

Red-black δέντρα

Εκτενείς Δομές Δεδομένων (Κεφ. 5)

Δομές Δεδομένων

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή
2. Ορισμός red-black δέντρων
3. Αναζήτηση σε red-black δέντρα
4. Ένθεση σε red-black δέντρα
5. Απόσβεση σε red-black δέντρα
6. Απόδοση red-black δέντρων
7. Ισοδυναμία red-black δέντρων και (2,4) δέντρων

Εισαγωγή

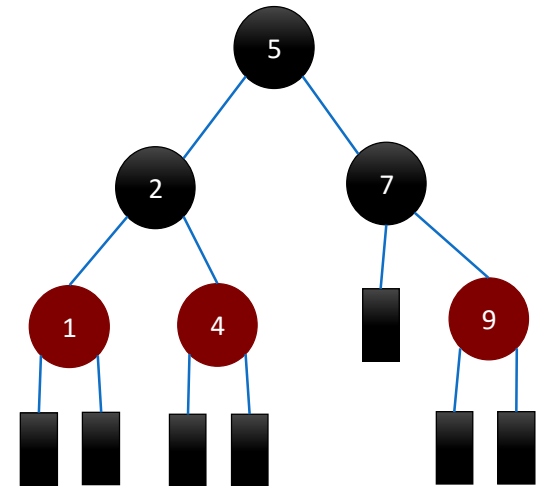
Η δομή που θα παρουσιαστεί έχει τις εξής ιδιότητες:

- Είναι πλήρες δυαδικό δέντρο
- Υψοζυγισμένο δέντρο (& η ζύγιση επιτυγχάνεται με τη χρήση ενός μόνο bit)
- Αποθηκεύει δεδομένα μόνο στους εσωτερικούς κόμβους και όχι στα φύλλα

Ορισμός red-black tree

Ένα πλήρες δυαδικό δέντρο είναι red-black δέντρο όταν κάθε κόμβος είναι είτε κόκκινος είτε μαύρος και ικανοποιούνται οι εξής περιορισμοί:

- Π1. Η ρίζα είναι μαύρη
- Π2. Τα φύλλα είναι μαύρα
- Π3. Κάθε μονοπάτι από τη ρίζα ως τα φύλλα έχει τον ίδιο αριθμό μαύρων κόμβων
- Π4. Κάθε κόκκινος κόμβος έχει μαύρο πατέρα



Αναζήτηση (Access)

Για την αναζήτηση του στοιχείου x σε ένα red-black tree ακολουθούνται τα εξής βήματα:

1. Ξεκίνα από τη ρίζα.
2. Για κάθε κόμβο v :
 1. Αν $x < v$ επισκέψου το αριστερό παιδί του v
 2. Αν $x > v$ επισκέψου το δεξιό παιδί του v
 3. Αν $x = v$ επέστρεψε

Ένθεση (Insertion)

Για την εισαγωγή του στοιχείου x σε ένα red-black tree ακολουθούνται τα εξής βήματα:

1. Εύρεση του κατάλληλου φύλλου y στο δέντρο για την εισαγωγή της τιμής x (Κλήση της $\text{Access}(x)$).
2. Αντικατάσταση του y με έναν κόκκινο κόμβο με τιμή x και 2 μαύρα παιδιά-φύλλα.
3. Εφαρμογή διάφορων μετασχηματισμών αναδρομικά από την ρίζα στον κόμβο x έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί.

Ένθεση (Insertion)

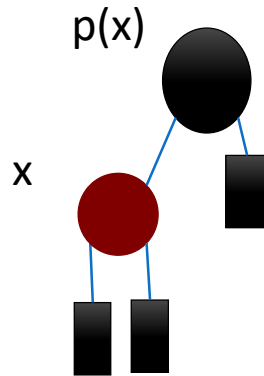
Περίπτωση 1: Το x είναι η ρίζα. [Καταπάτηση Π1]

Λύση: Χρωματισμός της ρίζας. [Τερματική περίπτωση]



Ένθεση (Insertion)

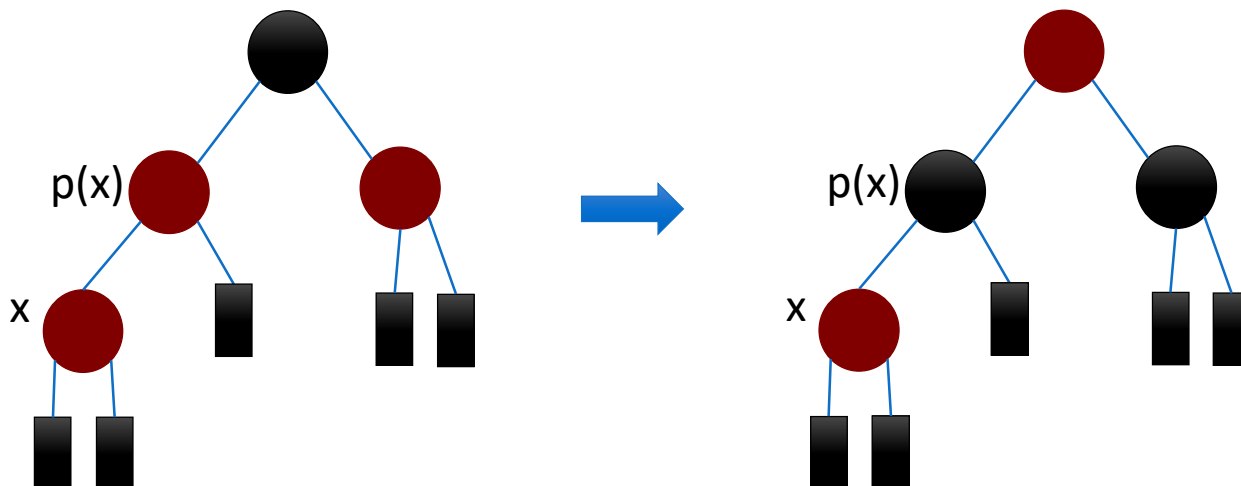
Περίπτωση 2: Ο πατέρας του x , $p(x)$ είναι μαύρος. [Καμμία Καταπάτηση]



Ένθεση (Insertion)

Περίπτωση 3: Ο πατέρας του x , $p(x)$ και ο αδερφός του $p(x)$ είναι και οι 2 κόκκινοι.
[Καταπάτηση Π4]

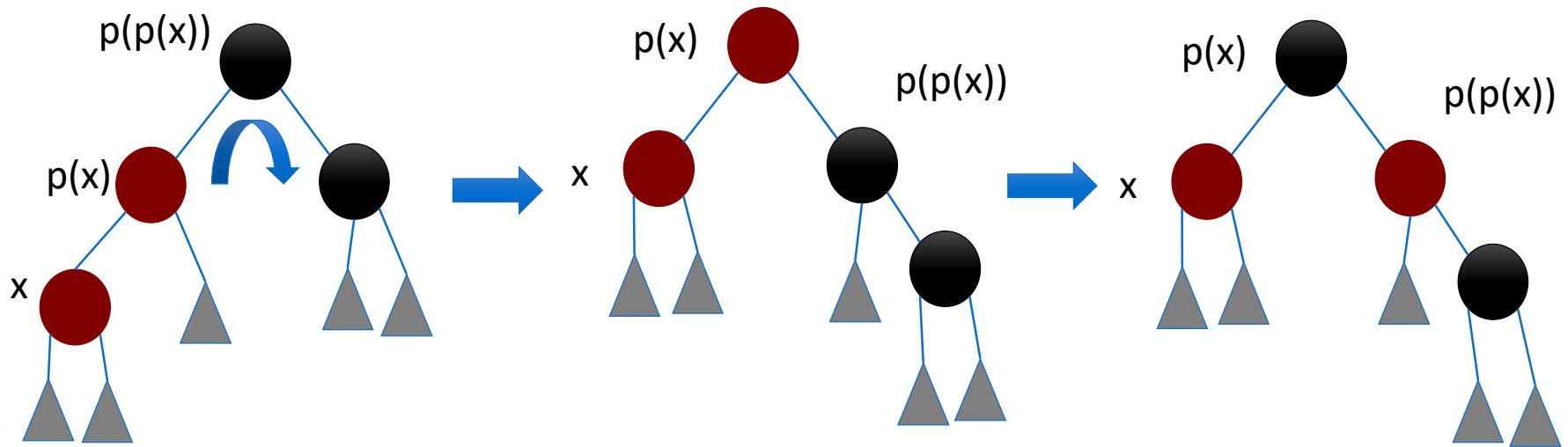
Λύση: Εναλλαγή χρωμάτων. [Μη τερματική περίπτωση]



Ένθεση (Insertion)

Περίπτωση 4: Ο πατέρας του x , $p(x)$ είναι κόκκινος, ο αδερφός του $p(x)$ είναι μαύρος και οι x και $p(x)$ είναι και οι 2 παιδιά του ίδιου είδους (δηλαδή είναι και τα 2 αριστερά ή και τα 2 δεξιά παιδιά του πατέρα τους). [Καταπάτηση Π4]

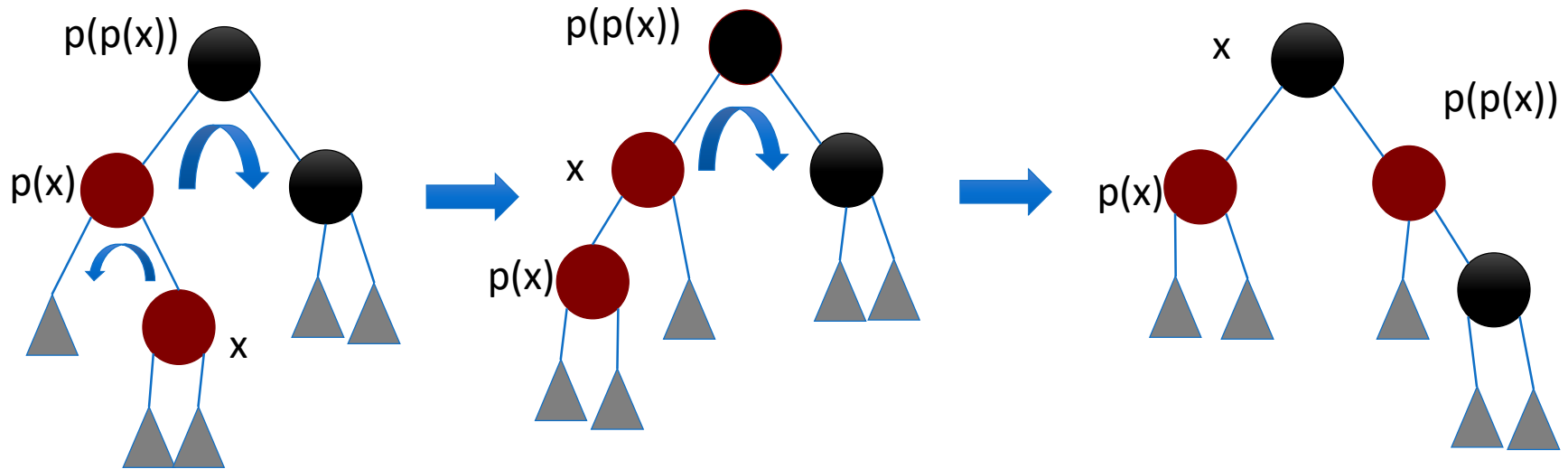
Λύση: Απλή περιστροφή. [Τερματική περίπτωση]



Ένθεση (Insertion)

Περίπτωση 5: Ο πατέρας του x , $p(x)$ είναι κόκκινος, ο αδερφός του $p(x)$ είναι μαύρος και οι x και $p(x)$ είναι και οι 2 παιδιά διαφορετικού είδους (δηλαδή ο ένας είναι αριστερό και ο άλλος δεξιό παιδί του πατέρα τους). [Καταπάτηση Π4]

Λύση: Διπλή περιστροφή. [Τερματική περίπτωση]



Άσκηση (Insertion)

Να αποθηκευτούν οι τιμές 1,2,5,3,4 σε ένα red-black tree.

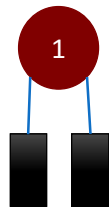
1. Insert(1)
2. Insert(2)
3. Insert(5)
4. Insert(3)
5. Insert(4)

Άσκηση (Insertion)

1) Insert(1)

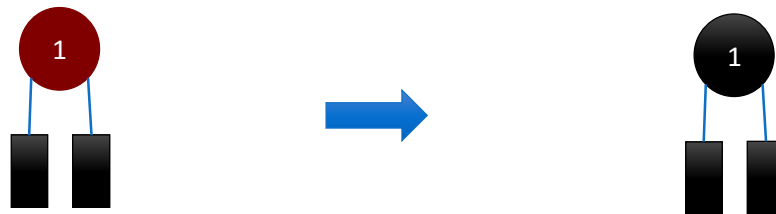
Άσκηση (Insertion)

1) Insert(1)



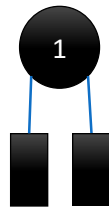
Άσκηση (Insertion)

1) Insert(1)



Άσκηση (Insertion)

2) Insert(2)



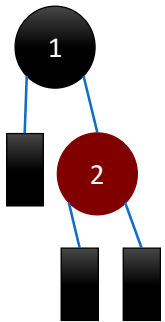
Άσκηση (Insertion)

2) Insert(2)



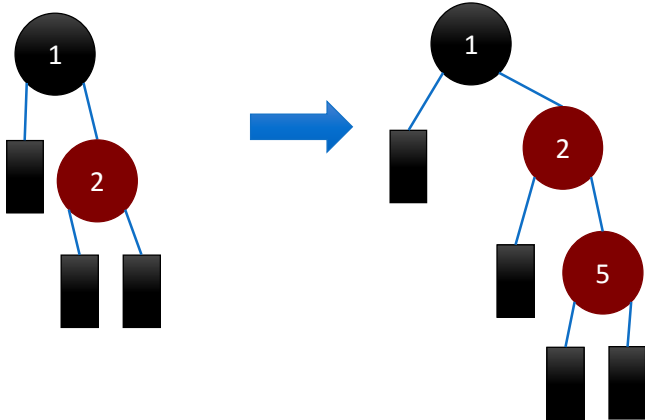
Άσκηση (Insertion)

3) Insert(5)



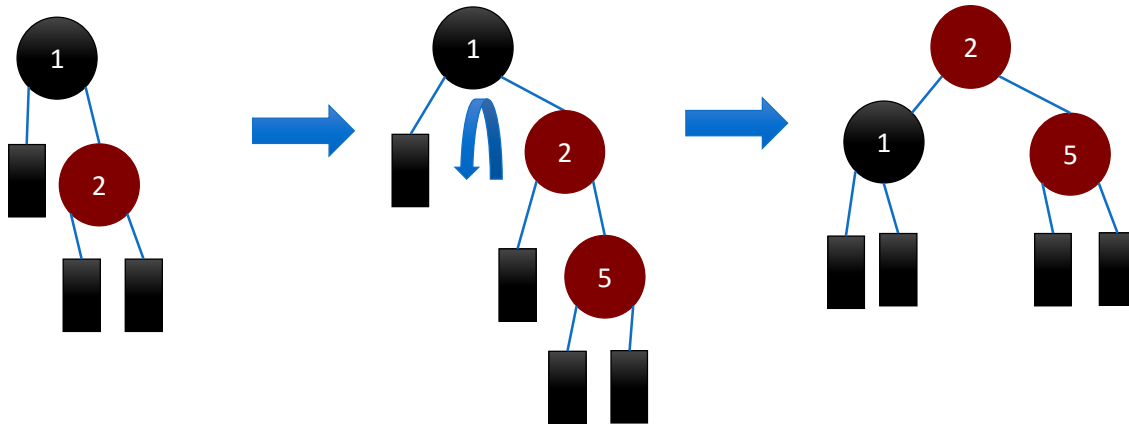
Άσκηση (Insertion)

3) Insert(5)



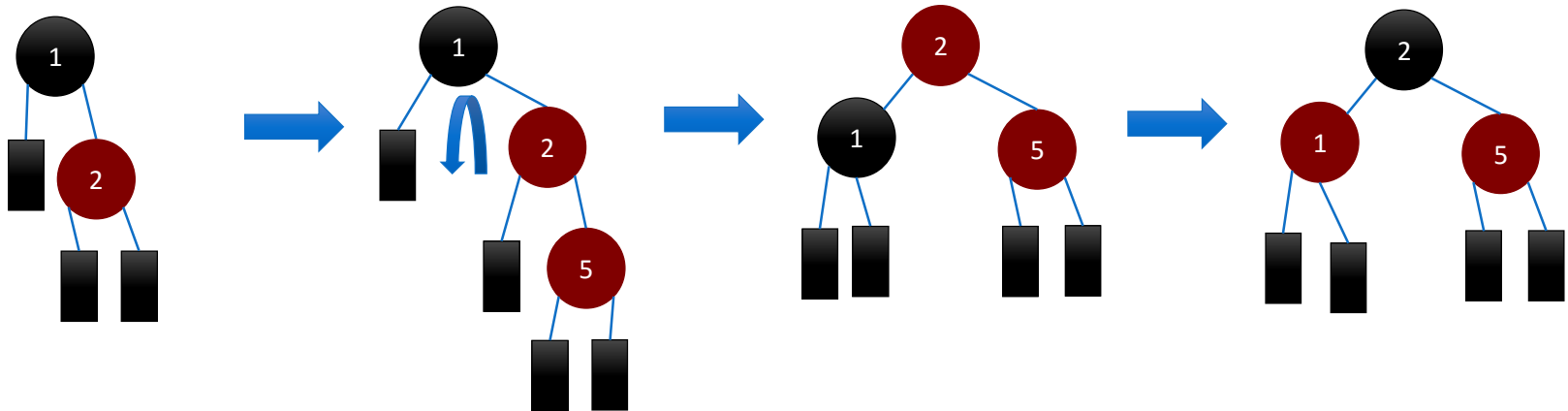
Άσκηση (Insertion)

3) Insert(5)



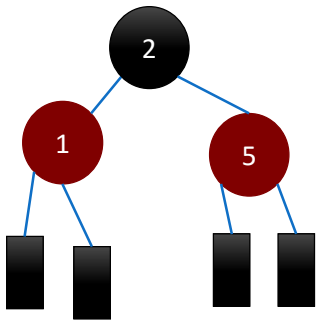
Άσκηση (Insertion)

3) Insert(5)



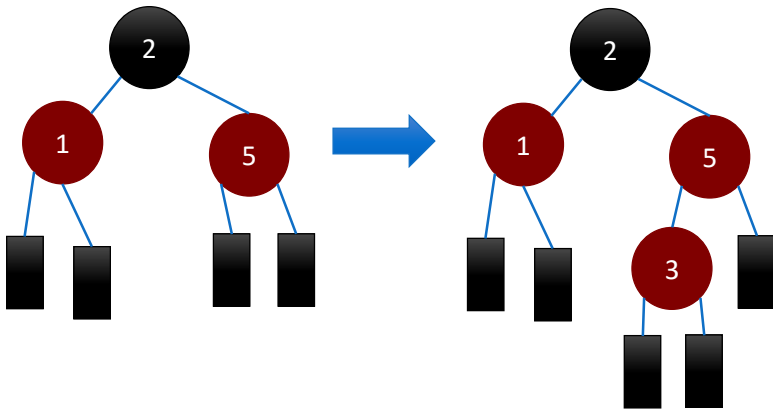
Άσκηση (Insertion)

4) Insert(3)



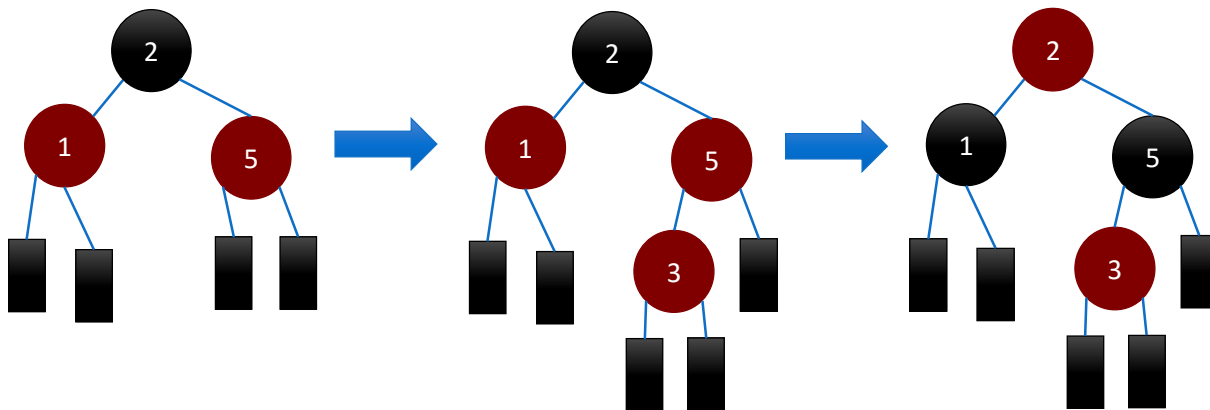
Άσκηση (Insertion)

4) Insert(3)



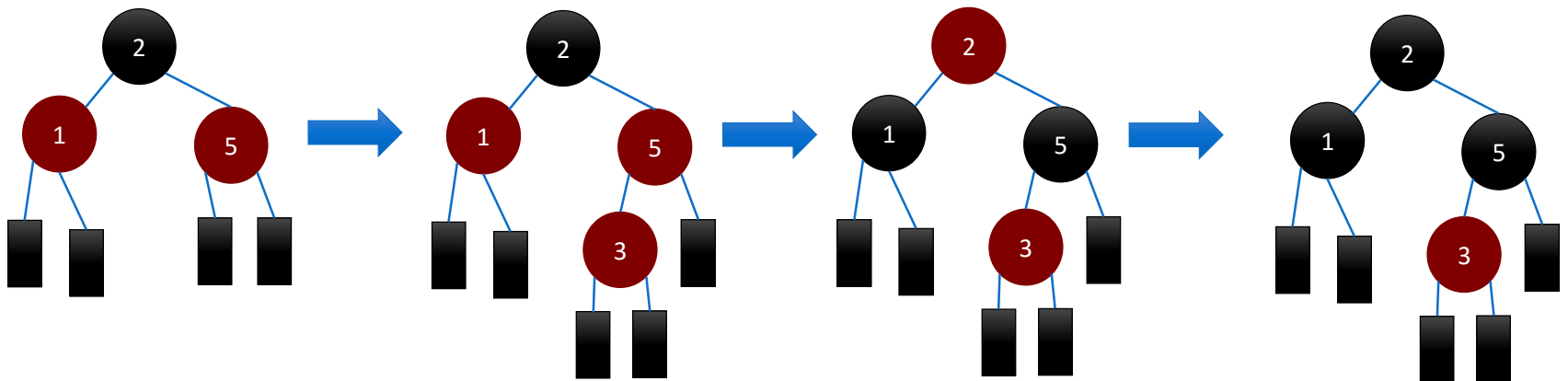
Άσκηση (Insertion)

4) Insert(3)



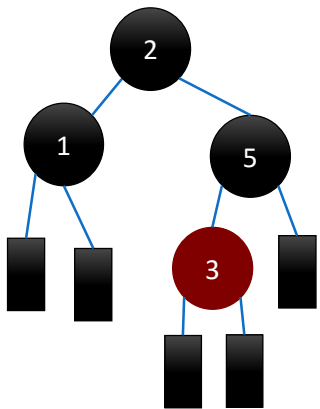
Άσκηση (Insertion)

4) Insert(3)



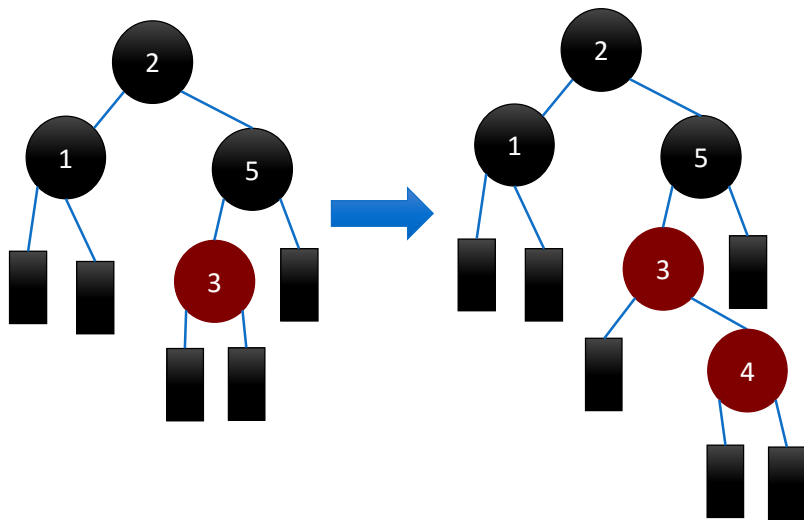
Άσκηση (Insertion)

5) Insert(4)



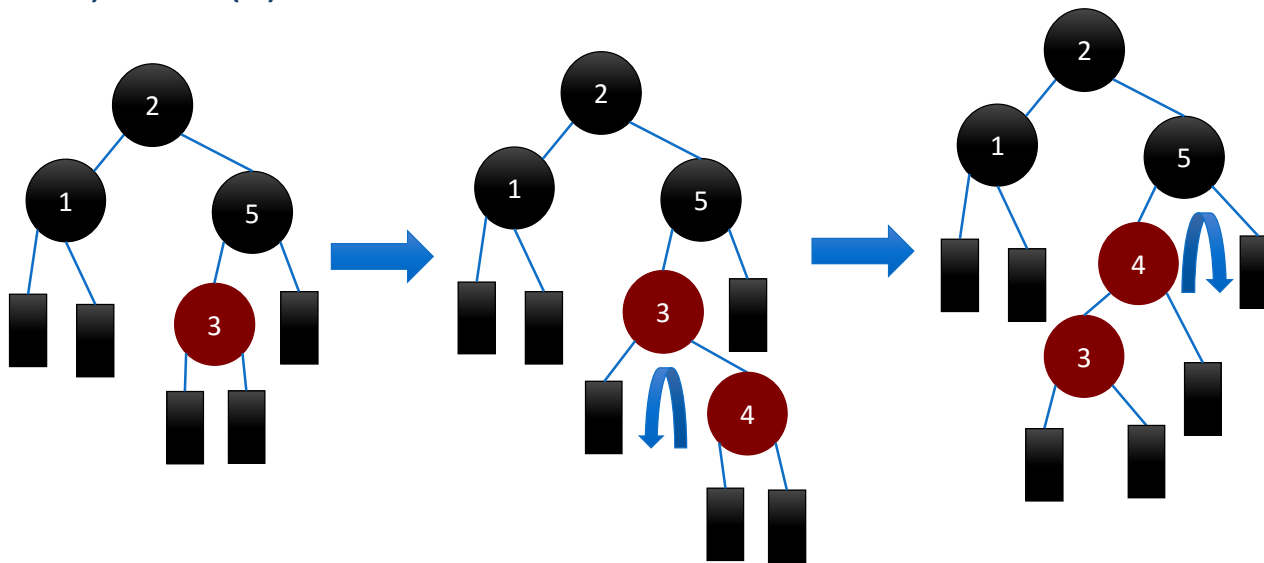
Άσκηση (Insertion)

5) Insert(4)



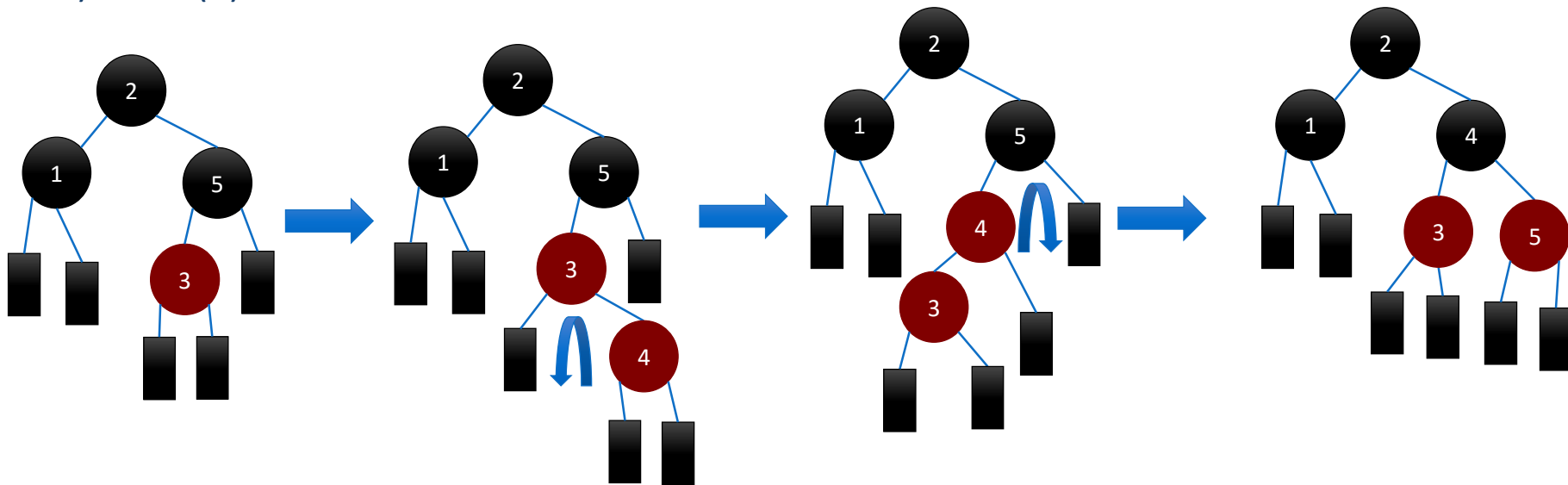
Άσκηση (Insertion)

5) Insert(4)



Άσκηση (Insertion)

5) Insert(4)



Απόσβεση (Deletion)

Η διαγραφή είναι μια πιο πολύπλοκη διαδικασία από την ένθεση.

Για την διαγραφή του στοιχείου x από ένα red-black tree ακολουθούνται τα εξής βήματα:

1. Εύρεση της κατάλληλης θέσης στο δέντρο για την απόσβεση της τιμής x (Κλήση της $\text{Access}(x)$).
2. Έστω v ο πατέρας του x και y ο αδερφός του. Αντικατάσταση του v με τον y και απόσβεση του v και του x από το δέντρο.
3. Εφαρμογή διάφορων μετασχηματισμών αναδρομικά από την ρίζα στον κόμβο x έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί.

Απόσβεση (Deletion)

Οι πιθανοί μετασχηματισμοί που μπορούν να γίνουν είναι:

1. Εναλλαγές χρώματος
 1. Μη τερματική
 2. Τερματική
2. Περιστροφές
 1. Μη τερματική απλή περιστροφή
 2. Τερματική διπλή περιστροφή
 3. Τερματική απλή περιστροφή

Αρχικά εφαρμόζονται οι μη τερματικοί μετασχηματισμοί επαναληπτικά, μέχρι να μπορεί να εφαρμοστεί κάποιος τερματικός μετασχηματισμός.

Απόδοση Red-Black tree

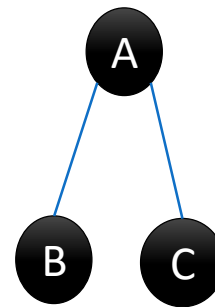
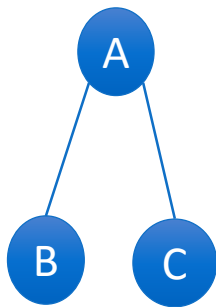
- Ύψος red-black δέντρου: $\Theta(\log n)$
- Για κάθε ένθεση ή απόσβεση απαιτούνται:
 - Πράξεις εναλλαγής χρωμάτων: $O(\log n)$
 - Περιστροφές: $O(1)$
- Κόστος για Access, Insert, Delete: $O(\log n)$

Ισοδυναμία red-black δέντων και (2,4) δέντρων

Από οποιοδήποτε (2,4) δέντρο μπορεί να προκύψει ένα ισοδύναμο red-black δέντρο (και αντίστροφα) εφαρμόζοντας κάποιους απλούς μετασχηματισμούς.

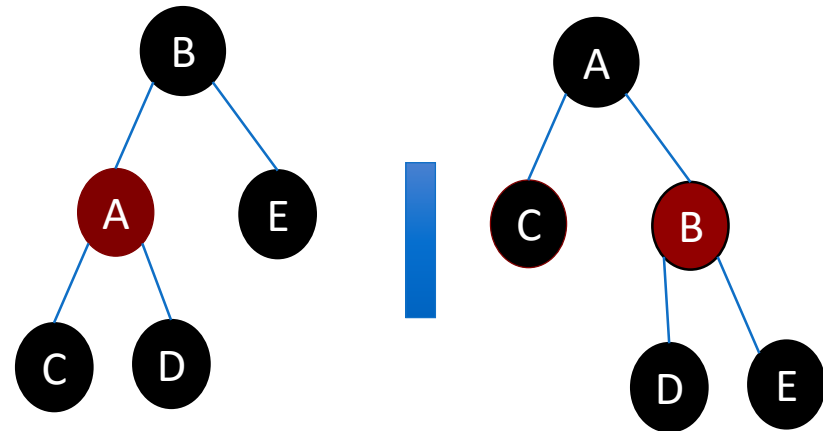
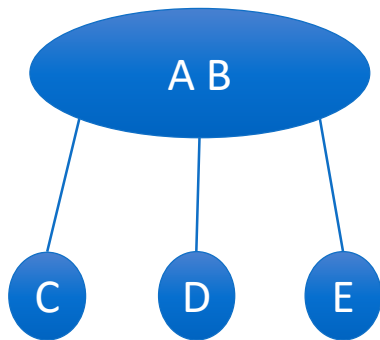
Ισοδυναμία red-black δέντρων και (2,4) δέντρων

Μετασχηματισμός κόμβου με 2 παιδιά



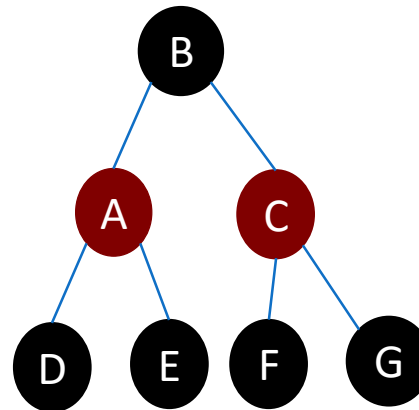
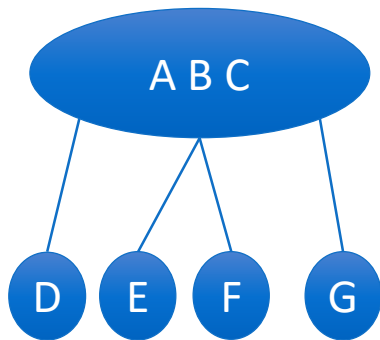
Ισοδυναμία red-black δέντρων και (2,4) δέντρων

Μετασχηματισμός κόμβου με 3 παιδιά



Ισοδυναμία red-black δέντρων και (2,4) δέντρων

Μετασχηματισμός κόμβου με 4 παιδιά



References

- http://en.wikipedia.org/wiki/Red%E2%80%93black_tree
- <https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/RedBlack.html>

Ευχαριστώ!

?