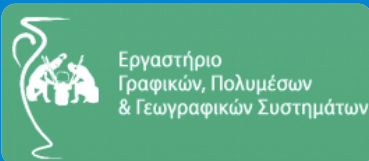


# Τεχνικές Επιμερισμένης Ανάλυσης

Δομές Δεδομένων

Μπαλτάς Αλέξανδρος



21 Απριλίου 2015

[ampaltas@ceid.upatras.gr](mailto:ampaltas@ceid.upatras.gr)

# Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή
2. Ορισμός Επιμερισμένης Πολυπλοκότητας
3. Μέθοδος Άθροισης
4. Μέθοδος Τραπεζίτη
5. Μέθοδος Φυσικού
6. Διαδικός Μετρητής

# Εισαγωγή

Γενικά στην ανάλυση Δομών Δεδομένων και Αλγορίθμων μας ενδιαφέρουν κυρίως 3 περιπτώσεις ως προς την Πολυπλοκότητα:

- Πολυπλοκότητα Χειρότερης Περίπτωσης [Worst Case Complexity]
- Πολυπλοκότητα Μέσης Περίπτωσης [Average Case Complexity]
- Επιμερισμένη Πολυπλοκότητα [Amortized Complexity]

# Επιμερισμένη Πολυπλοκότητα

- Σε αρκετές περιπτώσεις η πολυπλοκότητα μιας πράξης μπορεί να έχει μεγάλες διακυμάνσεις.
- Επίσης σε κάποια προβλήματα θέλουμε να φράξουμε το κόστος μιας ακολουθίας πράξεων και όχι καθεμία πράξη ξεχωριστά.
- Στην ανάλυση επιμερισμένης πολυπλοκότητας υπολογίζεται το συνολικό κόστος μιας ακολουθίας πράξεων και επιμερίζεται το κόστος αυτό σε καθεμία πράξη.

# Τεχνικές Επιμερισμένης Ανάλυσης

Παρουσιάζονται 3 τεχνικές επιμερισμένης ανάλυσης:

1. Μέθοδος Άθροισης
2. Μέθοδος Τραπεζίτη
3. Μέθοδος Φυσικού

# Μέθοδος Άθροισης

- Ακριβής εφαρμογή του ορισμού της επιμερισμένης πολυπλοκότητας.
- Για μια ακολουθία πράξεων, καταγράφεται το ακριβές κόστος, υπολογίζεται το άθροισμα, και τέλος αυτό διαιρείται με τον αριθμό των πράξεων.

# Μέθοδος Τραπεζίτη

- Η δομή που αναλύεται σχετίζεται με ένα 'τραπεζικό λογαριασμό'.
- Κάθε πράξη έχει ένα πραγματικό κόστος, και παράλληλα με αυτό 'καταθέτει' ή 'αποσύρει' χρήματα από το λογαριασμό.
- Κάθε πράξη πληρώνει ένα ποσό. Συνήθως οι φθηνές πράξεις πληρώνουν παραπάνω από το πραγματικό τους κόστος, ενώ οι αριβές κάνουν ανάληψη, αρκεί να υπάρχει αρκετό υπόλοιπο στο λογαριασμό.
- Το επιμερισμένο κόστος δίνεται από το άθροισμα του πραγματικού κόστους της πράξης συν το ποσό που καταθέτει η αποσύρει από το λογαριασμό.

# Μέθοδος Τραπεζίτη

Τυπικά:

- Δομή  $D$
- Ακολουθία πράξεων  $O_1, O_2, \dots, O_m$  τέτοια ώστε η πράξη  $O_i$  να μετασχηματίζει τη δομή από τη φάση  $D_{i-1}$  σε  $D_i$
- Συνάρτηση  $Bal(D_i)$  που αναθέτει πραγματικές θετικές τιμές στα στιγμιότυπα της δομής, και  $Bal(D_0) = 0$ .
- Η επιμερισμένη πολυπλοκότητα  $AC(O_i)$  δίνεται ως εξής:  
$$AC(O_i) = T(O_i) + Bal(D_i) - Bal(D_{i-1}),$$
 όπου  $T(O_i)$  το πραγματικό κόστος της πράξης.



# Μέθοδος Φυσικού

- Ισοδύναμη της Μεθόδου Τραπεζίτη
- Σε κάθε στιγμιότυπο της δομής ανατίθεται μια συνάρτηση που λαμβάνει πραγματικές θετικές τιμές και ονομάζεται συνάρτηση δυναμικού.
- Η συνάρτηση δυναμικού πρέπει να μετρά την 'ανοχή' της δομής σε ακριβές πράξεις, άρα όσο πιο μεγάλο το δυναμικό ενός στιγμιότυπου μιας δομής, τόσο πιο ακριβή μπορεί να είναι μια πράξη σε αυτό.
- Οι φθηνές πράξεις πρέπει να αυξάνουν το δυναμικό, ενώ οι ακριβές να το μειώνουν.
- Το επιμερισμένο κόστος μιας πράξης είναι το άθροισμα του πραγματικού κόστους συν το ποσό του δυναμικού που συνεισφέρει ή καταναλώνει.

# Μέθοδος Φυσικού

Τυπικά:

- Δομή  $D$
- Ακολουθία πράξεων  $O_1, O_2, \dots, O_m$  τέτοια ώστε η πράξη  $O_i$  να μετασχηματίζει τη δομή από τη φάση  $D_{i-1}$  σε  $D_i$
- Υπάρχει μια μη μειούμενη συνάρτηση  $\Phi(D_i)$  που αναθέτει πραγματικές τιμές στα σιγμούτυπα της δομής και  $\Phi(D_o) = 0$ .
- Η επιμερισμένη πολυπλοκότητα  $AC(O_i)$  δίνεται ως εξής:  
 $AC(O_i) = T(O_i) + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$ , όπου  $T(O_i)$  το πραγματικό κόστος της πράξης.

# Δυαδικός Μετρητής

- Δυαδικός μετρητής  $c = \langle b_k, b_{k-1}, \dots, b_1 \rangle$ .
- Μοναδική επιτρεπτή πράξη είναι η  $\text{inc}(c)$  δηλαδή η αύξηση του μετρητή κατά 1.
- Κάθε αλλαγή ψηφίου έχει κόστος 1.

# Δυαδικός Μετρητής

## Μέθοδος Άθροισης:

- Το ψηφίο  $b_0$  αλλάζει σε κάθε αύξηση, το  $b_1$  αλλάζει σε κάθε δεύτερη αύξηση, το  $b_3$  αλλάζει σε κάθε τέταρτη αύξηση κλπ
- Κάθε αλλαγή κοστίζει  $O(1)$ , άρα το  $b_0$  έχει κόστος  $O(n)$ , το  $b_1$  έχει  $O(n/2)$ , το  $b_2$   $O(n/2^2)$  κλπ
- Τελικά το κόστος για  $n$  αυξήσεις είναι:  
$$C(n) = O(n/2^0) + O(n/2^1) + O(n/2^2) + \dots = O(n)$$
- Το επιμερισμένο κόστος είναι  $O(n)/n = \mathbf{O(1)}$

# Δυαδικός Μετρητής

## Μέθοδος Τραπεζίτη:

- Η πολιτική χρέωσης είναι η εξής:
  - Πληρώνουμε 1 μονάδα κάθε φορά που μετατρέπουμε ένα 0 σε 1
  - Κάνουμε ανάληψη 1 μονάδας κάθε φορά που μετατρέπουμε ένα 1 σε 0
- Σε μια τυχαία αύξηση  $i$ :
  - $k$  διαδοχικά 1 θα γίνουν 0, και το  $k$ -στο ψηφίο θα γίνει από 0 σε 1.
  - Το πραγματικό κόστος είναι  $k+1$ , γίνεται ανάληψη  $k$  μονάδων, και κατάθεση 1 μονάδας
  - Άρα  $AC(\text{inc}_i) = T(\text{inc}_i) + \text{Bal}(i+1) - \text{Bal}(i) = k+1 - k = 1 = \mathbf{O(1)}$

# Δυαδικός Μετρητής

## Μέθοδος Φυσικού:

- Η συνάρτηση δυναμικού είναι  $\Phi(\text{μετρητή}) = \{\text{πλήθος των ψηφίων με τιμή 1}\}$ .
- Σε μια τυχαία αύξηση  $i$ :
  - $k$  διαδοχικά 1 θα γίνουν 0, και το  $k$ -στο ψηφίο θα γίνει από 0 σε 1.
  - Το πραγματικό κόστος είναι  $k+1$ , και ο συνολικός αριθμός των 1 μειώνεται κατά  $k-1$  άρα η διαφορά δυναμικού  $\Delta\Phi = -k+1$
  - Άρα  $AC(\text{inc}_i) = T(\text{inc}_i) + \Phi(i+1) - \Phi(i) = k+1 - k+1 = 2 = \mathbf{O(1)}$

Ευχαριστώ!

?