+z_4)} + 2\cdot \frac{\partial}{\partial z_4}e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + 2\cdot \frac{\partial}{\partial z_4}e^{2(z_2+z_4)}) =$
$\frac{1}{8}(2^4 + 2^2 + 2^2 + 2\cdot 2^1 + 2\cdot 2^1) = 4$

Γενικευμένη μορφή θεωρήματος Pólya

- Δεδομένα: σύνολα D, R, συναρτήσεις $f : D \to R$, σύνολο μεταθέσεων G για τα στοιχεία του D, σύνολο μεταθέσεων H για τα στοιχεία του R, βάρη στοιχείων του R.
- Ζητούμενο: το συνολικό βάρος των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων f.
- Διατύπωση: Ο κατάλογος των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού D και σύνολο τιμών R είναι $\frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{\pi \in G; \tau \in H} \psi[(\pi,\tau)']$, όπου $\psi[(\pi,\tau)']$ είναι το πλήθος των συναρτήσεων για τις οποίες ισχύει $\tau f(d) = f[\pi(d)]$ για κάθε στοιχείο $d \in D$
- Εφαρμογή: Το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας συναρτήσεων από το D στο R είναι η τιμή της έκφρασης $P_G((\frac{\partial}{\partial z_1})^{b_1}, (\frac{\partial}{\partial z_2})^{b_2}, (\frac{\partial}{\partial z_3})^{b_3}, \ldots) \times$ $P_H[e^{c_1(z_1+z_2+z_3+\ldots)}, e^{2c_2(z_2+z_4+z_6+\ldots)}, e^{3c_3(z_3+z_6+z_9+\ldots)}, \ldots]$ για $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = 0$, με b_i κύκλους μεγέθους i στο G και c_i κύκλους μεγέθους i στο H.

Έχουμε μία σκακιέρα διαστάσεων 2×2 και 2 διαθέσιμα χρώματα x, y. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί σχηματισμοί χρωματικών αντιθέσεων;

- Έστω $D = \{a, b, c, d\}$ τα 4 κουτάκια της σκακιέρας και $R = \{x, y\}$ τα 2 διαθέσιμα χρώματα.
- Έστω $G = \{\begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ bcda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ cdab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ dabc \end{pmatrix}\}$ το σύνολο μεταθέσεων που αντιστοιχεί σε περιστροφές της σκακιέρας και $H = \{\begin{pmatrix} xy \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ yx \end{pmatrix}\}$ στο σύνολο μεταθέσεων που αντιστοιχεί σε εναλλαγές των χρωμάτων x, y.
- Το σύνολο G περιέχει 1 μετάθεση με 4 κύκλους μεγέθους 1 (z_1^4), 2 μεταθέσεις με 1 κύκλο μεγέθους 4 ($2z_4^1$), και 1 μετάθεση με 2 κύκλοι μεγέθους 2 (z_2^2).
- Το σύνολο H περιέχει 1 μετάθεση με 2 κύκλους μεγέθους 1 (z_1^2), 1 μετάθεση με 1 κύκλο μεγέθους 2 (z_2^1).

Έχουμε μία σκακιέρα διαστάσεων 2×2 και 2 διαθέσιμα χρώματα x, y. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί σχηματισμοί χρωματικών αντιθέσεων;

G: $z_1^4 + 2z_4^1 + z_2^2$
H: $z_1^2 + z_2^1$

- Εφαρμόζοντας τη γενικευμένη μορφή του θεωρήματος Pólya έχουμε ότι οι ζητούμενοι σχηματισμοί είναι:
$\frac{1}{4}\frac{1}{2}((\frac{\partial}{\partial z_1})^4 + (\frac{\partial}{\partial z_2})^2 + 2(\frac{\partial}{\partial z_4})^1) \times [e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + e^{2\cdot 1(z_2+z_4)}]|_{z_1=z_2=z_3=z_4=0} =$
$\frac{1}{8}(\frac{\partial^4}{\partial z_1^4}e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + \frac{\partial^4}{\partial z_1^4}e^{2(z_2+z_4)} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}e^{2(z_2+z_4)} + 2\cdot\frac{\partial}{\partial z_4}e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + 2\cdot\frac{\partial}{\partial z_4}e^{2(z_2+z_4)}) =$
$\frac{1}{8}(2^4 + 2^2 + 2^2 + 2\cdot 2^1 + 2\cdot 2^1) = 4$

Με πόσους τρόπους μπορώ να μοιράσω 5 βιβλία, 2 από τα οποία είναι ίδια, σε 4 παιδιά, μεταξύ των οποίων υπάρχει ένα ζευγάρι διδύμων;

- $D = \{a, b, c, d, e\}$: σύνολο των 5 βιβλίων, όπου τα a, b είναι ίδια.
  - Το σύνολο G των μεταθέσεων στο σύνολο D έχει 2 μεταθέσεις: $\left\{ \begin{pmatrix} abcde \\ abcde \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcde \\ bacde \end{pmatrix} \right\}$
  - Στο σύνολο G υπάρχει 1 μετάθεση με 5 κύκλους μεγέθους 1 ο καθένας (z_1^5) και 1 μετάθεση με 1 κύκλο μεγέθους 2 και 3 κύκλους μεγέθους 1 ο καθένας $(z_2^1 z_1^3)$
- $R = \{u, v, x, y\}$: σύνολο των 4 παιδιών, όπου τα u, v είναι τα δίδυμα.
  - Το σύνολο H των μεταθέσεων στο σύνολο R έχει 2 μεταθέσεις: $\left\{ \begin{pmatrix} uvxy \\ uvxy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} uvxy \\ vuxy \end{pmatrix} \right\}$
  - Στο σύνολο H υπάρχει 1 μετάθεση με 4 κύκλους μεγέθους 1 ο καθένας (z_1^4) και 1 μετάθεση με 1 κύκλο μεγέθους 2 και 2 κύκλους μεγέθους 1 ο καθένας $(z_2^1 z_1^2)$

Με πόσους τρόπους μπορώ να μοιράσω 5 βιβλία, 2 από τα οποία είναι ίδια, σε 4 παιδιά, μεταξύ των οποίων υπάρχει ένα ζευγάρι διδύμων;

G: $z_1^5 + z_2^1 z_1^3$
H: $z_1^4 + z_2^1 z_1^2$

- Εφαρμόζοντας τη γενικευμένη μορφή του θεωρήματος Pólya έχουμε ότι οι ζητούμενοι σχηματισμοί είναι:
  $\frac{1}{2}\frac{1}{2}((\frac{\partial}{\partial z_1})^5 + (\frac{\partial}{\partial z_1})^3 \frac{\partial}{\partial z_2}) \times [e^{4(z_1+z_2)} + e^{2(z_1+z_2)} e^{2z_2}]|_{z_1=z_2=0} =$
  $\frac{1}{4}(\frac{\partial^5}{\partial z_1^5} + \frac{\partial^3}{\partial z_1^3}\frac{\partial}{\partial z_2}) \times [e^{4(z_1+z_2)} + e^{2(z_1+z_2)} e^{2z_2}]|_{z_1=z_2=0} =$
  $\frac{1}{4}(\frac{\partial^5}{\partial z_1^5} e^{4(z_1+z_2)} + \frac{\partial^5}{\partial z_1^5} e^{2(z_1+z_2)} e^{2z_2} + \frac{\partial^3}{\partial z_1^3}\frac{\partial}{\partial z_2} e^{4(z_1+z_2)} +$
  $\frac{\partial^3}{\partial z_1^3}\frac{\partial}{\partial z_2} e^{2(z_1+z_2)} e^{2z_2}) = \frac{1}{4}(4^5 + 2^4 + 4^3 \cdot 4^1 + 2^3 2^1 2^1) =$
  $\frac{1}{4}(4^5 + 2^4 + 4^3 \cdot 4 + 2^3 \cdot 4) = 336$

Με πόσους τρόπους μπορώ να μοιράσω 3 ίδια αντικείμενα σε 2 διαφορετικά κουτιά;

- $D = \{a, b, c\}$: σύνολο των 3 αντικειμένων, όπου όλα είναι ίδια.
  - Το σύνολο G των μεταθέσεων στο σύνολο D έχει 4 μεταθέσεις: $\{\begin{pmatrix} abc \\ abc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ bca \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ cab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ bac \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ cba \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ acb \end{pmatrix}\}$
  - Στο σύνολο G υπάρχει 1 μετάθεση με 3 κύκλους μεγέθους 1 ο καθένας (z_1^3), 2 μεταθέσεις με 1 κύκλο μεγέθους 3 ($2z_3^1$) και 3 μεταθέσεις με 1 κύκλο μεγέθους 2 και 1 κύκλο μεγέθους 1 ($3z_2^1 z_1^1$)
- $R = \{x, y\}$: σύνολο των 2 κουτιών.
  - Το σύνολο H των μεταθέσεων στο σύνολο R έχει 2 μεταθέσεις: $\{\begin{pmatrix} xy \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ yx \end{pmatrix}\}$
  - Στο σύνολο H υπάρχει 1 μετάθεση με 2 κύκλους μεγέθους 1 ο καθένας (z_1^2) και 1 μετάθεση με 1 κύκλο μεγέθους 2 (z_2^1)

Με πόσους τρόπους μπορώ να μοιράσω 3 ίδια αντικείμενα σε 2 διαφορετικά κουτιά;

G: $z_1^3 + 2z_3^1 + 3z_2^1 z_1^1$
H: $z_1^2 + z_2^1$

- Εφαρμόζοντας τη γενικευμένη μορφή του θεωρήματος Pólya έχουμε ότι οι ζητούμενοι σχηματισμοί είναι:
$\frac{1}{6}\frac{1}{2}((\frac{\partial}{\partial z_1})^3 + 2\frac{\partial}{\partial z_3} + 3\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}) \times [e^{2(z_1+z_2+z_3)} + e^{2z_2}]|_{z_1=z_2=0} =$
$\frac{1}{12}(\frac{\partial^3}{\partial z_1^3} + 2\frac{\partial}{\partial z_3} + 3\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}) \times [e^{2(z_1+z_2+z_3)} + e^{2z_2}]|_{z_1=z_2=0} =$
$\frac{1}{12}(\frac{\partial^3}{\partial z_1^3})e^{2(z_1+z_2+z_3)} + \frac{\partial^3}{\partial z_1^3}e^{2z_2} + 2\frac{\partial}{\partial z_3}e^{2(z_1+z_2+z_3)} + 2\frac{\partial}{\partial z_3}e^{2z_2} +$
$3\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}e^{2(z_1+z_2+z_3)} + 3\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}e^{2z_2} =$
$\frac{1}{12}(2^3 + 0 + 2\cdot 2^1 + 0 + 3\cdot 2^1\cdot 2^1 + 0) = \frac{1}{12}(2^3 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2\cdot 2) = 2$

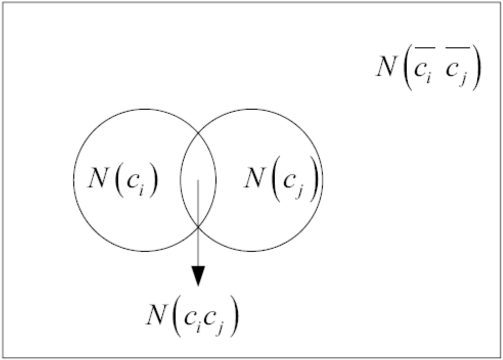
Η ύλη συνοπτικά...

- Στοιχειώδης συνδυαστική
- Γεννήτριες συναρτήσεις
- Εγκλεισμός - Αποκλεισμός
- Θεωρία Polyá

Εγκλεισμός - Αποκλεισμός

- Συνολο-θεωρητική μέθοδος μέτρησης
- Έστω S σύνολο με πληθικό αριθμό N, $|S| = N$
- $c_1, c_2, c_3, ...c_t$: συλλογή από συνθήκες που ικανοποιούνται από μερικά ή από όλα τα στοιχεία του S
- Κάποια στοιχεία στοιχεία του S μπορεί να ικανοποιούν παραπάνω από μία συνθήκες και άλλα καμία
  - $N(c_i), 1 \leq i \leq t$: πλήθος στοιχείων του S που ικανοποιούν τη συνθήκη c_i
  - $N(\overline{c_i}), 1 \leq i \leq t$: πλήθος στοιχείων του S που δεν ικανοποιούν τη συνθήκη c_i
  - $N(c_i) + N(\overline{c_i}) = N = |S|$
  - $N(c_i c_j), i, j \in \{1, 2, ..., t\}, i \neq j$: πλήθος στοιχείων του S που ικανοποιούν και τις δύο συνθήκες c_i, c_j
  - $N(\overline{c_i}\ \overline{c_j}), i, j \in \{1, 2, ..., t\}, i \neq j$: πλήθος στοιχείων του S που δεν ικανοποιούν καμία από τις δύο συνθήκες c_i, c_j
  - $N(\overline{c_i}\ \overline{c_j}) = N - N(c_i) - N(c_j) + N(c_i c_j)$

Εγκλεισμός - Αποκλεισμός



Σε μια τάξη υπάρχουν 100 άτομα που παρακολουθούν ένα μάθημα. Από αυτά, 30 άτομα έχουν το μάθημα σαν ''επιλογή''. Πόσα άτομα έχουν το μάθημα σαν ''υποχρεωτικό'';

- c_1: έχω το μάθημα σαν επιλογή
- $N(c_1) = 30$: 30 μαθητές έχουν το μάθημα σαν επιλογή
- $N(\overline{c_1}) = |S| - N(c_1) = 100 - 30 = 70$: 70 μαθητές έχουν το μάθημα σαν υποχρεωτικό

Σε μια ομάδα υπάρχουν 100 άτομα από τα οποία 50 μιλάνε αγγλικά, 40 γαλλικά και 20 μιλάνε και τις 2 γλώσσες. Πόσα άτομα δε μιλάνε ούτε αγγλικά ούτε γαλλικά;

- $|S| = N = 100$
- c_1: μιλάω αγγλικά, $N(c_1) = 50$
- c_2: μιλάω γαλλικά, $N(c_2) = 40$
- $c_1 c_2$: μιλάω αγγλικά και γαλλικά, $N(c_1 c_2) = 20$
- $\overline{c_1}\ \overline{c_2}$: δε μιλάω ούτε αγγλικά ούτε γαλλικά, $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1 c_2) = 100 - 50 - 40 + 20 = 30$

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (Principle of Inclusion and Exclusion)

- Έστω S σύνολο με πληθικό αριθμό N, $|S| = N$
- $c_1, c_2, c_3, ...c_t$: συλλογή από συνθήκες που ικανοποιούνται από μερικά ή από όλα τα στοιχεία του S
- Το πλήθος των στοιχείων του S που δεν ικανοποιούν καμία από τις συνθήκες είναι: $\overline{N} = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} ...\ \overline{c_t}) =$
$N - N(c_1) - N(c_2) - ... - N(c_t) + N(c_1 c_2) + N(c_1 c_3) + ... +$
$N(c_1 c_t) + N(c_2 c_3) + ... N(c_{t-1} c_t)$
$-N(c_1 c_2 c_3) - N(c_1 c_2 c_4) - ... - N(c_1 c_2 c_t) - N(c_1 c_3 c_4) - ... -$
$N(c_1 c_3 c_t) - N(c_{t-2} c_{t-1} c_t) + ... + (-1)^t N(c_1 c_2 c_3 ... c_t) =$
$N - \sum_{1 \leq i \leq t} N(c_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq t} N(c_i c_j) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq t} N(c_i c_j c_k) +$
$... + (-1)^t N(c_1 c_2 c_3 ... c_t)$

Συμπέρασμα: το πλήθος των στοιχείων του S που ικανοποιούν τουλάχιστον μία από τις συνθήκες είναι $N - \overline{N}$

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού: Απόδειξη

$$\overline{N} = N - \sum_{1 \le i \le t} N(c_i) + \sum_{1 \le i < j \le t} N(c_i c_j) - \sum_{1 \le i < j < k \le t} N(c_i c_j c_k) + \ldots + (-1)^t N(c_1 c_2 c_3 \ldots c_t)$$

- Προφανώς, γίνεται με επαγωγή στο t
- Αλλά γίνεται και με συνδυαστικά επιχειρήματα:
  - Αν το $x \in S$ δεν ικανοποιεί καμία συνθήκη μετριέται μια φορά στο $\overline{N}$ και μία φορά στο N και δε μετριέται σε κανέναν άλλον όρο.
  - Αν το $x \in S$ ικανοποιεί ακριβώς r από τις συνθήκες $(1 \le r \le t)$ δε μετριέται στο $\overline{N}$ αλλά μετριέται στο δεξί μέρος της σχέσης. Πόσες φορές;

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού: Απόδειξη

$$\overline{N} = N - \sum_{1 \le i \le t} N(c_i) + \sum_{1 \le i < j \le t} N(c_i c_j) - \sum_{1 \le i < j < k \le t} N(c_i c_j c_k) +$$
$$\ldots + (-1)^t N(c_1 \ldots c_t)$$

1. 1 φορά στο N
2. r φορές στο $\sum_{1 \le i \le t} (c_i)$, μία για κάθε μία από τις r συνθήκες που ικανοποιεί
3. $\binom{r}{2}$ φορές στο $\sum_{1 \le i < j \le t} (c_i c_j)$, μία για κάθε ζεύγος συνθηκών που επιλέγεται από τις r συνθήκες που ικανοποιεί
4. $\binom{r}{3}$ φορές στο $\sum_{1 \le i < j < k \le t} (c_i c_j c_k)$, μία για κάθε τριάδα συνθηκών που επιλέγεται από τις r συνθήκες που ικανοποιεί

   ...

$r+1$. $\binom{r}{r} = 1$ φορά στο $\sum (c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_r})$

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού: Απόδειξη

$$\overline{N} = N - \sum_{1 \le i \le t} N(c_i) + \sum_{1 \le i < j \le t} N(c_i c_j) - \sum_{1 \le i < j < k \le t} N(c_i c_j c_k) + \ldots + (-1)^t N(c_1 \ldots c_t)$$

- Άρα στο δεξιό μέρος της σχέσης το x μετριέται: $1 - r + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \ldots + (-1)^r \binom{r}{r} = [1 + (-1)]^r = 0^r = 0$ φορές
- Αλλά τα δύο μέρη της σχέσης μετρούν τα ίδια στοιχεία του S και επομένως η σχέση ικανοποιείται.

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού: Απόδειξη με επαγωγή

Παρατηρούμε τα εξής:

- $N(\overline{c_i}) = N - N(c_i)$
- $N(\overline{c_i} c_j) = N(c_j) - N(c_i c_j)$
- $N(\overline{c_i}\ \overline{c_j}) = N - N(c_i \overline{c_j}) - N(\overline{c_i} c_j) - N(c_i c_j) =$
  $N - [N(c_i \overline{c_j}) + N(c_i c_j)] - [N(\overline{c_i} c_j) + N(c_i c_j)] + N(c_i c_j) =$
  $N - N(c_i) - N(c_j) + N(c_i c_j)$
- Γενικεύοντας θα αποδείξουμε ότι: $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2} ... \overline{c_r}) =$
  $N - N(c_1) - N(c_2) - ... - N(c_r)$
  $+N(c_1 c_2) + N(c_1 c_3) + ... + N(c_{r-1} c_r)$
  $-N(c_1 c_2 c_3) - N(c_1 c_2 c_4) - ... - N(c_{r-2} c_{r-1} c_r)$
  $+...$
  $+(-1)^r N(c_1 c_2 c_3 ... c_r) =$
  $N - \sum_i N(c_i) + \sum_{i,j;i \neq j} N(c_i c_j) - \sum_{i,j,k;i \neq j \neq k} N(c_i c_j c_k) + ... +$
  $(-1)^r N(c_1 c_2 ... c_r)$

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού: Απόδειξη με επαγωγή

- Βασικό βήμα: Ισχύει για 1 ιδιότητα: $N(\overline{c_1}) = N - N(c_1)$
- Επαγωγική Υπόθεση: Έστω ότι ισχύει για r ιδιότητες:
  $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}...\overline{c_{r-1}}) =$
  $N - N(c_1) - N(c_2) - ... - N(c_{r-1})$
  $+N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + ... + N(c_{r-2}c_{r-1})$
  $-N(c_1c_2c_3) - N(c_1c_2c_4) - ... - N(c_{r-3}c_{r-2}c_{r-1})$
  $+... + (-1)^{r-1}N(c_1c_2c_3...c_{r-1})$
- Επαγωγικό βήμα: από N στοιχεία που μπορούν να πληρούν μέχρι r ιδιότητες, ασχολούμαστε με εκείνα που πληρούν την ιδιότητα r και μπορούν φυσικά να πληρούν κάθε μία από τις υπόλοιπες $r-1$ ιδιότητες. Ισχύει από την επαγωγική υπόθεση: $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}...\overline{c_{r-1}}c_r) =$
  $N(c_r) - N(c_1c_r) - N(c_2c_r) - ... - N(c_{r-1}c_r)$
  $+N(c_1c_2c_r) + N(c_1c_3c_r) + ... + N(c_{r-2}c_{r-1}c_r)$
  $-N(c_1c_2c_3c_r) - N(c_1c_2c_4c_r) - ... - N(c_{r-3}c_{r-2}c_{r-1}c_r)$
  $+... + (-1)^{r-1}N(c_1c_2c_3...c_{r-1}c_r)$

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού: Απόδειξη με επαγωγή

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο προηγούμενες ισότητες έχουμε:

- $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}...\overline{c_{r-1}}) - N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}...\overline{c_{r-1}}c_r) =$
  $N - N(c_1) - N(c_2) - ... - N(c_{r-1}) - N(c_r)$
  $+N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + ... + N(c_1c_r) + ... + N(c_{r-1}c_r)$
  $-... + (-1)^r N(c_1c_2c_3...c_{r-1}c_r)$
- Όμως: $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}...\overline{c_{r-1}}) - N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}...\overline{c_{r-1}}c_r) = N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}...\overline{c_{r-1}}\,\overline{c_r})$

Πόσες τοποθετήσεις των ψηφίων 0,1,2,...,9 υπάρχουν στις οποίες το πρώτο ψηφίο να είναι μεγαλύτερο από το 1 και το τελευταίο ψηφίο να είναι μικρότερο από το 8;

- Έστω S το σύνολο όλων των πιθανών μεταθέσεων των στοιχείων 0,1,2,...,9. $|S| = N = 10!$
- c_1: το πρώτο ψηφίο μιας μετάθεσης είναι μικρότερο ή ίσο με 1, $N(c_1) = 2 \cdot 9!$
- c_2: το τελευταίο ψηφίο μιας μετάθεσης είναι μεγαλύτερο ή ίσο με 8, $N(c_2) = 2 \cdot 9!$
- Αυτό που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2})$.
- $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1 c_2) = 10! - 2 \cdot 9! - 2 \cdot 9! + 4 \cdot 8! = 2.338.560$

Πόσοι ακέραιοι μεταξύ 1 και 70 είναι σχετικά πρώτοι με το 70; (Σχετικά πρώτοι είναι δύο αριθμοί με μόνο κοινό διαιρέτη τη μονάδα.)

Είναι $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$

- Έστω $S = \{1, 2, ..., 70\}$. $|S| = N = 70$
- c_1: ο αριθμός διαιρείται με 2, $N(c_1) = 35$
- c_2: ο αριθμός διαιρείται με 5, $N(c_2) = 14$
- c_3: ο αριθμός διαιρείται με 7, $N(c_3) = 10$
- Αυτό που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3})$.
- $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1 c_2) + N(c_1 c_3) + N(c_2 c_3) - N(c_1 c_2 c_3) = 70 - 35 - 14 - 10 + 7 + 5 + 2 - 1 = 24$

Πόσες λέξεις των n συμβόλων από το αλφάβητο $\{0, 1, 2\}$ υπάρχουν με ένα τουλάχιστον 0, ένα τουλάχιστον 1 και ένα τουλάχιστον 2 ;

- Έστω S το σύνολο όλων των πιθανών μεταθέσεων των στοιχείων 0,1,2 σε n θέσεις. $|S| = N = 3^n$
- c_1: η λέξη δεν περιέχει κανένα 0, $N(c_1) = 2^n$
- c_2: η λέξη δεν περιέχει κανένα 1, $N(c_2) = 2^n$
- c_3: η λέξη δεν περιέχει κανένα 2, $N(c_3) = 2^n$
- Αυτό που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3})$.
- $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1 c_2) + N(c_1 c_3) + N(c_2 c_3) - N(c_1 c_2 c_3) = 3^n - 2^n - 2^n - 2^n + 1 + 1 + 1 - 0 = 3(3^{n-1} - 2^n + 1)$

Σε μια ομάδα υπάρχουν 1000 άτομα από τα οποία 400 μιλάνε αγγλικά, 300 γαλλικά και 200 ισπανικά. Αν υπάρχουν 200 άτομα που μιλάνε οποιεσδήποτε 2 γλώσσες και 100 άτομα που μιλάνε και τις 3 γλώσσες, πόσα άτομα δε μιλάνε ούτε αγγλικά ούτε γαλλικά ούτε ισπανικά;

- Έστω S το σύνολο όλων των ατόμων. $|S| = N = 1000$
- c_1: μιλάω αγγλικά, $N(c_1) = 400$
- c_2: μιλάω γαλλικά, $N(c_2) = 300$
- c_3: μιλάω ισπανικά, $N(c_3) = 200$
- Αυτό που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3})$.
- $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1 c_2) + N(c_1 c_3) + N(c_2 c_3) - N(c_1 c_2 c_3) = 1000 - 400 - 300 - 200 + 200 - 100 = 200$

Με πόσους τρόπους μπορούν τα 26 γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου να αντιμετατεθούν έτσι ώστε να μην εμφανιστεί καμία από τις συμβολοσειρές: car, dog, pun, byte;

- Έστω S το σύνολο όλων αντιμεταθέσεων των 26 γραμμάτων. $|S| = N = 26!$
- c_1: η λέξη περιέχει το car, $N(c_1) = 24!$ (θεωρούμε το car σαν ένα γράμμα, οπότε 26-3+1=24 υποψήφια για αντιμετάθεση)
- c_2: η λέξη περιέχει το dog, $N(c_2) = 24!$
- c_3: η λέξη περιέχει το pun, $N(c_3) = 24!$
- c_4: η λέξη περιέχει το byte, $N(c_4) = 23!$
- $N(c_1c_2) = N(c_1c_3) = N(c_2c_3) = 22!$: πλήθος λέξεων που περιέχουν δύο από τα car,dog,pun
- $N(c_1c_4) = N(c_2c_4) = N(c_3c_4) = 21!$: πλήθος λέξεων που περιέχουν ένα από τα car,dog,pun και το byte
- $N(c_1c_2c_3) = 20!$: πλήθος λέξεων που περιέχουν car,dog,pun

Με πόσους τρόπους μπορούν τα 26 γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου να αντιμετατεθούν έτσι ώστε να μην εμφανιστεί καμία από τις συμβολοσειρές: car, dog, pun, byte;

- $N(c_1 c_2 c_4) = N(c_1 c_3 c_4) = N(c_2 c_3 c_4) = 19!$: πλήθος λέξεων που περιέχουν δύο από τα car,dog,pun και το byte
- $N(c_1 c_2 c_3 c_4) = 17!$: πλήθος λέξεων που περιέχουν car,dog,pun,byte
- Αυτό που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4})$.
- $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) - N(c_4) + N(c_1 c_2) + N(c_1 c_3) + N(c_1 c_4) + N(c_2 c_3) + N(c_2 c_4) + N(c_3 c_4) - N(c_1 c_2 c_3) - N(c_1 c_2 c_4) - N(c_2 c_3 c_4) + N(c_1 c_2 c_3 c_4) = 26! - 24! - 24! - 24! - 23! + 3 \cdot 22! + 3 \cdot 21! - 20! - 3 \cdot 19! + 17!$

Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε r αντικείμενα σε 5 διαφορετικά κουτιά έτσι ώστε ένα τουλάχιστον κουτί να είναι άδειο;

- Ένα τουλάχιστον κουτί άδειο = 1 ή 2 ή 3 ή 4 ή 5 κουτιά άδεια
- 1 κουτί άδειο: πλήθος τρόπων $= \binom{5}{1}4^r$ (διαλέγω 1 από τα 5 κουτιά να είναι το άδειο και μοιράζω τα r αντικείμενα στα υπόλοιπα 4 κουτιά)
- 2 κουτιά άδεια: πλήθος τρόπων $= \binom{5}{2}3^r$
- 3 κουτιά άδεια: πλήθος τρόπων $= \binom{5}{3}2^r$
- 4 κουτιά άδεια: πλήθος τρόπων $= \binom{5}{4}1^r = \binom{5}{4}$
- 5 κουτιά άδεια: πλήθος τρόπων $= \binom{5}{5}0^r = 0$
- Άρα συνολικά: $\binom{5}{2}3^r + \binom{5}{3}2^r + \binom{5}{4}$ τρόποι

Με πόσους τρόπους μπορώ να τοποθετήσω r διαφορετικά αντικείμενα σε n διαφορετικά κουτιά έτσι ώστε κανένα κουτί να μη μείνει άδειο;

- Καλούμε $c_1, c_2, ...c_n$ τις συνθήκες το 1ο, το 2ο, ... το $n-$ό (αντίστοιχα) κουτί να μένει άδειο.
- Ζητάμε το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}...\overline{c_n})$
- $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}...\overline{c_n}) = n^r - \binom{n}{1}(n-1)^r + \binom{n}{2}(n-2)^r - ... + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^r(-1)^n\binom{n}{n}0^r = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-1)^r$

Πόσοι θετικοί ακέραιοι $n, 1 \leq n \leq 100$ δε διαιρούνται από τους 2,3 και 5;

- Έστω $S = \{1, 2, ..., 100\}$. $|S| = N = 100$
- c_1: ο αριθμός διαιρείται με 2, $N(c_1) = 50$
- c_2: ο αριθμός διαιρείται με 3, $N(c_2) = 33$
- c_3: ο αριθμός διαιρείται με 5, $N(c_3) = 20$
- Αυτό που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3})$.
- $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3) - N(c_1c_2c_3) = 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 26$

Πόσα διαφορετικά προγράμματα μπορώ να φτιάξω για ένα διάστημα 7 ημερών ώστε κάθε μέρα να διαβάζω μόνο ένα από 4 μαθήματα;

Ουσιαστικά, αναζητούμε λέξεις με 7 γράμματα που μπορούμε να φτιάξουμε από το αλφάβητο $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ που περιέχει συντομογραφίες των μαθημάτων με τον περιορισμό ότι σε κάθε λέξη θα χρησιμοποιούμε κάθε γράμμα του αλφαβήτου τουλάχιστον μία φορά.

- Έστω S το σύνολο όλων των λέξεων με 7 γράμματα από το παράπάνω αλφάβητο. $|S| = N = 4^7$
- c_1: η λέξη δεν περιέχει το γράμμα c_1, $N(c_1) = 3^7$
- c_2: η λέξη δεν περιέχει το γράμμα c_2, $N(c_2) = 3^7$
- c_3: η λέξη δεν περιέχει το γράμμα c_3, $N(c_3) = 3^7$
- c_4: η λέξη δεν περιέχει το γράμμα c_4, $N(c_4) = 3^7$
- $N(c_1c_2) = N(c_1c_3) = N(c_2c_3) = N(c_1c_4) = N(c_2c_4) = N(c_3c_4) = 2^7$: πλήθος λέξεων που δεν περιέχουν 2 από τα τα 4 γράμματα

Πόσα διαφορετικά προγράμματα μπορώ να φτιάξω για ένα διάστημα 7 ημερών ώστε κάθε μέρα να διαβάζω μόνο ένα από 4 μαθήματα;

- $N(c_1c_2c_3) = N(c_1c_2c_4) = N(c_1c_3c_4) = N(c_2c_3c_4) = 1$: πλήθος λέξεων που δεν περιέχουν 3 από τα 4 γράμματα
- $N(c_1c_2c_3c_4) = 0$: πλήθος λέξεων που δεν περιέχουν κανένα από τα 4 γράμματα
- Αυτό που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4})$.
- $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) - N(c_4) + N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_1c_4) + N(c_2c_3) + N(c_2c_4) + N(c_3c_4) - N(c_1c_2c_3) - N(c_1c_2c_4) - N(c_2c_3c_4) + N(c_1c_2c_3c_4) = 4^7 - 4 \cdot 3^7 + 6 \cdot 2^7 - 4 \cdot 1 + 0 = 8.400$

Πόσες μη αρνητικές λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, με $x_i \leq 7, 1 \leq i \leq 4$;

- Έστω S το σύνολο όλων των λύσεων της εξίσωσης. $|S| = N = \binom{18+4-1}{18} = \binom{21}{18}$
  - Γιατί; Ισούται με τους τρόπους που μπορώ να τοποθετήσω 18 ίδια αντικείμενα (18 μονάδες) σε 4 διαφορετικές υποδοχές (τις μεταβλητές x_1, x_2, x_3, x_4)
- c_1: μια λύση (x_1, x_2, x_3, x_4) της εξίσωσης ικανοποιεί τη συνθήκη $x_1 > 7$
- c_2: μια λύση (x_1, x_2, x_3, x_4) της εξίσωσης ικανοποιεί τη συνθήκη $x_2 > 7$
- c_3: μια λύση (x_1, x_2, x_3, x_4) της εξίσωσης ικανοποιεί τη συνθήκη $x_3 > 7$
- c_4: μια λύση (x_1, x_2, x_3, x_4) της εξίσωσης ικανοποιεί τη συνθήκη $x_4 > 7$
- Αυτό που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4})$.

Πόσες μη αρνητικές λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, με $x_i \leq 7, 1 \leq i \leq 4$;

- Θέλω να φτιάξω μια εξίσωση χωρίς περιορισμούς.
- Αν ισχύει η c_1 τότε ξέρω ότι $x_1 > 7$ ή ισοδύναμα $x_1 \leq 8$, δηλ. η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η x_1 είναι 8.
- Λύνω την εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ και από κάθε λύση που θα υπολογίσω παίρνω μία λύση για την αρχική εξίσωση προσθέτοντας στην τιμή του x_1 το 8.
- Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ είναι $\binom{10+4-1}{10} = \binom{13}{10}$
- Επομένως, τόσες είναι και οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης που ικανοποιούν τη συνθήκη c_1
- Τα ίδια ισχύουν και για τις συνθήκες c_2, c_3, c_4

Πόσες μη αρνητικές λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, με $x_i \leq 7, 1 \leq i \leq 4$;

- Για να υπολογίσω τα $N(c_1c_2) = N(c_1c_3) = N(c_1c_4) = N(c_2c_3) = N(c_2c_4) = N(c_3c_4)$ ακολουθώ ανάλογη διαδικασία
- Θέλω να φτιάξω μια εξίσωση χωρίς περιορισμούς.
- Αν ισχύει η c_1c_2 τότε ξέρω ότι $x_1 > 7, x_2 > 7$ ή ισοδύναμα $x_1 \leq 8, x_2 \leq 8$, δηλ. η μικρότερη τιμή που μπορούν να πάρουν οι x_1, x_2 είναι 8.
- Λύνω την εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ και από κάθε λύση που θα υπολογίσω παίρνω μία λύση για την αρχική εξίσωση προσθέτοντας στην τιμή των x_1 και x_2 το 8.
- Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ είναι $\binom{2+4-1}{2} = \binom{5}{2}$
- Επομένως, τόσες είναι και οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης που ικανοποιούν το ζεύγος συνθηκών c_1c_2
- Τα ίδια ισχύουν και για τα υπόλοιπα ζεύγη συνθηκών.

Πόσες μη αρνητικές λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, με $x_i \leq 7, 1 \leq i \leq 4$;

- Είναι $N(c_1c_2c_3) = N(c_1c_2c_4) = N(c_2c_3c_4) = 0$ αφού αν 3 από τις μεταβλητές έχουν τιμή τουλάχιστον 8 η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Όμοια, $N(c_1c_2c_3c_4) = 0$ αφού αν και οι 4 μεταβλητές έχουν τιμή τουλάχιστον 8 η εξίσωση είναι πάλι αδύνατη.
- Συνολικά:
  $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) - N(c_4) + N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_1c_4) + N(c_2c_3) + N(c_2c_4) + N(c_3c_4) - N(c_1c_2c_3) - N(c_1c_2c_4) - N(c_2c_3c_4) + N(c_1c_2c_3c_4) = \binom{21}{18} - \binom{4}{1}\binom{13}{10} + \binom{4}{2}\binom{5}{2} - 0 + 0 = 246$

Ποιο είναι το πλήθος των θετικών ακέραιων x που είναι τέτοιοι ώστε $x \leq 9999999$ και το άθροισμα των ψηφίων τους ισούται με 31;

- Έστω $x_1, x_2, ..., x_7$ τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού x που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος.
- Ο ζητούμενος αριθμός των ακεραίων ισούται με το πλήθος ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + ... + x_7 = 31$, με $0 \leq x_i \leq 9$ για $1 \leq i \leq 7$.
- Έστω S το σύνολο όλων των λύσεων της εξίσωσης. $|S| = N = \binom{31+7-1}{31} = \binom{37}{31}$
  - Γιατί; Ισούται με τους τρόπους που μπορώ να τοποθετήσω 31 ίδια αντικείμενα (31 μονάδες) σε 7 διαφορετικές υποδοχές (τις μεταβλητές $x_1, x_2, ..., x_7$)
- c_i: μια λύση $(x_1, x_2, ..., x_7)$ της εξίσωσης ικανοποιεί τη συνθήκη $x_i > 9 \Leftrightarrow x_i \geq 10$, για $1 \leq i \leq 7$. Προχωρώντας όπως και πριν:

Ποιο είναι το πλήθος των θετικών ακέραιων x που είναι τέτοιοι ώστε $x \leq 9999999$ και το άθροισμα των ψηφίων τους ισούται με 31;

- $N(c_i) = \binom{21+7-1}{21} = \binom{27}{21}$
- $N(c_i c_j) = \binom{11+7-1}{11} = \binom{17}{11}$
- $N(c_i c_j c_k) = \binom{1+7-1}{1} = \binom{7}{1} = 7$
- $N(c_i c_j c_k c_l) = N(c_i c_j c_k c_l c_m) = ... = N(c_i c_j c_k c_l c_m ... c_r) = 0$
- Οπότε: $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5}\ \overline{c_6}\ \overline{c_7}) =$ $\binom{37}{31} - \binom{7}{1}\binom{27}{21} + \binom{7}{2}\binom{17}{11} - \binom{7}{3}7 = 512.365$

Πόσες διαφορετικές ακέραιες λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$, $0 \leq x_i \leq 8$;

Όπως και προηγουμένως:

- Το σύνολο όλων των πιθανών λύσεων είναι: $|S| = N = \binom{20+6-1}{20} = \binom{25}{20} = \frac{25!}{20!5!}$
- Καλούμε c_i την ιδιότητα: μια λύση της εξίσωσης ικανοποιεί τη συνθήκη $x_i > 8 \Leftrightarrow x_i \geq 9$. Τότε είναι:
- $N(c_i) = \binom{11+6-1}{11} = \binom{16}{11} = \frac{16!}{11!5!}$ για κάθε μία από τις $\binom{6}{1}$ ιδιότητες
- $N(c_i c_j) = \binom{2+6-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!}$ για κάθε ένα από τα $\binom{6}{2}$ ζεύγη ιδιοτήτων
- $N(c_i c_j c_k) = N(c_i c_j c_k c_l) = N(c_i c_j c_k c_l c_m) = N(c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6) = 0$
- Οπότε, συνολικά, το ζητούμενο πλήθος λύσεων είναι: $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5}\ \overline{c_6}) = \frac{25!}{20!5!} - \binom{6}{1}\frac{16!}{11!5!} + \binom{6}{2}\frac{7!}{2!5!} = 27.237$

Αν ρίξουμε 8 διαφορετικά ζάρια, ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστούν και τα 6 διαφορετικά ενδεχόμενα;

- Το σύνολο όλων των πιθανών ενδεχομένων είναι:
  $|S| = N = 6^8$
- Καλούμε c_i την ιδιότητα: να μην εμφανιστεί το ενδεχόμενο i, για $1 \leq i \leq 6$. Αναζητούμε το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5}\ \overline{c_6})$. Είναι:
- $N(c_i) = 5^8, N(c_i c_j) = 4^8, N(c_i c_j c_k) = 3^8, N(c_i c_j c_k c_l) = 2^8, N(c_i c_j c_k c_l c_m) = 1^8, N(c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6) = 0$
- Οπότε, συνολικά, το ζητούμενο πλήθος λύσεων είναι:
  $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5}\ \overline{c_6}) =$
  $6^8 - \binom{6}{1}5^8 + \binom{6}{2}4^8 - \binom{6}{3}3^8 + \binom{6}{4}2^8 - \binom{6}{5}1^8 + 0 = 191.520$

Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 9 μπάλες από ένα κουτί που περιέχει 12 μπάλες, 3 πράσινες, 3 άσπρες, 3 μπλε και 3 κόκκινες;

- Ο αριθμός των ζητούμενων τρόπων ισούται με τον αριθμό ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ με $0 \leq x_i \leq 3$ και $1 \leq i \leq 4$.
- c_i: η ιδιότητα σε κάποια λύση (x_1, x_2, x_3, x_4) της παραπάνω εξίσωσης το x_i να είναι μεγαλύτερο του 3.
- Τότε, ο ζητούμενος αριθμός λύσεων είναι: $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4})$
- Είναι: $N = \binom{9+4-1}{9} = \binom{12}{9}, N(c_i) = \binom{5+4-1}{5} = \binom{8}{5}, N(c_i c_j) = \binom{1+4-1}{1} = \binom{4}{1}, N(c_i c_j c_k) = 0, N(c_1 c_2 c_3 c_4) = 0$
- Οπότε είναι:
  $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = \binom{12}{9} - \binom{4}{1}\binom{8}{5} + \binom{4}{2}\binom{4}{1} - 0 + 0 = 20$

Πόσοι αριθμοί μεταξύ 1 και 250 δε διαιρούνται ακριβώς με κάποιον από τους 2,3,5,7;

- Καλούμε α_1 την ιδιότητα ένας αριθμός να διαιρείται ακριβώς με το 2, α_2 την ιδιότητα ένας αριθμός να διαιρείται ακριβώς με το 3, α_3 την ιδιότητα ένας αριθμός να διαιρείται ακριβώς με το 5, α_4 την ιδιότητα ένας αριθμός να διαιρείται ακριβώς με το 7.

$$N(a_1) = \left[\frac{250}{2}\right] = 125 \qquad N(a_2) = \left[\frac{250}{3}\right] = 83$$

$$N(a_3) = \left[\frac{250}{5}\right] = 50 \qquad N(a_4) = \left[\frac{250}{7}\right] = 35$$

$$N(a_1a_2) = \left[\frac{250}{2 \times 3}\right] = 41 \qquad N(a_1a_3) = \left[\frac{250}{2 \times 5}\right] = 25$$

$$N(a_1a_4) = \left[\frac{250}{2 \times 7}\right] = 17 \qquad N(a_2a_3) = \left[\frac{250}{3 \times 5}\right] = 16$$

$$N(a_2a_4) = \left[\frac{250}{3 \times 7}\right] = 11 \qquad N(a_3a_4) = \left[\frac{250}{5 \times 7}\right] = 7$$

$$N(a_1a_2a_3) = \left[\frac{250}{2 \times 3 \times 5}\right] = 8 \qquad N(a_1a_2a_4) = \left[\frac{250}{2 \times 3 \times 7}\right] = 5$$

$$N(a_1a_3a_4) = \left[\frac{250}{2 \times 5 \times 7}\right] = 3 \qquad N(a_2a_3a_4) = \left[\frac{250}{3 \times 5 \times 7}\right] = 2$$

$$N(a_1a_2a_3a_4) = \left[\frac{250}{2 \times 3 \times 5 \times 7}\right] = 1$$

Πόσοι αριθμοί μεταξύ 1 και 250 δε διαιρούνται ακριβώς με κάποιον από τους 2,3,5,7;

- Το πλήθος των αριθμών που δε διαιρούνται με κανέναν από τους 2,3,5,7 είναι:

$$N(a_1'a_2'a_3'a_4') = 250 - (125 + 83 + 50 + 35)$$
$$+ (41 + 25 + 17 + 16 + 11 + 7) - (8 + 5 + 3 + 2) + 1 = 57$$

- Ενώ, π.χ., το πλήθος των αριθμών που δε διαιρούνται με 2 και 7 αλλά διαιρούνται με 5 είναι:

$$\begin{aligned} N(a_1'a_3a_4') &= N(a_3) - N(a_1a_3) - N(a_3a_4) + N(a_1a_3a_4) \\ &= 50 - 25 - 7 + 3 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Ο γενικός τύπος

- Δίνει το πλήθος των αντικειμένων που έχουν m από r ιδιότητες, $m = 0, 1, 2, 3, ..., r$.
- s_i: πλήθος αντικειμένων που πληρούν i από τις r ιδιότητες.
- e_i: πλήθος αντικειμένων που πληρούν ακριβώς i από τις r ιδιότητες, δηλ., πληρούν i από τις r ιδιότητες και δεν πληρούν τις υπόλοιπες $r - i$.

Ο γενικός τύπος

Αναλυτικά:

- $s_0 = N$
- $s_1 = N(a_1) + N(a_2) + ... + N(a_r) = \sum_i N(a_i)$
- $s_2 = N(a_1 a_2) + N(a_1 a_3) + ... + N(a_{r-1} a_r) = \sum_{i,j: i \neq j} N(a_i a_j)$
- $s_3 = N(a_1 a_2 a_3) + N(a_1 a_2 a_4) + ... + N(a_{r-2} a_{r-1} a_r) = \sum_{i,j,k: i \neq j \neq k} N(a_i a_j a_k)$
- $\ldots$
- $s_r = N(a_1 a_2 ... a_r)$

Ο γενικός τύπος

Αναλυτικά:

- $e_0 = N(\overline{a_1}\ \overline{a_2}\ ...\overline{a_r}\ )$
- $e_1 = N(a_1\overline{a_2}\ ...\overline{a_r}) + N(\overline{a_1}\ a_2\overline{a_3}\ ...\overline{a_r}) + ... + N(\overline{a_1}\ \overline{a_2}\ ...a_r)$
- $e_2 = N(a_1 a_2\overline{a_3}...\overline{a_r} + N(a_1\overline{a_2}\ a_3...\overline{a_r}))$
- $e_3 = N(a_1 a_2 a_3...\overline{a_r}) + N(a_1 a_2\overline{a_3}a_4...\overline{a_r}) + ... +$
  $N(\overline{a_1}\ \overline{a_2}\ \overline{a_3}...a_{r-2}a_{r-1}a_r)$
- ...
- $e_r = N(a_1 a_2...a_r)$

Προφανώς, $e_0 = s_0 - s_1 + s_2 - s_3 + ... + (-1)^r s_r$

Ο γενικός τύπος

$$e_m = s_m - \binom{m+1}{1} s_{m+1} + \binom{m+2}{2} s_{m+2} - \ldots + (-1)^{r-m} \binom{r}{r-m} s_r$$

Η απόδειξη βασίζεται στα εξής:

- Αντικείμενο που έχει λιγότερες από m ιδιότητες δε συμπεριλαμβάνεται στο e_m και δε συνεισφέρει στην έκφραση στο δεξί μέρος της ισότητας.
- Αντικείμενο που έχει ακριβώς m ιδιότητες συμπεριλαμβάνεται στο e_m και συνεισφέρει 1 στην έκφραση στο δεξί μέρος της ισότητας αφού μετριέται μία φορά στο s_m και δε μετριέται στους όρους $s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots s_r$.
- Αντικείμενο που έχει $m+j$ ιδιότητες δε συμπεριλαμβάνεται στο e_m και συνεισφέρει $\binom{m+j}{m}$ στον όρο s_m, $\binom{m+j}{m+1}$ στον όρο s_{m+1}, …, $\binom{m+j}{m+j}$ στον όρο s_{m+j} που συνολικά ισούται με 0.

- Αναζητούμε την τιμή της έκφρασης:

$$\binom{m+j}{m} - \binom{m+1}{1}\binom{m+j}{m+1} + \binom{m+2}{2}\binom{m+j}{m+2} - \cdots + (-1)^j \binom{m+j}{j}\binom{m+j}{m+j}$$

- Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}\binom{m+k}{k}\binom{m+j}{m+k} &= \frac{(m+k)!}{m!k!}\frac{(m+j)!}{(m+k)!(j-k)!} \\ &= \frac{(m+j)!}{m!k!(j-k)!} \\ &= \frac{(m+j)!}{m!j!}\frac{j!}{k!(j-k)!} \\ &= \binom{m+j}{m}\binom{j}{k}\end{aligned}$$

- Οπότε:

$$\begin{aligned}&\binom{m+j}{m} - \binom{m+j}{m}\binom{j}{1} + \binom{m+j}{m}\binom{j}{2} - \cdots + (-1)^j \binom{m+j}{m}\binom{j}{j} \\ &= \binom{m+j}{m}\left[\binom{j}{0} - \binom{j}{1} + \binom{j}{2} - \cdots + (-1)^j \binom{j}{j}\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

Παράδειγμα

12 μπάλες χρωματίζονται ως εξής:

- 2 δε λαμβάνουν κανένα χρώμα.
- 2 χρωματίζονται κόκκινες, 1 μπλε και 1 άσπρη.
- 2 χρωματίζονται με κόκκινο και μπλε και 1 χρωματίζεται με κόκκινο και άσπρο.
- 3 χρωματίζονται με κόκκινο, μπλε και άσπρο.

Καλούμε a_1, a_2, a_3 την ιδιότητα: η μπάλα χρωματίζεται με το κόκκινο, μπλε, άσπρο χρώμα, αντίστοιχα. Είναι:

- $N(a_1) = 8, N(a_2) = 6, N(a_3) = 5$
- $N(a_1 a_2) = 5, N(a_1 a_3) = 4, N(a_2 a_3) = 3$
- $N(a_1 a_2 a_3) = 3$
- $s_1 = 19, s_2 = 12, s_3 = 3$
- $e_1 = 19 - \binom{2}{1} \cdot 12 + \binom{3}{2} \cdot 3 = 19 - 24 + 9 = 4$
- $e_2 = 12 - \binom{3}{1} \cdot 3 = 12 - 9 = 3$
- $e_3 = 3$

Ο γενικός τύπος για άρτιο και περιττό πλήθος ιδιοτήτων

Για δεδομένο πλήθος r ιδιοτήτων:

- e_i είναι το πλήθος των στοιχείων που έχουν i από τις r ιδιότητες και δεν έχουν τις υπόλοιπες $r - i$ (ενώ s_i είναι το πλήθος των στοιχείων που έχουν i ιδιότητες. Προφανώς, $s_i \geq e_i$).
- Η γεννήτρια συνάρτηση που μετρά το πλήθος των αντικειμένων που έχουν καμία, **μόνο** μία, **μόνο** δύο, ..., όλες τις ιδιότητες είναι η

  $$E(x) = e_0 x^0 + e_1 x^1 + e_2 x^2 + \ldots + e_r x^r = \sum_{j=0}^{r} s_j (x-1)^j$$

- Για $x = 1$: $E(1) = e_0 + e_1 + e_2 + \ldots + e_r = s_0$

$$e_m = s_m - \binom{m+1}{1} s_{m+1} + \binom{m+2}{2} s_{m+2} - \ldots + (-1)^{r-m} \binom{r}{r-m} s_r$$

$$\begin{aligned}
E(x) &= e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + \cdots + e_m x^m + \cdots + e_r x^r \\
&= [s_0 - s_1 + s_2 - \cdots + (-1)^r s_r] \\
&\quad + \left[s_1 - \binom{2}{1} s_2 + \binom{3}{2} s_3 - \cdots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} s_r \right] x \\
&\quad + \left[s_2 - \binom{3}{1} s_3 + \binom{4}{2} s_4 - \cdots + (-1)^{r-2} \binom{r}{r-2} s_r \right] x^2 \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + \left[s_m - \binom{m+1}{1} s_{m+1} + \binom{m+2}{2} s_{m+2} - \cdots \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + (-1)^{r-m} \binom{r}{r-m} s_r \right] x^m \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + s_r x^r
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= s_0 \\
&\quad + s_1[x - 1] \\
&\quad + s_2\left[x^2 - \binom{2}{1}x + 1\right] \\
&\quad + s_3\left[x^3 - \binom{3}{1}x^2 + \binom{3}{2}x - 1\right] \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + s_m\left[x^m - \binom{m}{1}x^{m-1} + \binom{m}{2}x^{m-2} + \cdots \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}x + (-1)^m\right] \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + s_r\left[x^r - \binom{r}{1}x^{r-1} + \binom{r}{2}x^{r-2} + \cdots + (-1)^r\right] \\
&= \sum_{j=0}^{r} s_j(x - 1)^j
\end{aligned}
$$

Ο γενικός τύπος για άρτιο και περιττό πλήθος ιδιοτήτων

$$E(x) = e_0 x^0 + e_1 x^1 + e_2 x^2 + \dots + e_r x^r = \sum_{j=0}^{r} s_j (x-1)^j$$

- Για $x = 1$: $E(1) = e_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_r = s_0$
- Για $x = -1$: $E(-1) = \sum_{j=0}^{r} s_j (-2)^j$
- $\frac{1}{2}[E(1) + E(-1)] = \frac{1}{2}[e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \dots + e_0 - e_1 + e_2 - e_3 + e_4 \dots] = e_0 + e_2 + e_4 + \dots = \frac{1}{2}[s_0 + \sum_{j=0}^{r} (-2)^j s_j]$: πλήθος αντικειμένων με άρτιο αριθμό ιδιοτήτων
- $\frac{1}{2}[E(1) - E(-1)] = \frac{1}{2}[e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \dots - e_0 + e_1 - e_2 + e_3 - e_4 \dots] = e_1 + e_3 + e_5 + \dots = \frac{1}{2}[s_0 - \sum_{j=0}^{r} (-2)^j s_j]$: πλήθος αντικειμένων με περιττό αριθμό ιδιοτήτων

Ποιος είναι ο αριθμός των τετραδικών ακολουθιών με n ψηφία που περιέχουν άρτιο αριθμό από 0;

- Καλούμε a_i την ιδιότητα το i-τό ψηφίο μιας συμβολοσειράς να είναι 0 για $i = 1, 2, 3, ..., n$
- Είναι $s_j = \binom{n}{j} 3^{n-j}$ με $j = 0, 1, 2, 3, ..., n$. Γιατί;
  - s_j: πλήθος τετραδικών συμβολοσειρών με n ψηφία από τα οποία j είναι 0.
  - $\binom{n}{j}$: πλήθος τρόπων να διαλέξω τα j ψηφία σε κάποια τέτοια συμβολοσειρά που θα είναι 0.
  - Για κάθε τέτοια επιλογή j ψηφίων, τα υπόλοιπα $n - j$ μπορούν να έχουν 3 διαφορετικές τιμές: 1,2,3 αφού οι συμβολοσειρές είναι στο τετραδικό σύστημα: 3^{n-j} πιθανές συμβολοσειρές $n - j$ ψηφίων.
- Επίσης είναι: $e_0 + e_2 + e_4 + ... = \frac{1}{2}[s_0 + \sum_{j=0}^{r}(-2)^j s_j] =$

$$\frac{1}{2}[3^n + \sum_{j=0}^{n}(-2)^j \binom{n}{j} 3^{n-j}] = \frac{1}{2}[3^n + (3-2)^n] = \frac{1}{2}(3^n + 1)$$