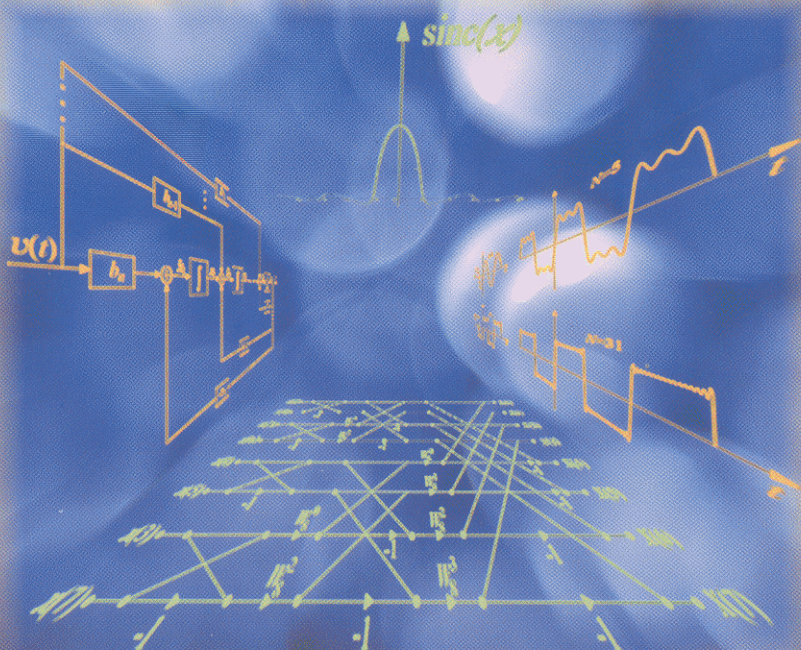


ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ
ΣΥΝΕΧΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ: FOURIER, LAPLACE, Z, DFT
ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

N=5



N=11

Β' ΕΚΔΟΣΗ

N=31

ΣΕΡΓΙΟΣ ΘΕΟΔΩΡΙΔΗΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΜΠΕΡΜΠΕΡΙΔΗΣ
ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΚΟΦΙΔΗΣ

ΤΥΠΩΘΕΤΩ - ΓΙΩΡΓΟΣ ΔΑΡΔΑΝΟΣ

ΣΕΡΓΙΟΣ ΘΕΟΔΩΡΙΔΗΣ ΚΩΣΤΑΣ ΜΠΕΡΜΠΕΡΙΔΗΣ
ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΚΟΦΙΔΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

- Βασικές έννοιες και ορισμοί
- Συνεχής και διακριτός χρόνος
- Μετασχηματισμοί: Fourier, Laplace, Z, DFT
- Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

τυπωθήτω
ΓΙΩΡΓΟΣ ΔΑΡΔΑΝΟΣ
ΑΘΗΝΑ 2004

ΘΕΟΔΩΡΙΔΗΣ Σ. - ΜΠΕΡΜΠΕΡΙΔΗΣ Κ. - ΚΟΥΦΙΔΗΣ Λ.

Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων

360 + xiv σσ. (17×24 εκ.) 23,5 δεκαεξαεξέλιδα

Αριθμός Έκδοσης 287

Copyright © τυπωθήτω Γιωρτζο Δαρδανός

© Σ. ΘΕΟΔΩΡΙΔΗΣ - Κ. ΜΠΕΡΜΠΕΡΙΔΗΣ - Λ. ΚΟΥΦΙΔΗΣ

Πρώτη έκδοση: Σεπτέμβριος 1998

Δεύτερη έκδοση: Οκτώβριος 2003

Πρώτη ανατύπωση: Οκτώβριος 2004

Τυπογραφική επιμέλεια: Χρήστος ΣΤΑΥΡΟΠΟΛΙΤΗΣ

Φύλμ: Πάρις ΚΑΡΔΑΜΙΤΣΗΣ

Διορθώσεις: Μάγδα ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΥ

Μοντάζ: Ντίνι ΑΓΓΕΛΟΥ

Στήσιμο εξωφύλλου: Κυριάκος ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗΣ

τυπωθήτω Γιωρτζο Δαρδανός

ΔΙΔΟΤΟΥ 37, 106 80, ΑΘΗΝΑ

Τηλ.: 210 36.42.003 - 210 36.41.996 - 210 36.41.979

Fax: 210 36.42.030 - 210 36.11.384

www.dardanosnet.gr

e-mail: info@dardanosnet.gr

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η υλική, μορφική ή περιληπτική αναπαραγωγή και μετασκευή έστω και μιας σελίδας του παρόντος βιβλίου, κατά παράφραση ή διασκευή με οποιονδήποτε τρόπο (μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό κ.λπ. - Ν. 2121/93, άρθρο 51). Η απαγόρευση αυτή ισχύει και για τις δημόσιες υπηρεσίες, βιβλιοθήκες, οργανισμούς κ.λπ. (άρθρο 18). Οι παραβάτες διώκονται (άρθρο 13) και τους επιβάλλονται κατάσχεση, αστικές και ποινικές κυρώσεις σύμφωνα με το νόμο (άρθρα 64-66).

Printed in Greece

All Rights Reserved

ISBN 960-402-114-1

*Στη μνήμη του Δημήτρη Μαρίτσα,
Του Φίλου,
Του Δάσκαλου,
Του Οραματιστή,
Που τάραξε τα νερά
του εφησυχασμού,
της ισοπέδωσης,
και των “ψιλικατζίδικων” συμβιβασμών.*

Σ. Θ.

*Στη Μαρία,
τον Δημήτρη και τον Θοδωρή.*

Κ. Μ.

Στην ανθρωπιά.

Λ. Κ.

Περιεχόμενα

Πρόλογος	xiii
1 Σήματα και Συστήματα	1
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Ειδικές Περιπτώσεις Σημάτων	4
1.2.1 Περιοδικά Σήματα	4
1.2.2 Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση	7
1.2.3 Κρουστική Συνάρτηση και Κατανομές	8
1.2.4 Ιδιότητες της Κρουστικής Συνάρτησης	13
1.3 Κατηγορίες Συστημάτων	15
1.3.1 Στατικά και Δυναμικά Συστήματα	15
1.3.2 Αιτιατά και Μη-Αιτιατά Συστήματα	15
1.3.3 Γραμμικά και Μη-Γραμμικά Συστήματα	16
1.3.4 Χρονικά Αμετάβλητα και Μεταβαλλόμενα Συστήματα	17
1.4 Κρουστική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων	19
1.5 Ιδιότητες της Συνέλιξης	23
1.6 Ευστάθεια Συστημάτων	25
1.7 Απόκριση ΓΧΑ Συστημάτων σε Διεγέρσεις Απλής Συχνότητας	26
1.8 Λυμένα Προβλήματα	27
1.9 Προβλήματα	29
2 Μετασχηματισμός και Σειρά Fourier	33
2.1 Εισαγωγή	33
2.2 Μετασχηματισμός Fourier	34
2.2.1 Ορισμός Μετασχηματισμού Fourier	34
2.2.2 Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier	36
2.2.3 Σύγκλιση του Μετασχηματισμού Fourier	41
2.2.4 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier	44
2.2.5 Θεώρημα Συνέλιξης	52
2.2.6 Φυσική Σημασία του Μετασχηματισμού Fourier	54

2.2.7	Μετασχηματισμοί Ημιτόνου και Συνημιτόνου	56
2.2.8	Θεώρημα του Parseval	59
2.2.9	Φαινόμενο Gibbs	60
2.2.10	Παραθύρωση - Παράγοντας Fejer	63
2.2.11	Παραθύρωση στο Χρόνο	65
2.3	Εφαρμογή του MF στη Μελέτη Γραμμικών Συστημάτων	67
2.3.1	Απόκριση Συχνοτήτων Συστήματος	67
2.3.2	Περιγραφή ΓΧΑ Συστημάτων με Διαφορικές Εξισώσεις και ο MF	69
2.3.3	Απόκριση ΓΧΑ Συστημάτων σε Ημιτονοειδείς Εισόδους	71
2.3.4	Ιδανικό Κατωπερατό Φίλτρο	73
2.4	Σειρά Fourier	76
2.4.1	Ορθοκανονικές Συναρτήσεις	76
2.4.2	Τριγωνομετρική Σειρά Fourier	79
2.4.3	Εκθετική Σειρά Fourier	80
2.4.4	Σειρές Fourier Περιοδικών Συναρτήσεων	81
2.4.5	Σειρά Fourier για Άρτια και Περιττή Συμμετρία	84
2.4.6	Θεώρημα Parseval	87
2.4.7	Προσέγγιση Συνάρτησης από Σειρά Fourier	88
2.4.8	Σχέση της Σειράς Fourier με τον Ομώνυμο Μετασχηματισμό	91
2.5	Λυμένα Προβλήματα	93
2.6	Προβλήματα	102
3	Μετασχηματισμός Laplace	107
3.1	Εισαγωγή - Ορισμός	107
3.2	Σχετικά με την Ύπαρξη του Μετασχηματισμού Laplace	110
3.2.1	Θεώρημα Ύπαρξης του ML	110
3.3	ML Στοιχειωδών Συναρτήσεων	111
3.3.1	Η Περιοχή Σύγκλισης του Μετασχηματισμού Laplace	113
3.4	Ιδιότητες και Θεωρήματα του ML	116
3.5	Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace	124
3.5.1	Ορισμός και Ύπαρξη του Αντίστροφου ML	124
3.5.2	Υπολογισμός του Αντίστροφου ML	126
3.5.3	Παραδείγματα	129
3.5.4	Θεωρήματα Συνέλιξης στο Χρόνο και τη Συχνότητα	132
3.5.5	Μετασχηματισμός Laplace Ημιπεριοδικών Συναρτήσεων	134
3.6	Σχέση Μετασχηματισμών Laplace και Fourier	135
3.7	Αμφίπλευρος Μετασχηματισμός Laplace	137

3.8 Χρήση του ML στην Επίλυση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων . .	141
3.9 Χρήση του ML στην Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων	143
3.9.1 Συνάρτηση Μεταφοράς Συστήματος	143
3.9.2 Ευστάθεια Συστήματος και Συνάρτηση Μεταφοράς	144
3.10 Λυμένα Προβλήματα	146
3.11 Προβλήματα	155
4 Περιγραφή Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης	159
4.1 Εισαγωγή	159
4.2 Πόλοι στο Αριστερό Ημιεπίπεδο δεν Σημαίνουν Πάντα Ευστάθεια . .	160
4.3 Χώρος Κατάστασης	163
4.3.1 Η Έννοια της Κατάστασης	163
4.3.2 Δυναμικές Εξισώσεις	164
4.3.3 Γραμμικά Συστήματα	167
4.4 Λύση των Δυναμικών Εξισώσεων	167
4.4.1 Δυναμοσειρές Τετραγωνικών Μητρώων	167
4.4.2 Εκθετική Συνάρτηση Μητρώων	168
4.4.3 Μετασχηματισμός Laplace Εκθετικής Συνάρτησης	169
4.5 Μητρώο Καταστατικής Μετάβασης	173
4.6 Ανάλυση στις Ιδιοσυχνότητες του Συστήματος	175
4.7 Εξίσωση Καταστατικής Μετάβασης	178
4.8 Συνάρτηση Μεταφοράς από Δυναμικές Εξισώσεις	180
4.9 Δυναμικές Εξισώσεις από Συνάρτηση Μεταφοράς	182
4.9.1 Ισοδύναμα Συστήματα	186
4.10 Υλοποίηση Δυναμικών Εξισώσεων με Αναλογικούς Υπολογιστές . .	187
4.11 Ελεγχιμότητα και Παρατηρησιμότητα	192
4.12 Ταυτόχρονη Ελεγχιμότητα και Παρατηρησιμότητα	202
4.13 Ευστάθεια ΓΧΑ Συστημάτων	205
4.14 Σταθεροποίηση Δυναμικών Συστημάτων - Ανάδραση	208
4.15 Λυμένα Προβλήματα	211
4.16 Προβλήματα	220
5 Σήματα και Συστήματα Διακριτού Χρόνου - Μετασχηματισμός Z	223
5.1 Εισαγωγή	223
5.2 Ειδικές Περιπτώσεις Σημάτων Διακριτού Χρόνου	224
5.2.1 Μοναδιαία Βηματική Ακολουθία	224
5.2.2 Κρουστική Ακολουθία	224
5.2.3 Περιοδικές Ακολουθίες	225
5.3 Συστήματα Διακριτού Χρόνου	227

5.4 Ο Μετασχηματισμός Z	233
5.4.1 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Z	238
5.4.2 Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z	244
5.4.3 Υπολογισμός του Αντίστροφου MZ για Ρητές $X(z)$	245
5.4.4 Συνέλιξη στο Επίπεδο του z	251
5.5 Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου	253
5.6 Θεώρημα Parseval	257
5.7 Συνάρτηση Μεταφοράς ενός ΓΧΑ Συστήματος	258
5.8 Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Z	263
5.8.1 Ορισμός	263
5.8.2 Η Ιδιότητα της Χρονικής Ολίσθησης	264
5.8.3 Το Θεώρημα Αρχικής Τιμής	265
5.8.4 Το Θεώρημα Τελικής Τιμής	265
5.9 Απόκριση ΓΧΑ Συστήματος με Αρχικές Συνθήκες	266
5.10 Περιγραφή Συστημάτων Διακριτού Χρόνου στο Χώρο Κατάστασης	268
5.11 Δειγματοληψία - Θεώρημα Nyquist	269
5.11.1 Ανάκτηση Σήματος Συνεχούς Χρόνου από τα Δείγματά του	277
5.12 Λυμένα Προβλήματα	289
5.13 Προβλήματα	302
6 Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier	307
6.1 Εισαγωγή	307
6.2 Δειγματοληψία MF Σήματος Διακριτού Χρόνου Πεπερασμένης Διάρκειας	308
6.3 Ιδιότητες του DFT	311
6.4 Κυκλική Συνέλιξη	321
6.5 Θεώρημα Parseval	326
6.6 Σχέση Κυκλικής και Γραμμικής Συνέλιξης	327
6.7 Διακριτή Σειρά Fourier	329
6.8 Περιοδική Συνέλιξη	330
6.9 Δειγματοληψία του Μετασχηματισμού Z	332
6.10 Υπολογισμός του DFT - Fast Fourier Transform (FFT)	337
6.10.1 Θέματα Υλοποίησης του FFT	342
6.11 Λυμένα Προβλήματα	349
6.12 Προβλήματα	353
Βιβλιογραφία	355
Ευρετήριο	357

Πρόλογος

Το παρόν βιβλίο αποτελεί καταστάλαγμα της εμπειρίας μας από τη διδασκαλία του μαθήματος Σήματα και Συστήματα για αρκετά χρόνια (περισσότερα από 20 για τον πρώτο συγγραφέα) στο Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου της Πάτρας και στο Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου της Αθήνας.

Στη σημερινή εποχή της κοινωνίας της πληροφορίας και γνώσης, που χαρακτηρίζεται από τη σύγκλιση και ενοποίηση διαφορετικών (μέχρι τώρα) επιστημονικών περιοχών, το πεδίο των σημάτων και συστημάτων αποτελεί πλέον ένα ενιαίο σύνολο βασικών και θεμελιωδών γνώσεων για ένα ευρύ φάσμα περιοχών που σχετίζονται με τον ένα ή τον άλλο τρόπο με την παραγωγή, την επεξεργασία, την αποθήκευση και τη μετάδοση της πληροφορίας, όπως τηλεπικοινωνίες, αναγνώριση προτύπων, αυτόματος έλεγχος, βιοπληροφορική, κ.ά.

Το βιβλίο εισάγει τον αναγνώστη στις βασικές τεχνικές ανάλυσης και μελέτης των σημάτων και συστημάτων με ενιαίο τρόπο. Σήματα και συστήματα αντιμετωπίζονται ως μία οντότητα, ως δύο όψεις του ίδιου νομίσματος: τα συστήματα διεγείρονται από σήματα και τα σήματα παράγονται από συστήματα. Ένα άλλο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του βιβλίου είναι ότι κάθε κεφάλαιο συνοδεύεται από ικανό αριθμό παραδειγμάτων που βοηθούν τον αναγνώστη να εμπεδώσει τη θεωρία και να κατανοήσει τις τεχνικές προσέγγισης και αντιμετώπισης των προβλημάτων. Για τον ίδιο σκοπό, σε κάθε κεφάλαιο περιλαμβάνεται ένας αριθμός από κατάλληλα επιλεγμένα λυμένα προβλήματα. Όσον αφορά στις αποδείξεις, έχει γίνει προσπάθεια να δοθούν με αρκετά ευανάγνωστο τρόπο τουλάχιστον οι σημαντικότερες απ' αυτές. Η όποια παράλειψή τους σε μια πρώτη ανάγνωση δεν δημιουργεί προβλήματα στην περαιτέρω ροή του βιβλίου.

Το πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου δίνει τους βασικούς ορισμούς των σημάτων και συστημάτων και οδηγεί τον αναγνώστη στην κατανόηση θεμελιωδών σχέσεων και εννοιών, όπως η σχέση που συνδέει την έξοδο με την είσοδο ενός συστήματος και οι έννοιες της ευστάθειας και αιτιότητας.

Το δεύτερο κεφάλαιο πραγματεύεται το μετασχηματισμό Fourier και τις ιδιότητές του. Το ίδιο κεφάλαιο συζητά και τις σειρές Fourier. Συχνά στη βιβλιογραφία

οι τελευταίες εισάγονται ως μια οριακή περίπτωση των μετασχηματισμών Fourier (ή και αντίθετα). Επιλέξαμε μια διαφορετική προσέγγιση, που ταυτόχρονα αναδεικνύει και τη γενικότητα της τεχνικής αυτής. Η σύνδεση των δύο αναπαραστάσεων και εργαλείων (του μετασχηματισμού και της σειράς Fourier) δίνεται στο τέλος του εν λόγω κεφαλαίου.

Το τρίτο κεφάλαιο πραγματεύεται το μετασχηματισμό Laplace, τις ιδιότητές του και τη στενή του σχέση με το μετασχηματισμό Fourier. Έμφαση δίνεται στη χρήση του μετασχηματισμού Laplace για την ανάλυση γραμμικών συστημάτων και τη μελέτη της ευστάθειάς τους.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται η μελέτη σημάτων και συστημάτων στο χώρο κατάστασης και ο αναγνώστης εισάγεται στις σχετικές βασικές έννοιες των καταστατικών μοντέλων, όπως της κατάστασης, της παρατηρησιμότητας, της ελεγχιμότητας κ.λπ.

Τα πρώτα τέσσερα κεφάλαια επικεντρώνονται στο συνεχή χρόνο. Τα σήματα και τα συστήματα διακριτού χρόνου συζητούνται στο πέμπτο κεφάλαιο. Εισάγεται επίσης ο μετασχηματισμός Z, με τις ιδιότητές του και δείχνεται πώς χρησιμοποιείται για τη μελέτη τέτοιων σημάτων και συστημάτων. Το κεφάλαιο πραγματεύεται ακόμη τη θεωρία δειγματοληψίας και ανάκτησης σημάτων συνεχούς χρόνου από τα δείγματά τους, καθώς και σχετικά πρακτικά θέματα.

Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο καλύπτονται ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT) και ο υπολογισμός του με τον Ταχύ Μετασχηματισμό Fourier (FFT), θέματα που αποτελούν τη βάση αυτού που είναι γνωστό ως Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος.

Το βιβλίο αυτό δεν θα είχε γραφτεί χωρίς την πίεση και την πάντα καλοδεχόμενη κριτική των φοιτητών μας όλα αυτά τα χρόνια. Τους ευχαριστούμε θερμά για την ενεργή συμμετοχή τους στην αμφίδρομη και εξελικτική διαδικασία της διδασκαλίας, όπου τόσο ο δάσκαλος όσο και ο φοιτητής συνεχώς μαθαίνουν. Ιδιαίτερα θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τους φοιτητές εκείνους, προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς, που με προσοχή μελέτησαν μέρη του βιβλίου και με τις παρατηρήσεις τους βοήθησαν στη βελτίωσή του.

Θα θέλαμε επίσης να εκφράσουμε τις θερμές μας ευχαριστίες στους φίλους και συναδέλφους Ν. Καλονπτσίδη, Γ. Μουστακίδη, Σ. Καραμπογιά και Ε. Ψαράκη. Η συνεργασία τους, η βοήθειά τους και η τεκμηριωμένη κριτική τους συνετέλεσαν σημαντικά ώστε το βιβλίο να πάρει την τελική του μορφή. Ιδιαίτερα ευχαριστούμε τον Ι. Κοψίνη για τη μεγάλη του συνεισφορά στην τελειοποίηση των σχημάτων καθώς και για τις χρήσιμες παρατηρήσεις του.

Σεπτέμβριος 2003
Οι συγγραφείς

Κεφάλαιο 1

Σήματα και Συστήματα

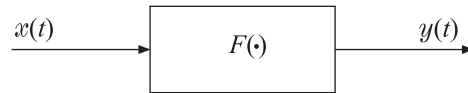
1.1 Εισαγωγή

Ως *σήμα* ορίζουμε το σύνολο των τιμών που λαμβάνει μια φυσική ποσότητα όταν αυτή μεταβάλλεται. Από άποψη μαθηματικού φορμαλισμού, ένα σήμα παριστάνεται ως συνάρτηση ή ακολουθία μιας ή περισσότερων ελεύθερων μεταβλητών. Για παράδειγμα, οι τιμές του ρεύματος που διαρρέει μια αντίσταση R συνιστούν ένα σήμα που περιγράφεται από τη συνάρτηση του χρόνου $i(t)$. Οι τιμές του πληθωρισμού στην οικονομία μιας χώρας συνιστούν ένα σήμα που περιγράφεται από μια ακολουθία Π_n , οι τιμές της οποίας, για $n = 1, 2, 3, \dots$, αντιστοιχούν στο ύψος του πληθωρισμού για κάθε ένα μήνα.

Στο πρώτο παράδειγμα τα πεδία ορισμού και τιμών της συνάρτησης είναι διαστήματα πραγματικών αριθμών, δηλαδή τόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή t όσο και η εξαρτημένη i μεταβάλλονται σ' ένα συνεχές σύνολο τιμών. Σήματα αυτού του τύπου είναι γνωστά ως *αναλογικά*. Στη δεύτερη περίπτωση η ανεξάρτητη μεταβλητή λαμβάνει μόνο διακριτές τιμές (υποσύνολο των ακεραίων), ενώ η εξαρτημένη μεταβάλλεται όπως και προηγουμένως σ' ένα διάστημα. Αυτά τα σήματα είναι γνωστά και ως σήματα διακριτής ανεξάρτητης μεταβλητής. Στην πράξη έχει επικρατήσει τα σήματα αυτά να ονομάζονται *σήματα διακριτού χρόνου*, αν και σε πολλές περιπτώσεις η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν αντιστοιχεί σε χρόνο. Το

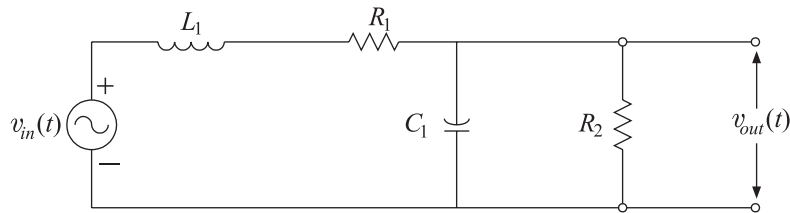
σήμα που αντιστοιχεί, για παράδειγμα, σε μια εικόνα χαρακτηρίζεται ως μια δισδιάστατη ακολουθία $I(m, n)$, όπου οι δείκτες m, n αντιστοιχούν στις αντίστοιχες θέσεις των pixels στο επίπεδο της εικόνας και I είναι το επίπεδο γκριζου του pixel που παίρνει τιμές μεταξύ ενός ελάχιστου (μαύρο) κι ενός μέγιστου (λευκό). Στην πράξη, η εξαρτημένη μεταβλητή λαμβάνει επίσης μόνο ορισμένες διακριτές τιμές. Μια συνήθης περίπτωση είναι να υπάρχουν 256 επίπεδα γκριζου όπου το καθένα κωδικοποιείται με 8 δυαδικά (0, 1) ψηφία (bits) ($256 = 2^8$). Σήματα των οποίων τόσο η ανεξάρτητη όσο και η εξαρτημένη μεταβλητή λαμβάνουν μόνο διακριτές τιμές είναι γνωστά ως *ψηφιακά*.

Ως *σύστημα* ορίζουμε την οντότητα εκείνη που μετατρέπει ένα σήμα σ' ένα άλλο. Από μαθηματική άποψη ένα σύστημα είναι ένας μετασχηματισμός F που μετασχηματίζει ένα σήμα $x(t)$ ($x(n)$) σ' ένα άλλο σήμα $y(t)$ ($y(n)$). Το σήμα $x(t)$ ($x(n)$) ορίζεται ως σήμα εισόδου και το $y(t)$ ($y(n)$) ως σήμα εξόδου. Αυτή η διαδικασία μετασχηματισμού, που επιβάλλει το σύστημα, περιγράφεται σχηματικά από το Σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1 Σύστημα ως μετασχηματισμός σημάτων.

Σε μια προσπάθεια γενίκευσης, το σήμα εισόδου είναι η *αιτία* και το σήμα εξόδου είναι το *αποτέλεσμα* στη διαδικασία διέγερσης του συστήματος. Τα συστήματα διακρίνονται σε αναλογικά, διακριτού χρόνου και ψηφιακά, σύμφωνα με την αντίστοιχη κατηγορία των σημάτων εισόδου και εξόδου. Ένα παράδειγμα αναλογικού συστήματος είναι το κύκλωμα του Σχήματος 1.2. Το σήμα εισόδου είναι η εφαρμοζόμενη τάση $v_{in}(t)$ και θεωρούμε ως σήμα εξόδου την αναπτυσσόμενη τάση στα άκρα της R_2 . Μια άλλη κατηγορία συστημάτων είναι τα υβριδικά, στα οποία τα σήματα εισόδου και εξόδου ανήκουν σε διαφορετικές κατηγορίες.



Σχήμα 1.2 Παράδειγμα αναλογικού συστήματος: RLC ηλεκτρικό κύκλωμα.

Όπως γίνεται εύκολα κατανοητό από τους παραπάνω ορισμούς, σήματα και συστήματα είναι στενά συνδεδεμένα μεταξύ τους. Αυτό έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη μεθόδων ανάλυσης και μελέτης σημάτων και συστημάτων που θεωρούνται ως διαφορετικά βήματα μιας ενιαίας διαδικασίας, η οποία χαρακτηρίζεται από το τριπλό στάδιο: σήμα (εισόδου) \longrightarrow σύστημα \longrightarrow σήμα (εξόδου). Για παράδειγμα, το σήμα που αντιστοιχεί σε μια φυσική ποσότητα δύναται ν' αντιμετωπιστεί ως έξοδος ενός κατάλληλα διεγερμένου γνωστού συστήματος και να μελετηθεί με βάση τις ιδιότητες του συστήματος. Επίσης, η μελέτη ενός συστήματος μπορεί να διεκπεραιωθεί παρατηρώντας και μελετώντας τα σήματα εισόδου και εξόδου, κάτι που στη συνέχεια μας οδηγεί σε συμπεράσματα για τις ιδιότητες του συστήματος.

Η μελέτη συστημάτων και σημάτων έχει οδηγήσει στη δημιουργία δύο σημαντικών, στενά συνδεδεμένων, κλάδων της επιστήμης, γνωστών ως Θεωρία Συστημάτων και Επεξεργασία Σημάτων, αντίστοιχα.

Αντικείμενο μελέτης της Θεωρίας Συστημάτων είναι η γνώση και περιγραφή των βασικών χαρακτηριστικών ενός φυσικού συστήματος με στόχο τη χρησιμοποίησή του σε μια φυσική διεργασία. Μερικά τυπικά προβλήματα και ερωτήματα του κλάδου αυτού είναι:

- α) Εάν έχω ένα σύστημα, π.χ. ένα διαστημόπλοιο, ποια σήματα (π.χ. δυνάμεις) πρέπει να εξασκήσω ώστε το σύστημά μου ν' ακολουθήσει μια προδιαγεγραμμένη τροχιά;
- β) Δεδομένου ενός συστήματος, με ποιό τρόπο επανατροφοδοτώ μέρος του σήματος εξόδου στην είσοδο, έτσι ώστε το σύστημα να αυτοδιορθώνεται και η έξοδος να παραμένει κοντά σε μια επιθυμητή απόκριση, όπως για παράδειγμα στο σύστημα αυτόματης πλοήγησης ενός αεροπλάνου;

Σε ό,τι αφορά την Επεξεργασία Σημάτων, μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα προβλημάτων είναι:

- α) Έχοντας λάβει ένα σήμα, π.χ. μια εικόνα από έναν δορυφόρο, με ποιό τρόπο μπορώ να διαχωρίσω τη χρήσιμη πληροφορία από τις διάφορες παρεμβολές και θόρυβο που έχουν υπεισέλθει κατά τη διαδικασία μετάδοσης και λήψης;
- β) Ποιους κατάλληλους μετασχηματισμούς μπορώ να επιβάλω σ' ένα σήμα έτσι ώστε να τονίσω και να εκμεταλλευτώ συγκεκριμένα χρήσιμα χαρακτηριστικά του, σε βάρος άλλων με λιγότερο ενδιαφέρον; Για παράδειγμα, τέτοιοι μετασχηματισμοί χρησιμοποιούνται για τη συμπίεση σημάτων φωνής και εικόνας, στα πλαίσια ενός συστήματος επικοινωνίας πολυμέσων. Η

εφαρμογή ενός κατάλληλα επιλεγμένου μετασχηματισμού μπορεί ν' αναδείξει κάποια χαρακτηριστικά των σημάτων αυτών που είναι σημαντικότερα σε σχέση με άλλα. Έτσι, μπορούμε ν' αφιερώσουμε περισσότερα bits κωδικοποίησης στα σημαντικότερα και λιγότερα bits (ή και ν' αγνοήσουμε) στα υπόλοιπα, έτσι ώστε να επιτύχουμε πιο αποδοτική μετάδοση της πληροφορίας και μεγαλύτερα ποσοστά συμπίεσης.

Στο βιβλίο αυτό διαπραγματευόμαστε μαθηματικές μεθόδους που αποτελούν βασικά εργαλεία στη μελέτη σημάτων και συστημάτων. Για μεθοδολογικούς και μόνο λόγους, θα ξεκινήσουμε τη διαδρομή μας στο τοπίο των αναλογικών σημάτων και συστημάτων και θα συναντήσουμε τα σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου στο Κεφάλαιο 5.

1.2 Ειδικές Περιπτώσεις Σημάτων

Μια βασική μεθοδολογία στους κλάδους της επεξεργασίας σημάτων και θεωρίας συστημάτων είναι η ανάλυση ενός σήματος ή συστήματος σε απλούστερα, των οποίων η συμπεριφορά είναι είτε γνωστή είτε ευκολότερο να μελετηθεί. Στο εδάφιο αυτό θα ορίσουμε μερικά απλά στοιχειώδη σήματα που θ' αποτελέσουν τη ραχοκοκαλιά για τα επόμενα δύο κεφάλαια.

1.2.1 Περιοδικά Σήματα

Ένα αναλογικό σήμα, $x(t)$, λέγεται *περιοδικό* όταν υπάρχει μια θετική τιμή T για την οποία ισχύει $x(t) = x(t + T)$, για κάθε τιμή του t . Η ελάχιστη σταθερά T για την οποία ισχύει αυτή η σχέση λέγεται (βασική) *περίοδος*. Εφόσον η σχέση αυτή ισχύει για κάθε t , θα ισχύει και για $t + (k - 1)T$. Έτσι είναι προφανές ότι, εάν T είναι η περίοδος ενός περιοδικού σήματος, τότε για κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο του T θα ισχύει

$$x(t) = x(t + kT), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1.1)$$

Παράδειγμα περιοδικού σήματος είναι το ημιτονοειδές σήμα

$$x(t) = A \sin(\Omega t + \theta) \quad (1.2)$$

με περίοδο $T = 2\pi/\Omega$. Το Ω είναι γνωστό ως *κυκλική συχνότητα* με $\Omega = 2\pi f$, όπου f η *συχνότητα* του ημιτόνου. Η σταθερά θ είναι γνωστή ως *φάση* του ημιτόνου και το A ως *πλάτος* του. Για $\theta = \pi/2$ το σήμα ημιτόνου είναι ένα σήμα συνημιτόνου, $\cos(\Omega t)$, και για το λόγο αυτόν πολλές φορές δεν ξεχωρίζουμε τα σήματα ημιτόνου από τα σήματα συνημιτόνου και μιλάμε γενικά για *ημιτονοειδή* σήματα. Ένα άλλο περιοδικό σήμα είναι το μιγαδικό εκθετικό σήμα

$$y(t) = Ae^{j(\Omega t + \theta)} \quad (1.3)$$

με περίοδο επίσης $T = 2\pi/\Omega$. Τα σήματα $x(t)$ και $y(t)$ σχετίζονται μεταξύ τους με τον τύπο του Euler

$$e^{j(\Omega t + \theta)} = \cos(\Omega t + \theta) + j \sin(\Omega t + \theta) \quad (1.4)$$

και μπορούμε προφανώς να γράψουμε

$$A \cos(\Omega t + \theta) = A \operatorname{Re}[e^{j(\Omega t + \theta)}] \quad (1.4a)$$

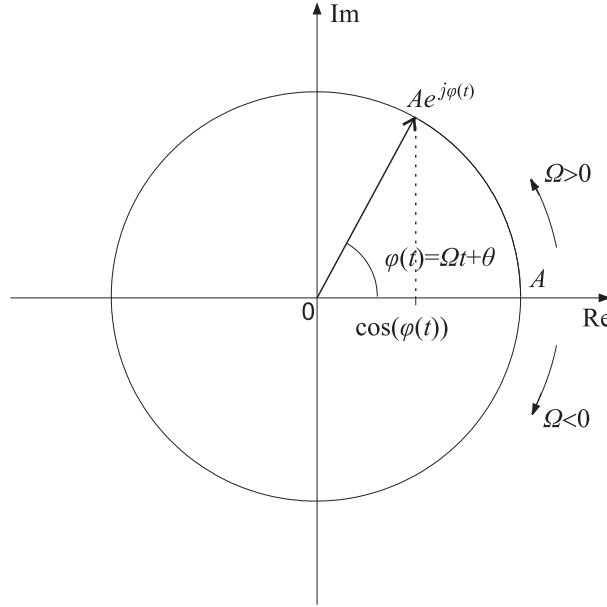
$$A \sin(\Omega t + \theta) = A \operatorname{Im}[e^{j(\Omega t + \theta)}] \quad (1.4b)$$

όπου με $\operatorname{Re}(\cdot)$ και $\operatorname{Im}(\cdot)$ συμβολίζουμε το πραγματικό και φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού, αντίστοιχα. Με άλλα λόγια, ένα σήμα συνημιτόνου μπορεί να θεωρηθεί ως το πραγματικό μέρος του αντίστοιχου μιγαδικού περιοδικού σήματος κι ένα σήμα ημιτόνου ως το φανταστικό μέρος του. Αν και τα μιγαδικά σήματα δεν έχουν φυσική υπόσταση, είναι ελκυστικά από μαθηματική άποψη γιατί απλουστεύουν τις πράξεις. Οι σχέσεις (1.4) είναι το πέρασμα από το μιγαδικό σήμα στο αντίστοιχο πραγματικό σήμα.

Πριν προχωρήσουμε, είναι σημαντικό να μείνουμε για λίγο ακόμη στα μιγαδικά σήματα και να τονίσουμε κάποιες βασικές σχέσεις και έννοιες που θα μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμες αργότερα. Όπως κάθε μιγαδικός αριθμός, η εκάστοτε στιγμιαία μιγαδική τιμή του σήματος αντιστοιχεί σ' ένα σημείο στο επίπεδο των μιγαδικών αριθμών (βλ. Σχήμα 1.3). Το μέτρο του διανύσματος με αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το αντίστοιχο μιγαδικό σημείο $e^{j(\Omega t + \theta)}$ έχει μέτρο A και σχηματίζει με τον άξονα των πραγματικών αριθμών γωνία ίση με

$$\phi(t) = \Omega t + \theta \quad (1.5)$$

Η γωνία δηλαδή δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται με το χρόνο από θ έως $\theta + 2\pi$ με σταθερό ρυθμό μεταβολής και καλύπτει μία πλήρη περιστροφή σε μία περίοδο $T = 2\pi/\Omega$. Το μιγαδικό, δηλαδή, σήμα αντιστοιχεί σ' ένα διάνυσμα το οποίο περιστρέφεται συνεχώς με ταχύτητα Ω και με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Για κάθε χρονική στιγμή, η προβολή του διανύσματος αυτού στον πραγματικό άξονα ισούται με την τιμή του αντίστοιχου σήματος συνημιτόνου και η προβολή στον φανταστικό άξονα με την τιμή του αντίστοιχου σήματος ημιτόνου. Το εκθετικό μιγαδικό σήμα $Ae^{-j(\Omega t + \theta)}$ έχει ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες που περιγράψαμε έως τώρα αλλά το αντίστοιχο διάνυσμα στο μιγαδικό επίπεδο περιστρέφεται με φορά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, προχωρώντας σε μια περίοδο T από $-\theta$ έως $-\theta - 2\pi$. Η προβολή του στον άξονα των πραγματικών



Σχήμα 1.3 Μιγαδικό εκθετικό σήμα ως διάνυσμα στο επίπεδο.

ισούται με το σήμα $A \cos(\Omega t + \theta)$, όπως πριν, αλλά η προβολή του στον φανταστικό άξονα είναι ίση με $-A \sin(\Omega t + \theta)$. Λέμε ότι ένα τέτοιο μιγαδικό σήμα έχει αρνητική κυκλική συχνότητα $-\Omega$ για να δηλώσουμε ότι η φορά περιστροφής του αντίστοιχου διανύσματος στο μιγαδικό επίπεδο είναι αυτή της φοράς των δεικτών του ρολογιού. Η αρνητική συχνότητα, δηλαδή, *δεν έχει φυσική σημασία*, αλλά υπεισέρχεται λόγω της περιγραφής των σημάτων με μιγαδική αναπαράσταση. Η έννοια της αρνητικής συχνότητας “εξαφανίζεται” όταν παίρνουμε το πραγματικό (ή φανταστικό) μέρος του μιγαδικού σήματος για ν’ ανακτήσουμε το αντίστοιχο ημιτονοειδές σήμα, όπως εξηγήσαμε παραπάνω. Τέλος, ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα μπορεί ν’ αναπαρασταθεί λίγο διαφορετικά:

$$y(t) = Ae^{j(\Omega t + \theta)} \equiv Y e^{j\Omega t} \quad (1.6)$$

όπου η μιγαδική ποσότητα

$$Y \equiv Ae^{j\theta} \quad (1.7)$$

είναι γνωστή ως *μιγαδικό πλάτος* του σήματος.

Λαμβάνοντας υπόψη τις αντίστροφες σχέσεις του Euler,

$$\cos \phi = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}, \quad \sin \phi = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}, \quad (1.8)$$

είναι εύκολο να δείξουμε ότι ένα ημιτονοειδές σήμα γράφεται ως άθροισμα δύο μιγαδικών συζυγών σημάτων, όπου το ένα έχει θετική και το άλλο αρνητική συχνότητα. Πράγματι,

$$\begin{aligned} A \cos(\Omega t + \theta) &= \frac{A}{2} \left[e^{j(\Omega t + \theta)} + e^{-j(\Omega t + \theta)} \right] \\ &\equiv \frac{1}{2} Y e^{j\Omega t} + \frac{1}{2} Y^* e^{-j\Omega t} \\ &\equiv \frac{1}{2} y(t) + \frac{1}{2} y^*(t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

όπου το σύμβολο $*$ δηλώνει το μιγαδικό συζυγή. Για άλλη μια φορά, η αρνητική συχνότητα υπεισέρχεται στην προσπάθειά μας ν' αναπαραστήσουμε ένα σήμα πραγματικό με τη βοήθεια μιγαδικών σημάτων. Παρατηρούμε ότι και τα δύο μιγαδικά σήματα έχουν προβολή στον πραγματικό άξονα (πραγματικό μέρος) ίση με το αρχικό ημιτονοειδές σήμα. Αυτός είναι ο λόγος της παρουσίας του $\frac{1}{2}$ στο άθροισμά τους.

Τα σήματα $Ae^{j(\Omega t + \theta)}$, $A \cos(\Omega t + \theta)$ και $A \sin(\Omega t + \theta)$ είναι γνωστά και ως σήματα μιας (single) συχνότητας ή και *σήματα απλής συχνότητας*. Στο Κεφάλαιο 2 θα δούμε ότι ένας τρόπος ανάλυσης ενός οποιουδήποτε περιοδικού σήματος είναι και η ανάπτυξή του σ' ένα άθροισμα απλών περιοδικών σημάτων μιας συχνότητας.

1.2.2 Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση

Μια ειδική μορφή σήματος είναι αυτό του Σχήματος 1.4, που ορίζεται ως

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

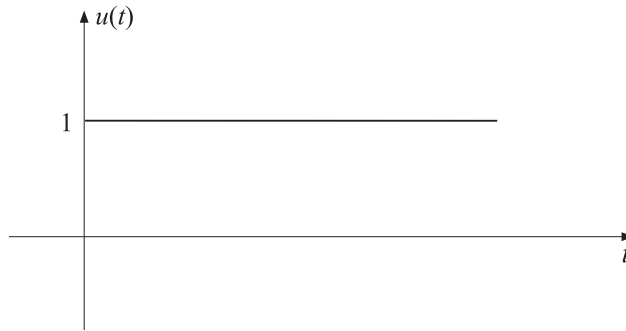
και καλείται (μοναδιαία) *βηματική συνάρτηση*. Η βηματική συνάρτηση $u(t)$ είναι ασυνεχής στο $t = 0$, όπου και δεν ορίζεται. Ένας άλλος τρόπος να δούμε τη $u(t)$ είναι ως όριο μιας ακολουθίας συναρτήσεων που ορίζεται ως:

$$u_n(t) = \begin{cases} 1, & t \geq \frac{1}{n} \\ nt, & 0 < t < \frac{1}{n} \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

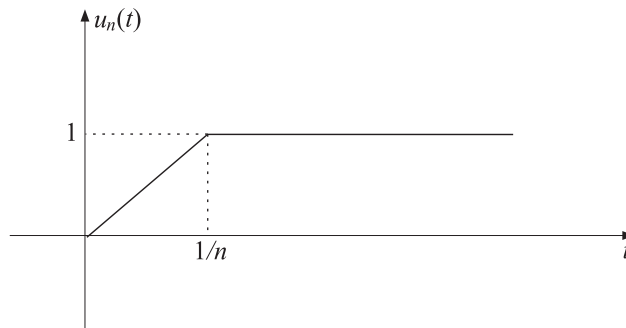
Η $u_n(t)$ φαίνεται στο Σχήμα 1.5. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = u(t) \quad (1.12)$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η παράγωγος της συνάρτησης $u_n(t)$:



Σχήμα 1.4 Μοναδιαία βηματική συνάρτηση.



Σχήμα 1.5 Τυπικός όρος της ακολουθίας συναρτήσεων (1.11).

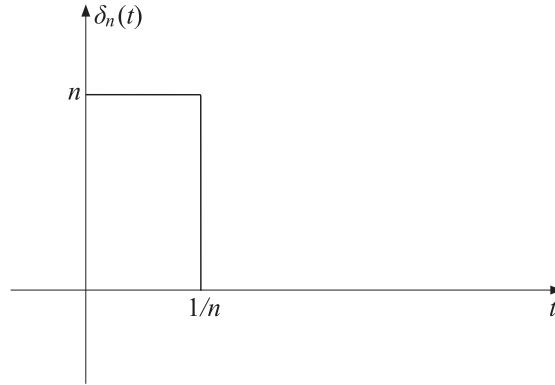
$$\delta_n(t) \equiv \frac{du_n(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ n, & 0 < t < \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < t \end{cases} \quad (1.13)$$

Η παράγωγος δεν ορίζεται στα σημεία 0 και $\frac{1}{n}$. Η σχέση (1.13) φαίνεται γραφικά στο Σχήμα 1.6.

1.2.3 Κρουστική Συνάρτηση και Κατανομές

Ας σταθούμε για λίγο στην ακολουθία συναρτήσεων $\delta_n(t)$ που είδαμε παραπάνω. Παρατηρούμε ότι, σ' αντίθεση με τη $u_n(t)$, που έχει πεπερασμένα όρια όταν $n \rightarrow \infty$ για $t > 0$ και $t < 0$, η $\delta_n(t)$ δεν έχει. Πράγματι, για $n \rightarrow \infty$ το εύρος του παλμού στο Σχήμα 1.6 τείνει στο μηδέν αλλά το πλάτος του τείνει στο άπειρο.

Αντίθετα, αν θεωρήσουμε την ακολουθία ολοκληρωμάτων της $\delta_n(t)$, αυτή έχει όριο (για την ακρίβεια, είναι σταθερή). Πράγματι



Σχήμα 1.6 Τυπικός όρος της ακολουθίας συναρτήσεων (1.13).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} n dt = 1$$

Οι συναρτήσεις $\delta_n(t)$, όπως ορίζονται από την (1.13), δεν είναι οι μόνες μ' αυτή την ιδιότητα. Μπορούμε να δείξουμε ότι και οι συναρτήσεις

$$\delta_n(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2} \quad (1.14a)$$

$$\delta_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\pi t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{j\Omega t} d\Omega \quad (1.14b)$$

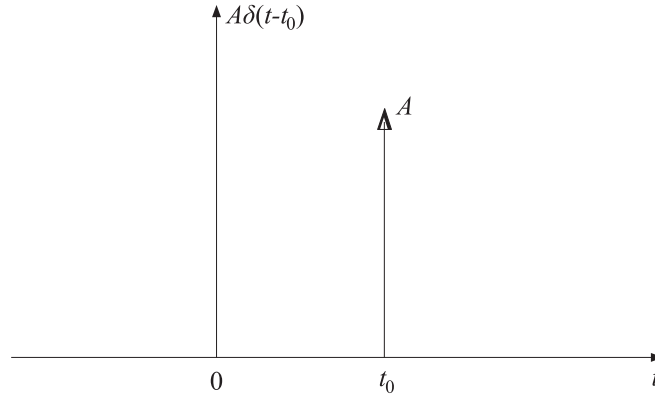
έχουν την ίδια συμπεριφορά.¹ Στα επόμενα κεφάλαια θα συναντήσουμε πολλές φορές όρια τέτοιων συναρτήσεων μέσα σε ολοκληρώματα.

Συνήθως είναι ευκολότερο όταν έχουμε ακολουθίες συναρτήσεων να δουλεύουμε με τη συνάρτηση στην οποία συγκλίνουν. Με συναρτήσεις της μορφής (1.13) αυτό δεν είναι δυνατόν, με βάση τον κλασικό ορισμό του ορίου. Μπορούμε όμως να το πετύχουμε με κατάλληλη γενίκευση.

Κρουστική συνάρτηση ή συνάρτηση Dirac. Ορίζουμε τη $\delta(t)$ να έχει την εξής ιδιότητα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t) dt = \varphi(0) \quad (1.15)$$

¹Το n δεν είναι ανάγκη να περιοριστεί στο σύνολο των ακεραίων αριθμών. Τα παραπάνω όρια και ορισμοί ισχύουν και με μια οποιαδήποτε παράμετρο x στη θέση του n .



Σχήμα 1.7 Κρουστική συνάρτηση πλάτους A τοποθετημένη στο $t = t_0$.

όπου $\varphi(t)$ οποιαδήποτε συνάρτηση *συνεχής* στο $t = 0$. Εάν $\varphi(t) = 1$ για κάθε t , τότε η (1.15) γίνεται

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.16)$$

Η $\delta(t)$ δεν είναι συνάρτηση με τη συνήθη έννοια. Ορίζεται μέσα από την ιδιότητά της, (1.15) και είναι γνωστή ως *συνάρτηση δέλτα* ή *συνάρτηση Dirac* ή *κρουστική συνάρτηση*. Η συνάρτηση $A\delta(t - t_0)$ χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) A\delta(t - t_0) dt = A\varphi(t_0)$$

για κάθε συνάρτηση $\varphi(t)$ συνεχή στο t_0 . Παριστάνεται γραφικά όπως στο Σχήμα 1.7, μ' ένα βέλος πλάτους A , τοποθετημένο στο $t = t_0$.

Γενικευμένες συναρτήσεις. Μια αυστηρότερη θεμελίωση της συνάρτησης $\delta(t)$ είναι πέρα από τα πλαίσια του παρόντος βιβλίου. Η $\delta(t)$ είναι μια ειδική περίπτωση αυτών που στα μαθηματικά ορίζονται ως *γενικευμένες συναρτήσεις* ή *κατανομές*. Σύμφωνα με τον ορισμό, μια κατανομή ή *συναρτησιοειδές*, $f(t)$, αντιστοιχεί σε μια συνεχή συνάρτηση $\varphi(t)$ μία τιμή $N_f[\varphi(t)]$. Εάν, για παράδειγμα, η $f(t)$ είναι μια συνήθης, καλά ορισμένη συνάρτηση, τότε εάν ορίσουμε το

$$N_f[\varphi(t)] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt, \quad (1.17)$$

η $f(t)$ μπορεί να ερμηνευτεί ως μια κατανομή που αντιστοιχεί στη $\varphi(t)$ την τιμή του ολοκληρώματος, σύμφωνα με τον ορισμό στην (1.17). Μ' αυτή την έννοια, η $\delta(t)$

είναι μια κατανομή που αντιστοιχεί στη $\varphi(t)$ την τιμή $\varphi(0)$. Πρέπει να τονιστεί ότι το ολοκλήρωμα στην (1.15) δεν έχει παρά συμβολικό και μόνο χαρακτήρα ώστε να συμπεριλάβει τη $\delta(t)$ κάτω από τον ίδιο συμβολισμό όπως η (1.17) (που έχει νόημα για συνήθεις μόνο συναρτήσεις). Ας δούμε τώρα πώς ένας τέτοιος ορισμός μπορεί να μας φανεί χρήσιμος.

Γενικευμένα όρια. Ας καταφύγουμε πάλι σε μια ακολουθία καλά ορισμένων συναρτήσεων, $f_n(t)$, που θα τις ερμηνεύσουμε ως κατανομές με τον ορισμό (1.17). Ας υποθέσουμε τώρα ότι για κάθε συνεχή $\varphi(t)$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt \quad (1.18)$$

(και πάλι το n μπορεί να είναι μια παράμετρος x). Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(t)$ ως όριο των κατανομών $f_n(t)$ και γράφουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t) \quad (1.19)$$

Με άλλα λόγια, ερμηνεύοντας τις $f_n(t)$ ως κατανομές, η (1.19) δεν σημαίνει ότι το όριο των συναρτήσεων $f_n(t)$ είναι η $f(t)$, αλλά ότι το όριο των τιμών, που οι κατανομές $f_n(t)$ αντιστοιχούν σε μια $\varphi(t)$, υπάρχει και είναι η τιμή που η $f(t)$ αντιστοιχεί στη $\varphi(t)$, με βάση τον ορισμό της $N_f[\varphi(t)]$.

Η κρουστική συνάρτηση ως όριο κατανομών. Θ' αποδείξουμε ότι, εάν η $\delta_n(t)$ δίνεται από την (1.13) και η $\varphi(t)$ είναι συνεχής στο $t = 0$, τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) \quad (1.20)$$

Απόδειξη:

1ος Τρόπος: (με την ευκαιρία ας ξαναθυμηθούμε λίγο μερικούς βασικούς ορισμούς)

Από τον ορισμό της συνέχειας έπεται ότι

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 > 0 : |\varphi(t) - \varphi(0)| < \epsilon, \quad t \in \left(0, \frac{1}{n_0}\right)$$

Συνεπώς, $\forall n > n_0$,

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n}} n \varphi(t) dt - \varphi(0) \right| = \left| \int_0^{\frac{1}{n}} n [\varphi(t) - \varphi(0)] dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^{\frac{1}{n}} n|\varphi(t) - \varphi(0)|dt \\
&< \epsilon \int_0^{\frac{1}{n}} n dt \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

Άρα

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 > 0 : \forall n > n_0, \left| \int_0^{\frac{1}{n}} n\varphi(t)dt - \varphi(0) \right| < \epsilon,$$

που σημαίνει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} n\varphi(t)dt = \varphi(0)$$

2ος Τρόπος:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} n\varphi(t)dt \simeq \varphi(0) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} n dt = \varphi(0)$$

Η προσέγγιση αυτή ισχύει, διότι, για αρκούντως μεγάλα n , $\varphi(t) \approx \varphi(0)$ λόγω της συνέχειας. \triangle

Σύμφωνα τώρα με τους ορισμούς που έχουμε δώσει, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t) = \delta(t)$$

όπου το όριο ερμηνεύεται ως όριο κατανομών, δηλαδή για κάθε συνάρτηση $\varphi(t)$ συνεχή στο $t = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι για

$$\delta_n(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t) = \delta(t)$$

Ιδιαίτερη σημασία για μας έχει το όριο των κατανομών (1.14b):

$$\delta_\Omega(t) = \frac{\sin \Omega t}{\pi t} \quad (1.21)$$

Αποδεικνύεται ότι, με τη γενικευμένη έννοια του ορίου,

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \delta_{\Omega}(t) = \delta(t) \quad (1.22)$$

δηλαδή

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Omega t}{\pi t} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) \quad (1.23)$$

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση, εκτός από τη συνέχεια θα πρέπει να υποθέσουμε για τη $\varphi(t)$ ότι είναι και συνάρτηση *φραγμένης κύμανσης* (*bounded variation*). Μια συνάρτηση λέγεται ότι είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης όταν το μήκος της καμπύλης της στο γράφημα $(t, \varphi(t))$ είναι πεπερασμένο για κάθε πεπερασμένο διάστημα του άξονα t . Όλες οι συναρτήσεις που θα μας αποσχολήσουν στο βιβλίο τούτο ανήκουν σ' αυτή την κατηγορία συναρτήσεων.

1.2.4 Ιδιότητες της Κρουστικής Συνάρτησης

1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \varphi(t) dt = \varphi(t_0) \quad (1.24)$$

Η απόδειξη είναι προφανής από τους ορισμούς.

2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha t) \varphi(t) dt = \frac{1}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi\left(\frac{t}{\alpha}\right) dt \quad (1.25)$$

Η απόδειξη είναι προφανής από τους ορισμούς και σε πλήρη συμφωνία με τις ιδιότητες της ολοκλήρωσης κατά Riemann, όπως τις γνωρίζουμε.

3. Παραγωγή

Έστω μια κατανομή $f(t)$. Ορίζουμε ως παράγωγο της κατανομής $f(t)$ τη νέα κατανομή $f^{(1)}(t)$ με την ιδιότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(1)}(t) \varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d\varphi}{dt} dt \quad (1.26)$$

για κάθε συνάρτηση $\varphi(t)$ που είναι παραγωγίσιμη και περιορισμένης έκτασης (δηλαδή, $\varphi(t) = 0$, $|t| > t_0$ για κάποιο t_0) ή τείνει στο μηδέν αρκούντως γρήγορα. Ο ορισμός αυτός δεν είναι αυθαίρετος αλλά υιοθετείται ώστε να υπάρχει συμβατότητα με αντίστοιχες ιδιότητες των συνήθων συναρτήσεων. Πράγματι, ο

παραπάνω ορισμός συνάδει πλήρως με τους κανόνες παραγοντικής ολοκλήρωσης, δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(1)}(t)\varphi(t)dt = \varphi(t)f(t)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{d\varphi(t)}{dt}dt$$

απ' όπου προκύπτει η (1.26) για $\varphi(t)$ περιορισμένου εύρους. Για την ειδική περίπτωση της κατανομής $\delta(t)$ η παράγωγος ορίζεται ως

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(1)}(t)\varphi(t)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\frac{d\varphi(t)}{dt}dt = - \left. \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

Με ανάλογο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε μια οικογένεια κατανομών με διαδοχική παραγωγή, που οδηγεί στη γεννήτρια εξίσωση

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t - t_0)\varphi(t)dt = (-1)^n \varphi^{(n)}(t_0) \quad (1.27)$$

υπό την προϋπόθεση ότι οι παράγωγοι $\varphi^{(n)}(t_0)$ υπάρχουν.

Παράδειγμα 1.1: Ν' αποδειχτεί ότι, υπό τη γενικευμένη έννοια των κατανομών,

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \quad (1.28)$$

Λύση: Είναι προφανές ότι η παράγωγος της $u(t)$ είναι μηδέν για $t \neq 0$ και για $t = 0$ δεν ορίζεται. Ερμηνεύοντας τη $u(t)$ ως κατανομή,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\varphi(t)dt = \int_0^{\infty} \varphi(t)dt \equiv N_u[\varphi(t)]$$

Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du(t)}{dt}\varphi(t)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\frac{d\varphi(t)}{dt}dt = \varphi(0) - \varphi(\infty) = \varphi(0)$$

για $\varphi(t)$ περιορισμένου εύρους. Άρα, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

△

Παρατήρηση: Το παραπάνω είναι συμβατό και με τα Σχήματα 1.5 και 1.6. Πράγματι, η ακολουθία $u_n(t)$ τείνει στη $u(t)$ και η ακολουθία παραγώγων της στη $\delta(t)$.

1.3 Κατηγορίες Συστημάτων

Στο προηγούμενο εδάφιο περιγράψαμε ειδικές περιπτώσεις σημάτων, που θα μας βοηθήσουν αργότερα στη μελέτη και ανάλυση πιο σύνθετων σημάτων. Στο εδάφιο αυτό θα ορίσουμε βασικές κατηγορίες συστημάτων που είναι αντιπροσωπευτικά ή προσεγγίζουν σε μεγάλο βαθμό φυσικά συστήματα. Η ανάπτυξη ενός κατάλληλου μοντέλου για την περιγραφή ενός φυσικού συστήματος είναι από τα καίρια θέματα της θεωρίας συστημάτων. Η υιοθέτηση ενός μοντέλου για τη μελέτη ενός φυσικού συστήματος έχει διττή σημασία. Αφενός μας διευκολύνει στην καλύτερη κατανόηση των νόμων που διέπουν τη λειτουργία και συμπεριφορά του συστήματος. Αφετέρου παρέχει τη δυνατότητα μελέτης του συστήματος με προσομοιώσεις, αξιοποιώντας τις δυνατότητες που απορρέουν από τις εξελίξεις στο χώρο της πληροφορικής. Σε πολλές περιπτώσεις ο πειραματισμός με πραγματικά συστήματα και περιβάλλοντα είναι ιδιαίτερα δαπανηρός ή/και επικίνδυνος (π.χ., το σύστημα ενός πυρηνικού αντιδραστήρα) και οι προσομοιώσεις παρέχουν μια ελκυστική διεξοδο.

1.3.1 Στατικά και Δυναμικά Συστήματα

Ένα σύστημα λέγεται *στατικό* ή σύστημα χωρίς μνήμη όταν, για κάθε χρονική στιγμή t , το σήμα εξόδου, $y(t)$, εξαρτάται μόνο από την τιμή του σήματος εισόδου, $x(t)$, την *ίδια* χρονική στιγμή. Παράδειγμα τέτοιου συστήματος είναι το Ωμικό στοιχείο R . Πράγματι, η τάση εξόδου, $y(t)$, συνδέεται με το ρεύμα εισόδου, $i(t)$, με την απλή σχέση $v(t) = i(t)R$. Σε αντίθεση με τα στατικά συστήματα, ένα σύστημα λέγεται *δυναμικό*, όταν η έξοδός του, $y(t)$, τη χρονική στιγμή t εξαρτάται από τις τιμές που παίρνει η είσοδος και σε χρονικές στιγμές διάφορες του t , ας πούμε σ' ένα διάστημα $[t_0, t]$. Τα δυναμικά δηλαδή συστήματα διαθέτουν μνήμη. Ένα τέτοιο σύστημα είναι η χωρητική αντίσταση. Πράγματι, η τάση εξόδου στα άκρα ενός πυκνωτή χωρητικότητας C συνδέεται με το ρεύμα εισόδου $i(t)$ με τη σχέση

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

Με άλλα λόγια, η $y(t)$ είναι το αποτέλεσμα του όλου ιστορικού της συνάρτησης $i(t)$. Τα δυναμικά συστήματα είναι τα πλέον ενδιαφέροντα από θεωρητική αλλά και από πρακτική άποψη.

1.3.2 Αιτιατά και Μη-Αιτιατά Συστήματα

Ένα σύστημα λέγεται *αιτιατό* όταν το σήμα εξόδου, $y(t)$, εξαρτάται από τις τιμές του σήματος εισόδου στην παρούσα, t , και προηγούμενες χρονικές στιγμές. Με

άλλα λόγια, μεταβολές στην έξοδο (αποτέλεσμα) ενός συστήματος έπονται των μεταβολών που επιτελούνται στην είσοδο (αιτία). Το σύστημα χωρητικής αντίστασης που αναφέραμε παραπάνω είναι αιτιατό.

Από την άλλη μεριά, όταν η έξοδος του συστήματος εξαρτάται (και) από μελλοντικές τιμές της εισόδου, το σύστημα καλείται *μη-αιτιατό*. Είναι φανερό ότι, εκτός κι αν δεν πρόκειται να λειτουργήσει σε πραγματικό χρόνο (real time), ένα τέτοιο σύστημα δεν είναι πραγματοποιήσιμο.

1.3.3 Γραμμικά και Μη-Γραμμικά Συστήματα

Πριν προβούμε στους αναγκαίους ορισμούς, θα επιμείνουμε για λίγο σε μια “λεπτομέρεια” που πολλές φορές παραλείπεται σε εγχειρίδια. Από τον ορισμό ενός δυναμικού συστήματος, η έξοδος του, $y(t)$, σ’ ένα διάστημα $[t_0, t_1]$ δεν εξαρτάται μόνο από το σήμα διέγερσης (εισόδου), $x(t)$, στο διάστημα αυτό, αλλά και από διεγέρσεις που (τυχόν) το σύστημα είχε υποστεί εκτός του παραπάνω χρονικού διαστήματος, λόγω της μνήμης που διαθέτει. Θα λέμε ότι ένα σύστημα *βρίσκεται σε ηρεμία* εάν αυτό δεν έχει υποστεί ουδεμία διέγερση από οποιοδήποτε σήμα, εκτός του διαστήματος $[t_0, t_1]$, κατά τη διάρκεια του οποίου το σύστημα διεγείρεται από το $x(t)$. Εάν το σύστημα είναι επιπλέον και αιτιατό, τότε αρκεί να μην υπάρχει διέγερση στο διάστημα πριν το t_0 (δηλαδή κατά το παρελθόν). Από φυσική άποψη, το να βρίσκεται ένα σύστημα σε ηρεμία σε δεδομένη χρονική στιγμή t_0 σημαίνει ότι δεν είχε *αποθηκευμένη ενέργεια* πριν την εφαρμογή του $x(t)$. Ως σύμβαση, θα θεωρούμε ότι οποιοδήποτε σύστημα είναι σε ηρεμία κατά τη χρονική στιγμή $-\infty$.

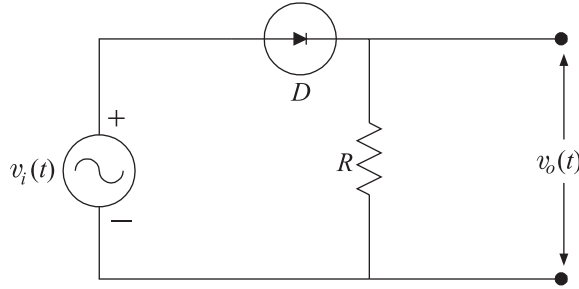
Από το Σχήμα 1.1, η έξοδος, $y(t)$, ενός συστήματος στη γενική της μορφή γράφεται ως

$$y(t) = F[x(t)] \quad (1.29)$$

Ένα σύστημα που είναι σε ηρεμία θα λέγεται *γραμμικό* τότε και μόνο τότε όταν δοθέντων δύο οποιονδήποτε σημάτων $x_1(t)$, $x_2(t)$ ισχύει

$$F[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = a_1 F[x_1(t)] + a_2 F[x_2(t)] \quad (1.30)$$

για οποιεσδήποτε σταθερές a_1, a_2 . Με άλλα λόγια, η απόκριση στο γραμμικό συνδυασμό δύο εισόδων ισούται με τον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των επιμέρους αποκρίσεων. Ένα απλό παράδειγμα γραμμικού συστήματος είναι η χωρητική αντίσταση (γιατί;). Είναι προφανές ότι η παραπάνω ιδιότητα γενικεύεται για οποιονδήποτε γραμμικό συνδυασμό πεπερασμένου αριθμού σημάτων εισόδου. Εδώ βέβαια χρειάζεται προσοχή. Η ιδιότητα αυτή δεν γενικεύεται και για άπειρο αριθμό σημάτων. Δηλαδή, η γραμμικότητα ενός συστήματος $F(\cdot)$ δεν εξασφαλίζει



Σχήμα 1.8 Μη γραμμικό κύκλωμα.

ότι

$$F \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N a_i x_i(t) \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N a_i F[x_i(t)] \quad (1.31)$$

Για να ισχύει η (1.31) θα πρέπει η απεικόνιση $F(\cdot)$ να έχει επιπλέον ιδιότητες, συγκεκριμένα θα πρέπει να είναι “αρκούντως ομαλή” ώστε να είναι δυνατή η εναλλαγή της με το όριο. Οι απεικονίσεις που θα συναντήσουμε στα πλαίσια του βιβλίου αυτού πληρούν την ιδιότητα αυτή. Για περισσότερα πάνω σ’ αυτό το θέμα παραπέμπουμε τον αναγνώστη σε πιο προχωρημένα βιβλία, π.χ. [Kailath80].

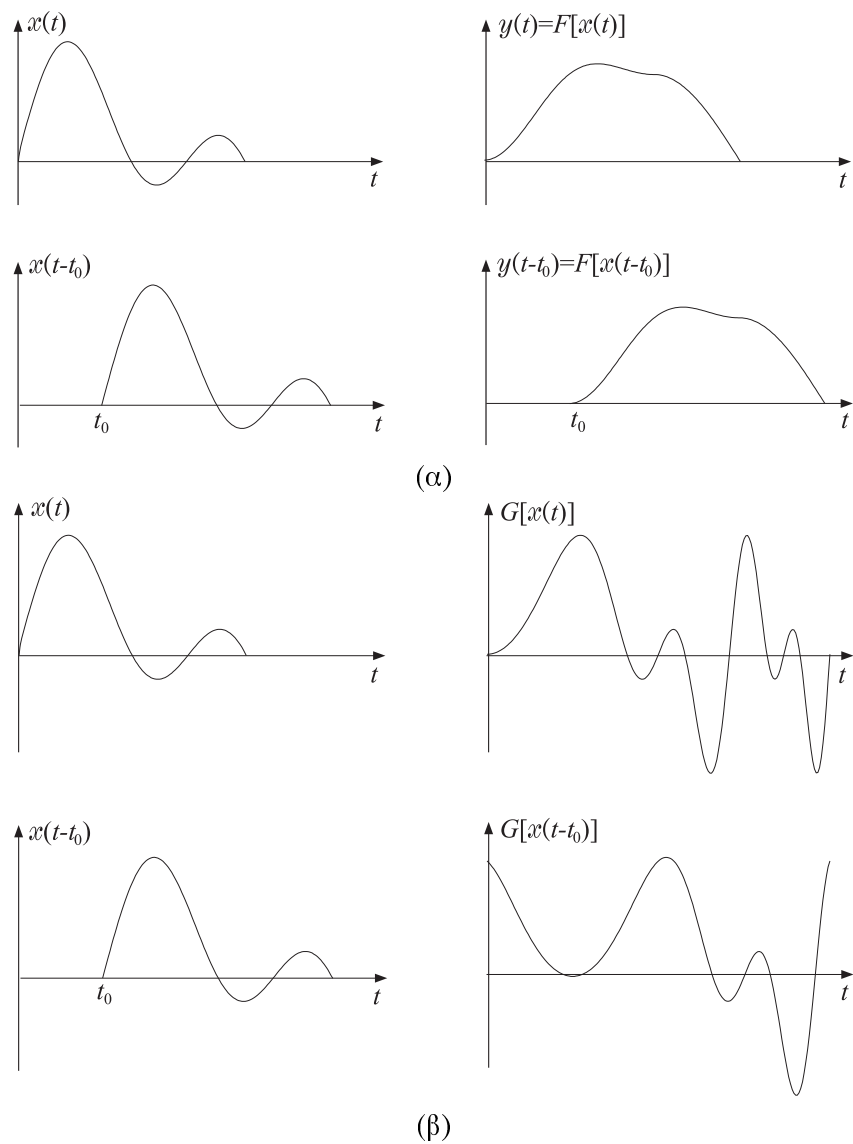
Εάν ένα σύστημα σε ηρεμία δεν υπακούει την (1.30) (που είναι γνωστή και ως *σχέση υπέρθεσης (superposition)*), θα λέγεται *μη γραμμικό*. Στο Σχήμα 1.8 δίνεται ένα παράδειγμα μη γραμμικού συστήματος που αποτελείται από την εν σειρά σύνδεση ενός Ωμικού στοιχείου R και μιας ιδανικής διόδου. Το σήμα εισόδου είναι η τάση v_i και v_o είναι η έξοδος.

1.3.4 Χρονικά Αμετάβλητα και Μεταβαλλόμενα Συστήματα

Ένα σύστημα λέγεται *χρονικά αμετάβλητο* τότε και μόνο τότε όταν χρονικές ολισθήσεις του σήματος εισόδου μεταφράζονται σε αντίστοιχες χρονικές ολισθήσεις στην έξοδο. Με άλλα λόγια, όταν

$$y(t) = F[x(t)] \iff y(t - t_0) = F[x(t - t_0)], \quad \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad (1.32)$$

Από φυσική άποψη, η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι το σήμα εξόδου δεν αλλάζει μορφή και παραμένει το ίδιο, ανεξάρτητα από το ποια χρονική στιγμή θα διεγείρουμε την είσοδο με το σήμα $x(t)$. Η μόνη διαφοροποίηση που υφίσταται είναι η αντίστοιχη χρονική ολίσθηση. Αυτό φαίνεται καλύτερα στο παράδειγμα του Σχήματος 1.9(α), όπου δίνονται οι εξοδοί ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος $F(\cdot)$ με είσοδο ένα σήμα και την ολίσθησή του. Σε αντιδιαστολή,



Σχήμα 1.9 Παράδειγμα εισόδου και εξόδου γραμμικού (α) χρονικά αμετάβλητου και (β) χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος.

το Σχήμα 1.9(β) δείχνει το αποτέλεσμα που έχει στην απόκριση ενός γραμμικού χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος $G(\cdot)$ μια ολίσθηση στην είσοδό του. Είναι φανερό ότι για ένα τέτοιο σύστημα μια χρονική ολίσθηση στην είσοδο μπορεί να οδηγήσει σε εντελώς διαφορετική έξοδο.

1.4 Κρουστική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

Στο εδάφιο αυτό θα εξάγουμε μια από τις πιο βασικές και γενικές σχέσεις στη θεωρία συστημάτων. Η σχέση αυτή περιγράφει κατά έναν γενικό τρόπο την έξοδο, $y(t)$, ενός γραμμικού (σε αρχική ηρεμία) συστήματος ως συνάρτηση δύο σημάτων: α) του σήματος εισόδου, $x(t)$, και β) της απόκρισης του συστήματος όταν αυτό διεγείρεται από το κρουστικό σήμα, $\delta(t)$. Η περιγραφή ενός συστήματος ως μιας απεικόνισης $F(\cdot)$, που επενεργεί πάνω στην είσοδο, δεν είναι πάντα εύκολη, ιδιαίτερα όταν το σύστημα είναι πολύπλοκο. Αντίθετα, η έξοδος (απόκριση) του συστήματος στη συγκεκριμένη είσοδο $\delta(t)$ θα μπορούσε ν' αποτυπωθεί και με πειραματικό τρόπο. Στο σημείο αυτό είναι αναγκαίο ν' αναφέρουμε ότι στην πράξη το σήμα $\delta(t)$ μπορεί να προσεγγιστεί από έναν παλμό “μικρού” εύρους και “μεγάλου” πλάτους (όπως υπαγορεύεται από τη σχέση (1.13)). Βέβαια, οι έννοιες “μικρό” και “μεγάλο” είναι πάντα σχετικές και εξαρτώνται από τις ιδιαιτερότητες του συστήματος αλλά και από την προσέγγιση που επιθυμούμε να επιτύχουμε.

Το σημείο εκκίνησης της απόδειξης είναι η προφανής σχέση

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta_n(t-\tau)d\tau \quad (1.33)$$

όπου $\delta_n(t)$ είναι μέλος της ακολουθίας συναρτήσεων που τείνει στη $\delta(t)$. Από την (1.33) και τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann έχουμε ότι

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_i x(t_i)\delta_n(t-t_i)\Delta\tau \quad (1.34)$$

Εάν η $x(t)$ είναι η είσοδος σ' ένα γραμμικό σύστημα που περιγράφεται από την $F(\cdot)$, τότε υπό την προϋπόθεση ότι η $F(\cdot)$ είναι αρκούντως ομαλή, μπορούμε να γράψουμε το εξής για την έξοδο του συστήματος:

$$\begin{aligned} y(t) = F[x(t)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_i x(t_i)F[\delta_n(t-t_i)]\Delta\tau \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)F[\delta_n(t-\tau)]d\tau \end{aligned} \quad (1.35)$$

Εάν οι $x(t)$ και $F[\delta_n(t)]$ πληρούν κατάλληλες συνθήκες, γνωστές από τη Μαθηματική Ανάλυση, μπορούμε ν' αντιμετωπίσουμε το \lim με το ολοκλήρωμα και

η (1.35) γίνεται

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t, \tau)d\tau \quad (1.36)$$

όπου

$$h(t, \tau) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} F[\delta_n(t - \tau)] = F[\delta(t - \tau)] \quad (1.37)$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο αυτό υπάρχει. Από εδώ και πέρα θα θεωρούμε ότι όλες αυτές οι προϋποθέσεις ισχύουν. Προφανώς, για τη χρήση της ιδιότητας της γραμμικότητας στην (1.35) έχουμε υποθέσει την αρχική ηρεμία του συστήματος (στο χρόνο $-\infty$). Η σχέση (1.36) είναι πολύ σημαντική και μας παρέχει την έξοδο ενός γραμμικού συστήματος για κάθε χρονική στιγμή t εάν γνωρίζουμε την είσοδο $x(t)$ και τη συνάρτηση $h(t, \tau)$. Η τελευταία είναι γνωστή και ως η *κρουστική απόκριση* του συστήματος $F(\cdot)$ και περιγράφει την έξοδο του συστήματος τη χρονική στιγμή t όταν αυτό έχει διεγερθεί από την κρουστική συνάρτηση στη χρονική στιγμή τ .

Οι σχέσεις (1.36) και (1.37) απλοποιούνται εάν στο γραμμικό σύστημα επιβάλουμε τον επιπλέον περιορισμό να είναι *χρονικά αμετάβλητο*. Τότε, από την (1.32) έχουμε

$$h(t, \tau) \equiv F[\delta(t - \tau)] = h(t - \tau, 0) \equiv h(t - \tau) \quad (1.38)$$

ή

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (1.39)$$

Η ισότητα των δύο ολοκληρωμάτων στην παραπάνω σχέση αποδεικνύεται εύκολα με αλλαγή μεταβλητών στο ολοκλήρωμα. Το ολοκλήρωμα στη σχέση (1.39) είναι γνωστό και ως *συνέλιξη* (*convolution*) ή *συγκερασμός* μεταξύ των $x(t)$ και $h(t)$. Η πράξη της συνέλιξης γράφεται συμβολικά ως

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (1.40)$$

Η ειδοποιός διαφορά μεταξύ των (1.36) και (1.39) είναι ότι η τιμή της κρουστικής απόκρισης στην (1.39) εξαρτάται από τη χρονική διαφορά των t και τ και όχι από αυτές καθεαυτές τις τιμές τους. Με άλλα λόγια, σ' ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ) σύστημα αρκεί η γνώση μίας και μόνο συνάρτησης (της $h(t)$) για να περιγραφεί πλήρως η σχέση εισόδου, $x(t)$, και εξόδου, $y(t)$, του συστήματος. Κάθε ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται πλήρως από την κρουστική του απόκριση, η οποία, στην πράξη, μπορεί να υπολογιστεί πειραματικά. Στη συνέχεια, η απόκριση του συστήματος σε οποιαδήποτε διέγερση της εισόδου υπολογίζεται από τη συνέλιξη του σήματος εισόδου και της κρουστικής απόκρισης. Η σχέση εισόδου - εξόδου

για ΓΧΑ συστήματα, που περιγράφεται από τη συνέλιξη, είναι μια από τις πιο γενικές και κομψές σχέσεις της θεωρίας συστημάτων.

Στην περίπτωση που το ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό, τα όρια ολοκλήρωσης του συνελικτικού ολοκληρώματος στην (1.39) απλοποιούνται σε

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (1.41)$$

Πράγματι, όταν το σύστημα είναι αιτιατό, η τιμή της εξόδου $y(t)$ δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου ($\tau > t$). Από την (1.39) είναι αμέσως εμφανές ότι αυτό εξασφαλίζεται εάν η κρουστική απόκριση, $h(t)$, είναι μηδέν για $t < 0$. Δεν είναι δύσκολο ν' αποδειχτεί ότι ο περιορισμός αυτός αποτελεί μια *ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα σύστημα αιτιατό* (βλ. Πρόβλημα 9). Για το λόγο αυτό, ένα σήμα που ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη, δηλαδή είναι μηδέν σε αρνητικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής του, καλείται *αιτιατό*.

Παράδειγμα 1.2: Η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 1.10(α). Κατά τη χρονική στιγμή $t = 1$ εφαρμόζεται στο σύστημα, που υποθέτουμε ότι είναι σε αρχική ηρεμία, το σήμα του Σχήματος 1.10(β). Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος για κάθε χρονική στιγμή t .

Λύση: Όπως προκύπτει από το ολοκλήρωμα της συνέλιξης (1.39), το όρισμα του ολοκληρώματος είναι το γινόμενο της $x(\tau)$ με την κατοπτρική, ως προς το μηδέν, συνάρτηση της $h(\tau)$, ολισθημένη στη χρονική στιγμή t στην οποία θέλουμε να υπολογίσουμε την έξοδο $y(t)$. Στα Σχήματα 1.10(γ) και 1.10(δ) φαίνονται οι $h(-\tau)$ και $h(t-\tau)$, αντίστοιχα, για κάποιο t . Από τη μορφή των συναρτήσεων αυτών διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. $t < 1$ (βλ. Σχήμα 1.10(ε)). Για την περίπτωση αυτή έχουμε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$$

2. $1 \leq t \leq 2$ (βλ. Σχήμα 1.10(στ)). Είναι $y(t) = \int_1^t d\tau = t - 1$

3. $2 < t \leq 4$ (βλ. Σχήμα 1.10(ζ)). Είναι $y(t) = \int_1^2 d\tau = 1$

4. $4 < t \leq 5$ (βλ. Σχήμα 1.10(η)). Είναι $y(t) = \int_{t-3}^2 d\tau = 5 - t$

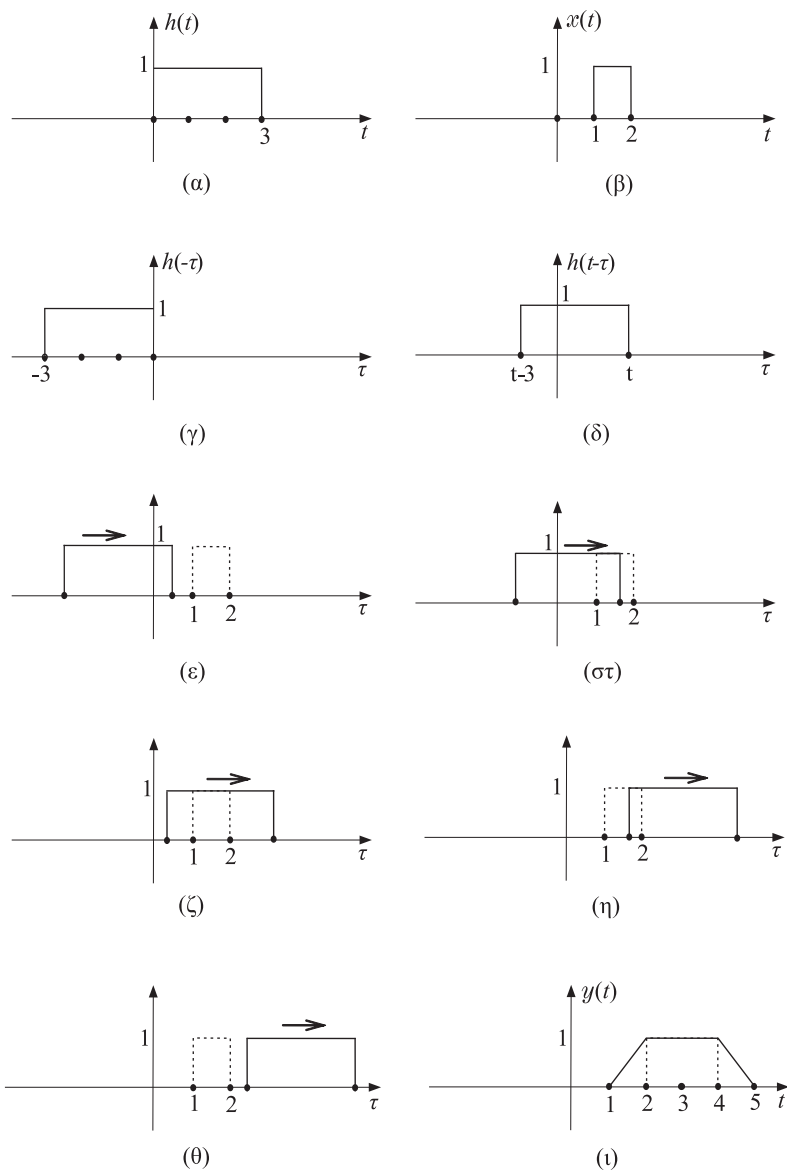
5. $5 < t$ (βλ. Σχήμα 1.10(θ)). Είναι $y(t) = 0$

Η έξοδος $y(t)$ φαίνεται στο Σχήμα 1.10(ι).

△

Παρατηρήσεις:

α) Για τον υπολογισμό της συνέλιξης:



Σχήμα 1.10 Υπολογισμός συνέλιξης.

1. Υπολογίζουμε την κατοπτρική ως προς το μηδέν της μιας εκ των δύο συναρτήσεων
2. Ολισθαίνουμε την κατοπτρική συνάρτηση κάθε φορά στο εκάστοτε t
3. Πολλαπλασιάζουμε $x(\tau)h(t - \tau)$ και ολοκληρώνουμε.

β) Η έξοδος του συστήματος είναι πιο διευρυμένη (μεγαλύτερο διάστημα στο οποίο είναι μη μηδενική) τόσο σε σχέση με την είσοδο όσο και με την κρουστική απόκριση. Αυτό ισχύει γενικότερα για οποιοδήποτε ΓΧΑ σύστημα με μνήμη, δηλαδή με κρουστική απόκριση που δεν είναι της μορφής $h(t) = \alpha\delta(t - t_0)$.

1.5 Ιδιότητες της Συνέλιξης

Θα εστιάσουμε σε τέσσερις βασικές ιδιότητες της συνέλιξης που έχουν άμεση σχέση με τη διασύνδεση ΓΧΑ συστημάτων.

1. Αντιμεταθετική ιδιότητα

$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$$

Η ιδιότητα έχει ήδηδειχθεί στην (1.39). Η φυσική σημασία της φαίνεται στο Σχήμα 1.11(α).

2. Προσεταιριστική ιδιότητα

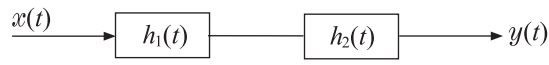
$$h_2(t) * [h_1(t) * x(t)] = [h_2(t) * h_1(t)] * x(t) = [h_1(t) * h_2(t)] * x(t) \quad (1.42)$$

Η φυσική σημασία της παραπάνω ιδιότητας φαίνεται στο Σχήμα 1.11(β). Όταν δύο συστήματα συνδέονται εν σειρά, το σύστημα είναι ισοδύναμο μ' ένα τρίτο σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση είναι η συνέλιξη των διασυνδεμένων συστημάτων. Η απόδειξη της παραπάνω ιδιότητας απορρέει από τον ορισμό της συνέλιξης. Πράγματι, έστω

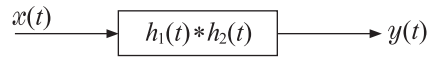
$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_1(t - \tau)d\tau$$

Τότε

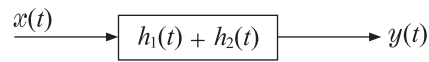
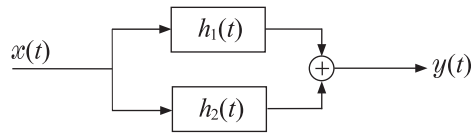
$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau)h_2(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(s)h_1(\tau - s)h_2(t - \tau)ds d\tau \end{aligned}$$



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 1.11 Ερμηνεία των ιδιοτήτων της συνέλιξης.

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t - \tau = \phi$ παίρνουμε τελικά

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_2(\phi) h_1(t - s - \phi) d\phi \right] ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h(t - s) ds \end{aligned}$$

όπου

$$h(t) \equiv h_1(t) * h_2(t)$$

Άρα τα δύο συστήματα ισοδυναμούν μ' ένα τρίτο σύστημα που έχει κρουστική απόκριση $h(t)$.

3. Επιμεριστική ιδιότητα

$$[h_1(t) + h_2(t)] * x(t) = h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t)$$

Η απόδειξη απορρέει άμεσα από τους ορισμούς. Η φυσική σημασία της επιμεριστικής ιδιότητας φαίνεται στο Σχήμα 1.11(γ). Δυο συστήματα συνδεδεμένα παράλληλα ισοδυναμούν μ' ένα τρίτο σύστημα που έχει κρουστική απόκριση το άθροισμα των κρουστικών τους αποκρίσεων.

4. Ταυτοτική ιδιότητα

$$h(t) * \delta(t) = h(t)$$

Η απόδειξη είναι προφανής.

1.6 Ευστάθεια Συστημάτων

Η έννοια της ευστάθειας ενός συστήματος είναι κεντρικής σημασίας στη Θεωρία Συστημάτων. Στην ουσία, η απαίτησή μας για ευστάθεια ενός συστήματος ταυτίζεται με την απαίτηση τα εμπλεκόμενα σήματα να παραμένουν πεπερασμένα σε πλάτος. Υπάρχουν περισσότεροι του ενός ορισμοί της ευστάθειας. Στο παρόν κεφάλαιο θα ορίσουμε τη λεγόμενη *ευστάθεια φραγμένης εισόδου φραγμένης εξόδου (ΦΕΦΕ) (bounded input bounded output (BIBO))*. Έναν άλλο ορισμό της ευστάθειας θα συναντήσουμε αργότερα, στο Κεφάλαιο 4.

Ορισμός. Ένα σύστημα λέγεται ευσταθές τύπου ΦΕΦΕ τότε και μόνον τότε όταν για κάθε φραγμένη είσοδο η έξοδος του παραμένει φραγμένη.

Στη συνέχεια, θ' αποδείξουμε ότι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα ΓΧΑ σύστημα ευσταθές τύπου ΦΕΦΕ είναι η

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (1.43)$$

δηλαδή, η κρουστική του απόκριση να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη: Η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος δίνεται από την

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

από την οποία συνεπάγεται ότι

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| |h(t - \tau)| d\tau \quad (1.44)$$

Εάν η είσοδος είναι φραγμένη, τότε

$$|x(\tau)| \leq M < \infty$$

όπου M μια σταθερά. Αντικαθιστώντας την παραπάνω στην (1.44) παίρνουμε

$$|y(t)| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\phi)| d\phi \quad (1.45)$$

έπειτα από αλλαγή μεταβλητών. Άρα, εάν η χρονστική απόκριση είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, τότε η έξοδος είναι φραγμένη για κάθε φραγμένη είσοδο.

Για να δείξουμε το αναγκαίο της συνθήκης, ας υποθέσουμε ότι η $h(t)$ δεν είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 και το σήμα

$$x(\tau) = \begin{cases} +1, & \text{εάν } h(t_0 - \tau) > 0 \\ 0, & \text{εάν } h(t_0 - \tau) = 0 \\ -1, & \text{εάν } h(t_0 - \tau) < 0 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω είσοδο στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης έπεται ότι

$$|y(t_0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} |h(t_0 - \tau)| d\tau \right| = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\phi)| d\phi = \infty$$

Άρα, εάν η χρονστική απόκριση δεν είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, υπάρχει τουλάχιστον ένα φραγμένο σήμα εισόδου το οποίο δημιουργεί στην έξοδο ένα μη φραγμένο σήμα, και, σύμφωνα με τον ορισμό, το σύστημα δεν είναι ευσταθές. \triangle

1.7 Απόκριση ΓΧΑ Συστημάτων σε Διεγέρσεις Απλής Συχνότητας

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με χρονστική απόκριση $h(t)$. Το ζητούμενο στο παρόν εδάφιο είναι ο υπολογισμός του σήματος εξόδου όταν η είσοδος του συστήματος είναι το μιγαδικό εκθετικό σήμα απλής συχνότητας

$$x(t) = Ae^{j\Omega_0 t}$$

Η έξοδος δίνεται από την

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \\ &= A \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\Omega_0(t-\tau)} d\tau \\ &= Ae^{j\Omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\Omega_0 \tau} d\tau \end{aligned}$$

ή

$$y(t) = AH(\Omega_0)e^{j\Omega_0 t}$$

όπου $H(\Omega_0)$ η ανεξάρτητη του χρόνου (μυγαδική) ποσότητα

$$H(\Omega_0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\Omega_0 \tau} d\tau \quad (1.46)$$

Με άλλα λόγια, το σήμα στην έξοδο είναι το ίδιο το περιοδικό σήμα $e^{j\Omega_0 t}$ αλλά με διαφορετικό πλάτος και φάση. Πράγματι, η μυγαδική ποσότητα $H(\Omega_0)$ γράφεται ως

$$H(\Omega_0) = |H(\Omega_0)|e^{j\phi(\Omega_0)}$$

όπου $|H(\Omega_0)|$ το μέτρο και $\phi(\Omega_0)$ η φάση, που εξαρτώνται προφανώς από τη συχνότητα Ω_0 του σήματος εισόδου. Άρα

$$y(t) = A|H(\Omega_0)|e^{j[\Omega_0 t + \phi(\Omega_0)]} \quad (1.47)$$

Το πλάτος, δηλαδή, της εξόδου είναι $A|H(\Omega_0)|$ και η φάση του είναι μετατοπισμένη κατά $\phi(\Omega_0)$ σε σχέση μ' αυτή του σήματος εισόδου. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η $H(\Omega_0)$ δεν είναι τίποτε άλλο από ένα μαθηματικό μετασχηματισμό (που δρᾷ πάνω στη συνάρτηση $h(t)$ και δίνει μία άλλη συνάρτηση $H(\Omega)$) υπολογισμένο στην τιμή $\Omega = \Omega_0$.

Η ιδιαιτερότητα αυτή των ΓΧΑ συστημάτων καθιστά τα μαθηματικά εργαλεία που θ' αναπτύξουμε στα επόμενα κεφάλαια ιδιαίτερα εύχρηστα για τη μελέτη τέτοιων συστημάτων. Συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε τρόπους περιγραφής ενός σήματος ως υπέρθεση σημάτων απλών συχνοτήτων. Έτσι, η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος θα είναι η υπέρθεση των ίδιων αυτών σημάτων, έχοντας βέβαια υποστεί την αλλαγή που επιβάλλει το σύστημα στο πλάτος και φάση του κάθε σήματος χωριστά, ανάλογα με τη συχνότητά του.

1.8 Λυμένα Προβλήματα

1. Να υπολογιστεί η βασική περίοδος για καθένα από τα παρακάτω περιοδικά σήματα:

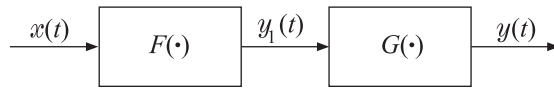
α) $x_1(t) = e^{j0.25\pi t}$

β) $x_2(t) = \cos(0.2\pi t)$

γ) $x_3(t) = 2\cos(0.1\pi t) + 2\sin(0.2\pi t)$

Λύση:

α) Είναι $x_1(t) = e^{j\frac{2\pi}{8}t}$ άρα η βασική του περίοδος είναι $T = 8$.



Σχήμα 1.12 Σύνδεση δύο συστημάτων σε σειρά (βλ. Λυμένο Πρόβλημα 3).

β) Η βασική περίοδος του $x_2(t) = \cos(0.2\pi t) = \cos\left(\frac{2\pi}{10}t\right)$ είναι $T = 10$.

γ) Η βασική περίοδος του $x_3(t) = 2\cos(0.1\pi t)$ είναι $\frac{2\pi}{0.1\pi} = 20$, ενώ αυτή του $2\sin(0.2\pi t)$ είναι $\frac{2\pi}{0.2\pi} = 10$. Επειδή το 20 είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 10 (βλ. Πρόβλημα 3), είναι και περίοδος του $2\sin(0.2\pi t)$. Άρα, η βασική περίοδος του $x_3(t)$ είναι 20. \triangle

2. Για καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

$$\begin{aligned} \alpha) y(t) &= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t-100), & t \geq 0 \end{cases} \\ \beta) y(t) &= \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-100), & x(t) \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

απαντήστε αν είναι:

1. Στατικό ή δυναμικό
2. Χρονικά αμετάβλητο ή μεταβαλλόμενο
3. Γραμμικό ή μη γραμμικό
4. Αιτιατό ή μη αιτιατό
5. Ευσταθές ή ασταθές τύπου ΦΕΦΕ.

Λύση:

- α) 1. Δυναμικό 2. Χρονικά μεταβαλλόμενο 3. Γραμμικό 4. Αιτιατό 5. Ευσταθές
 β) 1. Δυναμικό 2. Χρονικά αμετάβλητο 3. Μη γραμμικό 4. Αιτιατό 5. Ευσταθές.
 \triangle

3. Να δείξετε ότι η σύνδεση σε σειρά δύο ευσταθών συστημάτων τύπου ΦΕΦΕ είναι σύστημα ευσταθές τύπου ΦΕΦΕ.

Λύση: Έστω $F(\cdot)$ και $G(\cdot)$ τα δύο ΦΕΦΕ ευσταθή συστήματα που συνδέονται έτσι ώστε η έξοδος, $y_1(t)$, του πρώτου να είναι είσοδος στο δεύτερο. Τότε η είσοδος $x(t)$ στο συνολικό σύστημα θα είναι είσοδος στο $F(\cdot)$ και η έξοδος $y(t)$ του $G(\cdot)$ θα είναι η έξοδος του συνολικού συστήματος, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.12. Εφόσον το $F(\cdot)$ είναι ευσταθές, αν η $x(t)$ είναι φραγμένη, τότε και η $y_1(t)$ θα είναι φραγμένη. Αλλά αφού και το $G(\cdot)$ είναι ευσταθές και η είσοδός του είναι φραγμένη, το ίδιο θα ισχύει και για την έξοδό του, $y(t)$, που είναι η έξοδος

του όλου συστήματος. Έπεται, λοιπόν, ότι και το σύστημα $G[F(\cdot)]$ είναι ΦΕΦΕ ευσταθές. Η απόδειξη της ευστάθειας σειριακής διασύνδεσης συστημάτων που είναι ΓΧΑ με βάση τη συνθήκη (1.43) ζητείται στο Πρόβλημα 11. \triangle

4. Θεωρήστε ένα χρονικά αμετάβλητο σύστημα $F(\cdot)$ με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$. Δείξτε ότι εάν το $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T , το ίδιο ισχύει και για το $y(t)$. Δώστε ένα παράδειγμα γραμμικού χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος και μιας περιοδικής εισόδου στο σύστημα αυτό για την οποία η αντίστοιχη έξοδος δεν είναι περιοδική.

Λύση: Έχουμε $y(t) = F[x(t)]$. Εφόσον το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, θα ισχύει και η $y(t+T) = F[x(t+T)]$. Λόγω περιοδικότητας του $x(t)$ με περίοδο T , $x(t+T) = x(t)$. Επομένως

$$y(t+T) = F[x(t+T)] = F[x(t)] = y(t)$$

που σημαίνει ότι και η έξοδος $y(t)$ είναι περιοδική με περίοδο T .

Για να δούμε ότι το παραπάνω δεν ισχύει, γενικά, για χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα, ας θεωρήσουμε το σύστημα $y(t) = G[x(t)] \equiv x(t^2)$, που είναι γραμμικό και χρονικά μεταβαλλόμενο. Έστω η είσοδος $x(t) = \cos(2\pi t)$, που είναι περιοδική με περίοδο $T = 1$. Είναι σαφές ότι η έξοδος $y(t) = \cos(2\pi t^2)$ δεν είναι περιοδική αφού δεν υπάρχει αριθμός T' τέτοιος ώστε

$$\cos(2\pi t^2) = \cos[2\pi(t+T')^2] = \cos[2\pi t^2 + 2\pi(2T't + T'^2)]$$

Κάτι τέτοιο θ' απαιτούσε η ποσότητα $2T't + T'^2$ να είναι ακέραιος για κάθε t . \triangle

1.9 Προβλήματα

1. Να παρασταθούν γραφικά τα ακόλουθα σήματα:

- α) $x_1(t) = u(t)u(10-t)$
- β) $x_2(t) = 2u(t) + \delta(t-2)$
- γ) $x_3(t) = 2u(t)\delta(t-2)$

2. Να παρασταθούν γραφικά τα ακόλουθα σήματα και να υπολογιστεί η ολική τους ενέργεια (η οποία δίνεται από το ολοκλήρωμα του τετραγώνου του μέτρου του σήματος: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$):

- α) $x_1(t) = e^{-10t}u(t)$
- β) $x_2(t) = u(t) - u(t-15)$
- γ) $x_3(t) = \cos(10\pi t)u(t)u(2-t)$

3. Τα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι περιοδικά σήματα με περιόδους T_1 και T_2 αντίστοιχα. Ποια συνθήκη πρέπει να ισχύει ώστε το άθροισμα $x_1(t) + x_2(t)$ να είναι περιοδικό σήμα και ποια είναι η περίοδος αυτού του σήματος;

4. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_{-1}^1 (3t^2 + 1)\delta(t)dt$

β) $\int_1^2 (3t^2 + 1)\delta(t)dt$

γ) $\int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + \cos \pi t)\delta(t-1)dt$

δ) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta(2t-2)dt$

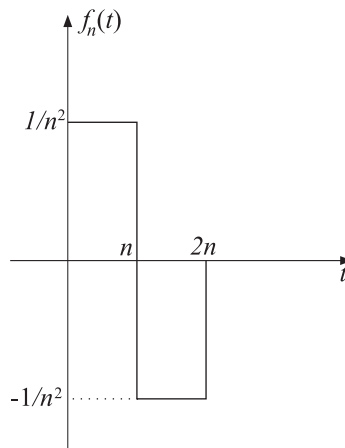
ε) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta^{(1)}(t)dt$

5. Εάν η $f_n(t)$ είναι η ακολουθία συναρτήσεων του Σχήματος 1.13, ν' αποδειχτεί ότι:

α) $\lim_{n \rightarrow 0} f_n(t) = \delta^{(1)}(t)$ υπό την έννοια των κατανομών (το Σχήμα 1.13 οδηγεί στο να ερμηνεύσουμε τη $\delta^{(1)}(t)$ ως δίπολο).

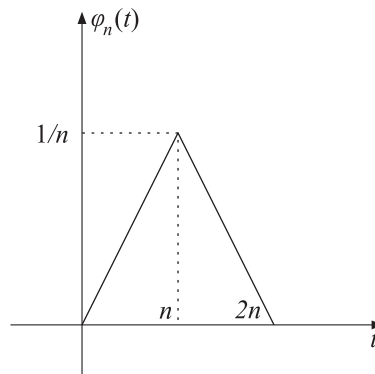
β) Η $f_n(t)$ είναι η ακολουθία παραγώγων των συναρτήσεων $\varphi_n(t)$ που φαίνονται στο Σχήμα 1.14.

γ) $\lim_{n \rightarrow 0} \varphi_n(t) = \delta(t)$.



Σχήμα 1.13 Όρος της ακολουθίας συναρτήσεων $f_n(t)$ του Προβλήματος 5.

6. Παρακάτω δίνεται η σχέση εισόδου - εξόδου για ορισμένα συστήματα ($x(t)$ η είσοδος και $y(t)$ η έξοδος). Να μελετηθούν τα συστήματα αυτά σε σχέση με τις ιδιότητες: χρονική μεταβλητότητα, γραμμικότητα, αιτιότητα και ευστάθεια τύπου



Σχήμα 1.14 Όρος της ακολουθίας συναρτήσεων $\varphi_n(t)$ του Προβλήματος 5.

ΦΕΦΕ.

- α) $y(t) = e^{x(t)}$
- β) $y(t) = x(t) - x(1-t)$
- γ) $y(t) = (\sin 6t)x(t)$
- δ) $y(t) = \int_{-\infty}^{3t} x(\tau) d\tau$
- ε) $y(t) = x(t/2)$

7. Για καθένα από τα παρακάτω συστήματα δίνεται η είσοδος $x(t)$ και η χρονική του απόκριση $h(t)$ και ζητείται να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$:

α) $x(t) = e^{-at}u(t)$, $h(t) = e^{-bt}u(t)$ (Να μελετηθούν οι περιπτώσεις $a \neq b$ και $a = b$.)

β) $x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$, $h(t) = e^{2t}u(1-t)$

γ) $x(t) = e^{-2t}u(t+2) + e^{3t}u(-t+2)$, $h(t) = e^t u(t-1)$.

8. Δίνεται ένα γραμμικό σύστημα του οποίου η απόκριση στη συνάρτηση $\delta(t-\tau)$ είναι η $h(t, \tau) = u(t-\tau) - u(t-2\tau)$.

α) Είναι το σύστημα χρονικά αμετάβλητο;

β) Είναι το σύστημα αιτιατό;

γ) Ποια είναι η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $x(t) = u(t-1) - u(t-3)$;

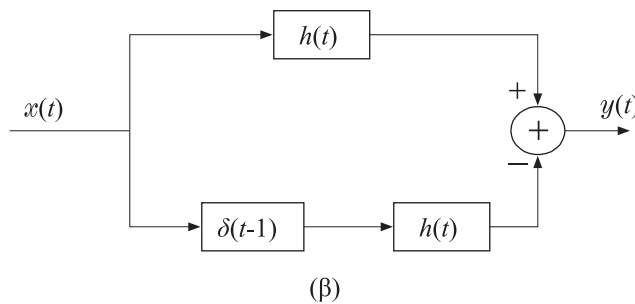
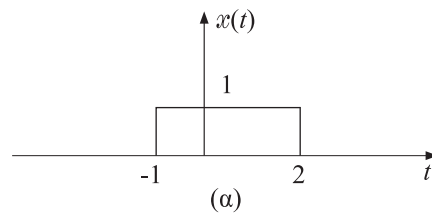
9. Ν' αποδειχτεί ότι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα ΓΧΑ σύστημα να είναι αιτιατό είναι η χρονική του απόκριση να μηδενίζεται για αρνητικές τιμές του χρόνου, δηλαδή

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

10. Δίνεται ένα ΓΧΑ σύστημα με την παρακάτω σχέση εισόδου - εξόδου:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau - 2) d\tau$$

- α) Ποια είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος;
 β) Ποια είναι η απόκριση του συστήματος αυτού όταν η είσοδος δίνεται από το Σχήμα 1.15(α);
 γ) Θεωρήστε τη διασύνδεση των συστημάτων του Σχήματος 1.15(β) (όπου $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση που έχετε ήδη υπολογίσει στο ερώτημα (α)). Να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$ όταν η είσοδος $x(t)$ είναι όπως στο ερώτημα (β).



Σχήμα 1.15 (α) Σήμα εισόδου. (β) Διασύνδεση συστημάτων. (βλ. Πρόβλημα 10)

11. Ν' αποδείξετε, χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ευστάθειας τύπου ΦΕΦΕ (εξ. (1.43)), ότι η σειριακή διασύνδεση ΦΕΦΕ ευσταθών ΓΧΑ συστημάτων οδηγεί σε ΦΕΦΕ ευσταθές σύστημα.

Κεφάλαιο 2

Μετασχηματισμός και Σειρά Fourier

2.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι τα σήματα που χαρακτηρίσαμε ως σήματα απλής συχνότητας διέρχονται αναλλοίωτα (με εξαίρεση μια πολλαπλασιαστική ποσότητα) από ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα. Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε και θα μελετήσουμε τα μαθηματικά εκείνα εργαλεία που επιτρέπουν την ανάλυση ενός σήματος σε σήματα απλών συχνοτήτων. Η γέννηση και οι ρίζες της θεωρίας αυτής οφείλονται στον Γάλλο φυσικο-μαθηματικό Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), ο οποίος υιοθέτησε, για πρώτη φορά, την ανάλυση μιας (σύνθετης) συνάρτησης σε άθροισμα συναρτήσεων απλών συχνοτήτων για να μελετήσει φαινόμενα διάδοσης της θερμότητας. Η ανάλυση μιας σύνθετης ποσότητας σε απλούστερες συνιστώσες, που καθιστούν τη μελέτη ενός προβλήματος ευκολότερη, δεν είναι νέα. Για παράδειγμα, στη γραμμική άλγεβρα ένα διάνυσμα στον n -διάστατο χώρο αναλύεται στις n συνιστώσες του, που είναι οι προβολές του σε μια (ορθοκανονική) βάση που παράγει το χώρο. Θα δούμε ότι το πρόβλημα της ανάλυσης ενός σήματος σε άθροισμα σημάτων απλών συχνοτήτων είναι ουσιαστικά το ίδιο με αυτό της Γραμμικής Άλγεβρας που αναφέραμε.

2.2 Μετασχηματισμός Fourier

2.2.1 Ορισμός Μετασχηματισμού Fourier

Έστω μια συνάρτηση $x(t)$. Ορίζουμε ως *μετασχηματισμό Fourier (MF)* της $x(t)$ τη μιγαδική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής $X(\Omega)$:

$$X(\Omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \quad (2.1)$$

υπό την προϋπόθεση βέβαια ότι το ολοκλήρωμα αυτό υπάρχει. Με άλλα λόγια, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, η ποσότητα στην (1.46) του προηγούμενου κεφαλαίου είναι ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ του ΓΧΑ συστήματος.

Παράδειγμα 2.1: Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier ενός τετραγωνικού παλμού $x(t) \equiv P_{T/2}(t)$ (Σχήμα 2.1(α)):

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

Λύση: Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier έχουμε:

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\Omega t} dt \\ &= \left. \frac{1}{-j\Omega} e^{-j\Omega t} \right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{2}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega T}{2}\right) \end{aligned}$$

ή

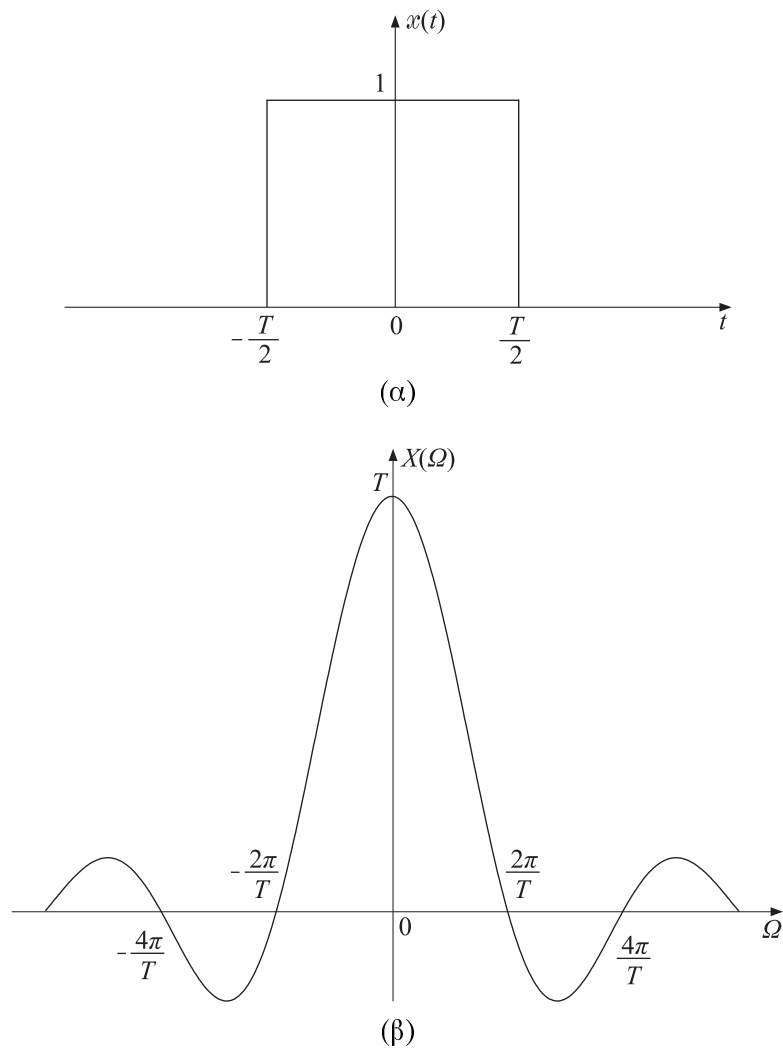
$$X(\Omega) = T \frac{\sin(\frac{\Omega T}{2})}{\frac{\Omega T}{2}} \equiv T Sa\left(\frac{\Omega T}{2}\right) \quad (2.2)$$

Η συνάρτηση $Sa(x)$ ορίζεται ως

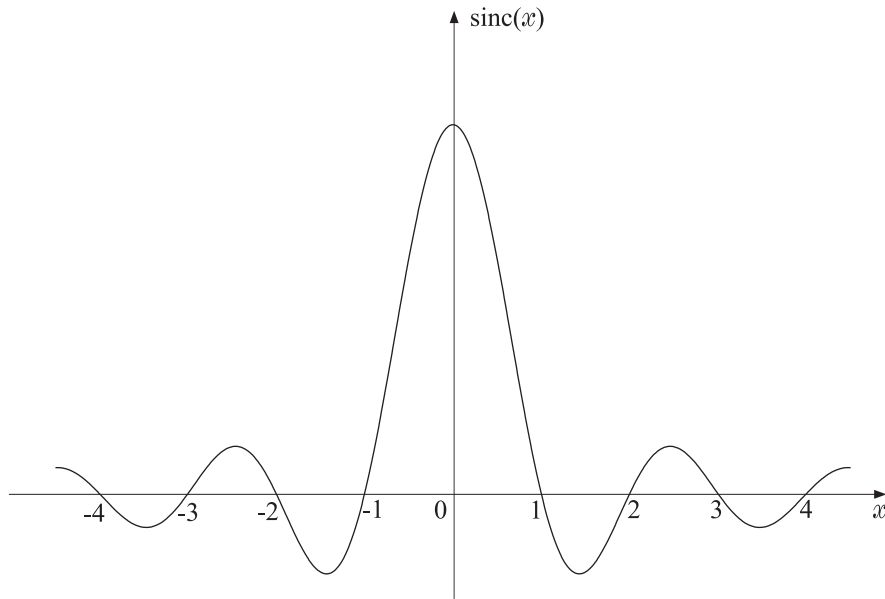
$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x} = \text{sinc}\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

όπου η

$$\text{sinc}(x) \equiv \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$



Σχήμα 2.1 (α) Τετραγωνικός παλμός και (β) ο MF του.



Σχήμα 2.2 Η συνάρτηση $\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$.

είναι γνωστή και ως *συνάρτηση δειγματοληψίας*. Το αντίστοιχο γράφημα φαίνεται στο Σχήμα 2.2. Η συνάρτηση αυτή είναι ιδιαίτερης σημασίας και τη συναντάμε συχνά τόσο στην επεξεργασία σημάτων όσο και στις επικοινωνίες. Όπως φαίνεται από το γράφημά της, η συνάρτηση $\text{sinc}(x)$ αποτελείται από έναν κύριο λοβό με κέντρο το $x = 0$ και εύρος 2 και δευτερεύοντες λοβούς εκατέρωθεν. Διέρχεται περιοδικά από το μηδέν, με περίοδο 1. Αντίστοιχα, ο μετασχηματισμός Fourier, $X(\Omega)$, του τετραγωνικού παλμού (βλ. Σχήμα 2.1(β)) διέρχεται από το μηδέν περιοδικά με περίοδο $\frac{2\pi}{T}$. Το πλάτος του κύριου λοβού είναι $\frac{4\pi}{T}$, δηλαδή αυξάνεται (μειώνεται) με μειούμενο (αυξανόμενο) πλάτος παλμού. Το ύψος των δευτερευόντων λοβών μειώνεται ασυμπτωτικά στο μηδέν. \triangle

2.2.2 Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

Έχοντας ορίσει το μετασχηματισμό Fourier, $X(\Omega)$, μιας συνάρτησης, $x(t)$, τίθεται το εξής εύλογο ερώτημα: είναι αρκετή η γνώση της $X(\Omega)$ για ν' ανακτήσουμε τη συνάρτηση $x(t)$; Θ' αποδείξουμε ότι εάν το ολοκλήρωμα

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

υπάρχει, τότε κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις:

$$x(t) = \hat{x}(t)$$

Η αυστηρή απόδειξη του παραπάνω είναι πέρα από τα πλαίσια του βιβλίου αυτού. Για μια πιο θεμελιωμένη απόδειξη ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στα σχετικά βιβλία της βιβλιογραφίας, π.χ. [Παρου77]. Παρακάτω θα επιχειρήσουμε μια απλοποιημένη απόδειξη κάτω από μια σειρά υποθέσεων, οι οποίες όμως ισχύουν για τα σήματα που θα διαπραγματευτούμε στο βιβλίο αυτό, όπως και για τα περισσότερα σήματα που συναντάμε στην πράξη. Η απόδειξη θα μπορούσε να παραλειφθεί σε μια πρώτη ανάγνωση. Θα περιοριστούμε σε συναρτήσεις *τμηματικά συνεχείς*. Μια συνάρτηση $x(t)$ καλείται τμηματικά συνεχής στο διάστημα $\alpha \leq t \leq \beta$ εάν το διάστημα $[\alpha, \beta]$ μπορεί να υποδιαιρεθεί σ' έναν πεπερασμένο αριθμό υποδιαστημάτων $t_1 \leq t \leq t_2$ έτσι ώστε:

- Η $x(t)$ να είναι συνεχής σε κάθε υποδιάστημα (t_1, t_2)
- Να υπάρχουν το δεξιό και αριστερό όριο της $x(t)$ στα άκρα των υποδιαστημάτων, δηλαδή να υπάρχουν τα $\lim_{t \rightarrow t_1^+} x(t)$ και $\lim_{t \rightarrow t_2^-} x(t)$.

Με άλλα λόγια, η $x(t)$ πρέπει να είναι συνεχής παντού εκτός από έναν πεπερασμένο αριθμό σημείων, όπου παρουσιάζει ασυνέχειες *πεπερασμένου ύψους*. Το γράφημα μιας τέτοιας συνάρτησης φαίνεται στο Σχήμα 2.3, με ασυνέχειες ύψους a_1, a_2, \dots, a_n . Έστω τώρα μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση $x(t)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

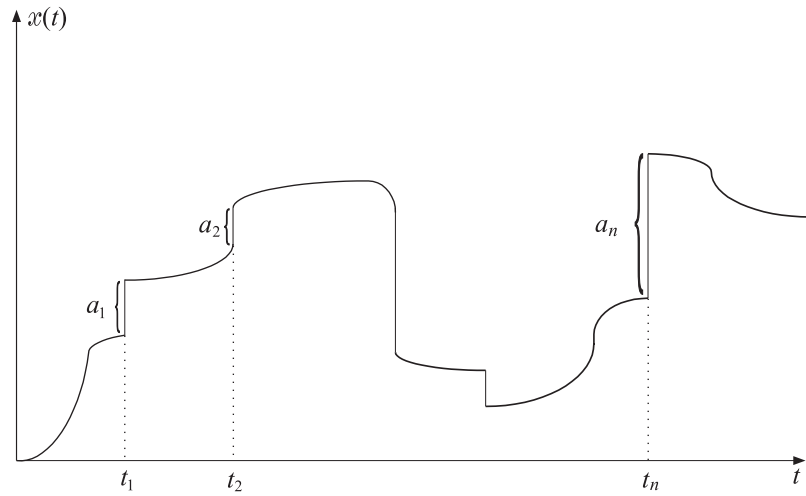
α) $x(t)$ *συνεχής*.

Ερμηνεύοντας την ολοκλήρωση με όρια τα $\pm\infty$ με βάση την “κατά Cauchy κύρια τιμή του ολοκληρώματος” (Cauchy principal value), έχουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \equiv \lim_{\Omega' \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega'}^{\Omega'} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (2.3)$$

Συνδυασμός των εξισώσεων (2.1) και (2.3) οδηγεί στην

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega &= \lim_{\Omega' \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega'}^{\Omega'} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\Omega \tau} d\tau \right] e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \lim_{\Omega' \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \Phi_{\Omega'}(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.4)$$



Σχήμα 2.3 Συνάρτηση με ασυνέχειες πεπερασμένου ύψους.

όπου

$$\begin{aligned}\Phi_{\Omega'}(t - \tau) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega'}^{\Omega'} e^{j\Omega(t-\tau)} d\Omega \\ &= \frac{\sin \Omega'(t - \tau)}{\pi(t - \tau)}\end{aligned}\quad (2.5)$$

Για να καταλήξουμε στην (2.4) υποθέσαμε ότι ισχύουν οι συνθήκες εκείνες που επιτρέπουν την εναλλαγή των δύο ολοκληρωμάτων. Υποθέτοντας, επιπλέον, ότι η $x(t)$ είναι φραγμένης κύμανσης (βλ. Κεφάλαιο 1) και με βάση την (1.23) καταλήγουμε στο ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$$

ή τελικά

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (2.6)$$

β) $x(t)$ ασυνεχής με πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών πεπερασμένου ύψους (βλ. Σχήμα 2.3).

Θα υποθέσουμε ότι η $x(t)$ αποτελείται από μια συνεχή συνιστώσα $x_c(t)$ και περιέχει μία ασυνέχεια πεπερασμένου ύψους. Η γενίκευση για περισσότερες ασυνέχειες είναι απλή επέκταση. Άρα:

$$x(t) = x_c(t) + ku(t - t_0)$$

όπου $u(t)$ η μοναδιαία βηματική συνάρτηση και t_0 το σημείο ασυνέχειας. Ακολουθώντας την ίδια πορεία όπως παραπάνω καταλήγουμε στην

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(\tau) \delta(t - \tau) d\tau + \alpha(t) = x_c(t) + \alpha(t)$$

όπου

$$\alpha(t) \equiv \lim_{\Omega' \rightarrow \infty} k \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau - t_0) \Phi_{\Omega'}(t - \tau) d\tau$$

Αλλά

$$u(\tau - t_0) = \begin{cases} 1, & \tau > t_0 \\ 0, & \tau < t_0 \end{cases}$$

Άρα

$$\alpha(t) = \lim_{\Omega' \rightarrow \infty} k \int_{t_0}^{\infty} \frac{\sin \Omega'(t - \tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau$$

Ορίζοντας τη μεταβλητή $y \equiv \Omega'(t - \tau)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= - \lim_{\Omega' \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \int_{\Omega'(t-t_0)}^{-\infty} \frac{\sin y}{y} dy \\ &= \frac{k}{\pi} \left[\lim_{\Omega' \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\Omega'(t-t_0)} \frac{\sin y}{y} dy \right] \end{aligned}$$

Αλλά

$$\lim_{\Omega' \rightarrow \infty} \Omega'(t - t_0) = \begin{cases} +\infty, & t > t_0 \\ 0, & t = t_0 \\ -\infty, & t < t_0 \end{cases}$$

Άρα

β.1) $t > t_0$

$$\alpha(t) = \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy$$

λόγω συμμετρίας ως προς το μηδέν της προς ολοκλήρωση συνάρτησης.

β.2) $t = t_0$

$$\alpha(t) = \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin y}{y} dy = \frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy$$

β.3) $t < t_0$

$$\alpha(t) = 0$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2} \quad (2.7)$$

καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\alpha(t) = \begin{cases} k, & t > t_0 \\ \frac{k}{2}, & t = t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$$

Άρα:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \begin{cases} x(t) = x_c(t) + ku(t - t_0), & t \neq t_0 \\ x_c(t_0) + \frac{k}{2}, & t = t_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Από τη (2.8) είναι προφανές ότι η συνάρτηση $x(t)$ είναι δυνατόν ν' ανακτηθεί από τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Fourier. Η τιμή που προκύπτει στο σημείο ασυνέχειας μπορεί να γραφτεί και ως:

$$x_c(t_0) + \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow t_0^+} x(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^-} x(t) \right] \quad (2.9)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα γενικεύεται με τρόπο προφανή και στην περίπτωση ύπαρξης N πεπερασμένου ύψους ασυνεχειών.

Αποδείξαμε επομένως ότι, αν $X(\Omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης $x(t)$ που πληροί τις προϋποθέσεις που θέσαμε παραπάνω, τότε η μια συνάρτηση προκύπτει από την άλλη με βάση το ακόλουθο ζεύγος σχέσεων:

$$\begin{aligned} X(\Omega) &\equiv \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt, & -\infty < \Omega < \infty \\ x(t) &\equiv \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega, & -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

(2.10)

Η πρώτη σχέση είναι ο μετασχηματισμός Fourier (MF) και η δεύτερη ορίζεται ως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της $X(\Omega)$, και θα γράφουμε συμβολικά $\mathcal{F}\{x(t)\}$, και $\mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\}$, αντίστοιχα. Στα σημεία ασυνέχειας $t_i, i = 1, 2, \dots$ (πεπερασμένου πλήθους) η δεύτερη από τις (2.10) τροποποιείται σύμφωνα με την εξίσωση (2.9), δηλαδή

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t_i} d\Omega = \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow t_i^+} x(t) + \lim_{t \rightarrow t_i^-} x(t) \right], \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι στα σημεία ασυνέχειας η συνάρτηση που προκύπτει από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier λαμβάνει συγκεκριμένες τιμές. Η διαφοροποίηση όμως δύο συναρτήσεων σε πεπερασμένο αριθμό σημείων είναι άνευ ουσίας και δεν γίνεται αντιληπτή στην ολοκλήρωση. Με βάση, δηλαδή, την πρώτη εξίσωση από τις (2.10), δύο τέτοιες συναρτήσεις αντιστοιχούν στον ίδιο μετασχηματισμό Fourier.

Μια προσεκτικότερη ματιά στον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στην (2.10) αναδεικνύει ότι στην ουσία έχουμε πετύχει να εκφράσουμε το σήμα $x(t)$ ως μια υπέρθεση απείρων σημάτων απλών συχνοτήτων της μορφής $e^{j\Omega t}$. Στο θέμα όμως αυτό θα επανέλθουμε αργότερα.

2.2.3 Σύγκλιση του Μετασχηματισμού Fourier

Παραπάνω ορίσαμε το μετασχηματισμό Fourier έχοντας υποθέσει ότι τα ολοκληρώματα στην (2.10) υπάρχουν. Η ύπαρξη των ολοκληρωμάτων αυτών δεν εξασφαλίζεται πάντα, όπως επίσης είναι δυνατόν να υπάρχει το ένα και όχι το άλλο. Στο υποεδάφιο αυτό θα διατυπώσουμε τις συνθήκες εκείνες που είναι ικανές για την ύπαρξη του ζεύγους μετασχηματισμών Fourier. Οι συνθήκες αυτές είναι γνωστές ως *συνθήκες Dirichlet* και συνοψίζονται ως εξής:

1. Η συνάρτηση (σήμα) $x(t)$ είναι συνεχής ή, το πολύ, περιέχει πεπερασμένο αριθμό πεπερασμένου ύψους ασυνεχειών.
2. Η συνάρτηση $x(t)$ είναι φραγμένης κύμανσης.
3. Η συνάρτηση $x(t)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Συναρτήσεις που πληρούν τις συνθήκες 1 και 2 είναι γνωστές και ως “*τμηματικά ομαλές*”. Η ικανότητα της τελευταίας συνθήκης αποδεικνύεται αμέσως από

τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier. Πράγματι :

$$|X(\Omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Άρα, εάν η $x(t)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, ο $X(\Omega)$ υπάρχει. Μάλιστα, τότε η συνάρτηση $X(\Omega)$ είναι και συνεχής (βλ. Πρόβλημα 1). Θα πρέπει να τονιστεί ότι οι παραπάνω συνθήκες *δεν είναι αναγκαίες*. Ας πάρουμε για παράδειγμα τη συνάρτηση:

$$x(t) = \frac{\sin \Omega_0 t}{\pi t}$$

Η συνάρτηση αυτή δεν είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, ο μετασχηματισμός Fourier όμως υπάρχει και είναι :

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_0 \\ 0, & |\Omega| > \Omega_0 \end{cases}$$

Στη συνέχεια, θα δούμε ότι, εάν διευρύνουμε το σύνολο των συναρτήσεων ώστε να συμπεριλάβει και γενικευμένες συναρτήσεις (βλ. Κεφάλαιο 1), τότε θα διαπιστώσουμε την ύπαρξη και άλλων συναρτήσεων που δεν ικανοποιούν τη συνθήκη 3, ωστόσο ο μετασχηματισμός Fourier υπάρχει. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ότι η $x(t)$ είναι σταθερά, δηλαδή $x(t) = c, \forall t$. Είναι προφανές ότι ένα τέτοιο σήμα δεν είναι απόλυτα ολοκληρώσιμο. Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier έχουμε :

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} c e^{-j\Omega t} dt = c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega t} dt$$

Ερμηνεύοντας το ολοκλήρωμα σύμφωνα μ' αυτά που εκθέσαμε στο Κεφάλαιο 1 (εξισώσεις (1.21), (1.22))¹ καταλήγουμε στο ότι :

$$X(\Omega) = 2\pi c \delta(\Omega)$$

Παράδειγμα 2.2: Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της $x(t) = \delta(t)$.

Λύση: Από τον ορισμό έχουμε

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\Omega t} dt = 1$$

¹ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega t} dt = \lim_{t' \rightarrow \infty} \int_{-t'}^{t'} e^{-j\Omega t} dt = 2\pi \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{\sin \Omega t'}{\pi \Omega} = 2\pi \delta(\Omega)$.

ή

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

όπου \longleftrightarrow δηλώνει ότι οι αντίστοιχες συναρτήσεις αποτελούν ζεύγος Fourier. Στη συνέχεια, κάνοντας χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, η $\delta(t)$ μπορεί ν' ανακτηθεί από τη $X(\Omega)$:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1e^{j\Omega t} d\Omega \quad (2.12)$$

καταλήγουμε δηλαδή στη γνωστή, από τη θεωρία κατανομών, σχέση (1.14b) (βλ. Κεφάλαιο 1). \triangle

Παράδειγμα 2.3: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της

$$X(\Omega) = \frac{2}{j\Omega}$$

Λύση: Σύμφωνα με τον ορισμό και τη σχέση του Euler έχουμε

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{j\Omega} e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \Omega t}{j\Omega} d\Omega + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Omega t}{\Omega} d\Omega \end{aligned}$$

Το πρώτο από τα δύο ολοκληρώματα είναι μηδέν λόγω του ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι περιττή. Λαμβάνοντας υπόψη την (2.7), καταλήγουμε, έπειτα από αλλαγή μεταβλητής, στην

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Omega t}{\Omega} d\Omega = \text{sgn}(t)$$

όπου

$$\text{sgn}(t) \equiv \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

είναι η *συνάρτηση προσήμου*. \triangle

Στον Πίνακα 2.1 δίνονται τα ζεύγη μερικών πολύ χρήσιμων μετασχηματισμών Fourier.

Πίνακας 2.1 Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Fourier	
Σήμα $x(t)$	MF $X(\Omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\Omega)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\Omega t_0}$
$e^{j\Omega_0 t}$	$2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$
$\cos \Omega_0 t$	$\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$
$\sin \Omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)]$
$\begin{cases} 1, & t < T/2 \\ 0, & t > T/2 \end{cases}$	$T \frac{\sin(\frac{\Omega T}{2})}{\frac{\Omega T}{2}}$
$\frac{\sin \Omega_0 t}{\pi t}$	$\begin{cases} 1, & \Omega < \Omega_0 \\ 0, & \Omega > \Omega_0 \end{cases}$
$e^{-at}u(t), \operatorname{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{j\Omega + a}$
$te^{-at}u(t), \operatorname{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{(j\Omega + a)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), \operatorname{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{(j\Omega + a)^n}$

2.2.4 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

1. Γραμμικότητα

Εάν

$$x_1(t) \longleftrightarrow X_1(\Omega)$$

και

$$x_2(t) \longleftrightarrow X_2(\Omega),$$

τότε

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longleftrightarrow \alpha X_1(\Omega) + \beta X_2(\Omega)$$

για οποιεσδήποτε σταθερές α, β . Η απόδειξη είναι προφανής από τον ορισμό.

Παράδειγμα 2.4: Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης $u(t)$.

Λύση: Η συνάρτηση $u(t)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

Από την ιδιότητα της γραμμικότητας και τα ζεύγη Fourier

$$\frac{1}{2} \longleftrightarrow \pi \delta(\Omega)$$

$$\operatorname{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\Omega}$$

συνεπάγεται ότι

$$u(t) \longleftrightarrow \pi \delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}$$

△

2. Χρονική ολίσθηση

Εάν

$$x(t) \longleftrightarrow X(\Omega),$$

τότε

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j\Omega t_0} X(\Omega), \quad \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό ισχύει

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\Omega t} dt$$

ή

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\Omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\Omega(t-t_0)} dt$$

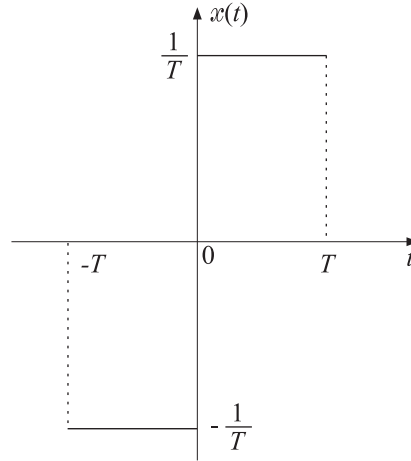
και τελικά

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$$

△

Παράδειγμα 2.5: Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της

$$x(t) = \begin{cases} -1/T, & 0 < t < T \\ 1/T, & -T < t < 0 \\ 0, & \text{άλλού} \end{cases}$$



Σχήμα 2.4 Η συνάρτηση του Παραδείγματος 2.5.

που φαίνεται στο Σχήμα 2.4.

Λύση: Σύμφωνα με το συμβολισμό του Παραδείγματος 2.1, το παραπάνω σήμα γράφεται ως

$$x(t) = \frac{1}{T} [P_{T/2}(t + T/2) - P_{T/2}(t - T/2)]$$

Από το Παράδειγμα 2.1 και τις δύο παραπάνω ιδιότητες έχουμε

$$P_{T/2}(t - T/2) \longleftrightarrow T \frac{\sin(\frac{\Omega T}{2})}{(\frac{\Omega T}{2})} e^{-j\Omega T/2}$$

$$P_{T/2}(t + T/2) \longleftrightarrow T \frac{\sin(\frac{\Omega T}{2})}{(\frac{\Omega T}{2})} e^{j\Omega T/2}$$

Άρα

$$X(\Omega) = 4j \frac{\sin^2(\frac{\Omega T}{2})}{\Omega T}$$

△

3. Ολίσθηση στη συχνότητα

Εάν

$$x(t) \longleftrightarrow X(\Omega),$$

τότε

$$e^{j\Omega_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$$

Απόδειξη: Απο τον τύπο του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega - \Omega_0) e^{j\Omega t} d\Omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega') e^{j(\Omega' + \Omega_0)t} d\Omega' \\ &= e^{j\Omega_0 t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega') e^{j\Omega' t} d\Omega' \\ &= e^{j\Omega_0 t} x(t) \end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 2.6:

Εάν

$$x(t) \longleftrightarrow X(\Omega),$$

τότε

$$x(t) \cos \Omega_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2} [X(\Omega - \Omega_0) + X(\Omega + \Omega_0)] \quad (2.14)$$

Λύση: Πράγματι, έχουμε ότι

$$\cos \Omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t})$$

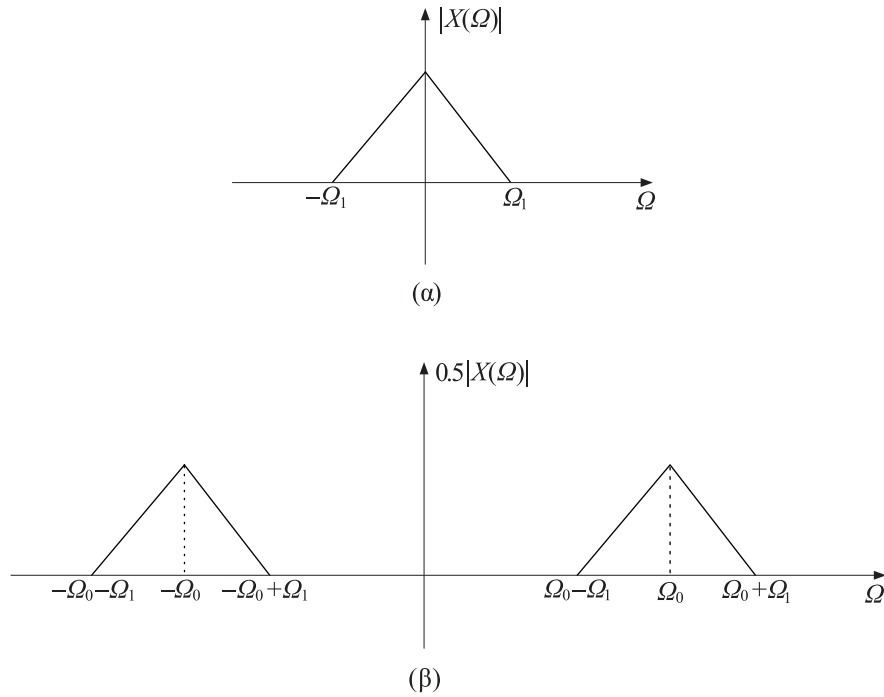
Άρα

$$x(t) \cos \Omega_0 t = \frac{1}{2} x(t) (e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}) \quad (2.15)$$

απ' όπου, με χρήση της ιδιότητας ολίσθησης στη συχνότητα, καταλήγουμε στη σχέση (2.14). △

Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται ευρέως στις τηλεπικοινωνίες, όπου ένα σήμα, $x(t)$, που μεταφέρει συγκεκριμένη πληροφορία πολλαπλασιάζεται με το λεγόμενο “φέρον”, που είναι ένα σήμα απλής συχνότητας ($\cos \Omega_0 t$), με σκοπό την εκπομπή του σ' ένα μέσο μετάδοσης (ζεύγος συρμάτων, ατμόσφαιρα κ.λπ.). Η διαδικασία είναι γνωστή και ως *διαμόρφωση*. Παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιασμός με το $\cos \Omega_0 t$ δεν αλλοιώνει τη μορφή του μετασχηματισμού Fourier $X(\Omega)$ (για αρκού- ντως μεγάλες τιμές του Ω_0 και με την προϋπόθεση ότι η $X(\Omega)$ είναι μηδέν πέρα από μια ορισμένη συχνότητα) αλλά απλώς μεταφέρει την αρχή των αξόνων στα $\pm \Omega_0$. Στο Σχήμα 2.5 περιγράφεται σχηματικά η διαδικασία.

4. Κλιμάκωση στο χρόνο και τη συχνότητα



Σχήμα 2.5 Αποτέλεσμα στο πεδίο συχνοτήτων πολλαπλασιασμού με συνημίτονο (διαμόρφωση) στο πεδίο του χρόνου.

Εάν

$$x(t) \longleftrightarrow X(\Omega),$$

και α μια πραγματική σταθερά, τότε

$$x(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right) \quad (2.16)$$

και

$$\frac{1}{|\alpha|} x\left(\frac{t}{\alpha}\right) \longleftrightarrow X(\alpha\Omega) \quad (2.17)$$

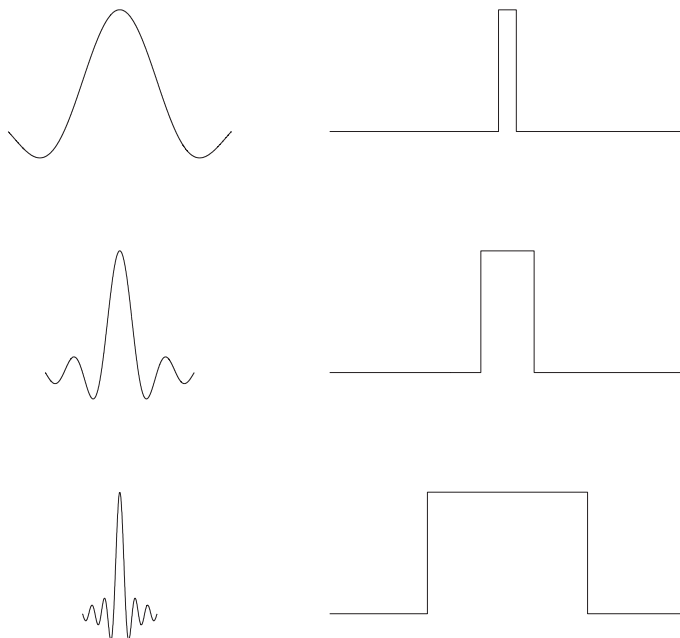
Απόδειξη: Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier και για $\alpha < 0$ έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t) e^{-j\Omega t} dt = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j\Omega \frac{t'}{\alpha}} dt' = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)$$

Ανάλογες είναι οι αποδείξεις για $\alpha > 0$ και για το δεύτερο σκέλος της ιδιότητας.

△

Η φυσική σημασία της ιδιότητας αυτής είναι ότι, εάν ο άξονας του χρόνου t διασταλεί ($\alpha < 1$), τότε ο αντίστοιχος άξονας των συχνοτήτων Ω συστέλλεται και αντίστροφα. Αυτό φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6 Διαστολή του άξονα του χρόνου αντιστοιχεί σε συστολή του άξονα της συχνότητας και αντίστροφα.

Παράδειγμα 2.7: Ν' αποδειχτεί ότι, εάν $x(t) \longleftrightarrow X(\Omega)$, τότε $x(-t) \longleftrightarrow X(-\Omega)$.

Λύση: Η απόδειξη είναι προφανής εάν στην τελευταία ιδιότητα θέσουμε $\alpha = -1$. \triangle

5. Δυϊκότητα του μετασχηματισμού Fourier

Εάν $x(t) \longleftrightarrow X(\Omega)$, τότε $X(t) \longleftrightarrow 2\pi x(-\Omega)$.

Απόδειξη: Από τους ορισμούς έχουμε

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x(t) e^{-j\Omega t} dt \end{aligned}$$

Έπειτα από αντικατάσταση του t με $-t$, παίρνουμε

$$X(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x(-t) e^{j\Omega t} dt$$

Εάν στη συνέχεια εναλλάξουμε τα t και Ω , καταλήγουμε στο ότι

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x(-\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

ή

$$X(t) \longleftrightarrow 2\pi x(-\Omega)$$

△

Παράδειγμα 2.8: Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της

$$x(t) = \frac{\sin \Omega_0 t}{\pi t}$$

Λύση: Γνωρίζουμε από το Παράδειγμα 2.1 ότι

$$P_{\alpha/2}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega\alpha}{2}\right)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της δυϊκότητας:

$$\frac{2}{t} \sin\left(\frac{t\alpha}{2}\right) \longleftrightarrow 2\pi P_{\alpha/2}(-\Omega)$$

ή

$$\frac{\sin\left(\frac{t\alpha}{2}\right)}{\pi t} \longleftrightarrow P_{\alpha/2}(-\Omega)$$

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε $\alpha = 2\Omega_0$. Άρα

$$\frac{\sin(\Omega_0 t)}{\pi t} \longleftrightarrow P_{\Omega_0}(-\Omega)$$

όπου

$$P_{\Omega_0}(-\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_0 \\ 0, & |\Omega| > \Omega_0 \end{cases}$$

Στο Παράδειγμα 2.1 είδαμε ότι μια συνάρτηση τετραγωνικού παλμού έχει MF της μορφής $\frac{\sin x}{x}$. Αντίστοιχα, στο παράδειγμα αυτό βλέπουμε ότι μια χρονική συνάρτηση της μορφής $\frac{\sin x}{x}$ έχει MF έναν τετραγωνικό παλμό. Δείτε και το Σχήμα 2.6. \triangle

6. Παραγωγή

Εάν $x(t) \longleftrightarrow X(\Omega)$ κι αν ο μετασχηματισμός Fourier της $d^n x(t)/dt^n$ υπάρχει, τότε

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j\Omega)^n X(\Omega)$$

και

$$(-jt)^n x(t) \longleftrightarrow \frac{d^n X(\Omega)}{d\Omega^n}$$

Απόδειξη: Θ' αποδείξουμε την ιδιότητα για $n = 1$. Η απόδειξη για υψηλότερης τάξης παραγώγους είναι προφανής επέκταση. Από τον τύπο του αντίστροφου MF έχουμε

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση και υποθέτοντας ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις εναλλαγής της σειράς ολοκλήρωσης και παραγωγίσιμης, έχουμε

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\Omega X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

Έστω τώρα ότι

$$X'(\Omega) = \mathcal{F} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j\Omega t} dt$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες παίρνουμε

$$\begin{aligned} X'(\Omega) &= x(t)e^{-j\Omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d(e^{-j\Omega t})}{dt} dt \\ &= x(t)e^{-j\Omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\Omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= 0 + j\Omega X(\Omega) \\ &= j\Omega X(\Omega) \end{aligned}$$

Για την απόδειξη υποθέσαμε ότι, όταν $t \rightarrow \pm\infty$, $x(t) \rightarrow 0$, άρα

$$x(t)e^{-j\Omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)e^{-j\Omega t} - \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)e^{-j\Omega t} = 0$$

Συνεπώς, τελικά

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow X'(\Omega) = j\Omega X(\Omega)$$

Το δεύτερο σκέλος προκύπτει με παρόμοιο τρόπο παραγωγίζοντας ως προς Ω τη σχέση του MF. \triangle

2.2.5 Θεώρημα Συνέλιξης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε τη συνέλιξη δύο συναρτήσεων $x(t)$ και $h(t)$ ως

$$y(t) \equiv x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

Είδαμε ότι, εάν $h(t)$ συμβολίζει την κρουστική απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος και $x(t)$ την είσοδό του, τότε $y(t)$ είναι το σήμα εξόδου του συστήματος. Στο υποεδάφιο αυτό θα διατυπώσουμε τη σχέση που συνδέει τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς Fourier. Γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &\equiv \mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\Omega t} dt \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)e^{-j\Omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\Omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t')e^{-j\Omega t'} dt' \right] d\tau \end{aligned}$$

όπου $t' = t - \tau$, και τελικά

$$\boxed{y(t) \equiv x(t) * h(t) \longleftrightarrow X(\Omega)H(\Omega)} \quad (2.18)$$

όπου $H(\Omega)$, $X(\Omega)$ οι μετασχηματισμοί Fourier των $h(t)$ και $x(t)$, αντίστοιχα. Στην απόδειξη υποθέσαμε ότι οι συναρτήσεις $x(t)$ και $h(t)$ πληρούν τους όρους εναλλαγής της σειράς ολοκλήρωσης.

Ανάλογη σχέση ισχύει και για τη συνέλιξη των μετασχηματισμών Fourier. Εάν δηλαδή

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} H(\Omega) * X(\Omega) \\ &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\phi) X(\Omega - \phi) d\phi, \end{aligned}$$

τότε

$$y(t) \equiv h(t)x(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} H(\Omega) * X(\Omega) \quad (2.19)$$

Η ιδιότητα (2.18) είναι πολύ μεγάλης σημασίας στη μελέτη των γραμμικών συστημάτων, όπως θα διαπιστώσουμε σε λίγο. *Μια υπολογιστικά σύνθετη πράξη, όπως αυτή της συνέλιξης, μετασχηματιζόμενη κατά Fourier καταλήγει σ' ένα απλό γινόμενο συναρτήσεων.*

Παράδειγμα 2.9: Εάν $x(t) \longleftrightarrow X(\Omega)$, τότε

$$y(t) \equiv \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(0)\delta(\Omega) \quad (2.20)$$

Λύση: Η $y(t)$ γράφεται ως

$$y(t) = x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

όπου $u(t)$ η μοναδιαία βηματική συνάρτηση. Από το θεώρημα της συνέλιξης προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= X(\Omega)U(\Omega) \\ &= X(\Omega) \left[\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega} \right] \\ &= \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(0)\delta(\Omega) \end{aligned}$$

Αλλά, όπως γίνεται αμέσως αντιληπτό από τον ορισμό της $\delta(\Omega)$, η μόνη τιμή της $X(\Omega)$ που υπεισέρχεται στο παραπάνω γινόμενο είναι η $X(0)$, δηλαδή

$$X(\Omega)\delta(\Omega) = X(0)\delta(\Omega)$$

και η (2.20) προκύπτει από τον συνδυασμό των παραπάνω. △

Παρατήρηση: Μια επιπλέον εφαρμογή της ιδιότητας της παραγωγίσης θα μπορούσε να μας οδηγήσει σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Πράγματι, από τη σχέση

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

συνεπάγεται ότι

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

ή

$$X(\Omega) = j\Omega Y(\Omega) \quad (2.21)$$

ή

$$Y(\Omega) = \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) \quad (2.22)$$

η οποία είναι προφανώς διαφορετική από την (2.20) (ταυτίζονται μόνο για $X(0) = 0$). Αυτό συμβαίνει διότι η (2.21) δεν συνεπάγεται τη (2.22), αλλά την

$$Y(\Omega) = \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + C\delta(\Omega) \quad (2.23)$$

όπου C μια σταθερά, διότι ισχύει $j\Omega\delta(\Omega) = j0\delta(\Omega) = 0$. Ένας άλλος τρόπος για να επιβεβαιώσουμε το αποτέλεσμα αυτό είναι να θυμηθούμε τη σχέση

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}[y(t) + C]$$

2.2.6 Φυσική Σημασία του Μετασχηματισμού Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier $X(\Omega)$ ενός σήματος $x(t)$ είναι μια μιγαδική συνάρτηση και μπορεί ν' αναπαρασταθεί ως

$$X(\Omega) = R(\Omega) + jI(\Omega) \quad (2.24)$$

όπου $R(\Omega)$ το πραγματικό και $I(\Omega)$ το φανταστικό μέρος της συνάρτησης. Θ' αποδείξουμε ότι, εάν η $x(t)$ είναι *πραγματική* συνάρτηση, τότε

$\begin{aligned} R(-\Omega) &= R(\Omega) \\ I(-\Omega) &= -I(\Omega) \\ X(-\Omega) &= X^*(\Omega) \end{aligned}$: δηλαδή άρτια συνάρτηση : δηλαδή περιττή συνάρτηση	(2.25)
--	--	--------

όπου $*$ συμβολίζει τη συζυγή συνάρτηση. Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) (\cos \Omega t - j \sin \Omega t) dt \end{aligned}$$

Εφόσον η $x(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση, έπεται ότι

$$R(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \Omega t dt$$

και

$$I(\Omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \Omega t dt$$

απ' όπου γίνονται προφανείς οι (2.25). Μπορεί εύκολα ν' αποδειχτεί ότι οι (2.25) συνιστούν και αναγκαίες συνθήκες για να είναι το σήμα $x(t)$ πραγματικό.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις $R(\Omega)$ και $I(\Omega)$ για ν' ανακηψουμε το σήμα $x(t)$. Έχουμε ότι

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\Omega) + jI(\Omega)] (\cos \Omega t + j \sin \Omega t) d\Omega$$

ή

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\Omega) \cos \Omega t - I(\Omega) \sin \Omega t] d\Omega \\ &\quad + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\Omega) \sin \Omega t + I(\Omega) \cos \Omega t] d\Omega \end{aligned}$$

Εφόσον η $x(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση, το δεύτερο ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Αυτό επιβεβαιώνεται με τη βοήθεια των (2.25). Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι οι $R(\Omega)$ και $I(\Omega)$ δεν περιλαμβάνουν γενικευμένες συναρτήσεις στο $\Omega = 0$. Από την τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι

$$R(\Omega) \cos \Omega t - I(\Omega) \sin \Omega t = A(\Omega) \cos[\Omega t + \phi(\Omega)] \quad (2.26)$$

όπου

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= \sqrt{R^2(\Omega) + I^2(\Omega)} \\ \phi(\Omega) &= \tan^{-1} \left[\frac{I(\Omega)}{R(\Omega)} \right] \end{aligned} \quad (2.27)$$

Άρα

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\Omega) \cos[\Omega t + \phi(\Omega)] d\Omega$$

ή, λόγω του ότι οι $A(\Omega)$, $\cos[\Omega t + \phi(\Omega)]$ είναι άρτιες συναρτήσεις του Ω ,

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\Omega) \cos[\Omega t + \phi(\Omega)] d\Omega \quad (2.28)$$

Μ' άλλα λόγια, ο μετασχηματισμός Fourier ενός πραγματικού σήματος ισοδυναμεί μ' ένα ανάπτυγμα του σήματος σ' ένα άπειρο (μη αριθμήσιμο) πλήθος ημιτονοειδών σημάτων. Κάθε μια από τις απλές αυτές συχνότητες υπεισέρχεται με πλάτος $\frac{1}{\pi} A(\Omega) d\Omega$ και φάση $\phi(\Omega)$, όπου Ω η αντίστοιχη (κυκλική) συχνότητα. Αυτός είναι και ο λόγος που η μεταβλητή Ω του μετασχηματισμού Fourier αναφέρεται και ως *συχνότητα*. Απόρροια αυτού είναι και το ότι ο μετασχηματισμός Fourier λέγεται και *φάσμα συχνοτήτων*, κατ' αναλογία με την ανάλυση που υφίσταται το λευκό φως στις επιμέρους συχνότητες που το απαρτίζουν.

Παράδειγμα 2.10: Εάν η συνάρτηση $x(t)$ είναι φανταστική, δηλαδή

$$x(t) = jy(t)$$

όπου η $y(t)$ είναι πραγματική, ν' αποδειχτεί ότι

$$\begin{aligned} R(-\Omega) &= -R(\Omega) \\ I(-\Omega) &= I(\Omega) \\ X(-\Omega) &= -X^*(\Omega) \end{aligned}$$

Λύση: Η απόδειξη περιλαμβάνει τα ίδια βήματα μ' αυτά που ακολουθήσαμε στην περίπτωση της πραγματικής συνάρτησης και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. \triangle

2.2.7 Μετασχηματισμοί Ημιτόνου και Συνημιτόνου

Στο υποεδάφιο αυτό θα υποθέσουμε ότι το σήμα μας, $x(t)$, είναι πραγματική συνάρτηση. Άρα

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\Omega) \cos \Omega t - I(\Omega) \sin \Omega t] d\Omega \quad (2.29)$$

Θα εξετάσουμε τρεις ειδικές περιπτώσεις:

α) $x(t)$ άρτια

Από τον ορισμό των $R(\Omega)$ και $I(\Omega)$ στο προηγούμενο εδάφιο γίνεται αμέσως φανερό ότι

$$I(\Omega) = 0$$

και

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty R(\Omega) \cos \Omega t \, d\Omega \\ R(\Omega) &= 2 \int_0^\infty x(t) \cos \Omega t \, dt \end{aligned} \quad (2.30)$$

Με άλλα λόγια, ο μετασχηματισμός Fourier μιας πραγματικής άρτιας συνάρτησης είναι πραγματική και άρτια συνάρτηση. Το αντίστροφο της πρότασης αυτής είναι επίσης αληθές.

β) $x(t)$ περιττή

Τότε είναι

$$R(\Omega) = 0$$

και

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty I(\Omega) \sin \Omega t \, d\Omega \\ I(\Omega) &= -2 \int_0^\infty x(t) \sin \Omega t \, dt \end{aligned} \quad (2.31)$$

Άρα ο μετασχηματισμός Fourier μιας πραγματικής περιττής συνάρτησης είναι φανταστική συνάρτηση με περιττή συμμετρία. Το αντίστροφο είναι επίσης αληθές.

γ) $x(t)$ αιτιατή, δηλαδή $x(t) = 0, t < 0$.

Από την (2.29) και τις ιδιότητες των $R(\Omega)$ και $I(\Omega)$ (βλ. (2.25)) προκύπτει ότι για πραγματικές συναρτήσεις ισχύει

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [R(\Omega) \cos \Omega t - I(\Omega) \sin \Omega t] \, d\Omega \quad (2.32)$$

Στην παραπάνω σχέση καταλήγουμε έχοντας υποθέσει ότι οι $R(\Omega)$ και $I(\Omega)$ είναι φραγμένες για $\Omega = 0$ (δηλαδή δεν περιλαμβάνουν τη συνάρτηση $\delta(\Omega)$)². Αλλά

²Εάν μια συνάρτηση δεν φράσσεται σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο Ω_0 του πεδίου ορισμού της, τότε το ολοκλήρωμα που περιέχει το συγκεκριμένο σημείο έχει νόημα μόνο με την έννοια της

$x(t) = 0$ για $t < 0$, άρα

$$\int_0^\infty R(\Omega) \cos \Omega t d\Omega = \int_0^\infty I(\Omega) \sin \Omega t d\Omega, \quad t < 0$$

Αντικαθιστώντας το t με $-t$, για $t > 0$, παίρνουμε

$$\int_0^\infty R(\Omega) \cos \Omega t d\Omega = - \int_0^\infty I(\Omega) \sin \Omega t d\Omega, \quad t > 0$$

Από την παραπάνω σχέση και την (2.32) έπεται ότι

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(\Omega) \cos \Omega t d\Omega, & t > 0 \\ x(t) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty I(\Omega) \sin \Omega t d\Omega, & t > 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Προφανώς, η $x(0)$ δεν ορίζεται με τις παραπάνω σχέσεις, αλλά αυτό δεν είναι ιδιαίτερο πρόβλημα εάν η $x(0)$ δεν περιλαμβάνει γενικευμένες συναρτήσεις στο $t = 0$. Από την (2.33) είναι εμφανές ότι οι $R(\Omega)$ και $I(\Omega)$ δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητες. Πράγματι, όπως θ' αποδείξουμε στη συνέχεια, η μία προκύπτει από την άλλη. Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier για αιτιατές συναρτήσεις έχουμε

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^\infty x(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_0^\infty x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (2.34)$$

Έχουμε υποθέσει ότι η $x(t)$ δεν περιλαμβάνει γενικευμένες συναρτήσεις στο $t = 0$ και συνεπώς το κάτω όριο του ολοκληρώματος δεν μας δημιουργεί ανησυχίες. Συνδυασμός των (2.33) και (2.34) μας δίνει

$$X(\Omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty R(\phi) \cos \phi t e^{-j\Omega t} d\phi dt \quad (2.35)$$

Με τη βοήθεια του τύπου του Euler παίρνουμε τότε:

$$I(\Omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty R(\phi) \cos \phi t \sin \Omega t d\phi dt \quad (2.36)$$

Cauchy principal value. Δηλαδή

$$\int_{-\infty}^\infty R(\Omega) d\Omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\Omega_0 - \epsilon} R(\Omega) d\Omega + \int_{\Omega_0 - \epsilon}^{\Omega_0 + \epsilon} R(\Omega) d\Omega + \int_{\Omega_0 + \epsilon}^\infty R(\Omega) d\Omega \right]$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$R(\Omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty I(\phi) \sin \phi t \cos \Omega t d\phi dt \quad (2.37)$$

2.2.8 Θεώρημα του Parseval

Στο Εδάφιο 2.2.5 αποδείξαμε ότι

$$x_1(t)x_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) * X_2(\Omega)$$

Από τους αντίστοιχους ορισμούς έπεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(y)X_2(\Omega - y) dy \quad (2.38)$$

Για $\Omega = 0$ η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(y)X_2(-y) dy \quad (2.39)$$

Εάν στη συνέχεια θέσουμε

$$x_2(t) = x_1^*(t),$$

τότε

$$X_2(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(t)e^{-j\Omega t} dt$$

ή

$$X_2(-\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(t)e^{j\Omega t} dt = X_1^*(\Omega) \quad (2.40)$$

Από τις (2.39) και (2.40) προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_1^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\Omega)X_1^*(\Omega) d\Omega$$

ή

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_1(\Omega)|^2 d\Omega} \quad (2.41)$$

Η σχέση (2.41) είναι γνωστή ως *θεώρημα του Parseval* και έχει σπουδαία φυσική σημασία. Εάν υποθέσουμε ότι η $x_1(t)$ παριστά την τάση στα άκρα μιας αντίστασης $R = 1 \Omega$, τότε η ενέργεια που παρέχεται στην αντίσταση δίνεται από το ολοκλήρωμα³

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2(t) dt \quad (2.42)$$

Γενικεύοντας, καταλήγουμε στο ότι το αριστερό μέλος της (2.41) είναι η ολική ενέργεια που παρέχεται από το σήμα. Το θεώρημα του Parseval μας λέει ότι η ενέργεια αυτή ισούται με $\frac{1}{2\pi}$ επί το εμβαδόν που περικλείει η καμπύλη του τετραγώνου του μέτρου του μετασχηματισμού Fourier του σήματος. *Η ερμηνεία επομένως που μπορεί να δοθεί στη $|X_1(\Omega)|^2$ είναι ότι εκφράζει την κατανομή της ενέργειας ανά μονάδα συχνότητας.* Η στοιχειώδης δηλαδή ενέργεια, dE , που συνεισφέρεται από συχνότητες μεταξύ f και $f + df$ ($\frac{\Omega}{2\pi}$, $\frac{\Omega+d\Omega}{2\pi}$) ισούται με

$$dE = |X_1(\Omega)|^2 df$$

ή

$$\frac{dE}{df} = |X_1(\Omega)|^2 \quad (2.43)$$

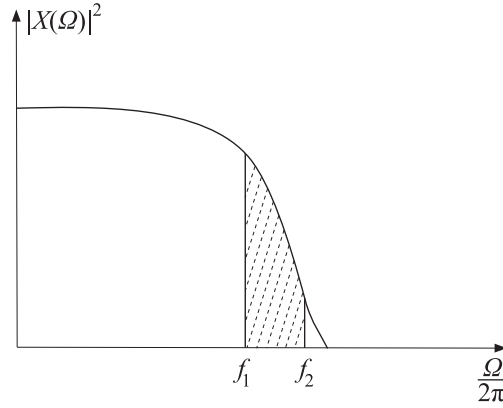
Η σχέση (2.43) μας οδηγεί στο να ορίσουμε τη συνάρτηση $|X_1(\Omega)|^2$ ως *πυκνότητα φάσματος ενέργειας*. Με άλλα λόγια, εάν θέλουμε να υπολογίσουμε την ενέργεια που συνεισφέρουν στο σήμα οι συχνότητες μεταξύ f_1 και f_2 αρκεί να ολοκληρώσουμε τη $|X(\Omega)|^2$ μεταξύ των δύο αυτών συχνοτήτων. Αυτό φαίνεται καλύτερα στο Σχήμα 2.7 όπου η ενέργεια μεταξύ των συχνοτήτων f_1 και f_2 ισούται με το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής.

2.2.9 Φαινόμενο Gibbs

Στο Εδάφιο 2.2.2 μελετήσαμε τη σύγκλιση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier στην περίπτωση ύπαρξης ασυνέχειας πεπερασμένου ύψους. Είδαμε ότι το σημείο σύγκλισης καθορίζεται από το όριο της συνάρτησης

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^z \frac{\sin y}{y} dy$$

³Είναι σαφές ότι κάθε φορά που γράφουμε ένα ολοκλήρωμα θεωρούμε πως αυτό έχει νόημα, ότι δηλαδή το ολοκλήρωμα αυτό υπάρχει. Σήματα για τα οποία η (2.42) έχει νόημα είναι γνωστά και ως *σήματα ενέργειας* (σύμφωνα με τη μαθηματική ορολογία ανήκουν στο χώρο των συναρτήσεων $L_2(\mathbb{R})$). Ένα άλλο σημείο, που σχετίζεται με το θεώρημα του Parseval, είναι ότι οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier που περιλαμβάνουν γινόμενο συναρτήσεων δεν γενικεύονται ώστε να περιλάβουν γενικευμένες συναρτήσεις. Γινόμενο γενικευμένων συναρτήσεων δεν ορίζεται.



Σχήμα 2.7 Το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής ισούται με την ενέργεια του σήματος μεταξύ των συχνοτήτων f_1 και f_2 .

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin y}{y} dy + \frac{1}{\pi} \int_0^z \frac{\sin y}{y} dy \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^z \frac{\sin y}{y} dy \\
 &\equiv \frac{1}{2} + Si(z)
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

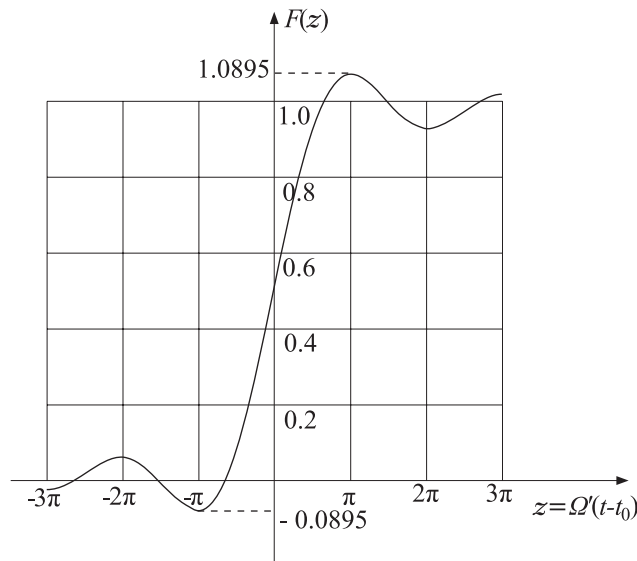
όπου

$$Si(z) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^z \frac{\sin y}{y} dy, \tag{2.45}$$

$$z \equiv \Omega'(t - t_0), \tag{2.46}$$

t_0 το σημείο ασυνέχειας και $\Omega' \rightarrow \infty$. Το αντικείμενο μελέτης στο παρόν εδάφιο είναι η συμπεριφορά της συνάρτησης $F(z)$ στο σημείο ασυνέχειας. Στο Σχήμα 2.8 φαίνεται η μεταβολή της $F(z)$ ως συνάρτησης του $\Omega'(t - t_0)$. Έχουμε ότι:

1. $Si(z) = -Si(-z)$, δηλαδή είναι περιττή συνάρτηση.
2. Η μέγιστη θετική τιμή (υπερύψωση) είναι $F(\pi) = 1.0895$, υπερβαίνει δηλαδή κατά 8.95% το ύψος, +1, της ασυνέχειας.
3. Η συνάρτηση F τείνει ασυμπτωτικά στη μονάδα.
4. Η συνάρτηση F ταλαντώνεται γύρω από την οριακή της τιμή με περίοδο π και με πλάτος ταλαντώσεων που φθίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.



Σχήμα 2.8 Η συνάρτηση $F(z)$.

5. Η τιμή της για $z = 0$ είναι $\frac{1}{2}$.

Το πλάτος των ταλαντώσεων είναι ανεξάρτητο από την τιμή του Ω' . Το Ω' καθορίζει μόνο τη θέση των μεγίστων και ελαχίστων και τη συχνότητα εναλλαγής τους στον άξονα του χρόνου σε σχέση με το σημείο ασυνέχειας t_0 . Όταν το $\Omega' \rightarrow \infty$, το πλάτος των ταλαντώσεων δεν επηρεάζεται και παραμένει αναλλοίωτο, σε αντίθεση με το εύρος της περιοχής στην οποία εντοπίζονται οι ταλαντώσεις, το οποίο τείνει στο μηδέν, με αποτέλεσμα στο όριο να λαμβάνουμε την εξίσωση (2.8). Στο σημείο αυτό ας θυμηθούμε τι είναι το Ω' . Σύμφωνα με την αρχική εξίσωση (2.4) το Ω' είναι το όριο της ολοκλήρωσης του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier. Μας καθορίζει, δηλαδή, τα πάνω και κάτω όρια των συχνοτήτων που συνεισφέρουν στην ανάκτηση του σήματος $x(t)$ από το μετασχηματισμό Fourier. Όταν $\Omega' \rightarrow \infty$, τότε όλες οι συχνότητες λαμβάνουν μέρος στην ανάπλαση του σήματος. Αντίθετα, εάν το Ω' είναι μεν αρκετά μεγάλο αλλά πεπερασμένο, υπάρχουν συχνότητες που δεν λαμβάνονται υπόψη στην ολοκλήρωση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα στο σημείο της ασυνέχειας να παρατηρούνται οι ταλαντώσεις που προαναφέραμε και των οποίων το πλάτος δεν μειώνεται ακόμη κι αν αυξηθεί το Ω' . Απλά, όσο μεγαλύτερο είναι το Ω' τόσο πιο κοντά στο t_0 αυτές εντοπίζονται. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως *φαινόμενο Gibbs*. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι το φαινόμενο Gibbs είναι το αποτέλεσμα της συνέλιξης δύο συγκεκριμένων

συναρτήσεων, της μοναδιαίας βηματικής, που υπεισέρχεται λόγω της ασυνέχειας, και της

$$\Phi_{\Omega'}(t) = \frac{\sin \Omega' t}{\pi t} \quad (2.47)$$

που είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $P_{\Omega'}(\Omega)$ (βλ. Παράδειγμα 2.8). Πράγματι, πεπερασμένα όρια $-\Omega', \Omega'$ στην ολοκλήρωση ισοδυναμούν με πολλαπλασιασμό της $X(\Omega)$ με την $P_{\Omega'}(\Omega)$. Πολλαπλασιασμός όμως στο πεδίο των συχνοτήτων αντιστοιχεί σε συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου. Βέβαια, ο πολλαπλασιασμός αυτός με την $P_{\Omega'}(\Omega)$ για πεπερασμένα όρια επηρεάζει όχι μόνο την ασυνεχή συνιστώσα $u(t-t_0)$ αλλά και τη συνεχή. Το ολοκλήρωμα όμως (2.4) για αρκούντως μεγάλο Ω' μπορεί να είναι όσο κοντά θέλουμε στη $x(t)$, σε αντίθεση με την ασυνεχή συνιστώσα για την οποία το ύψος των ταλαντώσεων είναι ανεξάρτητο του Ω' .

2.2.10 Παραθύρωση - Παράγοντας Fejer

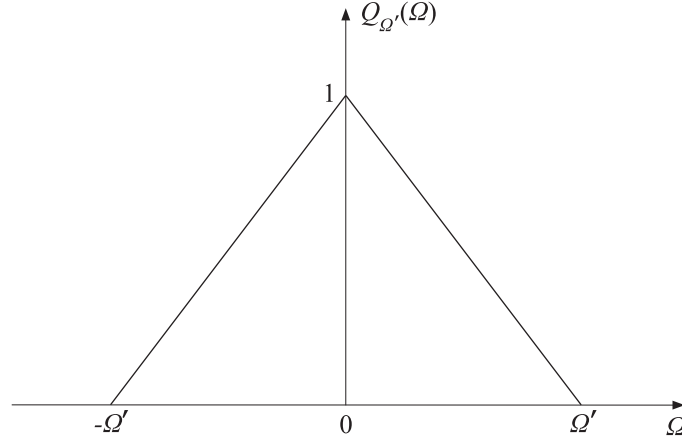
Στο προηγούμενο εδάφιο διατυπώσαμε και εξηγήσαμε το φαινόμενο Gibbs. Το φαινόμενο αυτό δεν έχει μόνο θεωρητική αλλά και πρακτική αξία. Πολλά συστήματα διάδοσης σημάτων απορροφούν τις υψηλές συχνότητες, στην ουσία, δηλαδή, πολλαπλασιάζουν το μετασχηματισμό Fourier του σήματος με $P_{\Omega'}(\Omega)$, με αποτέλεσμα το σήμα να εμφανίζει τις χαρακτηριστικές ταλαντώσεις Gibbs. Σε πολλές, όμως, περιπτώσεις, η κατά περίπου 9% υπερύψωση και οι συνακόλουθες αυξομειώσεις που εμφανίζονται δεν είναι επιθυμητές. Το αντικείμενο μελέτης αυτού του εδαφίου είναι να δώσει έναν εναλλακτικό τρόπο περιορισμού του φάσματος Fourier στο διάστημα $[-\Omega', \Omega']$, με ταυτόχρονη μείωση των ταλαντώσεων Gibbs. Μια προσεκτική παρατήρηση του ολοκληρώματος της (2.44) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αιτία των ταλαντώσεων αυτών είναι η συνάρτηση $\frac{\sin y}{y}$, η οποία εναλλάσσεται μεταξύ θετικών και αρνητικών τιμών. Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι η παραθύρωση⁴ του φάσματος $X(\Omega)$ στο διάστημα $[-\Omega', \Omega']$ επιτυγχάνεται με χρήση της τριγωνικής συνάρτησης $Q_{\Omega'}(\Omega)$ που ορίζεται ως (βλ. και Σχήμα 2.9)

$$Q_{\Omega'}(\Omega) = \begin{cases} 1 - \left| \frac{\Omega}{\Omega'} \right|, & |\Omega| \leq \Omega' \\ 0, & |\Omega| > \Omega' \end{cases} \quad (2.48)$$

Η $Q_{\Omega'}(\Omega)$ είναι πραγματική και άρτια, άρα, σύμφωνα με το Εδάφιο 2.2.7, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier είναι

$$q_{\Omega'}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega'} Q_{\Omega'}(\Omega) \cos \Omega t d\Omega$$

⁴Ο πολλαπλασιασμός μιας συνάρτησης με μια άλλη, με σκοπό το μηδενισμό της πρώτης έξω από ένα διάστημα, είναι γνωστός και ως *παραθύρωση*.



Σχήμα 2.9 Η συνάρτηση $Q_{\Omega'}(\Omega)$.

ή

$$q_{\Omega'}(t) = \frac{1}{\pi \Omega' t^2} (1 - \cos \Omega' t)$$

Αλλά

$$1 - \cos \Omega' t = 2 \sin^2 \left(\frac{\Omega' t}{2} \right)$$

Τελικά

$$q_{\Omega'}(t) = \frac{2 \sin^2 \left(\frac{\Omega' t}{2} \right)}{\pi \Omega' t^2} \quad (2.49)$$

Η συνάρτηση $q_{\Omega'}(t)$ είναι γνωστή και ως *συνάρτηση ή παράγοντας Fejer* και είναι προφανές ότι είναι μια μη αρνητική συνάρτηση. Σύμφωνα με την ανάλυση στο Εδάφιο 2.2.9, είναι εύκολο να δει κανείς ότι το αποτέλεσμα της παραθύρωσης $X(\Omega)Q_{\Omega'}(\Omega)$ εκφράζεται στο χρόνο ως η συνέλιξη της $x(t)$ με την $q_{\Omega'}(t)$ ή

$$x_{\Omega'}(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{2 \sin^2[\Omega'(t - \tau)/2]}{\pi \Omega'(t - \tau)^2} d\tau$$

Εάν $x(t) = x_c(t) + ku(t - t_0)$, τότε η συνιστώσα που οφείλεται στην ασυνέχεια είναι

$$\alpha(t) = k \int_{t_0}^{\infty} \frac{2 \sin^2[\Omega'(t - \tau)/2]}{\pi \Omega'(t - \tau)^2} d\tau$$

Λόγω της μη αρνητικής φύσης της συνάρτησης Fejer, η $\alpha(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση και δεν εμφανίζει τις ταλαντώσεις Gibbs. Το αντίτιμο που πληρώνει κανείς

είναι η πιο αργή ανύψωση, στην περίπτωση της τριγωνικής παραθύρωσης, για το ίδιο Ω' . Η χρήση της τριγωνικής συνάρτησης δεν είναι η μόνη εναλλακτική λύση. Υπάρχουν διάφορες συναρτήσεις παραθύρωσης με σχετικά πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα στην καθεμία.

2.2.11 Παραθύρωση στο Χρόνο

Στα προηγούμενα εδάφια μελετήσαμε την επίδραση που έχει ο περιορισμός του φάσματος σ' ένα πεπερασμένο διάστημα και είδαμε ότι τα αποτελέσματα είναι ιδιαίτερα εμφανή στα σημεία ασυνέχειας. Ανάλογα είναι και τα αποτελέσματα όταν η παραθύρωση εφαρμόζεται στο σήμα $x(t)$. Παραθύρωση στο χρόνο προκύπτει όταν το σήμα $x(t)$ είναι γνωστό σ' ένα πεπερασμένο μόνο διάστημα, λόγω π.χ. αδυναμίας παρατήρησής του στο υπόλοιπο, κάτι πολύ συνηθισμένο στην πράξη. Την επίδραση της παραθύρωσης στο χρόνο θα τη μελετήσουμε με τη βοήθεια του παρακάτω παραδείγματος.

Παράδειγμα 2.11:

α) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της $x(t) = A \cos \Omega_0 t$.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι

$$\cos \Omega_0 t = \frac{e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}}{2}$$

Αλλά

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$$

Συνδυασμός των παραπάνω με την ιδιότητα 3 του Εδαφίου 2.2.4 δίνει

$$e^{j\Omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \quad (2.50)$$

Εφαρμογή της ιδιότητας της γραμμικότητας δίνει

$$A \cos \Omega_0 t \longleftrightarrow A\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)] \quad (2.51)$$

Παρατήρηση: Ο μετασχηματισμός Fourier, δηλαδή, του συνημιτόνου, αποτελείται από δύο κρουστικές συναρτήσεις στις συχνότητες $\pm\Omega_0$. Γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές ορίζονται μέσα από το ολοκλήρωμά τους. Η σημασία λοιπόν της σχέσης (2.51) είναι ότι πολλαπλασιάζοντας με $e^{j\Omega t}$ και ολοκληρώνοντας το δεξιό μέλος της ανακτούμε τη φυσική ποσότητα $x(t)$ που αποτελείται από μια συχνότητα Ω_0 .

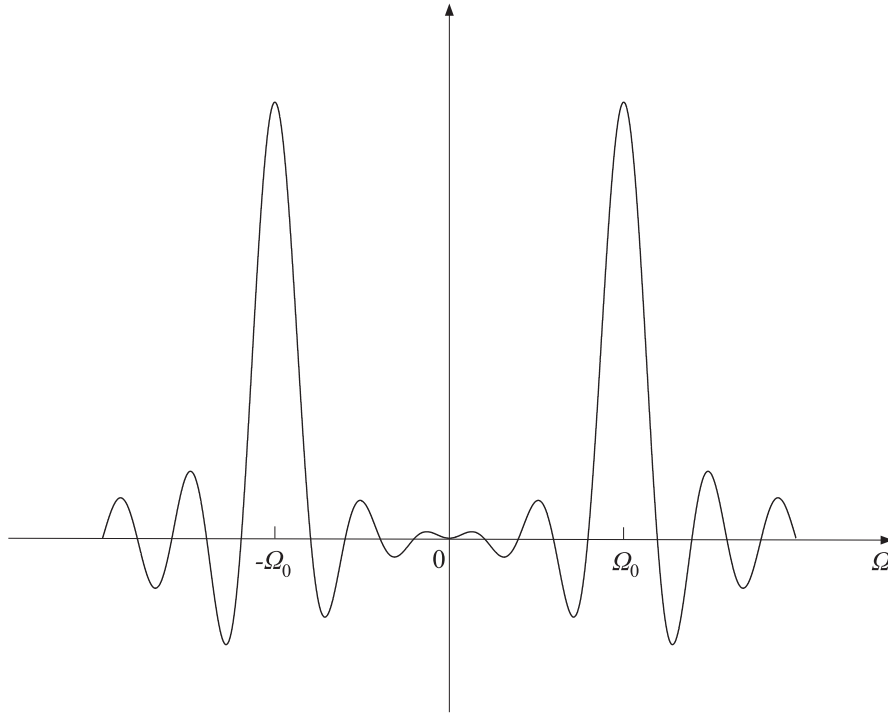
β) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της

$$A P_{T/2}(t) \cos \Omega_0 t \equiv \begin{cases} A \cos \Omega_0 t, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Λύση: Από τα Παράδειγματα 2.1 και 2.6 έπεται ότι

$$A P_{T/2}(t) \cos \Omega_0 t \longleftrightarrow \frac{AT}{2} \left\{ \frac{\sin [(\Omega - \Omega_0) \frac{T}{2}]}{(\Omega - \Omega_0) \frac{T}{2}} + \frac{\sin [(\Omega + \Omega_0) \frac{T}{2}]}{(\Omega + \Omega_0) \frac{T}{2}} \right\}$$

Ο παραπάνω MF φαίνεται στο Σχήμα 2.10. Παρατηρούμε δηλαδή, ότι λόγω της



Σχήμα 2.10 Ο MF του συνημιτόνου με τετραγωνική παραθύρωση στο χρόνο.

παραθύρωσης ο μετασχηματισμός Fourier δεν αποτελείται από κρουστικές συναρτήσεις αλλά από δύο συναρτήσεις δειγματοληψίας, πλάτους $AT/2$, τοποθετημένες στις συχνότητες $\pm\Omega_0$. Με άλλα λόγια, αποτέλεσμα της παραθύρωσης του συνημιτόνου με το τετραγωνικό παράθυρο $P_{T/2}(t)$ είναι η *διάχυση του φάσματος σε συχνότητες εκατέρωθεν των συχνοτήτων $\pm\Omega_0$ του συνημιτόνου*. Όσο πιο περιορισμένο σε εύρος είναι το παράθυρο (μικρός χρόνος παρατήρησης T του συνημιτονοειδούς σήματος) τόσο πιο ευρύς είναι ο κύριος λοβός και η έκταση του φάσματος. Εάν αντικειμενικός σκοπός είναι ο υπολογισμός της συχνότητας του συνημιτόνου, αυτή υπολογίζεται από τη θέση του μέγιστου της συνάρτησης

δειγματοληψίας. Η διαδικασία όμως αυτή στην πράξη δημιουργεί προβλήματα. Πράγματι, εάν το σήμα αποτελείται από άθροισμα περισσότερων του ενός συνημιτόνων, τότε σε καθένα απ' αυτά θα αντιστοιχεί μια συνάρτηση δειγματοληψίας (γραμμικότητα). Εάν οι συχνότητες είναι πολύ κοντά, οι αντίστοιχοι λοβοί θα εμπλέκονται και η διάκριση των μεγίστων για τον υπολογισμό των συχνοτήτων δεν θα είναι πάντα εφικτή. Ένα άλλο πρόβλημα προκύπτει όταν το πλάτος A κάποιου συνημιτόνου είναι αρκετά μικρό ώστε ο κύριος λοβός του φάσματος να καλύπτεται από δευτερεύοντες λοβούς κάποιου γειτονικού συνημιτόνου. Σε τέτοιες περιπτώσεις η επιλογή παραθύρων με μικρότερο πλάτος δευτερευόντων λοβών είναι ιδιαίτερα επιθυμητή.

γ) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της

$$A Q_{T/2}(t) \cos \Omega_0 t = \begin{cases} (1 - |\frac{2t}{T}|) A \cos \Omega_0 t, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Λύση: Από την ιδιότητα 5 του Εδαφίου 2.2.4 και τις εξισώσεις (2.48), (2.49) έπεται ότι

$$Q_{T/2}(t) \longleftrightarrow 2\pi q_{T/2}(-\Omega) = 2\pi q_{T/2}(\Omega) = 2\pi \frac{4 \sin^2(\frac{T\Omega}{4})}{\pi T \Omega^2}$$

Άρα

$$A Q_{T/2}(t) \cos \Omega_0 t \longleftrightarrow A\pi \{q_{T/2}(\Omega - \Omega_0) + q_{T/2}(\Omega + \Omega_0)\}$$

Στο Σχήμα 2.11 φαίνονται οι MF των συναρτήσεων $P_{T/2}(t)$ και $Q_{T/2}(t)$. Παρατηρούμε ότι:

- i) Ο κεντρικός λοβός είναι ευρύτερος του αντίστοιχου λοβού της περίπτωσης β) του παραδείγματος αυτού.
- ii) Οι δευτερεύοντες λοβοί είναι μικρότερου πλάτους.

2.3 Εφαρμογή του MF στη Μελέτη Γραμμικών Συστημάτων

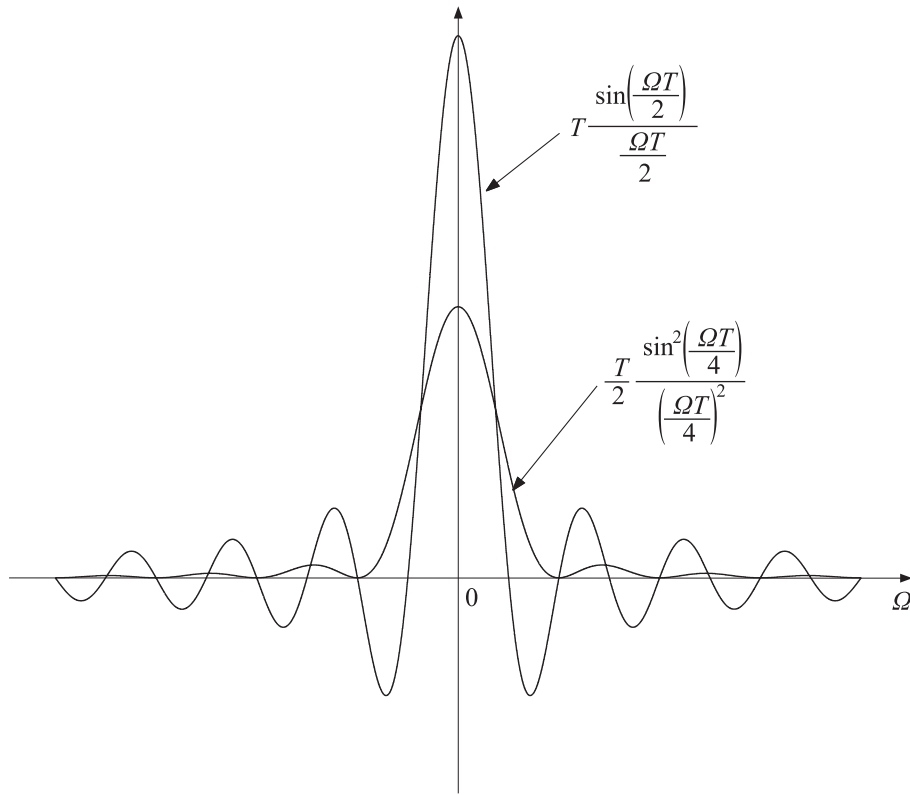
2.3.1 Απόκριση Συχνοτήτων Συστήματος

Στο Κεφάλαιο 1 είδαμε ότι ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ) σύστημα περιγράφεται πλήρως από την κρουστική του απόκριση, $h(t)$. Τα σήματα εισόδου, $x(t)$, και εξόδου, $y(t)$, σχετίζονται μέσω της συνέλιξης

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad (2.52)$$

Από το θεώρημα συνέλιξης για το μετασχηματισμό Fourier έπεται ότι

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$



Σχήμα 2.11 MF τετραγωνικού και τριγωνικού παραθύρου.

ή

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} \quad (2.53)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier $H(\Omega)$ της χρονικής απόκρισης $h(t)$ δίνεται ως το πηλίκο των μετασχηματισμών Fourier εισόδου-εξόδου. Η συνάρτηση $H(\Omega)$ καλείται *συνάρτηση μεταφοράς* ή *απόκριση συχνοτήτων* του συστήματος. Είναι προφανές ότι γνώση της $H(\Omega)$ παρέχει, μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, την $h(t)$. Ο υπολογισμός όμως της $H(\Omega)$ μέσω της (2.53) είναι σαφώς ευκολότερος απ' ό,τι ο απευθείας υπολογισμός της $h(t)$ από την ολοκληρωτική εξίσωση (2.52). Αυτό είναι ένα παράδειγμα της δύναμης του μετασχηματισμού Fourier και ως μαθηματικού εργαλείου για τη μελέτη γραμμικών συστημάτων.

2.3.2 Περιγραφή ΓΧΑ Συστημάτων με Διαφορικές Εξισώσεις και ο MF

Ως σύστημα έχουμε ορίσει τη διαδικασία που μετατρέπει μια φυσική ποσότητα, που περιγράφεται από το σήμα εισόδου, $x(t)$, σε μια άλλη, που περιγράφεται από το σήμα εξόδου, $y(t)$. Η διαδικασία αυτή του μετασχηματισμού φυσικών ποσοτήτων εκφράζεται με τη βοήθεια μιας διαφορικής εξίσωσης που συσχετίζει τα σήματα εισόδου-εξόδου. Όταν το σύστημα είναι γραμμικό χρονικά αμετάβλητο, η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση είναι γραμμική με σταθερούς συντελεστές, της γενικής μορφής:

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{l=0}^M \beta_l \frac{d^l x(t)}{dt^l} \quad (2.54)$$

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε τη μεθοδολογία επίλυσης της (2.54) με τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier και της συνάρτησης $H(\Omega)$ του αντίστοιχου συστήματος. Από την ιδιότητα 6 του Εδαφίου 2.2.4 προκύπτει ότι

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \longleftrightarrow \left[\sum_{k=0}^N \alpha_k (j\Omega)^k \right] Y(\Omega) \quad (2.55)$$

και

$$\sum_{l=0}^M \beta_l \frac{d^l x(t)}{dt^l} \longleftrightarrow \left[\sum_{l=0}^M \beta_l (j\Omega)^l \right] X(\Omega) \quad (2.56)$$

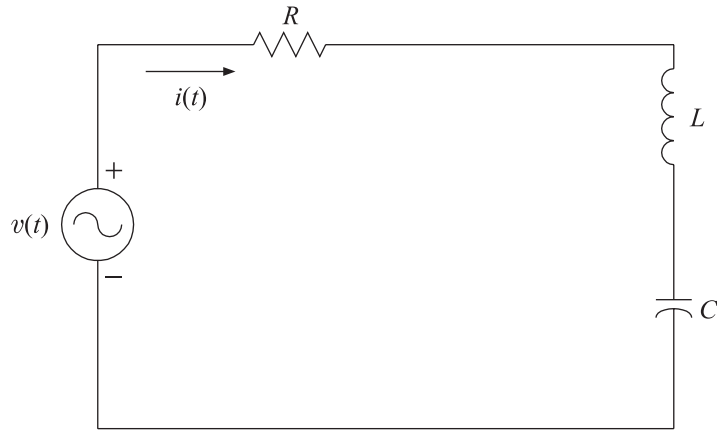
Συνδυασμός των εξισώσεων (2.55), (2.56) μας δίνει

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{l=0}^M \beta_l (j\Omega)^l}{\sum_{k=0}^N \alpha_k (j\Omega)^k} \quad (2.57)$$

Η εξίσωση (2.57) μας παρέχει την $H(\Omega)$, που με τη σειρά της μας δίνει την $h(t)$. Η λύση επομένως της διαφορικής εξίσωσης (2.54) γράφεται

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad (2.58)$$

Παρατήρηση: Είναι γνωστό ότι διαφορετικές αρχικές συνθήκες καταλήγουν σε διαφορετική λύση της εξίσωσης (2.54). Η εξίσωση (2.58) όμως είναι μοναδικά ορισμένη. Αυτό οφείλεται στο ότι ο μετασχηματισμός Fourier προϋποθέτει έναρξη της διαδικασίας στο $-\infty$ (κάτω όριο του ολοκληρώματος ορισμού του). Στο σημείο όμως αυτό, το σύστημα πάντα θεωρείται σε ηρεμία, οι αρχικές συνθήκες δηλαδή είναι μηδέν.



Σχήμα 2.12 Το κύκλωμα RLC του Παραδείγματος 2.12.

Παράδειγμα 2.12: Να υπολογιστεί η συνάρτηση συστήματος του εν σειρά RLC κυκλώματος του Σχήματος 2.12, όπου $v(t)$ η εφαρμοζόμενη τάση (είσοδος) και $i(t)$ η ένταση ρεύματος που ζητείται (έξοδος).

Λύση: Από το νόμο του Kirchhoff έπεται ότι

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = v(t)$$

Έπειτα από παραγωγή παίρνουμε

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{dv(t)}{dt} \quad (2.59)$$

Από την (2.59) προκύπτει ότι

$$H(\Omega) = \frac{I(\Omega)}{V(\Omega)} = \frac{j\Omega}{-L\Omega^2 + jR\Omega + 1/C}$$

ή

$$H(\Omega) = \frac{1}{R + j\Omega L + 1/j\Omega C} \quad (2.60)$$

△

2.3.3 Απόκριση ΓΧΑ Συστημάτων σε Ημιτονοειδείς Εισόδους

Θεωρούμε ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα με χρονστική απόκριση $h(t)$ (πραγματική συνάρτηση). Η απόκριση συχνοτήτων $H(\Omega)$ στη γενική περίπτωση είναι συνάρτηση μιγαδική και γράφεται ως

$$H(\Omega) = |H(\Omega)|e^{j\theta(\Omega)} \quad (2.61)$$

όπου $|H(\Omega)|$ η συνάρτηση του μέτρου και $\theta(\Omega)$ αυτή της φάσης. Ένας άλλος τρόπος για να γράφουμε συμβολικά την εξίσωση (2.61) είναι:

$$H(\Omega) = |H(\Omega)|\angle\theta(\Omega) \quad (2.62)$$

Η τελευταία είναι γνωστή και ως *αναπαράσταση φάσορα* της $H(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι η είσοδος στο σύστημα είναι:

$$x(t) = A \cos(\Omega_0 t + \phi) \quad (2.63)$$

Ακολουθώντας τα βήματα που καταλήγουν στην (2.51) αποδεικνύουμε εύκολα ότι

$$x(t) \longleftrightarrow X(\Omega) = A\pi[e^{-j\phi}\delta(\Omega + \Omega_0) + e^{j\phi}\delta(\Omega - \Omega_0)] \quad (2.64)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου $y(t)$ ισούται με

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$

ή

$$Y(\Omega) = A\pi[e^{-j\phi}H(\Omega)\delta(\Omega + \Omega_0) + e^{j\phi}H(\Omega)\delta(\Omega - \Omega_0)] \quad (2.65)$$

Αλλά

$$H(\Omega)\delta(\Omega + \Omega_0) = H(-\Omega_0)\delta(\Omega + \Omega_0) \quad (2.66)$$

$$H(\Omega)\delta(\Omega - \Omega_0) = H(\Omega_0)\delta(\Omega - \Omega_0) \quad (2.67)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι προφανείς από τον ορισμό της χρονστικής συνάρτησης. Οι εξισώσεις (2.65)-(2.67) μας οδηγούν στην

$$Y(\Omega) = A\pi[e^{-j\phi}H(-\Omega_0)\delta(\Omega + \Omega_0) + e^{j\phi}H(\Omega_0)\delta(\Omega - \Omega_0)] \quad (2.68)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{1}{2}Ae^{-j\phi}H(-\Omega_0)e^{-j\Omega_0 t} \longleftrightarrow A\pi e^{-j\phi}H(-\Omega_0)\delta(\Omega + \Omega_0) \quad (2.69)$$

$$\frac{1}{2}Ae^{j\phi}H(\Omega_0)e^{j\Omega_0 t} \longleftrightarrow A\pi e^{j\phi}H(\Omega_0)\delta(\Omega - \Omega_0) \quad (2.70)$$

Επιπλέον, εφόσον η συνάρτηση $h(t)$ έχει υποτεθεί πραγματική, ο μετασχηματισμός Fourier αυτής υπακούει στη σχέση:

$$H(-\Omega) = H^*(\Omega) \quad (2.71)$$

Άρα:

$$Ae^{-j\phi} H(-\Omega_0) e^{-j\Omega_0 t} = [Ae^{j\phi} H(\Omega_0) e^{j\Omega_0 t}]^* \quad (2.72)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$y(t) = \operatorname{Re} \left[AH(\Omega_0) e^{j(\Omega_0 t + \phi)} \right] \quad (2.73)$$

ή

$$y(t) = A|H(\Omega_0)| \cos[\Omega_0 t + \phi + \theta(\Omega_0)] \quad (2.74)$$

Με άλλα λόγια, το ΓΧΑ σύστημα μεταβάλλει το πλάτος του συνημιτόνου πολλαπλασιαστικά κατά $|H(\Omega_0)|$ και τη φάση του προσθετικά κατά $\theta(\Omega_0)$. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι, εάν $x(t) = A \sin(\Omega_0 t + \phi)$, η έξοδος είναι:

$$y(t) = \operatorname{Im} \left[AH(\Omega_0) e^{j(\Omega_0 t + \phi)} \right] \quad (2.75)$$

ή

$$y(t) = A|H(\Omega_0)| \sin[\Omega_0 t + \phi + \theta(\Omega_0)] \quad (2.76)$$

Παράδειγμα 2.13: Να υπολογιστεί το ρεύμα $i(t)$ που διαρρέει το RLC κύκλωμα του Σχήματος 2.12 όταν

$$v(t) = V_m \cos \left(\Omega_0 t + \frac{\pi}{3} \right)$$

Λύση: Από τη σχέση (2.60) η συνάρτηση του συστήματος είναι

$$H(\Omega) = \frac{1}{R + j\Omega L + \frac{1}{j\Omega C}} \equiv \frac{1}{Z(\Omega)} \quad (2.77)$$

όπου

$$Z(\Omega) = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2} \angle \theta(\Omega) \quad (2.78)$$

και

$$\theta(\Omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R} \right) \quad (2.79)$$

Ο συνδυασμός των εξισώσεων (2.74), (2.77), (2.78), (2.79) μας οδηγεί στην

$$i(t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{V_m}{Z(\Omega_0)} e^{j(\Omega_0 t + \frac{\pi}{3})} \right\} \quad (2.80)$$

ή

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\Omega L - \frac{1}{\Omega C})^2}} \cos \left[\Omega_0 t + \frac{\pi}{3} - \theta(\Omega_0) \right] \quad (2.81)$$

Από τις εξισώσεις (2.80), (2.81) γίνεται προφανές γιατί η $Z(\Omega)$ οριζόμενη από τις εξισώσεις (2.77), (2.78), (2.79) ερμηνεύεται ως η αντίσταση (εμπέδηση) του συστήματος. Εάν στις εξισώσεις αυτές αντικαταστήσουμε εκ περιτροπής $R = 0$, $L = 0$, $C \rightarrow \infty$, τότε επαληθεύουμε τις γνωστές σχέσεις από τη θεωρία κυκλωμάτων:

1. Το ωμικό στοιχείο εμφανίζει αντίσταση $R \angle 0$
2. Η επαγωγική αντίσταση είναι $\Omega L \angle \pi/2$
3. Η χωρητική αντίσταση είναι $\frac{1}{\Omega C} \angle -\pi/2$

Τέλος, η εξίσωση (2.81) δεν είναι τίποτε άλλο από το αποτέλεσμα στο οποίο θα καταλήξουμε εάν χρησιμοποιήσουμε πράξεις φασόρων μεταξύ της $Z(\Omega)$ και της $v(t) = V_m \angle \Omega_0 t + \frac{\pi}{3}$. \triangle

2.3.4 Ιδανικό Κατωπερατό Φίλτρο

Ως *φίλτρο* ορίζουμε ένα σύστημα του οποίου η απόκριση συχνοτήτων είναι ακριβώς (ή κατά προσέγγιση) μηδέν σε ορισμένα διαστήματα συχνοτήτων. *Ιδανικό κατωπερατό φίλτρο* ονομάζεται το ΓΧΑ σύστημα του οποίου η απόκριση συχνοτήτων ορίζεται ως

$$H(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega t_0}, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \quad (2.82)$$

όπου t_0 μια σταθερά. Η συχνότητα Ω_c είναι γνωστή ως *συχνότητα αποκοπής*. Η σχέση (2.83) σε αναπαράσταση φάσορα γράφεται ως:

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1 \angle -\Omega t_0, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \quad (2.83)$$

Παρατηρούμε ότι:

1. Το μέτρο της $H(\Omega)$ είναι 1 ή 0.
2. Η φάση της $H(\Omega)$ είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας.

Εάν $x(t)$ είναι η είσοδος στο σύστημα αυτό, τότε για την έξοδο $y(t)$ έχουμε:

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$

Είναι προφανές, επομένως, ότι το ιδανικό κατωπερατό φίλτρο απορροφά τις συχνότητες εκείνες του φάσματος $X(\Omega)$ που είναι μεγαλύτερες από Ω_c . Η απαίτηση της γραμμικότητας της φάσης είναι πολύ σημαντική στην πράξη. Ας υποθέσουμε ότι το $x(t)$ αποτελείται από δύο συνιστώσες

$$x(t) = x_\epsilon(t) + x_\alpha(t)$$

όπου $x_\epsilon(t)$ η επιθυμητή και $x_\alpha(t)$ μια ανεπιθύμητη συνιστώσα, συνήθως γνωστή και ως παρεμβολή. Έστω δε ότι:

$$|X_\epsilon(\Omega)| = 0, \quad |\Omega| > \Omega_c$$

και

$$|X_\alpha(\Omega)| = 0, \quad |\Omega| < \Omega_c$$

Η έξοδος του φίλτρου για την παραπάνω διέγερση αντιστοιχεί σε

$$Y(\Omega) = X_\epsilon(\Omega)e^{-j\Omega t_0}$$

ή

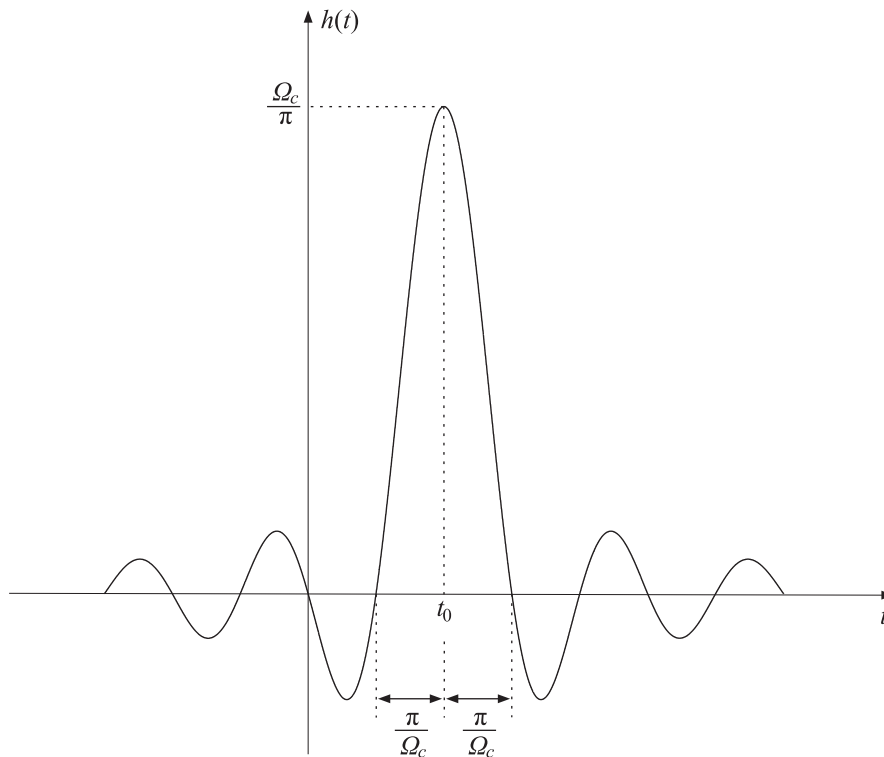
$$y(t) = x_\epsilon(t - t_0)$$

Το γραμμικό, δηλαδή, κατωπερατό φίλτρο απορροφά την ανεπιθύμητη παρεμβολή. Η επίδραση του φίλτρου στην επιθυμητή συνιστώσα είναι απλά μια χρονική καθυστέρηση. Αυτό δεν ισχύει εάν η συνάρτηση φάσης δεν είναι γραμμική ως προς Ω (γιατί;).

Έχοντας ορίσει το φίλτρο στο πεδίο συχνοτήτων, στη συνέχεια θ' αναδείξουμε ορισμένα χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς του φίλτρου στο πεδίο του χρόνου. Το πρώτο βήμα είναι ο υπολογισμός της χρονικής του απόκρισης, δηλαδή του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier της $H(\Omega)$, που σύμφωνα με γνωστές ιδιότητες είναι η (βλ. και Σχήμα 2.13)

$$h(t) = \frac{\sin \Omega_c(t - t_0)}{\pi(t - t_0)} = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{Sa}[\Omega_c(t - t_0)]$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι, όσο μικρότερο είναι το Ω_c τόσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια της χρονικής απόκρισης (τείνει στο μηδέν βραδύτερα) και αντίστροφα. Ένα άλλο χαρακτηριστικό είναι ότι η χρονική απόκριση δεν είναι μηδέν για



Σχήμα 2.13 Κρουστική απόκριση ιδανικού κατωπερατού φίλτρου.

αρνητικές χρονικές στιγμές. Το ιδανικό φίλτρο, δηλαδή, είναι μη αιτιατό (και, όπως αποδεικνύεται, ασταθές) άρα και μη πραγματοποιήσιμο. Αυτό είναι απόρροια της ύπαρξης ασυνέχειας στο πεδίο συχνοτήτων. Για αρκούντως μεγάλα όμως t_0 η απόκριση για αρνητικές χρονικές τιμές μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα και να προσεγγίσουμε το φίλτρο μ' ένα αιτιατό σύστημα. Η προσέγγιση αυτή αντιστοιχεί σε παραθύρωση στο χρόνο. (Ποια η επίδραση στο φάσμα;) Σ' αυτή, βέβαια, την περίπτωση αναγκούμε την επιθυμητή συνιστώσα με μεγάλη καθυστέρηση, ανάλογη του t_0 .

Ένα άλλο σπουδαίο χαρακτηριστικό της συμπεριφοράς ενός συστήματος στο πεδίο του χρόνου είναι η ικανότητά του να παρακολουθεί απότομες μεταβολές του σήματος εισόδου. Στην πράξη αυτό μελετάται εφαρμόζοντας ως είσοδο τη βηματική συνάρτηση και παρακολουθώντας την αντίστοιχη έξοδο ή, όπως συνήθως λέγεται, τη *βηματική απόκριση*. Η έξοδος $y(t)$ του φίλτρου για είσοδο $x(t) = u(t)$

είναι

$$y(t) = h(t) * u(t)$$

ή

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^t \frac{\sin \Omega_c(\tau - t_0)}{\tau - t_0} d\tau$$

ή σύμφωνα με την εξίσωση (2.44)

$$y(t) = \frac{1}{2} + Si[\Omega_c(t - t_0)]$$

της οποίας η μορφή είναι ήδη γνωστή από το Σχήμα 2.8. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι, αν και η είσοδος αλλάζει απότομα, η έξοδος ακολουθεί σταδιακά. Η ποσότητα που χαρακτηρίζει την ταχύτητα μεταβολής είναι η παράγωγος της $y(t)$ στο σημείο ασυνέχειας t_0 , δηλαδή

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{\Omega_c}{\pi} \equiv \frac{1}{t_r}$$

Η ποσότητα t_r είναι γνωστή και ως *χρόνος ανύψωσης (rise time)*. Άρα, όσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητα αποκοπής τόσο ταχύτερα το φίλτρο έχει τη δυνατότητα να παρακολουθεί την απότομη μεταβολή. Αυτό είναι λογικό. Όσο μεγαλύτερο το Ω_c τόσο περισσότερες υψηλές συχνότητες παρέχονται στην έξοδο του συστήματος. Υψηλές όμως συχνότητες σημαίνουν και δυνατότητα γρήγορης μεταβολής.

2.4 Σειρά Fourier

2.4.1 Ορθοκανονικές Συναρτήσεις

Το πρόβλημα που μας απασχόλησε στα προηγούμενα εδάφια ήταν το ανάπτυγμα ενός σήματος σ' ένα μη αριθμήσιμο άπειρο άθροισμα σημάτων απλών συχνοτήτων με τη βοήθεια του ολοκληρώματος Fourier. Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου αυτού θα διερευνήσουμε εάν και κάτω από ποιες συνθήκες είναι δυνατή η ανάπτυξη ενός σήματος, $x(t)$, σ' ένα άπειρο αλλά αριθμήσιμο άθροισμα απλών συχνοτήτων. Ένα τέτοιο ανάπτυγμα σε άθροισμα στοιχειωδών συναρτήσεων μας θυμίζει το ανάπτυγμα ενός διανύσματος στα διανύσματα βάσης που παράγουν τον αντίστοιχο διανυσματικό χώρο. Πράγματι, όπως θα διαπιστώσουμε αμέσως παρακάτω, υπάρχει άμεση σχέση μεταξύ σημάτων και διανυσμάτων.⁵

⁵Η περιγραφή ενός σήματος ως ένα διάνυσμα σ' έναν κατάλληλα ορισμένο διανυσματικό (γραμμικό) χώρο αποτελεί ένα δυνατό μαθηματικό εργαλείο, του οποίου η χρησιμότητα κάθε άλλο παρά εξαντλείται στο συγκεκριμένο πρόβλημα που εξετάζουμε.

Θεωρούμε το σύνολο των συναρτήσεων $x(t)$ στο διάστημα $[a, b]$ με καλή συμπεριφορά (συνεχείς ή τουλάχιστον τμηματικά συνεχείς) και το υποσύνολο $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots$ με την ιδιότητα

$$\int_a^b \phi_i(t) \phi_j^*(t) dt = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.84)$$

Τέτοιες συναρτήσεις, $\phi_n(t)$, ονομάζονται ορθοκανονικές. Όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, συναρτήσεις που ικανοποιούν την (2.84) υπάρχουν και μάλιστα είναι άπειρες στο πλήθος. Θεωρούμε μια ακολουθία τέτοιων συναρτήσεων και έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n(t)$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση $x(t)$ στο διάστημα $[a, b]$, δηλαδή

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n(t), \quad a \leq t \leq b \quad (2.85)$$

Τότε οι συντελεστές α_n ικανοποιούν τη σχέση

$$\alpha_n = \int_a^b x(t) \phi_n^*(t) dt \quad (2.86)$$

Η απόδειξη της (2.86) είναι προφανής. Αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τη $x(t)$ στην (2.85) διαδοχικά με τις $\phi_n^*(t)$, $n = 1, 2, \dots$ και να ολοκληρώσουμε.

Ας επανέλθουμε τώρα στη (2.86). Στο γραμμικό χώρο που αποτελείται από το σύνολο των συναρτήσεων των ορισμένων στο διάστημα $[a, b]$ και με καλή συμπεριφορά, ορίζουμε την πράξη μεταξύ δύο στοιχείων του, των $x(t)$, $y(t)$, ως

$$\langle x, y \rangle \equiv \int_a^b x(t) y^*(t) dt \quad (2.87)$$

Η πράξη αυτή έχει ιδιότητες εσωτερικού γινομένου. Πράγματι, ισχύει

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$
4. $\langle cx, y \rangle = c \langle x, y \rangle, \forall c$

Ένας χώρος εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο καλείται και (μιγαδικός) *Ευκλείδειος χώρος*. Σ' έναν Ευκλείδειο χώρο το εσωτερικό γινόμενο ορίζει ταυτόχρονα και ένα μέτρο (norm)

$$\|x\|_2 \equiv \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

που είναι το μήκος του αντίστοιχου διανύσματος. Οι Ευκλείδειοι χώροι επιτρέπουν την άμεση γενίκευση εννοιών και αποτελεσμάτων από την Ευκλείδεια γεωμετρία. Για παράδειγμα, με βάση τον παραπάνω ορισμό του εσωτερικού γινομένου, η συνθήκη (2.84) δεν είναι τίποτε άλλο από μια συνθήκη ορθογωνιότητας. Αυτός είναι ο λόγος που οι $\phi_n(t)$ ονομάζονται ορθοκανονικές συναρτήσεις (αμοιβαία ορθογώνιες με μέτρο μονάδα). Στον Ευκλείδειο χώρο που δημιουργούν οι $\phi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$ η (2.85) είναι το ανάπτυγμα του διανύσματος $x(t)$ ως προς τα διανύσματα $\phi_n(t)$ του χώρου και τα α_n στην (2.86) δεν είναι τίποτε άλλο από τις προβολές του $x(t)$ σε κάθε ένα από τα ορθοκανονικά διανύσματα.

Εάν στην (2.87) θέσουμε ως όρια της ολοκλήρωσης τα $\pm\infty$, ο Ευκλείδειος χώρος που προκύπτει είναι γνωστός ως χώρος $L_2(\mathbb{R})$, δηλαδή

$$L_2(\mathbb{R}) = \{x(t), t \in (-\infty, \infty) : \|x\|_2 < \infty\}$$

Το μέτρο $\|\cdot\|_2$ είναι γνωστό και ως L_2 -μέτρο. Προφανώς στο χώρο αυτόν ανήκουν όλα τα σήματα πεπερασμένης ενέργειας.⁶

Στα επόμενα εδάφια θ' ασχοληθούμε με συγκεκριμένες ορθοκανονικές συναρτήσεις και αναπτύγματα της μορφής (2.85). Μια αυστηρά μαθηματική διαπραγμάτευση θα απαιτούσε μελέτη στον L_2 χώρο με αντίστοιχες γενικεύσεις περί ισότητας, σύγκλισης, ερμηνείας του ολοκληρώματος στον ορισμό του εσωτερικού γινομένου (π.χ. ολοκλήρωμα Lebesgue) και είναι πέρα από τα πλαίσια του παρόντος βιβλίου. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στα σχετικά βιβλία της προτεινόμενης βιβλιογραφίας (π.χ., [Kalou94, Kalou97]).

Παράδειγμα 2.14: Ν' αποδειχτεί ότι στο πεπερασμένο διάστημα εύρους T , $[a, b] \equiv [t_0, t_0 + T]$ (χώρος $L_2(T)$):

α) Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

και

β) Οι εκθετικές συναρτήσεις

$$\frac{1}{\sqrt{T}} e^{jn\frac{2\pi}{T}t}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

⁶Εκτός από τους L_2 χώρους μπορούμε να ορίσουμε και τους L_p : $L_p(\mathbb{R}) = \{x(t) : \|x\|_p < \infty\}$ όπου, για $p < \infty$, $\|x\|_p \equiv \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}$. Σε αντίθεση με τους L_2 χώρους οι L_p δεν είναι Ευκλείδειοι χώροι. Το μέτρο στους χώρους αυτούς δεν προκύπτει από αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο, είναι απλά χώροι εφοδιασμένοι με μέτρο και αποτελέσματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας δεν γενικεύονται εδώ.

είναι ορθοκανονικές.

Παρατήρηση: Όλες αυτές οι συναρτήσεις έχουν περίοδο T ή ακέραια (υπο)-πολλαπλάσια του T , του εύρους, δηλαδή, του διαστήματος.

Λύση: Ορίζουμε κατ' αρχήν $\Omega_0 \equiv \frac{2\pi}{T}$. Τότε

α) Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} 2 \frac{\cos n\Omega_0 t}{\sqrt{T}} \frac{\cos m\Omega_0 t}{\sqrt{T}} dt &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos[(n+m)\Omega_0 t] dt \\ &\quad + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos[(n-m)\Omega_0 t] dt \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \end{aligned}$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι

$$\frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\Omega_0 t) \sin(m\Omega_0 t) dt = 0$$

και

$$\frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(n\Omega_0 t) \sin(m\Omega_0 t) dt = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$$

β) Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jn\Omega_0 t} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-jm\Omega_0 t} dt &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j\Omega_0(n-m)t} dt \\ &= \begin{cases} 1, & n = m \\ \frac{e^{j(n-m)\Omega_0 t_0}}{j\Omega_0(n-m)T} [e^{j2\pi(n-m)} - 1], & n \neq m \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$

△

2.4.2 Τριγωνομετρική Σειρά Fourier

Έστω $x(t)$ μια συνάρτηση στο διάστημα $[t_0, t_0+T]$ και ας υποθέσουμε ότι υπάρχει το ανάπτυγμα

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega_0 t + b_n \sin n\Omega_0 t) \quad (2.88)$$

όπου $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Τότε ισχύει ότι

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \quad (2.89)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos n\Omega_0 t dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.90)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin n\Omega_0 t dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.91)$$

Απόδειξη: Η απόδειξη των (2.89)-(2.91) είναι προφανής από την ορθογωνιότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και την (2.86). \triangle

Όπως και στην περίπτωση των μετασχηματισμών Fourier, το ανάπτυγμα (2.88) δεν υπάρχει πάντα. Αποδεικνύεται ότι ένα σύνολο *ικανών* συνθηκών είναι και πάλι οι τρεις *συνθήκες Dirichlet*, δηλαδή:

1. Η $x(t)$ είναι συνεχής ή έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών πεπερασμένου ύψους.
2. Η $x(t)$ είναι φραγμένης κύμανσης στο διάστημα $[t_0, t_0 + T]$.
3. Η $x(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, δηλαδή $\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt < \infty$

Τότε η (2.88) υπάρχει και έχει νόημα. Η συνθήκη 3 εξασφαλίζει ότι τα a_n, b_n είναι πεπερασμένα. Πράγματι, για $n > 0$,

$$|a_n| = \left| \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos n\Omega_0 t dt \right| \leq \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt < \infty \quad (2.92)$$

Στη (2.88) η ισότητα ισχύει για κάθε χρονική στιγμή εάν η $x(t)$ είναι συνεχής. Όπως και στην περίπτωση του MF, στα σημεία ασυνέχειας, t_i , η σειρά στο δεξιό μέρος της (2.88) συγκλίνει στο σημείο

$$\hat{x}(t_i) = \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow t_i^+} x(t) + \lim_{t \rightarrow t_i^-} x(t) \right] \quad (2.93)$$

2.4.3 Εκθετική Σειρά Fourier

Κάτω από τις ίδιες (ικανές) συνθήκες Dirichlet, μια συνάρτηση, $x(t)$, στο διάστημα $[t_0, t_0 + T]$ αναπτύσσεται σε άθροισμα στοιχειωδών εκθετικών συναρτήσεων

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t} \quad (2.94)$$

όπου $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ και

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt \quad (2.95)$$

Η απόδειξη ακολουθεί τα ίδια βήματα όπως και προηγουμένως. Η σχέση Euler που συνδέει την εκθετική με την τριγωνομετρική σειρά υπαγορεύει τη σχέση που συνδέει τα a_n , b_n με τα c_n . Από τις (2.89), (2.90), (2.91) και τις (2.94), (2.95) έπεται ότι

$$a_0 = c_0 \quad (2.96)$$

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad (2.97)$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n}) \quad (2.98)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.99)$$

Από τις εξισώσεις (2.96)-(2.98) προκύπτει ότι για πραγματικές $x(t)$ (δηλαδή a_n , b_n πραγματικά) είναι

$$c_n^* = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = c_{-n} \quad (2.100)$$

Το παραπάνω είναι το αντίστοιχο αυτού που ισχύει για το MF, δηλαδή $X^*(\Omega) = X(-\Omega)$.

2.4.4 Σειρές Fourier Περιοδικών Συναρτήσεων

Μέχρι στιγμής ορίσαμε το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier μιας συνάρτησης $x(t)$ σ' ένα διάστημα $[a, b]$. Εκτός του διαστήματος αυτού η σειρά Fourier δεν συγκλίνει κατ' ανάγκη στη $x(t)$, δεδομένου ότι η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων του αναπτύγματος ισχύει στο συγκεκριμένο διάστημα. Ας δούμε όμως τι γίνεται εάν η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο T , εάν δηλαδή

$$x(t) = x(t + T)$$

Το ανάπτυγμα Fourier της $x(t)$ σ' ένα διάστημα μήκους T ίσο με την περίοδο είναι

$$x(t) = \sum_n c_n e^{jn\Omega_0 t}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Αλλά

$$e^{jn\Omega_0 t} = e^{jn\Omega_0(t+T)}$$

Με άλλα λόγια, η σειρά Fourier είναι επίσης περιοδική με την ίδια περίοδο T , άρα συγκλίνει στη $x(t)$ σε όλο το διάστημα $-\infty < t < \infty$. Το ίδιο ισχύει και για

την τριγωνομετρική σειρά. Ανακεφαλαιώνοντας, έχουμε ότι, εάν $x(t) = x(t+T)$, τότε για $-\infty < t < \infty$ ισχύει

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

ή ισοδύναμα

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) + b_n \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) \right]$$

Τα a_n , b_n και c_n δίνονται από τις (2.89)-(2.91) και (2.95), αντίστοιχα. Το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι προφανώς ανεξάρτητο του t_0 και αρκεί το διάστημα ολοκλήρωσης να καλύπτει μια περίοδο. Οι συχνότητες των ημιτόνων και των συνημιτόνων είναι ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ που αντιστοιχεί στην περίοδο T . Για το λόγο αυτόν, οι συνιστώσες (και οι συχνότητες) αυτές είναι γνωστές ως *αρμονικές* του περιοδικού σήματος.

Παρατήρηση: Στη γενική περίπτωση, ο μετασχηματισμός Fourier μιας περιοδικής συνάρτησης δεν υπάρχει (είναι γενικευμένη συνάρτηση). Αντίθετα, η σειρά Fourier έχει νόημα.

Παράδειγμα 2.15: Να υπολογιστεί η τριγωνομετρική σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης $x(t)$ που ορίζεται ως

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

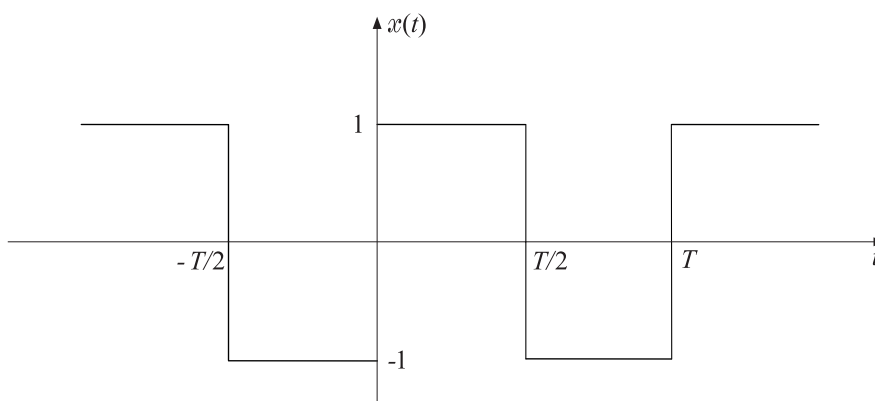
και $x(t) = x(t+T)$. Η μορφή της φαίνεται στο Σχήμα 2.14.

Λύση: Η περίοδος είναι T , άρα $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Από τις εξισώσεις (2.89)-(2.91) έχουμε

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = 0$$

και για $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\Omega_0 t dt \\ &= -\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 \cos n\Omega_0 t dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos n\Omega_0 t dt \end{aligned}$$



Σχήμα 2.14 Η περιοδική συνάρτηση του Παραδείγματος 2.15.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{T} \left(\frac{-1}{n\Omega_0} \sin n\Omega_0 t \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{1}{n\Omega_0} \sin n\Omega_0 t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

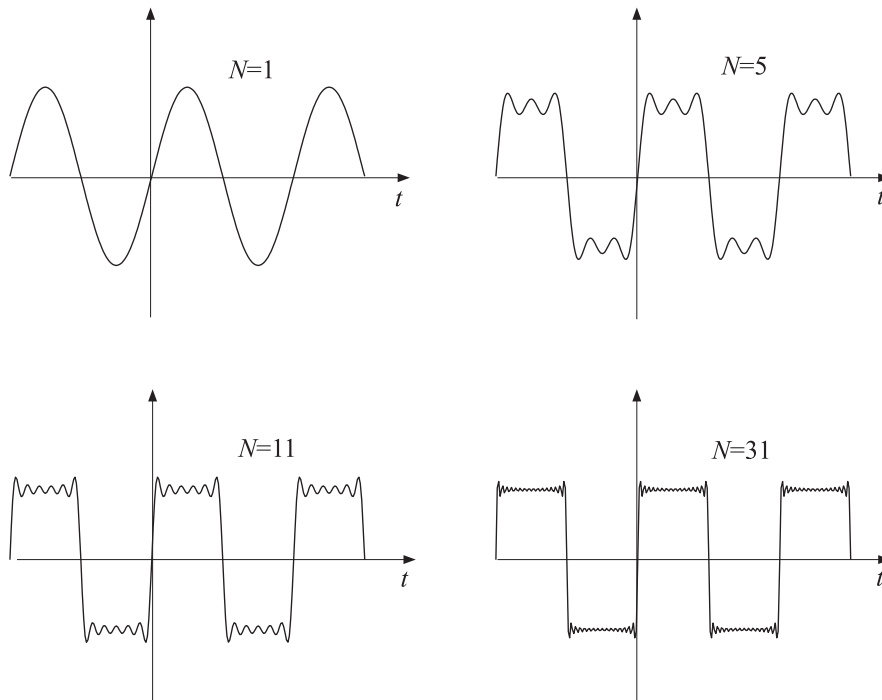
και

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\Omega_0 t \, dt \\
 &= \frac{2}{T} \left[- \int_{-\frac{T}{2}}^0 \sin n\Omega_0 t \, dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \sin n\Omega_0 t \, dt \right] \\
 &= \frac{2}{n\Omega_0 T} \left(\cos n\Omega_0 t \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 - \cos n\Omega_0 t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
 &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \\
 &= \begin{cases} 0, & n \text{ άρτιος} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ περιττός} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Άρα

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \Omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega_0 t + \dots \right)$$

Η σύγκλιση της σειράς Fourier στο δοσμένο περιοδικό σήμα φαίνεται στο Σχήμα 2.15 όπου δίνονται τα αθροίσματα των $N = 1, 5, 11, 31$ πρώτων αρμονικών. Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση γίνεται όλο και καλύτερη καθώς αυξάνεται το



Σχήμα 2.15 Το άθροισμα των $N = 1, 5, 11, 31$ πρώτων αρμονικών του σήματος του Παραδείγματος 2.15.

N . Αξίζει να παρατηρήσουμε τις ταλαντώσεις αναλλοίωτου πλάτους στα σημεία ασυνέχειας του $x(t)$. Αυτές θα πάνε να εμφανίζονται μόνο όταν αθροιστούν άπειρες αρμονικές (φαινόμενο Gibbs). Ο αναγνώστης θα πρέπει να δει και το Πρόβλημα 10. \triangle

2.4.5 Σειρά Fourier για Άρτια και Περιττή Συμμετρία

Έστω η συνάρτηση $x(t)$, $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Διακρίνουμε τις εξής δύο υποπεριπτώσεις:

α) $x(-t) = x(t)$, δηλ. άρτια.

β) $x(-t) = -x(t)$, δηλ. περιττή.

Από τις εξισώσεις (2.89)-(2.91) για την περίπτωση α) προκύπτει ότι

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\Omega_0 t dt = 0$$

αφού η συνάρτηση $x(t) \sin n\Omega_0 t$ είναι περιττή και το διάστημα ολοκλήρωσης συμ-

μετρικό γύρω από το μηδέν. Συνοψίζοντας:

$$\boxed{x(-t) = x(t) \Rightarrow b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots} \quad (2.101)$$

Άρα για συναρτήσεις με άρτια συμμετρία οι συντελεστές των ημιτόνων είναι μηδέν. Με ανάλογο τρόπο για την περίπτωση περιττής συμμετρίας μπορούμε να δείξουμε ότι το a_0 και οι συντελεστές των συνημιτόνων είναι μηδέν, δηλαδή

$$\boxed{x(-t) = -x(t) \Rightarrow a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots} \quad (2.102)$$

Η (2.102) επαληθεύεται και από το Παράδειγμα 2.15. Σε ό,τι αφορά τους συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier, για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις ισχύει

α) άρτια συμμετρία $c_n = c_{-n}$ β) περιττή συμμετρία $c_n = -c_{-n}$	(2.103)
---	---------

Οι παραπάνω σχέσεις αποδεικνύονται εύκολα από τις (2.101), (2.90) και (2.91) καθώς και τις (2.96)-(2.100). Από την (2.103) και την (2.100) προκύπτει ότι, εάν η $x(t)$ είναι πραγματική και άρτια, τότε τα c_n είναι πραγματικά, κι εάν η $x(t)$ είναι πραγματική και περιττή, τότε τα c_n είναι φανταστικά. (Αναλογία με το Εδάφιο 2.2.7).

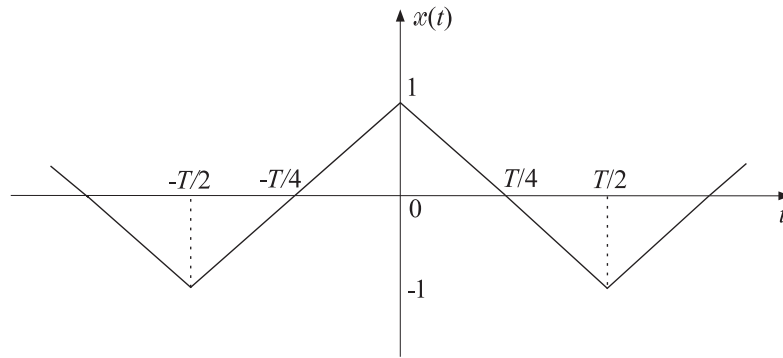
Παράδειγμα 2.16: Να υπολογιστεί η σειρά Fourier περιοδικής συνάρτησης με περίοδο T , η οποία στο διάστημα $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ ορίζεται ως

$$x(t) = \begin{cases} 1 + \frac{4t}{T}, & -\frac{T}{2} < t \leq 0 \\ 1 - \frac{4t}{T}, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

και φαίνεται στο Σχήμα 2.16.

Λύση: Η εν λόγω συνάρτηση είναι άρτια, άρα $b_n = 0$. Άρκει επομένως να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_n . Για $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\Omega_0 t \, dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 \left(1 + \frac{4t}{T}\right) \cos n\Omega_0 t \, dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(1 - \frac{4t}{T}\right) \cos n\Omega_0 t \, dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\Omega_0 t \, dt + \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 \frac{4t}{T} \cos n\Omega_0 t \, dt - \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{4t}{T} \cos n\Omega_0 t \, dt \end{aligned}$$



Σχήμα 2.16 Η περιοδική συνάρτηση του Παραδείγματος 2.16.

Το πρώτο ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Το δεύτερο και τρίτο ολοκλήρωμα είναι ίσα. Άρα

$$a_n = -\frac{16}{T^2} \int_0^{\frac{T}{2}} t \cos n\Omega_0 t \, dt$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες παίρνουμε

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{16}{T^2} \left(\frac{1}{n\Omega_0} t \sin n\Omega_0 t \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{n\Omega_0} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin n\Omega_0 t \, dt \right) \\ &= -\frac{16}{T^2} \left(\frac{1}{n^2\Omega_0^2} \cos n\Omega_0 t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \end{aligned}$$

ή

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0, & n \text{ άρτιος} \\ \frac{8}{n^2\pi^2}, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Επίσης

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \, dt = 0$$

Άρα τελικά

$$x(t) = \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \Omega_0 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\Omega_0 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\Omega_0 t + \dots \right)$$

△

2.4.6 Θεώρημα Parseval

Έστω η συνάρτηση $x(t)$ ορισμένη στο $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ ή περιοδική με περίοδο T . Κατ' αναλογία με το αντίστοιχο θεώρημα του μετασχηματισμού Fourier, θ' αποδείξουμε ότι

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (2.104)$$

Πράγματι, από τις (2.94) και (2.95),

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t)dt &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-j\Omega_0 n t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\Omega_0 n t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* c_n \end{aligned}$$

Εάν $x(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση, γνωρίζουμε ότι

$$c_n^* = c_{-n}$$

κι άρα

$$|c_{-n}| = |c_n|$$

Έτσι, η σχέση (2.104) γίνεται

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = c_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \quad (2.105)$$

και από τις (2.96)-(2.99) έχουμε ότι

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (2.106)$$

Είναι προφανές ότι εάν το σήμα ορίζεται σ' ένα διάστημα $[t_0, t_0 + T]$, το μόνο που θ' αλλάξει είναι τα όρια στα παραπάνω ολοκληρώματα.

Οι σχέσεις (2.104), (2.105) και (2.106) αποκτούν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην περίπτωση των περιοδικών σημάτων. Για τα σήματα αυτά η ενέργεια (βλ. (2.42)) δεν έχει νόημα αφού το ολοκλήρωμα απειρίζεται. Αντίθετα, έχει νόημα η έννοια της μέσης ισχύος, που ορίζεται ως η μέση ενέργεια ανά μονάδα χρόνου, δηλαδή

$$P_x = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η μέση ισχύς για ένα περιοδικό σήμα ισούται με

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

όπου T η περίοδος. Τέτοια σήματα είναι γνωστά και ως *σήματα ισχύος* σε αντιδιαστολή με τα *σήματα ενέργειας*. Οι σχέσεις (2.104), (2.105) και (2.106) μας επιβεβαιώνουν ότι η μέση ισχύς του σήματος $x(t)$ ισούται με το άθροισμα της μέσης ισχύος καθενιάς των αρμονικών. Πράγματι, στο ανάπτυγμα σειράς Fourier τα a_n , b_n είναι τα πλάτη του συνημιτόνου και ημιτόνου, αντίστοιχα, της n -οστής αρμονικής συνιστώσας. Η ισχύς καθενός από τους όρους αυτούς γνωρίζουμε ότι είναι $\frac{a_n^2}{2}$, $\frac{b_n^2}{2}$, αντίστοιχα. Σε αντίθεση με το ενεργειακό φάσμα που γνωρίσαμε στο Εδάφιο 2.2.8, το *φάσμα πυκνότητας ισχύος* ενός περιοδικού σήματος απαρτίζεται από διακριτές τιμές και είναι γνωστό ως *φάσμα γραμμών*. Στο Σχήμα 2.17 δίνεται η γενική μορφή ενός τέτοιου φάσματος. Για πραγματικά σήματα $x(t)$ το φάσμα ισχύος είναι συμμετρικό. Η ύπαρξη δηλαδή αρνητικής συχνότητας για πραγματικά σήματα είναι απόρροια της αναπαράστασης του σήματος με τη βοήθεια μιγαδικών συναρτήσεων κι έχει ως αποτέλεσμα να μοιράζει εξίσου την ισχύ μεταξύ θετικής και αρνητικής αρμονικής. Στην πραγματικότητα, δηλαδή, το αρνητικό μέρος του φάσματος δεν μας παρέχει καμιά πληροφορία, πράγμα που επιβεβαιώνεται και από τις εξισώσεις (2.105) και (2.106). Φυσικά αυτό δεν ισχύει για μιγαδικά σήματα.

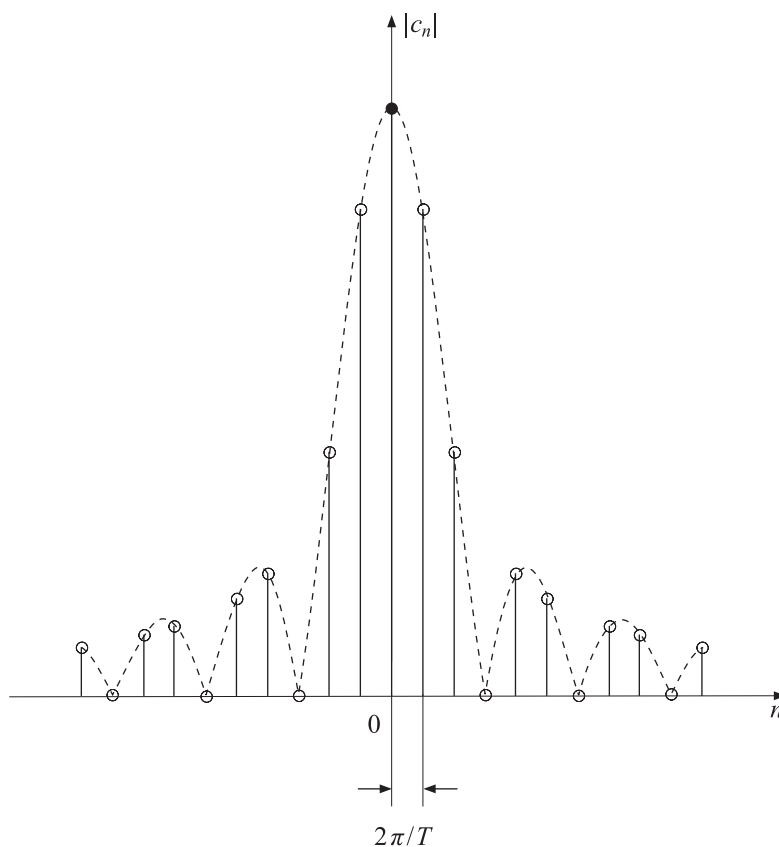
2.4.7 Προσέγγιση Συνάρτησης από Σειρά Fourier

Έστω $x(t)$ μια συνάρτηση στο διάστημα $[t_0, t_0 + T]$ (ή περιοδική με περίοδο T). Για απλότητα θεωρούμε τη $x(t)$ να είναι πραγματική. Η αντίστοιχη σειρά Fourier (υπό την προϋπόθεση βέβαια ότι υπάρχει) είναι

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega_0 t + b_n \sin n\Omega_0 t) \quad (2.107)$$

Ορίζουμε το σήμα

$$y(t) = a'_0 + \sum_{n=1}^N (a'_n \cos n\Omega_0 t + b'_n \sin n\Omega_0 t) \quad (2.108)$$



Σχήμα 2.17 Φάσμα γραμμών περιοδικού σήματος.

Το $y(t)$, δηλαδή, αποτελείται από τις N πρώτες αρμονικές του $x(t)$. Ν' αποδειχτεί ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα στην προσέγγιση της $x(t)$ από την $y(t)$,

$$\int_{t_0}^{t_0+T} [x(t) - y(t)]^2 dt \equiv \int_{t_0}^{t_0+T} \varepsilon_N^2 dt, \quad (2.109)$$

είναι ελάχιστο όταν $a'_0 = a_0$, $a'_i = a_i$ και $b'_i = b_i$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Λύση:

1ος Τρόπος: Αντικαθιστώντας την (2.108) στην (2.109), παραγωγίζοντας ως προς a'_i, b'_i και εξισώνοντας τις παραγώγους με μηδέν (για την εύρεση του ελαχίστου), αποδεικνύεται ότι τα a'_i, b'_i δίνονται από τις σχέσεις (2.89)-(2.91), άρα $a'_0 = a_0$, και $a'_i = a_i, b'_i = b_i$ για $i = 1, 2, \dots, N$.

2ος Τρόπος: Η μεθοδολογία αυτή στηρίζεται στη διανυσματική ερμηνεία των εμπλεκόμενων σημάτων. Θεωρούμε το $x(t)$ ως ένα διάνυσμα x στον αντίστοιχο L_2 Ευκλείδειο χώρο.

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\Omega_0 t + b_n \sin n\Omega_0 t) \\ &\quad + \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega_0 t + b_n \sin n\Omega_0 t) \end{aligned} \quad (2.110)$$

Ορίζουμε

$$x_a(t) \equiv a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\Omega_0 t + b_n \sin n\Omega_0 t) \quad (2.111)$$

και

$$x_b(t) \equiv \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega_0 t + b_n \sin n\Omega_0 t) \quad (2.112)$$

Ερμηνεύοντας τα $x_a(t)$, $x_b(t)$ ως διανύσματα x_a , x_b , αντίστοιχα, η σχέση (2.110) γράφεται ως διανυσματικό άθροισμα

$$x = x_a + x_b \quad (2.113)$$

Από την ορθογωνιότητα των διανυσμάτων του αναπτύγματος είναι προφανές ότι

$$x_a \perp x_b \quad (2.114)$$

όπου η καθετότητα $x_a \perp x_b$ ισοδυναμεί με $\langle x_a, x_b \rangle = 0$. Το διάνυσμα y , που αντιστοιχεί στο $y(t)$ της (2.108), συντίθεται από τα ίδια διανύσματα που συνθέτουν το x_a , άρα ανήκει στον ίδιο υπόχωρο μ' αυτό και είναι κάθετο στο x_b , δηλαδή $x_b \perp y$. Με απλή γεωμετρία (βλ. Σχήμα 2.18) δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι

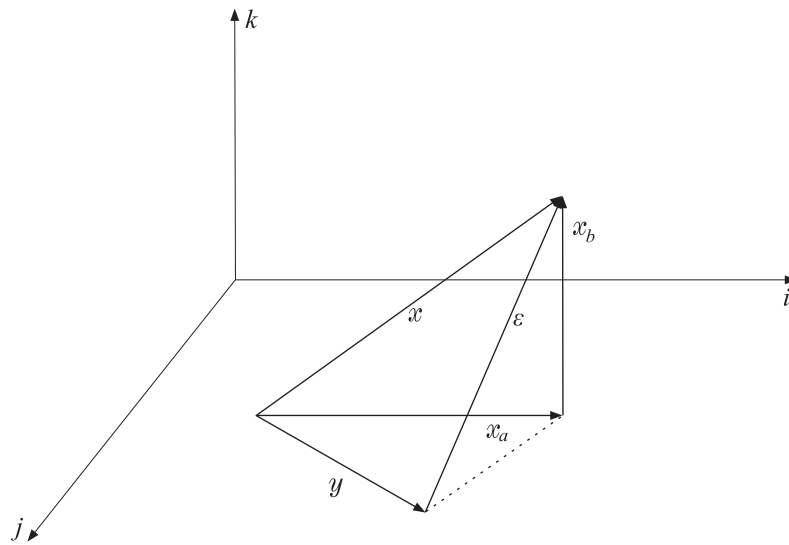
$$\|\varepsilon\| \equiv \|x - y\| \geq \|x_b\| \equiv \|x - x_a\|$$

Από τον ορισμό του μέτρου ενός διανύσματος ως του εσωτερικού γινομένου του εν λόγω διανύσματος με τον εαυτό του, έχουμε αντίστοιχα:

$$\|x - y\|^2 = \int_{t_0}^{t_0+T} [x(t) - y(t)]^2 dt \geq \int_{t_0}^{t_0+T} [x(t) - x_a(t)]^2 dt$$

Η ισότητα (ελάχιστο σφάλμα) ισχύει όταν

$$y(t) = x_a(t)$$



Σχήμα 2.18 Γεωμετρία του προβλήματος προσέγγισης ελάχιστου τετραγωνικού σφάλματος.

δηλαδή όταν

$$a'_0 = a_0, \quad a'_i = a_i, \quad b'_i = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Με άλλα λόγια, απ' όλα τα διανύσματα του υποχώρου εκείνο που δίνει το μικρότερο σφάλμα είναι η ορθογώνια προβολή του x στον υπόχωρο, δηλαδή το x_a .
△

Παρατήρηση: Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό του εσωτερικού γινομένου, το μέτρο ενός διανύσματος ισούται με την ενέργεια (ισχύ) του αντίστοιχου σήματος.

2.4.8 Σχέση της Σειράς Fourier με τον Ομώνυμο Μετασχηματισμό

Αν και εκ πρώτης όψεως η διαδρομή που ακολουθήθηκε για να καταλήξουμε στο ανάπτυγμα σειράς Fourier ήταν διαφορετική από την αντίστοιχη για το μετασχηματισμό Fourier, δεν απαιτεί ιδιαίτερη προσπάθεια για να καταλάβουμε τη στενή σχέση που υπάρχει μεταξύ τους. Στο υποεδάφιο αυτό θα δούμε πώς ο μετασχηματισμός Fourier προκύπτει ως όριο της σειράς Fourier.

Η σειρά Fourier ενός σήματος ορίστηκε σ' ένα διάστημα εύρους T ή σε όλο το σύνολο των πραγματικών για μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο T , ως

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \quad (2.115)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το διάστημα T αυξάνει συνεχώς, δηλαδή $T \rightarrow \infty$. Με άλλα λόγια, μας ενδιαφέρει το ανάπτυγμα μιας συνάρτησης όχι μόνο σ' ένα πεπερασμένου μήκους διάστημα, αλλά σε όλο τον άξονα των πραγματικών αριθμών.⁷ Η απόσταση τότε μεταξύ των αρμονικών (βλ. Σχήμα 2.17) συνεχώς μικραίνει και τείνει στο μηδέν και το φάσμα γίνεται συνεχές. Ορίζουμε

$$\frac{2\pi}{T} = \Delta\Omega, \quad \Delta\Omega \rightarrow 0 \quad (2.116)$$

$$n \frac{2\pi}{T} = \Omega \quad (2.117)$$

Οι συντελεστές c_n , για το διάστημα $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, δίνονται από την

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt$$

Από τις (2.116), (2.117) για $T \rightarrow \infty$ έχουμε

$$2\pi \frac{c_n}{\Delta\Omega} \rightarrow C(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

Με ανάλογο τρόπο, από την (2.115) παίρνουμε

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\Omega 2\pi \frac{c_n}{\Delta\Omega} e^{j\Omega t} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

Στο όριο δηλαδή $T \rightarrow \infty$ ανακτούμε το ζεύγος του μετασχηματισμού Fourier.

Έχοντας κλείσει τον κύκλο, και μελετήσει το μετασχηματισμό Fourier και τη σειρά Fourier, όπως επίσης και τη μεταξύ τους σχέση, μπορούμε να πούμε, ανακεφαλαιώνοντας, ότι:

- Για περιοδικά σήματα (συναρτήσεις) ο μετασχηματισμός Fourier (γενικά) δεν υπάρχει, αλλά το ανάπτυγμα σε σήματα απλών συχνοτήτων επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της σειράς Fourier.

⁷Προφανώς δεν αναφερόμαστε εδώ σε περιοδικές συναρτήσεις, αφού γι' αυτές το T πρέπει να είναι πεπερασμένο.

- Για μη περιοδικά σήματα, εάν μας ενδιαφέρει το ανάπτυσμα σε σήματα απλών συχνοτήτων να ισχύει σε όλο τον άξονα των πραγματικών αριθμών, τότε απαιτείται ο μετασχηματισμός Fourier. Εάν μας ενδιαφέρει η ανάλυση σ' ένα πεπερασμένου εύρους διάστημα μόνο, τότε επιλέγουμε τη σειρά Fourier.

2.5 Λυμένα Προβλήματα

1. Ν' αποδειχτεί ότι:

α) Κάθε πραγματική συνάρτηση $x(t)$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνιστώσας.

β) Το πραγματικό μέρος του MF μιας πραγματικής συνάρτησης είναι ο MF της άρτιας συνιστώσας της και το φανταστικό μέρος του είναι ο MF της περιττής συνιστώσας της.

Λύση:

α) Γράφουμε τη $x(t)$ ως

$$x(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(-t) - \frac{1}{2}x(-t)$$

δηλαδή

$$x(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} + \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

Θέτουμε $x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$ και $x_o(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$. Προφανώς η $x_e(t)$ είναι άρτια και η $x_o(t)$ περιττή. Δηλαδή τελικά:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

β) Ο MF της $x(t)$ είναι (λόγω γραμμικότητας)

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x_e(t)\} + \mathcal{F}\{x_o(t)\} = X_e(\Omega) + X_o(\Omega)$$

Αλλά είναι γνωστό ότι ο MF μιας άρτιας πραγματικής συνάρτησης είναι πραγματική συνάρτηση και ο MF μιας περιττής πραγματικής συνάρτησης είναι φανταστική συνάρτηση. Συνεπώς η $X_e(\Omega)$ είναι το πραγματικό μέρος του $X(\Omega)$ και η $-jX_o(\Omega)$ είναι το φανταστικό μέρος του $X(\Omega)$. \triangle

2. Να υπολογιστεί η μορφή του MF της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης $u(t)$ με εφαρμογή της ιδιότητας της παραγώγισης.

Λύση: Έχουμε:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \Rightarrow \mathcal{F}\{\delta(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{du(t)}{dt}\right\} = j\Omega\mathcal{F}\{u(t)\}$$

Αλλά $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$. Συνεπώς είναι: $1 = j\Omega\mathcal{F}\{u(t)\}$.

Από την παραπάνω σχέση είναι λάθος να συμπεράνουμε ότι $\mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j\Omega}$ γιατί είναι γενικά λάθος να πούμε ότι αν ισχύει $\Omega X_1(\Omega) = \Omega X_2(\Omega)$, τότε $X_1(\Omega) = X_2(\Omega)$. Κι αυτό γιατί αν οι συναρτήσεις $X_1(\Omega)$ ή/και $X_2(\Omega)$ περιέχουν όρους της μορφής $k\delta(\Omega)$, τότε αυτοί μηδενίζονται ($\Omega\delta(\Omega) = 0$ για κάθε Ω). Το σωστό είναι ότι αν $\Omega X_1(\Omega) = \Omega X_2(\Omega)$, τότε ισχύει ότι $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) + k\delta(\Omega)$ (όπως έχει ήδη αποδειχτεί στην ανάπτυξη της θεωρίας) και για τη συγκεκριμένη περίπτωση είναι $k = \pi$. \triangle

3. Να υπολογιστεί ο MF της συνάρτησης

$$x(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

Λύση: Η παραπάνω συνάρτηση θα μπορούσε ν' αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής τύπου Gauss με μέση τιμή μηδέν και διασπορά σ^2 . Ο MF της $x(t)$ είναι:

$$X(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}t^2 + j\Omega t\right)} dt$$

Το ολοκλήρωμα αυτό δεν επιλύεται με συνηθισμένες μεθόδους και γι' αυτό χρησιμοποιούμε τον παρακάτω τύπο (από Μαθηματικό Τυπολόγιο):

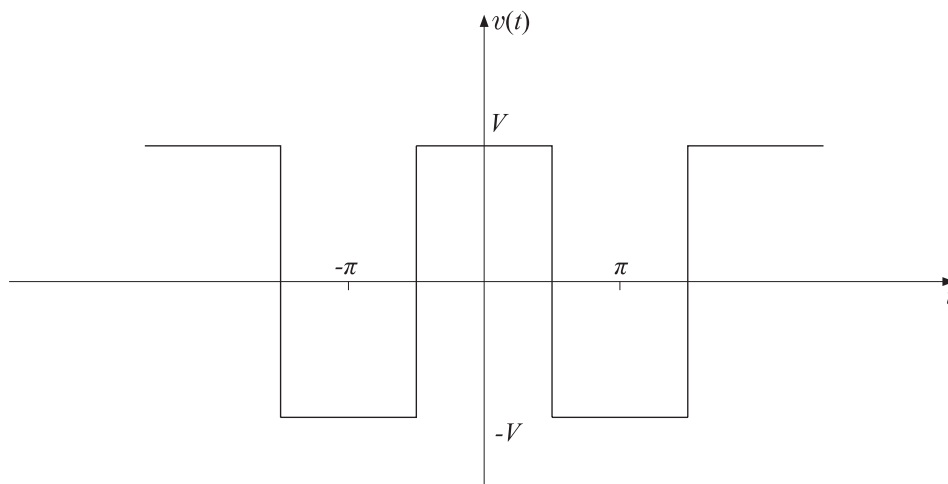
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}}$$

Κάνοντας τις σχετικές αντικαταστάσεις βρίσκουμε τελικά:

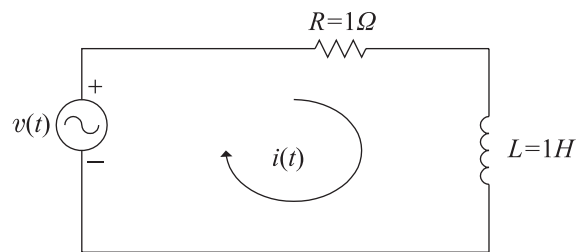
$$X(\Omega) = e^{-\frac{\Omega^2}{2\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)}}$$

Δηλαδή, εάν η $X(\Omega)$ πολλαπλασιαστεί με $1/\sqrt{\frac{2\pi}{\sigma^2}}$, τότε και αυτή έχει τη μορφή πυκνότητας πιθανότητας Gauss με διασπορά $\frac{1}{\sigma^2}$ και με μέση τιμή μηδέν. Παρατηρούμε ότι μικρή διασπορά της $x(t)$ συνεπάγεται μεγάλη διασπορά της $X(\Omega)$ και αντίστροφα. Επιβεβαιώνεται, δηλαδή, ότι όσο πιο μεγάλο είναι το εύρος μιας συνάρτησης στο πεδίο του χρόνου, τόσο μικρότερο είναι το εύρος της στο πεδίο συχνοτήτων και αντίστροφα. \triangle

4. Έστω ότι η πηγή τάσης, $v(t)$, της μορφής του Σχήματος 2.19(α) εφαρμόζεται στο RL κύκλωμα του Σχήματος 2.19(β). Να υπολογιστεί το ρεύμα βρόχου στη



(α)



(β)

Σχήμα 2.19 (α) Η τάση στην πηγή του κυκλώματος του (β).

μόνιμη κατάσταση.

Λύση: Αναπτύσσοντας σε σειρά Fourier τη $v(t)$ και ακολουθώντας τα βήματα του Παραδείγματος 2.15, προκύπτει (με $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$):

$$v(t) = \frac{4V}{\pi} \left(\cos t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 5t - \dots \right)$$

Παρατηρήστε ότι υπάρχουν μόνο όροι συνημιτόνου, ενώ στο Παράδειγμα 2.15 υπάρχουν μόνο όροι ημιτόνου. Η διαφορά οφείλεται στη σχετική μετατόπιση του περιοδικού παλμικού σήματος. Εδώ έχουμε άρτια συμμετρία, ενώ στο Παράδειγμα 2.15 η συμμετρία είναι περιττή. Πέρα όμως από τη διαφορά αυτή, και στις δύο περιπτώσεις υπεισέρχονται οι ίδιες αρμονικές συχνότητες (περιττές) και με το ίδιο πλάτος. Αυτό βέβαια είναι αναμενόμενο. Στην ουσία έχουμε το ίδιο σήμα, άρα το ενεργειακό περιεχόμενο (πλάτος) και οι αρμονικές που υπεισέρχονται είναι οι ίδιες, με διαφορά μόνο στη φάση (συνημίτονο αντί ημιτόνου) που οφείλεται στη χρονική ολίσθηση του σήματος.

Η (ολική) σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$Z(\Omega) = R + j\Omega L$$

Θα υπολογίσουμε κατ' αρχήν την απόκριση $i_n(t)$ για κάθε αρμονική συνιστώσα της $v(t)$. Για $\Omega = n\Omega_0$ (που αντιστοιχεί στον n -οστό αρμονικό όρο) η σύνθετη αντίσταση είναι

$$Z(n\Omega_0) = R + jn\Omega_0 L = 1 + jn$$

ή

$$Z(n\Omega_0) = |Z(n\Omega_0)| \angle \theta(n)$$

όπου

$$|Z(n\Omega_0)| = \sqrt{1 + n^2} \text{ και } \theta(n) = \tan^{-1}(n)$$

Θυμίζουμε ότι στην αναπαράσταση φάσορα έχουμε

$$i(t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{Z(\Omega)} \hat{V} e^{j\Omega t} \right\}$$

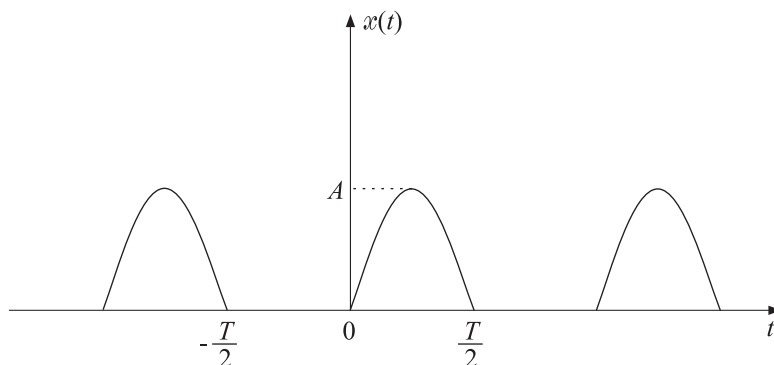
όπου \hat{V} είναι το μιγαδικό πλάτος της $v(t)$. Υπολογίζοντας, με βάση τα παραπάνω, την απόκριση $i_n(t)$ σε κάθε επιμέρους όρο $v_n(t)$ της σειράς Fourier της $v(t)$ και χρησιμοποιώντας την αρχή της υπέρθεσης έχουμε τελικά:

$$i(t) = \frac{4V}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t - \tan^{-1} 1) - \frac{1}{3\sqrt{10}} \cos(3t - \tan^{-1} 3) + \dots \right]$$

5. Να υπολογιστεί το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της συνάρτησης:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ A \sin \Omega_0 t, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases} \\ x(t) &= x(t + T) \end{aligned}$$

η οποία φαίνεται στο Σχήμα 2.20 (ημιανόρθωση).



Σχήμα 2.20 Ημιανορθωμένο ημίτονο.

Λύση: Εφαρμόζοντας τους σχετικούς τύπους του τριγωνομετρικού αναπτύγματος έχουμε, με $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \sin(\Omega_0 t) dt = \frac{A}{\pi}$$

και για $n > 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \sin(\Omega_0 t) \cos(n\Omega_0 t) dt \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \{\sin[(1+n)\Omega_0 t] + \sin[(1-n)\Omega_0 t]\} dt \end{aligned}$$

Δηλαδή για $n = 1$

$$a_1 = \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(2\Omega_0 t) dt = 0$$

και για $n = 2, 3, \dots$

$$a_n = \frac{A}{T} \left\{ -\frac{\cos[(1+n)\Omega_0 t]}{(1+n)\Omega_0} - \frac{\cos[(1-n)\Omega_0 t]}{(1-n)\Omega_0} \right\} \Bigg|_0^{\frac{T}{2}}$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ περιττός} \\ -\frac{2A}{(n-1)(n+1)\pi}, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Παρόμοια, για τους συντελεστές b_n έχουμε

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \sin(\Omega_0 t) \sin(n\Omega_0 t) dt \\ &= -\frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \{\cos[(1+n)\Omega_0 t] - \cos[(1-n)\Omega_0 t]\} dt \end{aligned}$$

Για $n = 1$

$$b_1 = \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} dt - \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(2\Omega_0 t) dt = \frac{A}{2}$$

Για $n = 2, 3, \dots$

$$b_n = \frac{A}{T} \left\{ \frac{\sin[(1-n)\Omega_0 t]}{(1-n)\Omega_0} - \frac{\sin[(1+n)\Omega_0 t]}{(1+n)\Omega_0} \right\} \Bigg|_0^{\frac{T}{2}} = 0$$

Άρα τελικά είναι

$$x(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin(\Omega_0 t) - \frac{2A}{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos(2\Omega_0 t) + \frac{1}{15} \cos(4\Omega_0 t) + \dots \right]$$

△

6. Να υπολογιστεί το ανάπτυγμα Fourier της συνάρτησης $x(t) = \sin^5 t$.

Λύση: Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Euler, $e^{jn\theta} = \cos n\theta + j \sin n\theta$, έχουμε ότι

$$\sin n\theta = \frac{e^{jn\theta} - e^{-jn\theta}}{2j}$$

Έτσι η δοσμένη συνάρτηση γράφεται

$$x(t) = \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \right)^5$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το διωνυμικό τύπο για την ύψωση σε δύναμη ενός αθροίσματος,⁸ έχουμε:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{32j} (e^{j5t} - 5e^{j3t} + 10e^{jt} - 10e^{-jt} + 5e^{-j3t} - e^{-j5t}) \\ &= \frac{5}{8} \sin t - \frac{5}{16} \sin 3t + \frac{1}{16} \sin 5t \end{aligned}$$

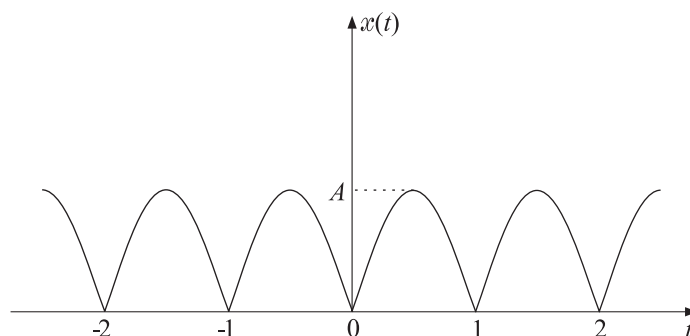
⁸ $(\alpha + \beta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}$.

Άρα το ανάπτυγμα της $x(t)$ σε τριγωνομετρική σειρά Fourier αποτελείται από τρεις όρους μόνο. \triangle

7. Ν' αναπτυχτεί σε μιγαδική σειρά Fourier η συνάρτηση

$$x(t) = A \sin \pi t, \quad 0 < t < 1, \quad x(t+1) = x(t)$$

Η συνάρτηση φαίνεται και στο Σχήμα 2.21 (πλήρης ανόρθωση).



Σχήμα 2.21 Πλήρως ανορθωμένο ημίτονο.

Λύση: Εφόσον $T = 1$, συνεπάγεται ότι $\Omega_0 = 2\pi$. Το ανάπτυγμα θα έχει τη μορφή

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n t}$$

όπου

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi n t} dt \\ &= \int_0^1 A \sin \pi t e^{-j2\pi n t} dt \\ &= A \int_0^1 \frac{1}{2j} (e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}) e^{-j2\pi n t} dt \\ &= \frac{A}{2j} \left[\frac{e^{-j\pi(2n-1)t}}{-j\pi(2n-1)} - \frac{e^{-j\pi(2n+1)t}}{-j\pi(2n+1)} \right] \Bigg|_0^1 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το ότι $e^{j2\pi n} = 1$ και ότι $e^{-j\pi} = e^{j\pi}$ παίρνουμε

$$c_n = -\frac{2A}{\pi(4n^2 - 1)}$$

Τελικά

$$x(t) = -\frac{2A}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} e^{j2\pi nt}$$

△

8. Έστω η παλμοσειρά του Σχήματος 2.22(α). Να υπολογιστεί το ποσοστό της ολικής ισχύος που περιέχεται στο διάστημα συχνοτήτων που περιορίζεται μεταξύ των σημείων του πρώτου μηδενισμού του φάσματος πλάτους του σήματος (βλ. Σχήμα 2.22(β)).

Λύση: Οι συντελεστές του μιγαδικού αναπτύγματος Fourier της παλμοσειράς του Σχήματος 2.22(α), στη γενική περίπτωση που η διάρκεια παλμού είναι τ και η περίοδος T , δίνονται από τις σχέσεις (να το αποδείξετε)

$$c_n = \frac{A\tau \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)}{T \frac{n\pi\tau}{T}}, \quad -\infty < n < \infty$$

Για την περίπτωση του συγκεκριμένου προβλήματος, όπου είναι $A = 1$, $\tau = \frac{1}{20}$, και $T = \frac{1}{4}$, έχουμε

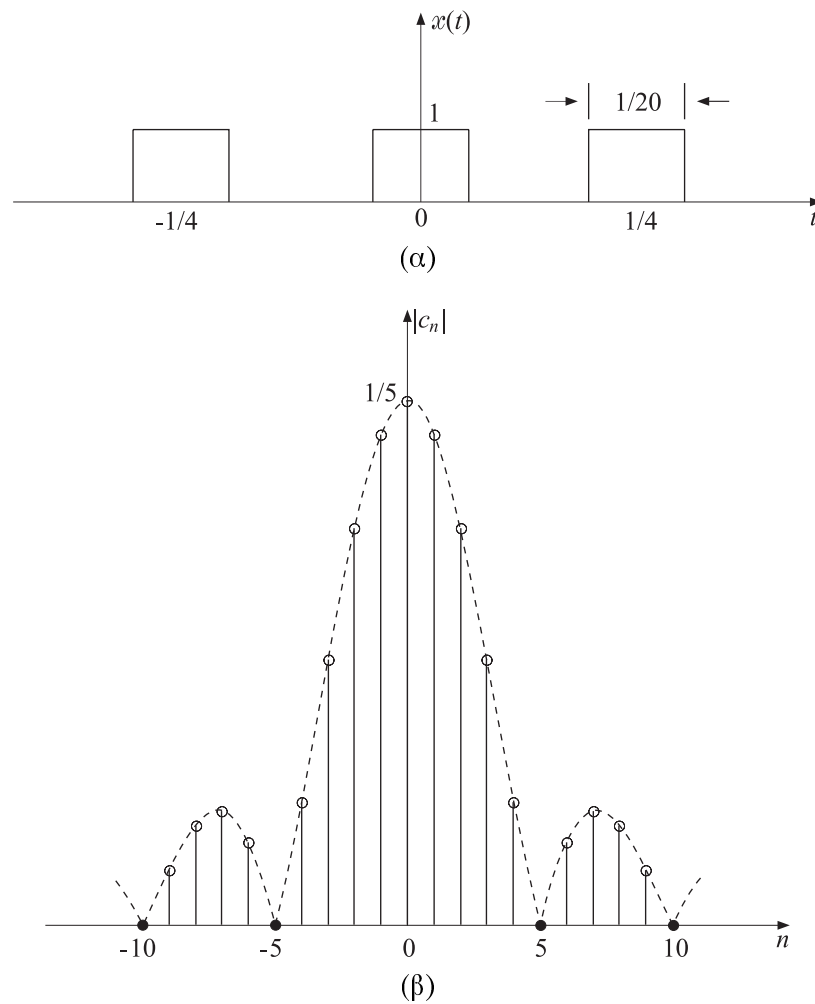
$$c_n = \frac{1 \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)}{\frac{n\pi}{5}} = \frac{1}{5} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{5}\right), \quad -\infty < n < \infty$$

Στο Σχήμα 2.22(β) βλέπουμε το πλάτος των συντελεστών Fourier c_n της δεδομένης περιοδικής συνάρτησης. Η ισχύς που έχει η συνάρτηση σε μια συχνότητα $n\Omega_0$ δίνεται από το άθροισμα: $P_n = |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 = 2|c_n|^2$. Ο πρώτος μηδενισμός του συγκεκριμένου φάσματος συμβαίνει στα σημεία $n = 5$ και $n = -5$ που αντιστοιχούν σε $\Omega = \pm 40\pi$, αντίστοιχα (διότι $\Omega_0 = 8\pi$). Η ολική ισχύς της συνάρτησης είναι

$$P_{\text{ολ}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = 4 \int_{-\frac{1}{40}}^{\frac{1}{40}} dt = 0.2$$

Η ισχύς της συνάρτησης στο διάστημα $[-40\pi, 40\pi]$ είναι

$$\begin{aligned} P_{\mu} &= |c_0|^2 + 2(|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 + |c_4|^2) \\ &= \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{2}{5^2} \left[\operatorname{sinc}^2\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2}{5}\right) + \operatorname{sinc}^2\left(\frac{3}{5}\right) + \operatorname{sinc}^2\left(\frac{4}{5}\right) \right] \\ &= 0.195 \end{aligned}$$



Σχήμα 2.22 (α) Η παλμοσειρά του Λυμένου Προβλήματος 8 και (β) το φάσμα πλάτους της.

Το ζητούμενο ποσοστό ισχύος είναι τελικά ίσο με

$$\frac{P_\mu}{P_{\text{ολ}}} \times 100 = 97.5\%$$

△

2.6 Προβλήματα

1. Ν' αποδειχτεί ότι, εάν η $x(t)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη (δηλαδή ανήκει στο χώρο $L_1(\mathbb{R})$), τότε

- α) Η $X(\Omega)$ είναι φραγμένη και (ομοιόμορφα) συνεχής συνάρτηση και
- β) $\lim_{|\Omega| \rightarrow \infty} X(\Omega) = 0$.

2. Ν' αποδειχτεί ότι:

$$A \sin \Omega_0 t \longleftrightarrow jA\pi [\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)]$$

3. Έστω Φ το σύνολο των συναρτήσεων $x(t)$ των οποίων ο μετασχηματισμός Fourier περιορίζεται στο διάστημα $[-\Omega_c, \Omega_c]$:

$$X(\Omega) = 0, \quad |\Omega| > \Omega_c$$

Εάν μια τυχαία συνάρτηση $y(t)$ πρόκειται να προσεγγιστεί από μια συνάρτηση $x(t)$, στοιχείο του Φ , τότε το τετραγωνικό σφάλμα

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t) - x(t)|^2 dt$$

είναι ελάχιστο εάν

$$x(t) \longleftrightarrow \begin{cases} Y(\Omega), & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

4. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$

β) $x(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$

γ) $x(t) = \text{sgn}(t)$

5. Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

Να υπολογιστεί (με χρήση του MF) η απόκριση $y(t)$ του συστήματος στις παρακάτω εισόδους:

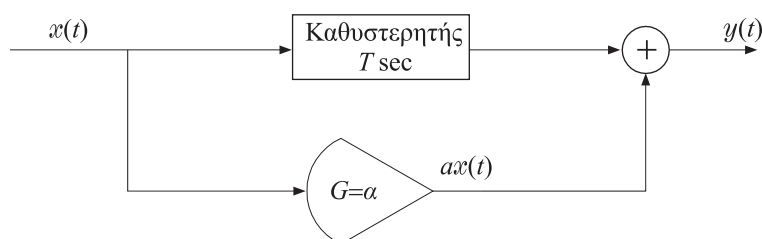
- α) $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$
 β) $x(t) = u(t)$

6. Έστω το ιδανικό κατωπερατό φίλτρο με απόκριση συχνότητας

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \quad (2.118)$$

Θεωρούμε ότι η είσοδος στο φίλτρο είναι το σήμα $x(t) = e^{-2t}u(t)$. Να υπολογιστεί η τιμή της Ω_c ώστε το φίλτρο να επιτρέπει τη διέλευση του 50% της ενέργειας του σήματος εισόδου.

7. Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση και η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος του Σχήματος 2.23.



Σχήμα 2.23 Το κύκλωμα του Προβλήματος 7.

8. Εάν το σήμα $x(t)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμο, τότε για τους συντελεστές της σειράς Fourier σε οποιοδήποτε πεπερασμένου μήκους διάστημα ισχύει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

Με άλλα λόγια, η ισχύς στις υψηλές συχνότητες τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.

9. Ν' αποδειχτούν τα εξής:

α) Εάν

$$S_T(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$S_{\Omega_0}(\Omega) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_0)$$

όπου $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, τότε

$$S_T(t) \longleftrightarrow \Omega_0 S_{\Omega_0}(\Omega)$$

β) Εάν $x_T(t)$ είναι η περιοδική συνάρτηση με

$$x_T(t) = x(t), \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

και

$$x_T(t) = x_T(t+T), \quad \forall t,$$

τότε, λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$x_T(t) = x(t) * S_T(t),$$

ν' αποδειχτεί ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $x_T(t)$ εκφυλίζεται σε σειρά Fourier, με συντελεστές

$$c_n = \frac{1}{T} X(n\Omega_0)$$

όπου $X(\Omega)$ ο MF της $x(t)$.

10. Ν' αποδειχτεί ότι

α) Εάν t_0 είναι ένα σημείο ασυνέχειας της $x(t)$, η σειρά Fourier συγκλίνει στο

$$\frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow t_0^+} x(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^-} x(t) \right]$$

β) Εάν η σειρά Fourier προσεγγιστεί μ' ένα πεπερασμένο άθροισμα αρμονικών

$$x_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{jn\Omega_0 t},$$

τότε στα σημεία ασυνέχειας η σύγκλιση είναι ανάλογη του φαινομένου Gibbs.

11. Να υπολογιστεί το ανάπτυγμα σε εκθετική σειρά Fourier των παρακάτω σημάτων:

α) $x(t) = \sin \Omega_0 t$

β) $x(t) = \cos \left(2t + \frac{\pi}{4} \right)$

$$\gamma) \quad x(t) = \cos 4t + \sin 6t$$

$$\delta) \quad x(t) = \sin^2 t$$

12. Δίνεται ένας ενισχυτής ο οποίος είναι σχεδιασμένος ώστε ιδανικά να επιτρέψει τη διέλευση όλων των συχνοτήτων που είναι μικρότερες από 51 KHz και να αποκόπτει τις υπόλοιπες. Συγκεκριμένα, σε συνθήκες ιδανικής λειτουργίας όλες οι μικρότερες των 51 KHz συχνότητες διέρχονται με κέρδος $G = 10$ και με μηδενική μετατόπιση φάσης, ενώ όλες οι μεγαλύτερες συχνότητες δεν εμφανίζονται στην έξοδο. Έστω ότι χρησιμοποιούμε ως είσοδο στον εν λόγω ενισχυτή ένα τετραγωνικό σήμα της μορφής του Σχήματος 2.19(α) με πλάτος $\pm 1V$ και περίοδο 0.1 ms (η χρονική διάρκεια του κάθε παλμού είναι ίση με την ημιπερίοδο). Ζητούνται:

α) Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του σήματος εισόδου.

β) Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του σήματος εξόδου.

γ) Ποια θα ήταν η μέση ισχύς του σήματος εξόδου εάν ο ενισχυτής επέτρεπε τη διέλευση όλων των αρμονικών συνιστωσών του σήματος εισόδου;

Μετασχηματισμός Laplace

3.1 Εισαγωγή - Ορισμός

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε το μετασχηματισμό Fourier, ο οποίος παρέχει τη δυνατότητα μετάβασης από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας, βοηθώντας έτσι τη μελέτη των σημάτων και των συστημάτων.

Ο μετασχηματισμός Laplace (ML), που θα περιγράψουμε στο κεφάλαιο αυτό και καλείται έτσι προς τιμή του Γάλλου φυσικο-μαθηματικού Pierre-Simon Laplace (1749-1827), αποτελεί ένα ακόμα βασικό μαθηματικό εργαλείο ιδιαίτερα χρήσιμο για την μελέτη γραμμικών χρονικά αμετάβλητων συστημάτων. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, μας δίνει τη δυνατότητα να λύσουμε εύκολα πολλά προβλήματα που καταλήγουν σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές χωρίς τον επιπρόσθετο κόπο να βρούμε τη γενική λύση και μετά να προσδιορίσουμε τις αυθαίρετες σταθερές.

Η χρήση του ML στην ανάλυση συστημάτων είναι ευρύτατη για τους εξής λόγους:

1. Ο μετασχηματισμός Laplace διευρύνει την κλάση των συναρτήσεων για τις οποίες μπορεί να επιτευχθεί μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας. Πράγματι, όπως θα δούμε παρακάτω, υπάρχουν πολλές συναρτήσεις με πρακτική σπουδαιότητα για τις οποίες υπάρχει ο ML, ενώ

αντίθετα ο MF δεν ορίζεται.

2. Με το ML παρέχεται η δυνατότητα μελέτης συστημάτων που δεν βρίσκονται σε αρχική κατάσταση ηρεμίας. Οι αρχικές συνθήκες ενσωματώνονται κατάλληλα στη μελέτη του συστήματος.
3. Η θεωρία γραμμικών συστημάτων εμπλουτίζεται, αλλά και απλοποιείται ταυτόχρονα, με τη χρήση του μιγαδικού πεδίου συχνότητας, την εισαγωγή των πόλων και μηδενικών κ.λπ.

Ο μετασχηματισμός Laplace όπως και ο μετασχηματισμός Fourier είναι ειδικές περιπτώσεις *γενικευμένων γραμμικών ολοκληρωτικών μετασχηματισμών (ΓΓΟΜ)*. Ο γενικός στόχος αυτών των μετασχηματισμών είναι η επίτευξη συγκεκριμένου τύπου αντιστοίχισης μεταξύ δυο συναρτήσεων με την ταυτόχρονη εξασφάλιση της μοναδικότητας στην αντιστοίχιση αυτή. Ο ΓΓΟΜ μιας συνάρτησης $x(t)$ ορίζεται ως

$$X(s) = \int_a^\infty x(t)k(s, t)dt \quad (3.1)$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι η συνάρτηση $x(\cdot)$ με όρισμα t μετατρέπεται σε μια άλλη συνάρτηση $X(\cdot)$ μιας νέας μεταβλητής s . Η επιλογή του κάτω ορίου ολοκλήρωσης, a , και της συνάρτησης $k(s, t)$ (η οποία καλείται και *πυρήνας (kernel)* του μετασχηματισμού) καθορίζει το συγκεκριμένο ΓΓΟΜ, ο οποίος είναι κατάλληλος για μια ορισμένη κατηγορία προβλημάτων. Για να υπάρχει ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός θα πρέπει το γενικευμένο ολοκλήρωμα της (3.1) να συγκλίνει. Εάν για μια συγκεκριμένη συνάρτηση, $x(t)$, και για συγκεκριμένα a και $k(s, t)$ το ολοκλήρωμα αυτό δεν συγκλίνει, τότε ο αντίστοιχος μετασχηματισμός για την $x(t)$ δεν ορίζεται.

Είναι φανερό από τα παραπάνω ότι ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί κι αυτός μια ειδική περίπτωση ΓΓΟΜ. Συγκεκριμένα, από την (3.1), και για $k(s, t) = e^{-jst}$, $s = \Omega$ και $a = -\infty$ προκύπτει ο μετασχηματισμός Fourier.

Όσον αφορά στο μετασχηματισμό Laplace, αυτός ορίζεται ως εξής: Θέτοντας $k(s, t) = e^{-st}$, όπου s μιγαδική μεταβλητή και $a = 0$, ορίζεται ο *μονόπλευρος (unilateral) μετασχηματισμός Laplace*, δηλαδή

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

(3.2)

ενώ θέτοντας το κάτω όριο ολοκλήρωσης $a = -\infty$ ορίζεται ο *αμφίπλευρος (bilat-*

eral) μετασχηματισμός Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad (3.3)$$

Το s , στη γενική περίπτωση, είναι $s = \sigma + j\Omega$. Παρατηρούμε ότι, για $\sigma = 0$ ο ορισμός της (3.3) συμπίπτει με το μετασχηματισμό Fourier της $x(t)$ (εάν αυτός υπάρχει). Η σχέση (3.3) γράφεται και ως

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\Omega t}dt \equiv \mathcal{L}\{x(t)\} \quad (3.4)$$

Από την (3.4) φαίνεται ότι ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace της $x(t)$ μπορεί να ερμηνευτεί και ως ο μετασχηματισμός Fourier της $x(t)e^{-\sigma t}$. Είναι λόγω αυτής της σχέσης με το MF που αναφερόμαστε στη μεταβλητή s του ML και ως *μυγαδική συχνότητα*. Διαπιστώνουμε ότι η παρουσία του παράγοντα $e^{-\sigma t}$ παρέχει τη δυνατότητα σύγκλισης του ολοκληρώματος (3.4) και κατά συνέπεια ύπαρξης του μετασχηματισμού Laplace, ακόμα κι όταν ο MF της $x(t)$ δεν υπάρχει.

Οι εξισώσεις (3.2) και (3.3) αποτελούν δύο διαφορετικούς ορισμούς για το μετασχηματισμό Laplace. Προφανώς εάν δυο συναρτήσεις είναι διαφορετικές για $t < 0$ και ίσες για $t \geq 0$, τότε έχουν τον ίδιο μονόπλευρο ML αλλά διαφορετικό αμφίπλευρο. Εάν, βέβαια, $x(t) = 0$ για $t < 0$, τότε οι δύο ορισμοί συμπίπτουν. Μια ουσιαστική διαφορά μεταξύ των δύο ορισμών είναι ότι ο μονόπλευρος ML παρέχει τη δυνατότητα μελέτης συστημάτων που δεν βρίσκονται σε αρχική κατάσταση ηρεμίας. Ισοδύναμα, παρέχει τη δυνατότητα επίλυσης γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές (βλ. Εδάφιο 2.3.2) και με ενσωμάτωση μη μηδενικών αρχικών συνθηκών. Επίσης, είναι πιο φυσική η χρήση του μονόπλευρου ML στη μελέτη αιτιατών συστημάτων για τα οποία ισχύει (βλ. Κεφάλαιο 1) ότι η χρουστική τους απόκριση $h(t)$ είναι ίση με το μηδέν για $t < 0$. Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου θ' ασχοληθούμε με το μονόπλευρο ML και σε ό,τι αφορά τον αμφίπλευρο θα περιοριστούμε σε ορισμένες αξιοσημείωτες διαφορές του από το μονόπλευρο.

Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να εξετάσουμε λίγο πιο προσεκτικά τον ορισμό του μονόπλευρου ML (βλ. (3.2)) και συγκεκριμένα το κάτω όριο του ολοκληρώματος. Αυτό μπορεί να ερμηνευτεί με δύο τρόπους, είτε ως όριο από δεξιά

$$X(s) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

είτε ως όριο από αριστερά

$$X(s) = \lim_{a \rightarrow 0^-} \int_a^\infty x(t)e^{-st} dt$$

Έτσι, αν η $x(t) = \delta(t)$, τότε σύμφωνα με τον πρώτο ορισμό θα είναι $X(s) = 0$ ενώ σύμφωνα με τον δεύτερο ορισμό $X(s) = 1$. Κι οι δύο ορισμοί είναι εξίσου αποδεκτοί, αρκεί να είναι κατανοητή η σημασία του καθενός. Είναι φανερό ότι, όταν η είσοδος δεν περιέχει κρουστικές συναρτήσεις στο σημείο $t = 0$, τότε κι οι δύο ορισμοί δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Ωστόσο, θα προτιμήσουμε το δεύτερο ορισμό για τον εξής κυρίως λόγο: Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι γνωστές στο χρόνο 0^- , δηλαδή πριν την εφαρμογή της διέγερσης. Δεν μπορούμε όμως να πούμε το ίδιο και για το χρόνο 0^+ . Πράγματι, εάν έχουμε βηματική ασυνέχεια στο 0, τότε ισχύει $x(0^+) \neq x(0^-)$ και στην περίπτωση αυτή χρειάζεται υπολογισμός των αρχικών συνθηκών στο χρόνο 0^+ .

Θα πρέπει να τονιστεί εδώ ότι οι ιδιότητες και τα θεωρήματα σχετικά με το ML είναι ακριβώς τα ίδια είτε χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο ορισμό είτε τον δεύτερο, και μεταβαίνουμε από τη μία σχέση στην άλλη αντικαθιστώντας απλώς τα 0^+ με 0^- και αντίστροφα. Οι μοναδικές εξαιρέσεις, όπως θα δούμε σε επόμενο εδάφιο, είναι τα θεωρήματα που σχετίζονται με την αρχική και την τελική τιμή του σήματος.

3.2 Σχετικά με την Ύπαρξη του Μετασχηματισμού Laplace

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, εάν το γενικευμένο ολοκλήρωμα της (3.2) συγκλίνει, τότε ο ML της συνάρτησης $x(t)$ υπάρχει (το αν είναι και μοναδικός θα το δούμε αργότερα). Είναι απαραίτητο εδώ να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό πριν προχωρήσουμε στις ικανές συνθήκες ύπαρξης του ML.

Ορισμός: Μια συνάρτηση $x(t)$ είναι *εκθετικής τάξης α* (ή απλώς *εκθετικής τάξης*), εάν υπάρχουν δύο σταθερές $M > 0$ και α και μια ορισμένη τιμή t_0 του t τέτοιες ώστε να ισχύει: $|e^{-\alpha t}x(t)| < M$ ή $|x(t)| < Me^{\alpha t}$ για $t \geq t_0$. Για παράδειγμα, η $x(t) = e^{ct} \cos(\Omega t)$ είναι εκθετική τάξης c , διότι $|e^{ct} \cos(\Omega t)| \leq e^{ct}$ για $t > 0$. Αντίθετα, η συνάρτηση $x(t) = e^{t^2}$ δεν είναι εκθετικής τάξης διότι η $|e^{-\alpha t}e^{t^2}| = e^{t^2 - \alpha t}$ δεν φράσσεται από καμία θετική σταθερά.

3.2.1 Θεώρημα Ύπαρξης του ML

Εάν η συνάρτηση $x(t)$ είναι (α) τμηματικά συνεχής σ' ένα πεπερασμένο διάστημα $0 \leq t \leq b$ και (β) εκθετικής τάξης α για $t > b$, τότε ο ML της $x(t)$ υπάρχει για $\text{Re}(s) > \alpha$.

Απόδειξη: Για κάθε $b > 0$ έχουμε

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt = \int_0^b x(t)e^{-st}dt + \int_b^\infty x(t)e^{-st}dt \quad (3.5)$$

Εφόσον η $x(t)$ είναι τμηματικά συνεχής στο πεπερασμένο διάστημα $[0, b]$, συνεπάγεται ότι το πρώτο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της (3.5) υπάρχει. Επειδή επιπλέον η $x(t)$ είναι εκθετικής τάξης α για $t > b$ συνεπάγεται ότι και το δεύτερο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της (3.5) υπάρχει. Πράγματι για το ολοκλήρωμα αυτό έχουμε:

$$\left| \int_b^\infty x(t)e^{-st}dt \right| \leq \int_b^\infty |x(t)e^{-st}|dt \leq \int_b^\infty |x(t)| \cdot |e^{-st}|dt \leq \int_b^\infty Me^{\alpha t}e^{-\sigma t}dt$$

για κάποια θετική σταθερά M , με $\sigma = \operatorname{Re}(s)$. Το τελευταίο ολοκλήρωμα στην παραπάνω αλληλουχία ανισοτήτων υπάρχει όταν $\operatorname{Re}(s) = \sigma > \alpha$. Άρα, τελικά, διαπιστώνουμε ότι, εάν πληρούνται οι συνθήκες του θεωρήματος, τότε ο $\mathcal{L}\{x(t)\}$ υπάρχει για $\operatorname{Re}(s) > \alpha$. \triangle

Τονίζουμε εδώ ότι οι παραπάνω συνθήκες είναι μόνο ικανές. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ δεν πληροί την πρώτη από τις δύο προαναφερθείσες συνθήκες (δεν ορίζεται στο μηδέν), ωστόσο ο $\mathcal{L}\{x(t)\}$ υπάρχει και είναι ίσος με $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$. Η παραπάνω διατύπωση βέβαια είναι χρήσιμη διότι καλύπτει μια μεγάλη κλάση συναρτήσεων που συναντώνται στην πράξη.

3.3 ML Στοιχειωδών Συναρτήσεων

Στο εδάφιο αυτό θα υπολογίσουμε τους ML ορισμένων στοιχειωδών συναρτήσεων. Θα το κάνουμε αυτό όχι τόσο για λόγους εξάσκησης, διότι πρόκειται για αρκετά απλές περιπτώσεις, όσο κυρίως διότι οι συναρτήσεις αυτές συναντώνται πολύ συχνά ως συστατικά μέρη πιο πολύπλοκων συναρτήσεων. Έτσι, η γνώση του ML αυτών των συναρτήσεων, σε συνδυασμό με την κατάλληλη αξιοποίηση των ιδιοτήτων του, που θα δούμε παρακάτω, βοηθούν σημαντικά στο γρήγορο υπολογισμό του ML αρκετών συναρτήσεων που αντιμετωπίζουμε στην πράξη.

1. Έστω $x(t) = u(t)$. Τότε από τον ορισμό έχουμε

$$X(s) = \int_0^\infty 1e^{-st}dt$$

Για $\operatorname{Re}(s) > 0$ η $|e^{-st}|$ μειώνεται εκθετικά με το χρόνο και το ολοκλήρωμα υπάρχει με τη συνηθισμένη έννοια. Το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = X(s) = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) = \sigma > 0$$

2. Έστω $x(t) = t$, $t > 0$. Τότε έχουμε

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b te^{-st} dt$$

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες και παίρνοντας το όριο για $b \rightarrow \infty$ έχουμε τελικά

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad \operatorname{Re}(s) = \sigma > 0$$

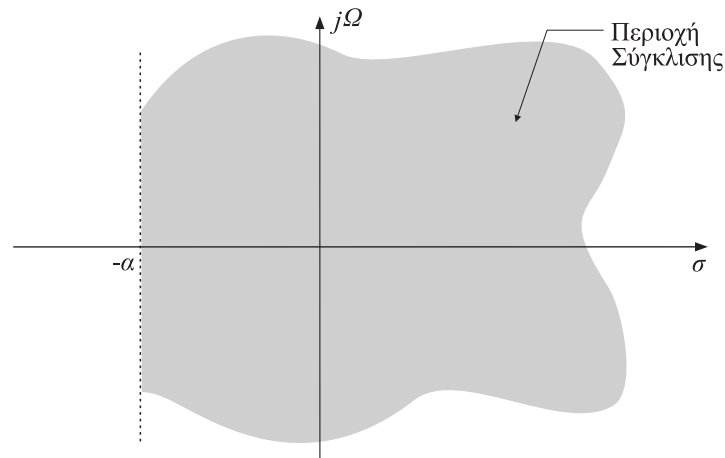
3. Έστω $x(t) = \delta(t)$. Ο ML της κρουστικής συνάρτησης είναι

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1, \quad \operatorname{Re}(s) > -\infty$$

4. Έστω $x(t) = e^{-at}u(t)$. Ξεκινώντας και πάλι από τον ορισμό έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(s+a)t} dt \\ &= \frac{1}{s+a}, \quad \operatorname{Re}(s) = \sigma > -a \end{aligned}$$

Στο Σχήμα 3.1 βλέπουμε την περιοχή σύγκλισης του ML της περίπτωσης 4. Το



Σχήμα 3.1 Περιοχή σύγκλισης του ML του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$.

ανώμαλο σημείο της συνάρτησης (δηλαδή το $-a$) βρίσκεται έξω από την περιοχή σύγκλισης.

Πέρα από τις παραπάνω στοιχειώδεις συναρτήσεις υπάρχουν και αρκετές άλλες που επίσης συναντώνται σαν συστατικά μέρη άλλων συναρτήσεων (ιδιαίτερα στα γραμμικά συστήματα). Οι ML αυτών των συναρτήσεων υπολογίζονται το ίδιο εύκολα όπως και παραπάνω, δηλαδή ουσιαστικά με απευθείας εφαρμογή του ορισμού. Στον Πίνακα 3.1 συνοψίζονται οι ML και οι αντίστοιχες περιοχές σύγκλισης (ΠΣ) για τις πλέον συνηθισμένες και χρήσιμες περιπτώσεις.

Πίνακας 3.1 Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Laplace		
Σήμα $x(t)$	ML $X(s)$	ΠΣ
$\delta(t)$	1	$\text{Re}(s) > -\infty$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}(s) > 0$
$\frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$	s^n	$\text{Re}(s) > -\infty$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}(s) > -a$
$e^{+at}u(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\text{Re}(s) > a$
$e^{j\Omega_0 t}u(t)$	$\frac{1}{s-j\Omega_0}$	$\text{Re}(s) > 0$
$\cos(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\Omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$\sin(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$e^{-at} \cos(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\Omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > -a$
$e^{-at} \sin(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{\Omega_0}{(s+a)^2+\Omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > -a$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re}(s) > 0$
$e^{-at} t^n u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\text{Re}(s) > -a$
$t \cos(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{s^2-\Omega_0^2}{(s^2+\Omega_0^2)^2}$	$\text{Re}(s) > 0$

Όπως θα φανεί και από τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace παρακάτω, οι σχέσεις του Πίνακα 3.1 είναι *αμφιμονοσήμαντες*, όπως και στην περίπτωση του μετασχηματισμού Fourier.

3.3.1 Η Περιοχή Σύγκλισης του Μετασχηματισμού Laplace

Η τρίτη στήλη του Πίνακα 3.1 καθορίζει την περιοχή σύγκλισης (ΠΣ) του ML, δηλαδή την περιοχή του επιπέδου s στην οποία υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της αντίστοιχης συνάρτησης. Για παράδειγμα, ο ML της $\cos(\Omega_0 t)u(t)$ υπάρχει για κάθε s τέτοιο ώστε $\text{Re}(s) > 0$.

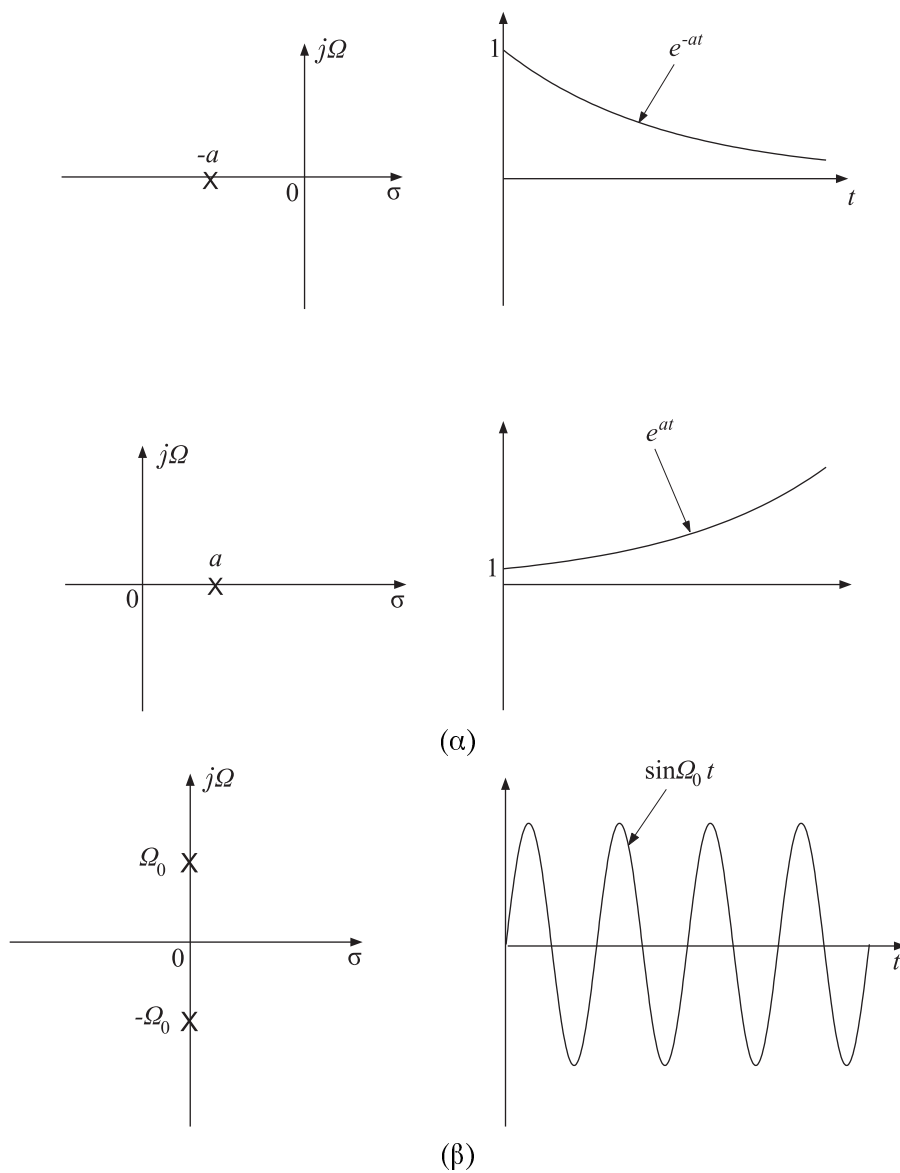
Ο μετασχηματισμός Laplace είναι μιγαδική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής s και συνεπώς ισχύουν όλες οι ιδιότητες των μιγαδικών συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής. Θυμίζουμε στο σημείο αυτό ορισμένες έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

Μια συνάρτηση $X(s)$ ονομάζεται *αναλυτική* στο σημείο $s = s_0$ αν είναι παραγωγίσιμη στο s_0 καθώς και σε όλα τα σημεία μιας περιοχής γύρω απ' αυτό. Λέμε ότι η $X(s)$ είναι αναλυτική στην περιοχή R_A του μιγαδικού επιπέδου s εάν είναι αναλυτική σε κάθε σημείο s της R_A . Αν η $X(s)$ δεν είναι αναλυτική σ' ένα σημείο s_0 αλλά είναι αναλυτική σε κάποιο σημείο σε κάθε γειτονιά του s_0 , τότε το σημείο αυτό λέγεται *σημείο ανωμαλίας* (*singular point*). Αν η $X(s)$ είναι αναλυτική οπουδήποτε σε μια περιοχή εκτός από ένα σημείο s_0 , όπου δεν είναι αναλυτική, τότε το $s = s_0$ ονομάζεται *μεμονωμένο ανώμαλο* (*isolated singularity*) σημείο της $X(s)$.

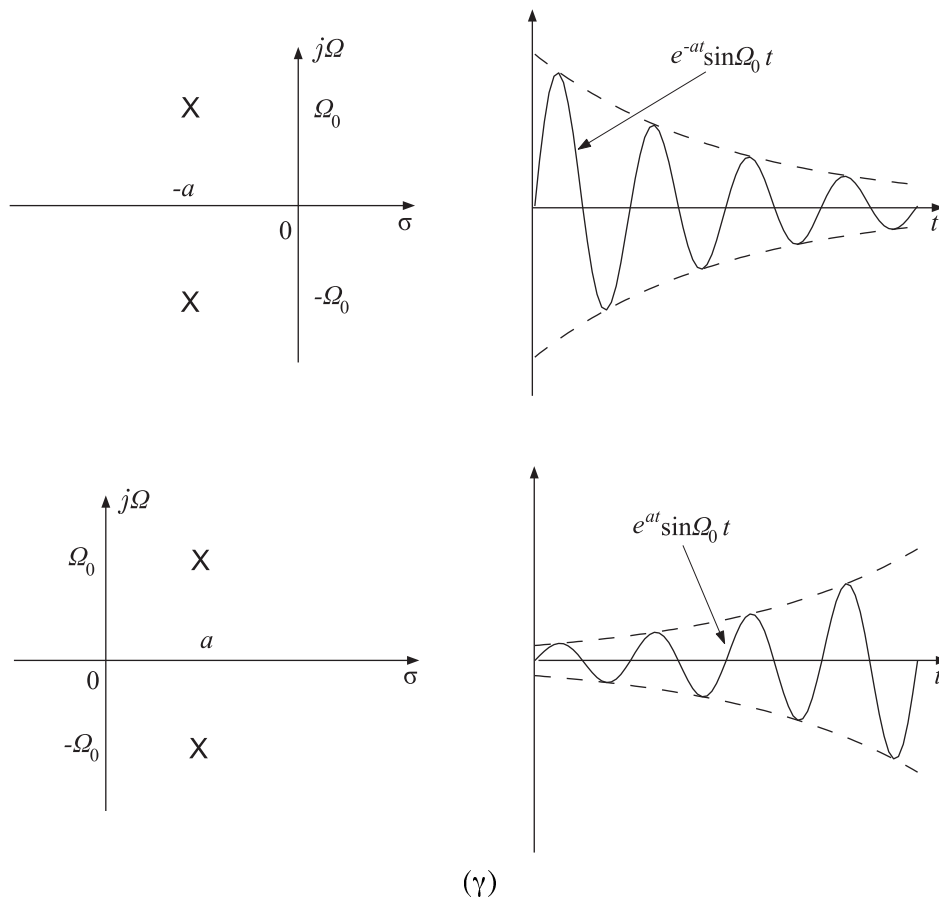
Αν η $X(s)$ μπορεί να γραφτεί σε μορφή ρητής συνάρτησης, δηλαδή ως λόγος δύο πολωνύμων του s , $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, τότε οι ρίζες του $D(s)$ (που είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $X(s)$) ονομάζονται *πόλοι* (*poles*) της $X(s)$. Οι ρίζες του αριθμητή $N(s)$ ονομάζονται *μηδενικά* (*zeros*) της $X(s)$ και προφανώς στα σημεία αυτά η $X(s)$ μηδενίζεται.

Έτσι, για παράδειγμα, ο ML της $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$, που είναι $X(s) = \frac{1}{s+a}$ (βλ. Πίνακα 3.1) έχει έναν πόλο στο σημείο $s_0 = -a$. Γενικά, όπως μπορεί να διαπιστωθεί και από τον Πίνακα 3.1, πόλοι στο αριστερό ημιεπίπεδο του s αντιστοιχούν σε σήματα στο πεδίο του χρόνου πολλαπλασιασμένα με e^{-at} , $a > 0$. Πόλοι στο δεξιό ημιεπίπεδο του s αντιστοιχούν σε σήματα πολλαπλασιασμένα με e^{at} , $a > 0$. Απλοί πόλοι στο φανταστικό άξονα αντιστοιχούν σε σήματα των οποίων το πλάτος ούτε αυξάνεται ούτε μειώνεται σε σχέση με το χρόνο. Πολλαπλοί πόλοι στο φανταστικό άξονα αντιστοιχούν σε σήματα πολλαπλασιασμένα με δυνάμεις του t . Μιγαδικοί συζυγείς πόλοι αντιστοιχούν σε συναρτήσεις που υφίστανται ταλάντωση (περιέχουν ημιτονοειδείς όρους). Εάν, βέβαια, το πραγματικό μέρος των συζυγών πόλων είναι μηδέν (συζυγείς στο φανταστικό άξονα), τότε έχουμε συντηρούμενη ταλάντωση. Αλλιώς η ταλάντωση είναι ή εκθετικά φθίνουσα ή εκθετικά αύξουσα. Τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα 3.2.

Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace μιας συνάρτησης δεν περιλαμβάνει πόλους. Αυτό είναι αποτέλεσμα μιας χρήσιμης ιδιότητας του ML σύμφωνα με την οποία ο ML $X(s)$ της $x(t)$ είναι αναλυτική συνάρτηση στην περιοχή σύγκλισής του.



Σχήμα 3.2 Σχέση μεταξύ της θέσης των πόλων στο επίπεδο s και της μορφής του σήματος στο πεδίο του χρόνου. (α) Ένας πραγματικός πόλος. (β) Δύο συζυγείς φανταστικοί πόλοι.



Σχήμα 3.2 (Συνεχ.) (γ) Μιγαδικοί συζυγείς πόλοι.

3.4 Ιδιότητες και Θεωρήματα του ML

Στο εδάφιο αυτό θα παρουσιαστούν συνοπτικά διάφορες ιδιότητες του ML καθώς και σχετικά θεωρήματα που θα βοηθήσουν στον υπολογισμό του ML μιας δοσμένης συνάρτησης, χωρίς την ανάγκη υπολογισμού του σχετικού ολοκληρώματος. Αρκετές από τις ιδιότητες θυμίζουν το μετασχηματισμό Fourier. Όπου η απόδειξη δεν είναι προφανής θα την παρουσιάσουμε.

1. Γραμμικότητα

Εάν

$$X_1(s) = \mathcal{L}\{x_1(t)\}, \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_1$$

και

$$X_2(s) = \mathcal{L}\{x_2(t)\}, \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_2,$$

τότε

$$\mathcal{L}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s), \quad \operatorname{Re}(s) > \max(\sigma_1, \sigma_2) \quad (3.6)$$

όπου a_1, a_2 είναι οποιεσδήποτε σταθερές. Παρατηρούμε ότι η συνθήκη $\operatorname{Re}(s) > \max(\sigma_1, \sigma_2)$ προσδιορίζει ως περιοχή σύγκλισης του αθροίσματος $a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s)$ την τομή των επιμέρους περιοχών σύγκλισης των $X_1(s)$ και $X_2(s)$. Στην πραγματικότητα, η ΠΣ μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την τομή, όπως δείχνει το παράδειγμα $a_1 = a_2 = 1$, $X_1(s) = \frac{s}{s-1}$, $\operatorname{Re}(s) > 1$ και $X_2(s) = -\frac{1}{s-1}$, $\operatorname{Re}(s) > 1$. Σ' αυτή την περίπτωση $a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s) = 1$, με ΠΣ $\operatorname{Re}(s) > -\infty$. Συνεπώς, η ΠΣ που δίνεται στην (3.6) πρέπει να εκληφθεί ως η ελάχιστη.

2. Χρονική ολίσθηση

Εάν

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)u(t)\}, \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0,$$

τότε, για $t_0 > 0$,

$$\mathcal{L}\{x(t-t_0)u(t-t_0)\} = e^{-st_0} X(s), \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0 \quad (3.7)$$

Δηλαδή, ο ML της χρονικά καθυστερημένης συνάρτησης $x(t-t_0)$ είναι ίσος με το ML της αρχικής συνάρτησης πολλαπλασιασμένος επί e^{-st_0} . Παρατηρείστε ότι η παρουσία της $u(t)$ στην παραπάνω ιδιότητα είναι απαραίτητη (όταν $t_0 > 0$) μια και δεν αναφερόμαστε κατ' ανάγκη σε αιτιατά σήματα.

3. Μετατόπιση στη μιγαδική συχνότητα

Εάν

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s), \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0,$$

τότε

$$\mathcal{L}\{x(t)e^{s_0 t}\} = X(s-s_0), \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0 + \operatorname{Re}(s_0) \quad (3.8)$$

για οποιαδήποτε μιγαδική σταθερά s_0 .

4. Κλιμάκωση στο χρόνο και στη μιγαδική συχνότητα

Εάν

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s), \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0,$$

τότε

$$\mathcal{L}\{x(bt)\} = \frac{1}{b}X\left(\frac{s}{b}\right), \quad \operatorname{Re}(s) > b\sigma_0 \quad (3.9)$$

για οποιαδήποτε *θετική* σταθερά b . Ανάλογα ισχύουν για την κλιμάκωση στη μιγαδική συχνότητα.

5. Παραγωγή στη μιγαδική συχνότητα

Εάν

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s), \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0,$$

τότε

$$\mathcal{L}\{(-t)^n x(t)\} = \frac{d^n X(s)}{ds^n}, \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0 \quad (3.10)$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό του ML έχουμε

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt$$

Παραγωγίζοντας n φορές το παραπάνω ολοκλήρωμα έχουμε

$$\frac{d^n X(s)}{ds^n} = \int_0^\infty (-t)^n x(t)e^{-st} dt$$

άρα

$$\mathcal{L}\{(-t)^n x(t)\} = \frac{d^n X(s)}{ds^n}, \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

△

6. Ολοκλήρωση στη μιγαδική συχνότητα

Εάν

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s), \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0,$$

τότε

$$\mathcal{L}\left\{\frac{x(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty X(u)du, \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0 \quad (3.11)$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt$$

άρα

$$\int_s^\infty X(u)du = \int_s^\infty \int_0^\infty x(t)e^{-ut} dt du, \quad \operatorname{Re}(u) > \sigma_0$$

όπου η u έχει χρησιμοποιηθεί ως μιγαδική μεταβλητή ολοκλήρωσης διότι η s χρησιμοποιείται ήδη στο κάτω όριο του ολοκληρώματος. Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης:

$$\begin{aligned}\int_s^\infty X(u)du &= \int_0^\infty x(t) \int_s^\infty e^{-ut} du dt \\ &= \int_0^\infty \frac{x(t)}{t} e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{x(t)}{t}\right\}\end{aligned}$$

△

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται ως εξής:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{x(t)}{t^n}\right\} = \int_s^\infty \int_{s_1}^\infty \cdots \int_{s_{n-1}}^\infty X(s_n) ds_n ds_{n-1} \cdots ds_1$$

7. Μετασχηματισμός Laplace παραγώγου

Έστω η συνάρτηση $x(t)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη για $t \geq 0$ και εκθετικής τάξης, α . Συνεπώς, υπάρχει ο ML αυτής, $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$, $\operatorname{Re}(s) > \alpha$. Τότε ο ML της παραγώγου της $x(t)$ θα ισούται με

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0^-), \quad \operatorname{Re}(s) > \alpha \quad (3.12)$$

Απόδειξη: Με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες παίρνουμε

$$\int_{0^-}^\infty u(t) \frac{dv(t)}{dt} dt = [u(t)v(t)]_{0^-}^\infty - \int_{0^-}^\infty \frac{du(t)}{dt} v(t) dt$$

Από τον ορισμό του ML έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= \int_{0^-}^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= [x(t)e^{-st}]_{0^-}^\infty + \int_{0^-}^\infty sx(t)e^{-st} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t)e^{-st}] - \lim_{t \rightarrow 0^-} [x(t)e^{-st}] + s \int_{0^-}^\infty x(t)e^{-st} dt\end{aligned}$$

Επειδή όμως η $x(t)$ είναι εκθετικής τάξης α , συνεπάγεται ότι υπάρχουν $M > 0$ και t_0 τέτοια ώστε

$$|x(t)e^{-st}| = |x(t)|e^{-\sigma t} < Me^{\alpha t}e^{-\sigma t} = Me^{-(\sigma-\alpha)t}$$

για κάθε $t \geq t_0$. Αλλά $Me^{-(\sigma-\alpha)t} \rightarrow 0$ για $t \rightarrow \infty$ όταν $\sigma = \operatorname{Re}(s) > \alpha$. Η $x(t)e^{-st}$ θα τείνει επίσης στο μηδέν για $t \rightarrow \infty$, ως φραγμένη από συνάρτηση που τείνει στο μηδέν.

Έτσι, ο πρώτος όρος του δεύτερου μέλους της παραπάνω έκφρασης για τον $\mathcal{L}\{\frac{dx(t)}{dt}\}$ είναι μηδέν, ο δεύτερος όρος είναι προφανώς $-x(0^-)$ και ο τρίτος όρος είναι $sX(s)$. Τελικά έχουμε

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0^-), \quad \operatorname{Re}(s) > \alpha$$

△

Παρατηρούμε ότι στην έκφραση για το ML της $\frac{dx(t)}{dt}$ υπεισέρχεται η αρχική συνθήκη $x(0^-)$. Όπως όμως σημειώσαμε στο Εδάφιο 3.1, έχουμε επιλέξει το 0^- ως το κάτω όριο ολοκλήρωσης στο ML και συνεπώς η $x(0^-)$ που απαιτείται είναι σχεδόν πάντα γνωστή (ενώ η $x(0^+)$ πιθανόν να χρειάζεται να υπολογιστεί).

Θεωρώντας κατάλληλες συνθήκες για τις παραγώγους $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ (που αφορούν τη συνέχεια και την εκθετική τους τάξη) μπορούμε επαγωγικά να γενικεύσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα στο εξής:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0^-} - \dots - \left.\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^-}$$

8. Μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος

Έστω $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ για $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$. Τότε ο ML της συνάρτησης

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

θα είναι

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{X(s)}{s} + \frac{y(0^-)}{s} \tag{3.13}$$

όπου

$$y(0^-) = \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau$$

Απόδειξη: Η συνάρτηση $y(t)$ γράφεται ως

$$y(t) = \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau + \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \equiv y(0^-) + \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$$

Ο ML της παραγώγου της $y(t)$ (δηλαδή της $\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$) είναι

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

άρα

$$sY(s) - y(0^-) = X(s)$$

και τελικά

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s} + \frac{y(0^-)}{s}$$

△

Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι (σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα για το ML της παραγώγου) θα πρέπει η $y(t)$ να είναι παραγωγίσιμη και εκθετικής τάξης. Η $y(t)$ θα είναι παραγωγίσιμη αν η $x(t)$ είναι συνεχής.

Παράδειγμα 3.1: Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) + 2 \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = u(t)$$

με αρχικές συνθήκες $x(0^-) = 2$, $\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau = 0$.

Λύση: Εφαρμόζοντας το ML και στα δύο μέλη και χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες ιδιότητες έχουμε

$$sX(s) - x(0^-) + 3X(s) + 2 \frac{\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau}{s} = \frac{1}{s}$$

άρα

$$X(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2} = -\frac{1}{s + 1} + \frac{3}{s + 2}, \quad \text{Re}(s) > -1$$

και τελικά, χρησιμοποιώντας τα ζεύγη ML του Πίνακα 3.1,

$$x(t) = (-e^{-t} + 3e^{-2t})u(t)$$

9. Το θεώρημα αρχικής τιμής

Έστω η συνάρτηση $x(t)$, η οποία δεν περιέχει κρουστικές συναρτήσεις στο $t = 0$, και έστω $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ ο ΜΛ της με ΠΣ $\text{Re}(s) > \sigma_0$. Τότε ισχύει

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0^+) \quad (3.14)$$

Απόδειξη:

1η Περίπτωση: Η $x(t)$ είναι συνεχής στο $t = 0$. Ο ΜΛ της παραγώγου της $x(t)$ είναι:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt = sX(s) - x(0^-)$$

Επειδή η $x(t)$ είναι συνεχής στο μηδέν, η $dx(t)/dt$ δεν περιέχει κρουστικές συναρτήσεις στο $t = 0$. Μπορεί ν' αποδειχτεί ότι ο μονόπλευρος ΜΛ μιας τέτοιας συνάρτησης τείνει στο μηδέν καθώς το $s \rightarrow \infty$ μέσα στην ΠΣ του (βλ. [Παρου62]). Έτσι, για $\sigma > \sigma_0$, το παραπάνω ολοκλήρωμα τείνει στο μηδέν για $s \rightarrow \infty$ κι έχουμε:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0^-) = x(0^+)$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της συνέχειας της συνάρτησης. Ας σημειωθεί ότι τυχόν ύπαρξη κρουστικών συναρτήσεων στην παράγωγο της $x(t)$ σε μη μηδενικές τιμές του t δεν εμποδίζει το ΜΛ της από το να τείνει στο μηδέν καθώς $s \rightarrow \infty$. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο ενδιαφερόμαστε για τη συνέχεια ή όχι της $x(t)$ μόνο στο μηδέν.

2η Περίπτωση: Η $x(t)$ έχει βηματική ασυνέχεια στο $t = 0$, η οποία προφανώς έχει ύψος $x(0^+) - x(0^-)$. Τότε η $dx(t)/dt$ στο $t = 0$ θα περιέχει την κρουστική συνάρτηση $[x(0^+) - x(0^-)]\delta(t)$, δηλαδή θα γράφεται ως:

$$\frac{dx(t)}{dt} = [x(0^+) - x(0^-)]\delta(t) + x_1(t)$$

όπου η $x_1(t)$ δεν έχει κρουστική συνάρτηση στο $t = 0$. Τότε, από τις ιδιότητες των συναρτήσεων κατανομών (βλ. Κεφάλαιο 1), θα έχουμε :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= \mathcal{L}\{[x(0^+) - x(0^-)]\delta(t)\} + \mathcal{L}\{x_1(t)\} \\ &= [x(0^+) - x(0^-)] + X_1(s) \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν

$$sX(s) - x(0^-) = [x(0^+) - x(0^-)] + X_1(s)$$

και επειδή, λόγω της υπόθεσης για τη $x_1(t)$, ισχύει ότι $\lim_{s \rightarrow \infty} X_1(s) = 0$, καταλήγουμε στο ότι

$$x(0^+) - x(0^-) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) - x(0^-)$$

και τελικά

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0^+)$$

△

Παρατηρούμε ότι στο θεώρημα αρχικής τιμής υπεισέρχεται η αρχική τιμή $x(0^+)$ παρά το ότι χρησιμοποιήθηκε το 0^- ως κάτω όριο του ολοκληρώματος στο ML. Με τη βοήθεια του θεωρήματος αυτού μπορούμε να υπολογίσουμε αρχικές τιμές όχι μέσω της ίδιας της $x(t)$ αλλά μέσω του ML αυτής.

Να σημειώσουμε εδώ, χωρίς περαιτέρω σχόλια, ότι αν η $x(t)$ περιέχει κρουστικές συναρτήσεις στο $t = 0$, τότε το $\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$ δεν υπάρχει. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε το λεγόμενο γενικευμένο θεώρημα αρχικής τιμής [Kailath80].

Παράδειγμα 3.2: Έστω $x(t) = u(t) \cos(\Omega_0 t)$. Να υπολογιστεί η τιμή της $x(t)$ για $t = 0^+$.

Λύση: Από τον Πίνακα 3.1 έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{s}{s^2 + \Omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

Η συνάρτηση $x(t)$ δεν περιέχει κρουστικές συναρτήσεις στο $t = 0$. Εφαρμόζοντας επομένως το θεώρημα αρχικής τιμής παίρνουμε

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^2 + \Omega_0^2} = 1$$

△

10. Το θεώρημα τελικής τιμής

Έστω ότι ο ML της $x(t)$ είναι $X(s)$ για $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$ και έστω ότι η $sX(s)$ είναι αναλυτική συνάρτηση στον φανταστικό άξονα και στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Τότε ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (3.15)$$

Απόδειξη:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = sX(s) - x(0^-)$$

Όταν $s \rightarrow 0$, τότε $e^{-st} \rightarrow 1$. Συνεπώς, παίρνοντας το όριο για $s \rightarrow 0$ στην παραπάνω σχέση, οδηγούμαστε στην

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} dt = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0^-)$$

που δίνει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - x(0^-) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0^-)$$

και τελικά

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

△

Το θεώρημα τελικής τιμής δεν ισχύει εάν η $sX(s)$ έχει πόλους στο δεξιό ημιεπίπεδο ή στον φανταστικό άξονα. Εάν υπάρχουν πόλοι στο δεξιό ημιεπίπεδο, αυτοί αντιστοιχούν σε συναρτήσεις της μορφής e^{at} , $a > 0$, των οποίων το όριο για $t \rightarrow \infty$ δεν υπάρχει. Στην περίπτωση που υπάρχουν πόλοι στον φανταστικό άξονα, τότε όρια για $t \rightarrow \infty$ μπορούν να οριστούν μόνο με χρήση της θεωρίας γενικευμένων συναρτήσεων. Το θεώρημα τελικής τιμής χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό τιμών ισορροπίας (και μόνιμης κατάστασης) στη μελέτη συστημάτων.

Παράδειγμα 3.3: Έστω $x(t) = (1 - e^{-t})u(t)$. Να υπολογιστεί το $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$.

Λύση:

$$\mathcal{L}\{(1 - e^{-t})u(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s(s+1)}, \quad \text{Re}(s) > 0$$

Εφαρμογή του θεωρήματος τελικής τιμής δίνει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+1} = 1$$

△

3.5 Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

3.5.1 Ορισμός και Έπαρξη του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace

Στο Κεφάλαιο 2 είδαμε ότι κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις υπάρχει το ζεύγος MF, που προσδιορίζει τη μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων και αντίστροφα. Όπως θα δούμε αμέσως, και για την περίπτωση του ML υπάρχει ένα αντίστοιχο ζεύγος σχέσεων. Εδώ θα ορίσουμε τον αντίστροφο

μετασχηματισμό Laplace ενώ η διαδικασία υπολογισμού του θα μας απασχολήσει στο επόμενο εδάφιο.

Στην αρχή αυτού του κεφαλαίου είδαμε ότι ο ML μιας αιτιατής συνάρτησης $x(t)$ ταυτίζεται με το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $x(t)e^{-\sigma t}$ όπου $\sigma = \text{Re}(s)$. Δηλαδή είναι

$$x(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\sigma + j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

ή

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} e^{\sigma t} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

όπου η ΠΣ του ML είναι $\text{Re} = \sigma > \sigma_0$. Υποθέτοντας ότι το σ είναι σταθερά και στη συνέχεια αλλάζοντας τη μεταβλητή ολοκλήρωσης και τροποποιώντας ανάλογα τα όρια ολοκλήρωσης, έχουμε τελικά

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds, \quad \sigma > \sigma_0 \quad (3.16)$$

Η σχέση αυτή δίνει τον *αντίστροφο ML*, τον οποίον στο εξής θα συμβολίζουμε ως $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$.

Το σ στην (3.16) είναι το πραγματικό μέρος του s και βέβαια δεν είναι σταθερά αλλά μεταβλητή. Το γεγονός αυτό δεν περιορίζει την αξία της σχέσης (3.16). Πράγματι, μπορεί ν' αποδειχτεί (χρησιμοποιώντας ανάλυση μιγαδικών συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής) ότι η τιμή του ολοκληρώματος της (3.16) είναι ανεξάρτητη από την τιμή του σ , αρκεί βέβαια η περιοχή ολοκλήρωσης να περιέχεται στην περιοχή σύγκλισης του $X(s)$, δηλαδή αρκεί $\sigma > \sigma_0$.

Σε σχέση τώρα με τη μοναδικότητα του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace ισχύει το εξής:

Θεώρημα: Εάν δύο συναρτήσεις $X_1(s)$ και $X_2(s)$ είναι ίσες, τότε για τις αιτιατές συναρτήσεις $x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\}$ και $x_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_2(s)\}$ θα ισχύει ότι $x_1(t) - x_2(t) = N(t)$ όπου $N(t)$ είναι μηδενική συνάρτηση.

Ως *μηδενική συνάρτηση* ορίζουμε κάθε συνάρτηση που είναι μηδέν παντού, εκτός από ένα αριθμήσιμο σύνολο σημείων όπου έχει πεπερασμένες τιμές. Συμπεραίνουμε, δηλαδή, ότι ο αντίστροφος ML δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένος, αλλά οι διάφορες συναρτήσεις που έχουν τον ίδιο ML διαφέρουν κατά μια μηδενική συνάρτηση. Εάν, βέβαια, οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε υπάρχει μονοσήμαντη αντιστοιχία.

3.5.2 Υπολογισμός του Αντίστροφου ML

Είναι προφανές ότι ένας τρόπος υπολογισμού της συνάρτησης $x(t)$, εάν γνωρίζουμε το ML αυτής, είναι μέσω του υπολογισμού του ολοκληρώματος της σχέσης (3.16). Αυτός ο απευθείας υπολογισμός του αντίστροφου ML απαιτεί εφαρμογή τεχνικών επικαμπύλιας ολοκλήρωσης μιγαδικών συναρτήσεων όπως, π.χ., της γνωστής μεθόδου των *ολοκληρωτικών υπολοίπων (residues)*. Ωστόσο, γενικά, η απευθείας ολοκλήρωση της $X(s)$ μπορεί ν' αποδειχτεί επίπονη διαδικασία και για το λόγο αυτόν συνήθως ακολουθούνται έμμεσοι τρόποι εύρεσης του αντίστροφου ML. Έτσι, εάν η μορφή της συνάρτησης $X(s)$ είναι απλή και μπορεί εύκολα να εκφραστεί ως άθροισμα επιμέρους στοιχειωδών όρων, τότε, με χρήση του Πίνακα 3.1 και των ιδιοτήτων του ML, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τον $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t)$. Παρακάτω θα συστηματικοποιήσουμε τη διαδικασία ανάλυσης του ML σε αθροίσματα απλούστερων συναρτήσεων.

Ανάπτυξη ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα

Υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι ο ML έχει τη μορφή ρητής συνάρτησης, δηλαδή μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο πολωνύμων του s :

$$X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (3.17)$$

όπου a_i, b_j είναι *πραγματικοί* αριθμοί.

Σε μορφή σαν την παραπάνω καταλήγουμε στη συντριπτική πλειοψηφία των προβλημάτων που αντιμετωπίζουμε στη θεωρία γραμμικών συστημάτων. Για παράδειγμα, μπορεί ν' αποδειχτεί ότι κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ) σύστημα που είναι πρακτικά υλοποιήσιμο έχει κρουστική απόκριση με ML μια ρητή συνάρτηση. Μάλιστα, επειδή ακριβώς μας ενδιαφέρουν στην πράξη περισσότερο τα ΓΧΑ συστήματα με πραγματική κρουστική απόκριση, γι' αυτό και περιορίσαμε παραπάνω τους συντελεστές a_i, b_j στο σύνολο των πραγματικών. Επιπλέον, για πραγματοποιήσιμα συστήματα είναι $m \leq n$. Με άλλα λόγια, ο ML δεν περιέχει όρους της μορφής s, s^2, \dots , κ.λπ. Σύμφωνα με τον Πίνακα 3.1, αυτό σημαίνει ότι η κρουστική απόκριση του συστήματος δεν περιέχει κρουστικές συναρτήσεις.

Αρχικά, λοιπόν, θα υποθέσουμε ότι ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή, δηλαδή $m < n$. Αργότερα θα εξετάσουμε και την περίπτωση $m \geq n$.

Έστω ότι $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι οι ρίζες του $a(s)$, δηλαδή ισχύει $a(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)$. Τότε, ανάλογα με τη φύση των ριζών αυτών, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Ρίζες διακριτές και πραγματικές

Ισχύει, δηλαδή, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ και $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$. Τότε η $X(s)$ μπορεί να εκφραστεί σαν άθροισμα μερικών (ή απλών) κλασμάτων

$$X(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \cdots + \frac{c_n}{s - \lambda_n}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι οι σταθερές $c_i, i = 1, \dots, n$, υπολογίζονται από τον τύπο

$$c_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) X(s), \quad i = 1, \dots, n$$

Στη συνέχεια, ο αντίστροφος ML υπολογίζεται με χρήση του Πίνακα 3.1 και των ιδιοτήτων του ML και εύκολα καταλήγουμε στο ότι

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = (c_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}) u(t)$$

β) Ύπαρξη πολλαπλών πραγματικών ριζών

Έστω ότι στο πολυώνυμο $a(s)$ μια ρίζα, ας πούμε η λ_1 , εμφανίζεται με πολλαπλότητα r ενώ οι υπόλοιπες ρίζες είναι απλές. Τότε

$$a(s) = (s - \lambda_1)^r \prod_{i=r+1}^n (s - \lambda_i)$$

και η συνάρτηση $X(s)$ αναλύεται στις ακόλουθες απλές ρητές συναρτήσεις

$$X(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{(s - \lambda_1)^2} + \cdots + \frac{c_r}{(s - \lambda_1)^r} + \frac{c_{r+1}}{s - \lambda_{r+1}} + \cdots + \frac{c_n}{s - \lambda_n}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με $(s - \lambda_1)^r$, είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι οι συντελεστές $c_i, i = 1, \dots, r$, που αντιστοιχούν στην πολλαπλή ρίζα, υπολογίζονται από τον τύπο

$$c_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_1} \frac{1}{(r - i)!} \frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}} [(s - \lambda_1)^r X(s)], \quad i = 1, \dots, r$$

Οι υπόλοιποι συντελεστές $c_i, i = r + 1, \dots, n$ υπολογίζονται όπως στην περίπτωση (α).

Έχοντας υπολογίσει όλα τα $c_i, i = 1, 2, \dots, n$, μπορούμε, στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ML και τον Πίνακα 3.1 να καταλήξουμε στην

παρακάτω έκφραση για τον αντίστροφο ML

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} \\ &= [c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + \dots + c_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{\lambda_1 t} \\ &\quad + c_{r+1} e^{\lambda_{r+1} t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}] u(t) \end{aligned}$$

Έτσι, πόλοι με πολλαπλότητα μεγαλύτερη του 1 αντιστοιχούν σε εκθετικές απο-κρίσεις πολλαπλασιασμένες με δυνάμεις του t . Ανάλογα με τα παραπάνω ισχύουν αν περισσότερες της μιας ρίζας του $a(s)$ είναι πολλαπλές.

γ) *Υπαρξη μιγαδικών ριζών*

Έστω ότι το πολυώνυμο $a(s)$ έχει ένα ζεύγος συζυγών¹ μιγαδικών ριζών, τις $\lambda_1 = \sigma + j\Omega$ και $\lambda_2 = \lambda_1^* = \sigma - j\Omega$. Η συνάρτηση $X(s)$ γράφεται ως

$$X(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_1^*} + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n}$$

Όλοι οι συντελεστές c_i , $i = 1, 2, \dots, n$, δηλαδή τόσο αυτοί που αντιστοιχούν στις μιγαδικές ρίζες όσο και αυτοί που αντιστοιχούν στις πραγματικές ρίζες, υπολογίζονται από τον τύπο

$$c_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) X(s)$$

Οι συντελεστές c_1 και c_2 θα είναι μιγαδικοί και θα ισχύει $c_2 = c_1^*$. Ο αντίστροφος ML θα δίνεται από την έκφραση

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \left(c_1 e^{\lambda_1 t} + c_1^* e^{\lambda_1^* t} + \sum_{i=3}^n c_i e^{\lambda_i t} \right) u(t)$$

Σε περίπτωση που το ζεύγος των συζυγών ριζών εμφανίζεται με πολλαπλότητα r , εφαρμόζεται ο τύπος της περίπτωσης (β). Όπως θα δούμε και στο Παράδειγμα 3.5, η εμφάνιση συζυγών μιγαδικών ριζών στο ML μιας συνάρτησης αντιστοιχεί σε ύπαρξη ημιτονοειδών όρων στη συνάρτηση αυτή.

Γενίκευση για $\deg(b(s)) \geq \deg(a(s))$ δηλαδή $m \geq n$

Εάν ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή της ρητής συνάρτησης $X(s)$ (βλ. (3.17)) είναι μεγαλύτερος από ή ίσος με το βαθμό του παρονομαστή, δηλαδή εάν

¹Οι μιγαδικές ρίζες του παρονομαστή θα εμφανίζονται απαραίτητα σε συζυγή ζεύγη αφού τα a_i υποτέθηκαν πραγματικά.

$m \geq n$, τότε ακολουθούμε την εξής διαδικασία για την εύρεση του αντίστροφου ML. Εκτελούμε πρώτα τη διαίρεση $\frac{b(s)}{a(s)}$ κι έχουμε:

$$X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \Pi(s) + \frac{g(s)}{a(s)}$$

όπου το $\Pi(s)$ είναι βαθμού $m-n$ και το $g(s)$ βαθμού $n-1$ το πολύ. Συγκεκριμένα, το $\Pi(s)$ είναι της μορφής

$$\Pi(s) = (s^{m-n} + \pi_{m-n-1}s^{m-n-1} + \cdots + \pi_1s + \pi_0)b_m$$

Ο $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\Pi(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{g(s)}{a(s)}\right\}$$

Όσον αφορά στον όρο $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{g(s)}{a(s)}\right\}$, επειδή ο βαθμός του $g(s)$ είναι μικρότερος από το βαθμό του $a(s)$, θ' ακολουθήσουμε τη διαδικασία που προηγουμένως περιγράψαμε στις περιπτώσεις (α), (β) και (γ). Ο όρος $\mathcal{L}^{-1}\{\Pi(s)\}$ θ' αποτελείται από άθροισμα κρουστικών συναρτήσεων. Αυτό γίνεται αντιληπτό αν θυμηθούμε ότι $\mathcal{L}^{-1}\{s^n\} = \delta^{(n)}(t)$ (Πίνακας 3.1).

3.5.3 Παραδείγματα

Παράδειγμα 3.4: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML της συνάρτησης

$$X(s) = \frac{s}{(s+1)^3(s+2)}$$

Λύση: Το πολυώνυμο του παρονομαστή έχει μια τριπλή πραγματική ρίζα, τη $\lambda_1 = -1$, καθώς και μια απλή πραγματική ρίζα, τη $\lambda_2 = -2$. Ακολουθώντας τη μεθοδολογία του προηγούμενου εδαφίου, αναλύουμε τη $X(s)$ σε μερικά κλάσματα, δηλαδή:

$$X(s) = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{c_3}{(s+1)^3} + \frac{c_4}{s+2}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις σταθερές c_1, c_2, c_3 και c_4 :

$$\begin{aligned} c_1 &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^2}{ds^2} [(s+1)^3 X(s)] = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{s}{s+2} \right) = -2 \\ c_2 &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{(3-2)!} \frac{d}{ds} [(s+1)^3 X(s)] = 2 \\ c_3 &= \lim_{s \rightarrow -1} [(s+1)^3 X(s)] = -1 \\ c_4 &= \lim_{s \rightarrow -2} [(s+2) X(s)] = 2 \end{aligned}$$

Άρα

$$X(s) = -\frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{2}{s+2}$$

Ο $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ ισούται με το άθροισμα των αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace των μερικών κλασμάτων, οι οποίοι βρίσκονται εύκολα με χρήση του Πίνακα 3.1 και των ιδιοτήτων του ML. Τελικά ο ζητούμενος αντίστροφος ML είναι

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \left(-2e^{-t} + 2te^{-t} - \frac{t^2}{2}e^{-t} + 2e^{-2t}\right)u(t)$$

△

Παράδειγμα 3.5: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML της

$$X(s) = \frac{s+5}{s(s^2+8s+25)}$$

Λύση: Στην περίπτωση αυτή, στον παρονομαστή εμφανίζεται ένα απλό ζεύγος μιγαδικών ριζών. Η συνάρτηση $X(s)$ αναλύεται ως εξής:

$$X(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+4+j3} + \frac{c_3}{s+4-j3}$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2, c_3 είναι

$$\begin{aligned} c_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \frac{1}{5} \\ c_2 &= \lim_{s \rightarrow -4-j3} [(s+4+j3)X(s)] = \frac{1-j3}{-18+j24} \\ c_3 &= \lim_{s \rightarrow -4+j3} [(s+4-j3)X(s)] = \frac{1+j3}{-18-j24} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο, ισχύει $c_3 = c_2^*$. Αντικαθιστώντας στο ανάπτυγμα της $X(s)$ σε μερικά κλάσματα τις παραπάνω τιμές των σταθερών c_i παίρνουμε:

$$X(s) = \frac{1}{5s} + \left(\frac{1-j3}{-18+j24}\right) \frac{1}{s+4+3j} + \left(\frac{1+j3}{-18-j24}\right) \frac{1}{s+4-j3}$$

Ο αντίστροφος ML της $X(s)$ είναι

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \left[\frac{1}{5} + \left(\frac{1-j3}{-18+j24}\right)e^{-(4+j3)t} + \left(\frac{1+j3}{-18-j24}\right)e^{-(4-j3)t}\right]u(t)$$

Κάνοντας τις πράξεις στην παραπάνω παράσταση και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Euler

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}, \\ \cos \varphi &= \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2},\end{aligned}$$

καταλήγουμε στην έκφραση

$$x(t) = \frac{1}{5} \left[1 + e^{-4t} \left(-\cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t \right) \right] u(t)$$

Εναλλακτικός τρόπος λύσης: Σε περιπτώσεις παρόμοιες μ' αυτές του παραδείγματος μπορούμε ν' ακολουθήσουμε έναν εναλλακτικό τρόπο που συχνά είναι και συντομότερος. Αναλύουμε τη ρητή συνάρτηση $X(s)$ ως εξής :

$$X(s) = \frac{s+5}{s(s^2+8s+25)} = \frac{As+B}{s^2+8s+25} + \frac{C}{s}$$

ή

$$X(s) = \frac{As+B}{(s+4)^2+3^2} + \frac{C}{s}$$

Η σταθερά C βρίσκεται όπως και προηγουμένως, δηλαδή

$$C = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \frac{1}{5}$$

Προκειμένου να βρούμε τις A και B εργαζόμαστε ως εξής:

$$\frac{As+B}{s^2+8s+25} = \frac{s+5}{s(s^2+8s+25)} - \frac{1}{5s} = \frac{-(1/5)s - (3/5)}{s^2+8s+25}$$

Εξισώνοντας τους ομοβάθμιους όρους των αριθμητών παίρνουμε $A = -\frac{1}{5}$ και $B = -\frac{3}{5}$. Δηλαδή η $X(s)$ γράφεται ως:

$$X(s) = \frac{1}{5} \left[\frac{1}{s} - \frac{s+3}{(s+4)^2+3^2} \right] = \frac{1}{5} \left[\frac{1}{s} - \frac{s+4}{(s+4)^2+3^2} + \frac{1}{(s+4)^2+3^2} \right]$$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο ML της $X(s)$ με χρήση του Πίνακα 3.1, καταλήγουμε και πάλι στην ίδια, όπως και προηγουμένως, έκφραση για τη $x(t)$, δηλαδή

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{5} \left[1 + e^{-4t} \left(-\cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t \right) \right] u(t)$$

△

3.5.4 Θεωρήματα Συνέλιξης στο Χρόνο και τη Συχνότητα

Συνέλιξη στο χρόνο

Έστω $X_1(s)$ και $X_2(s)$ οι ML των συναρτήσεων $x_1(t)$ και $x_2(t)$, αντίστοιχα, όπου $x_1(t) = 0$ και $x_2(t) = 0$ για $t < 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι οι $X_1(s)$ και $X_2(s)$ υπάρχουν για $\text{Re}(s) > \sigma_1$ και $\text{Re}(s) > \sigma_2$, αντίστοιχα. Τότε ισχύει ότι ο ML της συνέλιξης στο χρόνο, t , ισούται με το γινόμενο των αντίστοιχων συναρτήσεων στη μιγαδική συχνότητα, s . Δηλαδή

$$\mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(s)X_2(s), \quad \text{Re}(s) > \max(\sigma_1, \sigma_2)$$

Απόδειξη:

Από τον ορισμό της συνέλιξης στο πεδίο του χρόνου παίρνουμε

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau = \int_0^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο ML του γινομένου έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)X_2(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_1(s)X_2(s)e^{st}ds, \quad c > \max(\sigma_1, \sigma_2)$$

Για τη συνθήκη $c > \max(\sigma_1, \sigma_2)$ ισχύουν τα όσα είπαμε στην ιδιότητα της γραμμικότητας, δηλαδή, εάν στο γινόμενο των συναρτήσεων $X_1(s)$, $X_2(s)$ κάποια μηδενικά της μιας ακυρώνουν κάποιους πόλους της άλλης, τότε η ΠΣ μπορεί να είναι μεγαλύτερη απ' αυτή που περιγράφει η παραπάνω συνθήκη. Ο αντίστροφος ML του γινομένου γράφεται ως

$$\mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)X_2(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_2(s)e^{st} \int_0^{\infty} x_1(\tau)e^{-s\tau}d\tau ds$$

Με δεδομένο ότι $\text{Re}(s)$ και c είναι τέτοια ώστε να εξασφαλίζεται η σύγκλιση και η αναλυτικότητα των ολοκληρωμάτων, μπορούμε ν' αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης, δηλαδή

$$\mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)X_2(s)\} = \int_0^{\infty} x_1(\tau) \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_2(s)e^{s(t-\tau)}ds d\tau$$

ή

$$\mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)X_2(s)\} = \int_0^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau$$

που είναι η συνέλιξη των $x_1(t)$, $x_2(t)$, όπως είδαμε παραπάνω. △

Παράδειγμα 3.6: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML της συνάρτησης

$$X(s) = \frac{1}{s^2(s+a)}$$

Λύση: Από τον Πίνακα 3.1 έχουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = tu(t)$$

και

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+a} \right\} = e^{-at}u(t)$$

Άρα

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{1}{s+a} \right\} &= \int_0^\infty e^{-a\tau} u(\tau)(t-\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t e^{-a\tau}(t-\tau)d\tau, \quad t > 0 \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα και καταλήγουμε στην

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{1}{s+a} \right\} = \left(\frac{e^{-at}}{a^2} + \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} \right) u(t)$$

△

Παράδειγμα 3.7: Ν' αποδειχτεί ότι:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t)$$

Λύση: Η απόδειξη μπορεί να γίνει επαγωγικά χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο. Έτσι, για $n = 2$ έχουμε:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \right\} = u(t) * u(t) = \int_0^\infty u(\tau)u(t-\tau)d\tau = tu(t)$$

κ.ο.κ.

△

Συνέλιξη στη μιγαδική συχνότητα.

Σχετικό με το προηγούμενο θεώρημα είναι και το ακόλουθο, το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη: Ο μετασχηματισμός Laplace του γινομένου δύο συναρτήσεων $x_1(t)$ και $x_2(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως ολοκλήρωμα στο μιγαδικό επίπεδο,

και συγκεκριμένα ως η συνέλιξη των αντίστοιχων ML $X_1(s)$ και $X_2(s)$ των χρονικών συναρτήσεων. Δηλαδή, αν $X_i(s) = \mathcal{L}\{x_i(t)\}$, $\text{Re}(s) > \sigma_i$, $i = 1, 2$, τότε

$$\mathcal{L}\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} X_1(s) * X_2(s)$$

όπου

$$X_1(s) * X_2(s) \equiv \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_1(z)X_2(s-z)dz$$

με $\text{Re}(s) > \sigma_1 + \sigma_2$, $\sigma_1 < c < \text{Re}(s) - \sigma_2$.

3.5.5 Μετασχηματισμός Laplace Ημιπεριοδικών Συναρτήσεων

Μια ημιπεριοδική συνάρτηση ορίζεται ως :

$$x(t) = \begin{cases} x(t+T), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

και είναι στην ουσία μια κοινή περιοδική συνάρτηση με περίοδο T η οποία όμως επεκτείνεται περιοδικά μόνο κατά το θετικό ημιάξονα.

Έστω

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t < 0, t > T \end{cases}$$

το τμήμα της $x(t)$ στη βασική της περίοδο και $\mathcal{L}\{x_0(t)\} = X_0(s)$ για $\text{Re}(s) > \sigma_0$. Προφανώς $\sigma_0 = -\infty$ διότι η $x_0(t)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας άρα ο ML της συγκλίνει για κάθε $\text{Re}(s) > -\infty$. Η $x(t)$ γράφεται τώρα ως:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_0(t - kT) = x_0(t) + x_0(t - T) + x_0(t - 2T) + \dots$$

Παίρνοντας το ML και των δύο πλευρών έχουμε

$$X(s) = X_0(s)(1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots)$$

άρα

$$X(s) = \frac{X_0(s)}{1 - e^{-sT}}, \quad \text{Re}(sT) > 0$$

Βέβαια, επειδή $T > 0$, η συνθήκη $\text{Re}(sT) > 0$ είναι ισοδύναμη με τη $\text{Re}(s) > 0$.

Παρατηρούμε ότι η περιοδικότητα στο χρόνο δεν εισάγει κρουστικές συναρτήσεις στο ML, όπως συνέβαινε στην περίπτωση του MF. Αυτό οφείλεται και πάλι στην παρουσία του όρου $e^{-\sigma t}$ ο οποίος διευκολύνει τη σύγκλιση του ML ενός περιοδικού σήματος.

3.6 Σχέση Μετασχηματισμών Laplace και Fourier

Στο εισαγωγικό εδάφιο αυτού του κεφαλαίου είδαμε ότι ο ML της αιτιατής συνάρτησης $x(t)$ είναι ουσιαστικά ο MF της $x(t)e^{-\sigma t}$. Επίσης, για $\sigma = 0$ ο ML και ο MF της $x(t)$ (αν υπάρχουν) ταυτίζονται. Στο εδάφιο αυτό θ' ασχοληθούμε πιο αναλυτικά με τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των δύο αυτών μετασχηματισμών. Έχοντας συμβολίσει το ML ως $X(s)$, θα συμβολίσουμε (για να τον διακρίνουμε) το MF ως $X_F(\Omega)$. Θα θεωρήσουμε ότι η $x(t)$ είναι αιτιατή, δηλαδή $x(t) = 0$ για $t < 0$ (για να έχει νόημα η ύπαρξη σχέσης MF και μονόπλευρου ML).

Έστω λοιπόν η συνάρτηση $x(t)$ με $x(t) = 0, \forall t < 0$, και με ML ίσο με

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad \operatorname{Re}(s) = \sigma > \sigma_0 \quad (3.18)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της $x(t)$ είναι

$$X_F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt \quad (3.19)$$

Θέτοντας $\operatorname{Re}(s) = \sigma = 0$ στην (3.18), μπορούμε να πάρουμε την (3.19), δηλαδή μπορούμε μέσω του ML να υπολογίσουμε το MF. Αυτό όμως προϋποθέτει τη σύγκλιση του ML όταν $\operatorname{Re}(s) = \sigma = 0$.

Έτσι, ανάλογα με την τιμή του σ_0 , διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

1η Περίπτωση: $\sigma_0 > 0$

Στην περίπτωση αυτή ο ML δεν ορίζεται όταν $\operatorname{Re}(s) = 0$ και συνεπώς ο MF δεν υπάρχει. Άρα, δεν μπορούμε να μεταβούμε από τον $\mathcal{L}\{x(t)\}$ στον $\mathcal{F}\{x(t)\}$.

2η Περίπτωση: $\sigma_0 < 0$

Στην περίπτωση αυτή η περιοχή σύγκλισης του ML περιλαμβάνει και το φανταστικό άξονα, άρα ο MF υπάρχει και προφανώς ισχύει:

$$X_F(\Omega) = X(s)|_{\sigma=0}$$

3η Περίπτωση: $\sigma_0 = 0$

Σ' αυτή την περίπτωση ο ML έχει σημεία ανωμαλίας στο φανταστικό άξονα, δηλαδή ακριβώς εκεί όπου ορίζεται ο MF. Ας δούμε, για παράδειγμα, τη συνάρτηση $x(t) = \cos(\Omega_0 t)u(t)$, της οποίας ο ML (βλ. Πίνακα 3.1) είναι

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + \Omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

και ο MF (βλ. Κεφάλαιο 2) είναι

$$X_F(\Omega) = \frac{j\Omega}{\Omega_0^2 - \Omega^2} + \frac{\pi}{2} [\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$$

Δηλαδή ο ML της παραπάνω συνάρτησης έχει δύο σημεία ανωμαλίας πάνω στον φανταστικό άξονα και, όπως είναι σαφές από τις παραπάνω εκφράσεις, δεν μπορούμε να μεταβούμε από το ML στο MF θέτοντας απλά όπου s το $j\Omega$.

Θα περιγράψουμε στη συνέχεια έναν τρόπο μετάβασης από το ML στο MF ακόμα και σ' αυτήν την οριακή περίπτωση. Υποθέτουμε, αρχικά, ότι η $X(s)$ έχει N σημεία ανωμαλίας (πόλους) με πολλαπλότητα 1. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε τη $X(s)$ ως άθροισμα δύο συναρτήσεων του s , όπου η μία είναι αναλυτική στον φανταστικό άξονα και η άλλη περιέχει τους πόλους, δηλαδή

$$X(s) = X_a(s) + \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{s - j\Omega_k} \quad (3.20)$$

Ο αντίστροφος ML της παραπάνω έκφρασης δίνει

$$x(t) = x_a(t) + \sum_{k=1}^N b_k e^{j\Omega_k t} u(t) \quad (3.21)$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το MF της (3.21). Κατ' αρχήν, επειδή η $X_a(s)$ είναι αναλυτική συνάρτηση στο φανταστικό άξονα, μπορούμε να υπολογίσουμε το MF της $x_a(t)$ θέτοντας στη συνάρτηση $X_a(s)$ όπου s το $j\Omega$. Για τους άλλους όρους του αθροίσματος της (3.21) αρκεί να θυμηθούμε από το Κεφάλαιο 2 ότι

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}$$

και να συνδυάσουμε αυτό το αποτέλεσμα με τη γνωστή ιδιότητα του MF για ολίσθηση στο πεδίο συχνοτήτων για να πάρουμε

$$\mathcal{F}\{e^{j\Omega_k t} u(t)\} = \pi\delta(\Omega - \Omega_k) + \frac{1}{j(\Omega - \Omega_k)}$$

Δηλαδή, τελικά, ο MF των δύο πλευρών της (3.21) δίνει

$$X_F(\Omega) = X_a(j\Omega) + \sum_{k=1}^N b_k \left[\pi\delta(\Omega - \Omega_k) + \frac{1}{j(\Omega - \Omega_k)} \right]$$

ή

$$X_F(\Omega) = X_a(j\Omega) + \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{j\Omega - j\Omega_k} + \pi \sum_{k=1}^N b_k \delta(\Omega - \Omega_k) \quad (3.22)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της $x(t)$, όπως έχει γραφτεί στην (3.20), δίνει, για $s = j\Omega$,

$$X(j\Omega) = X_a(j\Omega) + \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{j\Omega - j\Omega_k} \quad (3.23)$$

Συνδυάζοντας τις (3.22) και (3.23) έχουμε τελικά ότι

$$X_F(\Omega) = X(j\Omega) + \pi \sum_{k=1}^N b_k \delta(\Omega - \Omega_k) \quad (3.24)$$

Με άλλα λόγια, μπορούμε από το ML να πάρουμε το MF εάν θέσουμε $s = j\Omega$ και προσθέσουμε τους κατάλληλους όρους κρουστικών συναρτήσεων.

Ας δούμε πώς εφαρμόζεται η σχέση (3.24) στο παραπάνω παράδειγμα. Για το ML έχουμε

$$X(s) = \mathcal{L}\{\cos(\Omega_0 t)u(t)\} = \frac{s}{s^2 + \Omega_0^2} = \frac{1/2}{s + j\Omega_0} + \frac{1/2}{s - j\Omega_0}$$

Άρα, για το MF παίρνουμε

$$X_F(\Omega) = \mathcal{F}\{\cos(\Omega_0 t)u(t)\} = \frac{j\Omega}{\Omega_0^2 - \Omega^2} + \frac{\pi}{2} [\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)],$$

όπως βρήκαμε και προηγουμένως.

Αναφέρουμε, χωρίς να επεκταθούμε περισσότερο, ότι το αποτέλεσμα της σχέσης (3.24) μπορεί να γενικευτεί και στην περίπτωση που οι πόλοι στον φανταστικό άξονα εμφανίζονται με πολλαπλότητα > 1 .

3.7 Αμφίπλευρος Μετασχηματισμός Laplace

Στην εισαγωγή μας στο κεφάλαιο αυτό διατυπώσαμε τους ορισμούς των δύο βασικών ML, δηλαδή, του μονόπλευρου ML και του αμφίπλευρου ML. Στη συνέχεια αναπτύξαμε ιδιότητες και θεωρήματα βασισμένα στον ορισμό του μονόπλευρου ML. Αυτό έχει νόημα, διότι η πλειονότητα των συναρτήσεων που συναντάμε στην πράξη είναι “μονόπλευρα” αναπτυσσόμενες, δηλαδή έχουν μηδενική τιμή από κάποια χρονική στιγμή και πριν. Βέβαια, υπάρχουν και συναρτήσεις για τις οποίες δεν ισχύει αυτή η υπόθεση και εκτείνονται από το $-\infty$ έως το ∞ . Στις περιπτώσεις αυτές απαιτείται η χρήση του αμφίπλευρου ML. Στο εδάφιο αυτό θ’ αναφερθούμε συνοπτικά σε μερικά βασικά σημεία σχετικά με τον αμφίπλευρο ML και κυρίως σ’ αυτά που τον διαφοροποιούν από το μονόπλευρο.

Το ζεύγος σχέσεων του αμφίπλευρου ML είναι:

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt, & \sigma_1 > \operatorname{Re}(s) > \sigma_2 \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds, & \sigma_1 > \sigma > \sigma_2 \end{aligned}$$

Ας θυμηθούμε ότι η παρουσία του όρου $e^{-\sigma t}$ είναι που οδηγεί σε σύγκλιση το ολοκλήρωμα του μονόπλευρου ML συναρτήσεων εκθετικής τάξης, όταν ολοκληρώνουμε από 0 έως ∞ . Στην περίπτωση όμως του αμφίπλευρου ML υπεισέρχονται και αρνητικοί χρόνοι και μάλιστα στο διάστημα 0 έως $-\infty$. Έτσι, προφανώς, εάν $\sigma > 0$, το $e^{-\sigma t}$ αυξάνεται εκθετικά προς το ∞ καθώς $t \rightarrow -\infty$. Ο παραπάνω συλλογισμός μάς οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η περιοχή σύγκλισης του αμφίπλευρου ML είναι μια ζώνη στο μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή ο αμφίπλευρος ML υπάρχει για κάθε s τέτοιο ώστε $\sigma_1 > \operatorname{Re}(s) = \sigma > \sigma_2$.

Έστω, για παράδειγμα, η παρακάτω συνάρτηση

$$x(t) = \begin{cases} e^{bt}, & t < 0 \\ e^{-at}, & t > 0 \end{cases}$$

Τότε:

$$X(s) = \int_{-\infty}^0 e^{bt}e^{-st}dt + \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt$$

Προκειμένου να συγκλίνουν το 1ο και το 2ο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης πρέπει να ισχύει ταυτόχρονα ότι $\operatorname{Re}(s) < b$ και $\operatorname{Re}(s) > -a$ (υποθέτουμε ότι $b > -a$). Έτσι, τελικά:

$$X(s) = \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s+a}, \quad b > \operatorname{Re}(s) > -a$$

Ένα ακόμη σημείο που αξίζει να προσέξουμε είναι το εξής: Στο μονόπλευρο ML υπάρχει αμφιμονοσήμαντη σχέση ανάμεσα στη συνάρτηση, $x(t)$, και στο ML, $X(s)$, αυτής. Έτσι, εάν μας δίνεται η $X(s)$, υπάρχει μία μοναδική $x(t)$ που αντιστοιχεί σ' αυτήν. Η περιοχή σύγκλισης, που, υπενθυμίζουμε, δεν μπορεί να περιλαμβάνει πόλους, εκτείνεται πάντα δεξιά του πόλου της $X(s)$ με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος και μέχρι το άπειρο, όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 3.1. Αυτό είναι απόρροια του ορισμού του μονόπλευρου ML, που έχει ως κάτω όριο ολοκλήρωσης το μηδέν (μη αρνητικά t), κι επομένως, για συναρτήσεις εκθετικής τάξης, ο μονόπλευρος ML έχει νόημα για $s \rightarrow \infty$, δηλαδή η περιοχή σύγκλισης

εκτείνεται μέχρι το άπειρο. Στην περίπτωση όμως του αμφίπλευρου ML αυτό δεν ισχύει. Πρέπει πάντα, εκτός από τη $X(s)$, να δίνεται και η περιοχή σύγκλισής της, ώστε να προσδιορίζεται μοναδικά η $x(t)$. Για μια αναλυτική συνάρτηση $X(s)$ με πολλούς πόλους η περιοχή σύγκλισης μπορεί να είναι οποιαδήποτε περιοχή μεταξύ δύο πόλων.

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τις συναρτήσεις

$$x_1(t) = e^{at}u(t)$$

και

$$x_2(t) = -e^{at}u(-t)$$

Παίρνοντας τον αμφίπλευρο ML των δύο αυτών συναρτήσεων (οι οποίες είναι “μονόπλευρες”) έχουμε

$$X_1(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re}(s) > a$$

και

$$X_2(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re}(s) < a$$

Δηλαδή οι δύο συναρτήσεις έχουν την ίδια συνάρτηση ως ML αλλά διαφορετική περιοχή σύγκλισης.

Οι ιδιότητες και τα θεωρήματα που αναπτύξαμε στα προηγούμενα εδάφια για το μονόπλευρο ML ισχύουν σχεδόν ως έχουν και για τον αμφίπλευρο ML. Οι μόνες διαφορές είναι ότι οι περιοχές σύγκλισης πρέπει να τροποποιηθούν ανάλογα, όπως επίσης και οι αρχικές συνθήκες, όπου εμφανίζονται (π.χ., στην έκφραση για το ML της παραγώγου της $x(t)$). Αυτές θ' αντιστοιχούν όχι στο $t = 0$ αλλά στο $t = -\infty$, όπου από σύμβαση ισχύει $x(-\infty) = 0$.

Ο υπολογισμός του αμφίπλευρου ML μιας συνάρτησης $x(t)$ μπορεί να γίνει εύκολα εάν χωρίσουμε τη συνάρτηση σε δύο τμήματα (αυτό του θετικού χρόνου και αυτό του αρνητικού χρόνου) και πάρουμε το μονόπλευρο ML αυτών των δύο τμημάτων. Ας δούμε πώς γίνεται αυτό.

Έστω ότι η $x(t)$ εκτείνεται από το $-\infty$ έως το ∞ . Τότε μπορεί να γραφτεί ως $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ όπου $x_1(t) = x(t)u(t)$ και $x_2(t) = x(t)u(-t)$.² Παίρνοντας τον αμφίπλευρο ML της $x(t)$ έχουμε

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 x_2(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} x_1(t)e^{-st} dt$$

²Υποθέτουμε ότι η $x(t)$ δεν έχει κρουστική συνάρτηση στο $t = 0$.

Με απλή αλλαγή μεταβλητών στο 1ο ολοκλήρωμα ($\tau = -t$) οδηγούμαστε στην

$$X(s) = \int_0^{\infty} x_2(-\tau)e^{s\tau}d\tau + \int_0^{\infty} x_1(t)e^{-st}dt$$

Εάν $X_2(s)$ είναι ο ML του κατοπτρικού ως προς τον άξονα t ειδώλου της $x_2(t)$, δηλαδή $X_2(s) = \mathcal{L}\{x_2(-t)\}$, τότε ο ML της $x_2(t)$ θα είναι $X_2(-s)$. Έτσι, η (3.25) γράφεται:

$$X(s) = X_2(-s) + X_1(s) \quad (3.25)$$

Έτσι, σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, υπολογίζουμε κατ' αρχήν τους μονόπλευρους $X_1(s)$ και $X_2(s)$, στη συνέχεια τη $X_2(-s)$, και τελικά το άθροισμα των $X_1(s)$ και $X_2(-s)$ δίνει τον ζητούμενο αμφίπλευρο ML.

Παράδειγμα 3.8: Να υπολογιστεί ο αμφίπλευρος ML της συνάρτησης

$$x(t) = e^{-3t}u(t) + e^{2t}u(-t)$$

Λύση: Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω, έχουμε

$$x_1(t) = e^{-3t}u(t)$$

και

$$x_2(-t) = e^{-2t}u(t)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τους μονόπλευρους ML των δύο αυτών συναρτήσεων:

$$X_1(s) = \frac{1}{s+3}, \quad \operatorname{Re}(s) > -3$$

και

$$X_2(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \operatorname{Re}(s) > -2$$

Τελικά λοιπόν ο ζητούμενος αμφίπλευρος ML είναι:

$$X(s) = X_1(s) + X_2(-s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{-s+2} = -\frac{5}{s^2+s-6}$$

με $\operatorname{ΠΣ} -3 < \operatorname{Re}(s) < 2$. △

Για την εύρεση του αντίστροφου αμφίπλευρου ML εργαζόμαστε όπως και στην περίπτωση του μονόπλευρου ML λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3.25). Επίσης, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι οι πόλοι που βρίσκονται αριστερά της περιοχής σύγκλισης αντιστοιχούν στο τμήμα θετικών χρόνων της αρχικής συνάρτησης $x(t)$

και οι πόλοι που βρίσκονται δεξιά της περιοχής σύγκλισης αντιστοιχούν στο τμήμα αρνητικών χρόνων. Ας δούμε αυτή τη διαδικασία εύρεσης του αντίστροφου ML, ξεκινώντας από την έκφραση για τη συνάρτηση $X(s)$ του παραπάνω παραδείγματος. Αναλύουμε πρώτα τη συνάρτηση $X(s)$ σε απλά κλάσματα:

$$X(s) = -\frac{5}{s^2 + s - 6} = \frac{1}{s + 3} + \frac{1}{-s + 2}, \quad -3 < \operatorname{Re}(s) < 2$$

Το πρώτο κλάσμα έχει πόλο το $s = -3$ και το δεύτερο το $s = 2$. Με βάση τα όσα είπαμε παραπάνω, το πρώτο κλάσμα αντιστοιχεί στο τμήμα θετικών χρόνων της συνάρτησης και το δεύτερο στο τμήμα αρνητικών χρόνων. Οι αντίστροφοι μονόπλευροι ML αυτών είναι, αντίστοιχα, οι

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 3} \right\} = e^{-3t} u(t) \\ x_2(-t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{-(-s) + 2} \right\} = e^{-2t} u(t) \end{aligned}$$

Έτσι, η ζητούμενη χρονική συνάρτηση $x(t)$ είναι η

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = e^{-3t} u(t) + e^{2t} u(-t)$$

3.8 Χρήση του ML στην Επίλυση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων

Στο Εδάφιο 3.4, αναφερόμενοι στο μετασχηματισμό Laplace της παραγώγου και του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης, είχαμε την ευκαιρία να εφαρμόσουμε τους σχετικούς τύπους σ' ένα παράδειγμα επίλυσης μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (ΓΔΕ). Εδώ θα γενικεύσουμε και θα συστηματικοποιήσουμε τη διαδικασία επίλυσης γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Στο επόμενο εδάφιο θα δούμε πώς αυτή η συστηματική διαδικασία εφαρμόζεται στη μελέτη γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων συστημάτων.

Έστω, λοιπόν, η γενική μορφή της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = g(t) \quad (3.26)$$

όπου τα a_i , $i = 0, 1, \dots, n$, είναι σταθερές. Δίνονται οι αρχικές συνθήκες:

$$y(0) = b_0, y^{(1)}(0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$$

όπου, υπενθυμίζουμε, ο συμβολισμός $y^{(i)}$ δηλώνει την παράγωγο i τάξης της $y(t)$. Τα βήματα που θ' ακολουθήσουμε για να επιλύσουμε την παραπάνω ΓΔΕ συνοψίζονται ως εξής:

1. Παίρνουμε το ML και των δύο μελών της ΓΔΕ (3.26). Λόγω γραμμικότητας, ο ML του αριστερού μέλους ισούται με το άθροισμα των ML των επιμέρους όρων, οι οποίοι υπολογίζονται με εφαρμογή της ιδιότητας του ML για τις παραγώγους μιας συνάρτησης. Ο ML της $g(t)$ υπολογίζεται είτε απευθείας είτε, συνήθως, με χρήση σχετικών πινάκων (π.χ., Πίνακας 3.1).
2. Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς $Y(s)$, όπου $Y(s)$ είναι ο ML της ζητούμενης συνάρτησης. Το βήμα αυτό είναι καθαρά αλγεβρικό και αρκετά εύκολο.
3. Υπολογίζουμε τον αντίστροφο ML της $Y(s)$, δηλαδή τη γενική λύση $y(t)$. Αυτό γίνεται είτε με χρήση πινάκων, εάν η μορφή της $Y(s)$ είναι απλή, είτε με μεθόδους υπολογισμού αντίστροφων ML, που αναπτύξαμε σε προηγούμενο εδάφιο.

Εννοείται ότι η γνώση των αρχικών συνθηκών είναι αναγκαία κατά την εκτέλεση του 1ου βήματος της διαδικασίας. Είναι φανερό ότι η παραπάνω διαδικασία απλοποιεί εξαιρετικά την επίλυση ΓΔΕ που μπορούν να γραφτούν στη γενική μορφή της (3.26).

Παράδειγμα 3.9: Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - \frac{dy}{dt} = x(t) \equiv \sin t$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 2$, $y^{(1)}(0^-) = 0$, $y^{(2)}(0^-) = 1$.

Λύση: Η προς επίλυση ΓΔΕ θα μπορούσε να περιγράψει ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα με είσοδο $x(t)$ κι έξοδο $y(t)$, κι επομένως με την επίλυσή της βρίσκουμε την έξοδο του συστήματος. Ακολουθούμε τα βήματα που περιγράψαμε παραπάνω, δηλαδή:

Βήμα 1: Παίρνουμε το ML και των δύο μελών της εξίσωσης:

$$s^3 Y(s) - s^2 y(0^-) - s y^{(1)}(0^-) - y^{(2)}(0^-) - s Y(s) + y(0^-) = \mathcal{L}\{\sin t\}$$

ή

$$s^3 Y(s) - 2s^2 - 1 - s Y(s) + 2 = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Βήμα 2: Στη συνέχεια λύνουμε ως προς $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2s^2 - 1}{s^3 - s} + \frac{1}{(s^3 - s)(s^2 + 1)} = \frac{2s^3 + s}{(s^2 + 1)(s^2 - 1)}$$

Βήμα 3: Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο ML της $Y(s)$ θ' αναλύσουμε την αντίστοιχη ρητή συνάρτηση σε μερικά κλάσματα, δηλαδή:

$$Y(s) = \frac{3}{4} \frac{1}{s-1} + \frac{3}{4} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1}$$

Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 3.1 έχουμε τελικά:

$$y(t) = \left[\frac{3}{4}(e^t + e^{-t}) + \frac{1}{2} \cos t \right] u(t)$$

△

3.9 Χρήση του ML στην Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

Μια από τις πιο σημαντικές εφαρμογές του ML εντοπίζεται στη χρήση του για τη μελέτη και ανάλυση της συμπεριφοράς γραμμικών χρονικά αμετάβλητων συστημάτων. Στα ακόλουθα υποεδάφια θα δούμε συνοπτικά την εφαρμογή αυτή του ML, ειδικότερα σε ό,τι αφορά τη μελέτη της συμπεριφοράς εισόδου - εξόδου τέτοιων συστημάτων.

3.9.1 Συνάρτηση Μεταφοράς Συστήματος

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα. Εκμεταλλευόμενοι τις φυσικές σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των στοιχείων του συστήματος μπορούμε πάντα, εάν το σύστημα είναι πρακτικά υλοποιήσιμο, να καταλήξουμε στην περιγραφή του μέσω μιας ΓΔΕ με σταθερούς συντελεστές:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t) \quad (3.27)$$

όπου τα a_i, b_j είναι *πραγματικές* σταθερές. Εάν υποθέσουμε ότι *όλες οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές*, τότε, παίρνοντας το ML και των δύο μελών της (3.27), καταλήγουμε στη σχέση

$$H(s) \equiv \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (3.28)$$

Η παραπάνω συνάρτηση, $H(s)$, καλείται *συνάρτηση μεταφοράς (transfer function)* του συστήματος και εξ' ορισμού αποτελεί μια σχέση μεταξύ του ML της εξόδου και του ML της εισόδου του συστήματος, υπό την προϋπόθεση ότι το σύστημα βρίσκεται σε αρχική κατάσταση ηρεμίας (μηδενικές αρχικές συνθήκες).

Στη σχέση (3.28) μπορούμε να καταλήξουμε απευθείας από τον ορισμό της συνέλιξης εισόδου και κρουστικής απόκρισης, δηλαδή

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (3.29)$$

όπου έχει υιοθετηθεί η υπόθεση της αιτιότητας, δηλαδή, $h(t) = 0$, $t < 0$. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο του ML παίρνουμε

$$Y(s) = H(s)X(s), \quad \text{Re}(s) > \sigma_0$$

ή

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

όπου $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$. Δηλαδή, η συνάρτηση μεταφοράς δεν είναι παρά ο ML της κρουστικής απόκρισης $h(t)$.

Για συστήματα που συναντάμε στην πράξη η συνάρτηση μεταφοράς είναι μια ρητή συνάρτηση, δηλαδή γράφεται ως λόγος δύο πολυωνύμων του s :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \equiv \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.30)$$

όπως φαίνεται και στην (3.28).

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι, όπως είδαμε, η συνάρτηση μεταφοράς αντιστοιχεί σε μηδενικές αρχικές συνθήκες και είναι ανεξάρτητη από τη συγκεκριμένη είσοδο. Όπως φαίνεται από την εξίσωση (3.28), αυτή εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους που περιγράφουν το ΓΧΑ σύστημα.

Η συνάρτηση $H(s)$ για $s = j\Omega$ (εάν αυτή ορίζεται) είναι η γνωστή μας απόκριση συχνότητων του συστήματος, δηλαδή περιγράφει τη συμπεριφορά του στο πεδίο της συχνότητας.

3.9.2 Ευστάθεια Συστήματος και Συνάρτηση Μεταφοράς

Είδαμε στο Κεφάλαιο 1 ότι η ευστάθεια που μας ενδιαφέρει στην περιγραφή εισόδου - εξόδου ενός συστήματος είναι η ευστάθεια τύπου ΦΕΦΕ (φραγμένη είσοδος συνεπάγεται φραγμένη έξοδο). Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα ΓΧΑ σύστημα ευσταθές τύπου ΦΕΦΕ είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$$

όπου $h(t)$ η κρουστική του απόκριση.

Εφόσον η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ είναι ο ΜΛ της χρονιστικής απόκρισης $h(t)$, δεν μένει παρά να δούμε τις αντίστοιχες συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για την $H(s)$ ώστε να είναι το σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές. Θα περιοριστούμε σε ρητές συναρτήσεις μεταφοράς, μια και, όπως αναφέραμε, είναι αυτές που μας ενδιαφέρουν στην πράξη.

Πρώτα απ' όλα, για να είναι το σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές θα πρέπει ο βαθμός του πολωνύμου $N(s)$ στην (3.30) να είναι μικρότερος από ή ίσος με το βαθμό του πολωνύμου $D(s)$. Σε αντίθετη περίπτωση, από τη διαίρεση $\frac{N(s)}{D(s)}$ προκύπτουν όροι της μορφής cs^k , $k > 0$. Οι όροι αυτοί είναι δυνατόν να προκαλέσουν την παρουσία μη φραγμένων σημάτων στην έξοδο, ακόμη κι αν η είσοδος του συστήματος είναι φραγμένη. Για παράδειγμα, έστω ότι ένας όρος της $H(s)$ είναι ίσος με cs και ότι η είσοδος είναι η βηματική συνάρτηση $u(t)$ με ΜΛ ίσο με $\frac{1}{s}$. Τότε η αντίστοιχη έξοδος που δίνεται ως $\mathcal{L}^{-1}\{cs\frac{1}{s}\} = c\delta(t)$ είναι προφανώς μη φραγμένη.

Πέρα από τη σχέση των βαθμών των πολωνύμων $N(s)$ και $D(s)$, σημασία έχει και η θέση των ριζών τους. Θυμίζουμε ότι οι ρίζες του παρονομαστή $D(s)$ καλούνται πόλοι της συνάρτησης $H(s)$ και οι ρίζες του αριθμητή $N(s)$ καλούνται μηδενικά της $H(s)$. Στο Εδάφιο 3.3.1, αναφερόμενοι στην περιοχή σύγκλισης του ΜΛ, κάναμε ορισμένα σχόλια σχετικά με τη θέση των πόλων μιας ρητής συνάρτησης $X(s)$ και τη μορφή της αντίστοιχης χρονικής συνάρτησης $x(t)$. Λαμβάνοντας υπόψη εκείνα τα σχόλια μπορούμε εύκολα να δούμε ότι:

Εάν πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς ενός αιτιατού συστήματος βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο ή στον φανταστικό άξονα, τότε το σύστημα είναι ασταθές. Εάν όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, τότε το σύστημα είναι ευσταθές.

Έτσι, ο ισοδύναμος ορισμός για ευστάθεια τύπου ΦΕΦΕ ενός αιτιατού ΓΧΑ συστήματος είναι ότι: *όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς του πρέπει να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.*

Το παραπάνω επιβεβαιώνεται και από το ακόλουθο σκεπτικό. Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ευστάθειας τύπου ΦΕΦΕ ενός ΓΧΑ συστήματος είναι η απόλυτη ολοκληρωσιμότητα της χρονιστικής του απόκρισης, $h(t)$. Γνωρίζουμε, όμως, ότι αυτή είναι και ικανή συνθήκη για ύπαρξη του ΜΦ της $h(t)$, $H(\Omega)$. Έτσι, αν το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές, υπάρχει ο ΜΦ, $H(\Omega)$, κάτι που συνεπάγεται ότι ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στην ΠΣ του ΜΛ, $H(s)$. Για αιτιατό σύστημα, η ΠΣ της $H(s)$ είναι της μορφής $\text{Re}(s) > \alpha$. Αφού, για ΦΕΦΕ ευστάθεια, αυτή πρέπει να περιλαμβάνει και το φανταστικό άξονα, έπεται ότι $\alpha < 0$. Με άλλα λόγια, η ΦΕΦΕ ευστάθεια αιτιατού ΓΧΑ συστήματος επιτρέπει ύπαρξη

πόλων της συνάρτησης μεταφοράς μόνο στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Στην περίπτωση, βέβαια, που το σύστημα δεν είναι αιτιατό, η συνάρτηση μεταφοράς του μπορεί να έχει πόλους και στο δεξιό ημιεπίπεδο. Η ΠΣ της $H(s)$ θα πρέπει οπωσδήποτε πάλι να περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα.

3.10 Λυμένα Προβλήματα

1. Να υπολογιστεί ο ML της ακόλουθης συνάρτησης

$$x(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 2 \\ 6, & t > 2 \end{cases}$$

Λύση: Κατ' αρχήν, θα εκφράσουμε τη $x(t)$ συναρτήσει γνωστών συναρτήσεων των οποίων ο ML μπορεί εύκολα να βρεθεί από τον Πίνακα 3.1 και με χρήση των ιδιοτήτων του ML. Γενικά, σ' αυτού του τύπου τα προβλήματα, πριν απ' όλα προσπαθούμε να γράψουμε τη $x(t)$ σε μια μορφή που να είναι κατάλληλη για τους περαιτέρω υπολογισμούς. Εύκολα διαπιστώνεται ότι η δεδομένη $x(t)$ γράφεται ως

$$x(t) = [t^2 u(t) - t^2 u(t-2)] + 6u(t-2)$$

όπου ο όρος του δεξιού μέλους που είναι σε αγκύλες αντιστοιχεί στο $x(t) = t^2$, $0 < t < 2$ και ο όρος έξω απ' τις αγκύλες αντιστοιχεί στο $x(t) = 6$, $t > 2$. Η $x(t)$ γράφεται επίσης ως

$$\begin{aligned} x(t) &= t^2 u(t) - (t^2 - 6)u(t-2) \\ &= t^2 u(t) - [(t^2 - 4t + 4) + 4t - 10]u(t-2) \\ &= t^2 u(t) - [(t-2)^2 + 4(t-2) - 2]u(t-2) \end{aligned}$$

ή

$$x(t) = t^2 u(t) - (t-2)^2 u(t-2) - 4(t-2)u(t-2) + 2u(t-2)$$

Παίρνοντας τώρα το ML και των δύο πλευρών έχουμε:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{t^2 u(t)\} - \mathcal{L}\{(t-2)^2 u(t-2)\} - \mathcal{L}\{4(t-2)u(t-2)\} + \mathcal{L}\{2u(t-2)\}$$

ή τελικά

$$X(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-2s} \frac{2}{s^3} - 4e^{-2s} \frac{1}{s^2} + 2e^{-2s} \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

△

2. Να υπολογιστεί ο ML της συνάρτησης

$$x(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$$

Λύση: Το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor γύρω απ' το μηδέν της e^{-t} είναι

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!}$$

Επομένως η $x(t)$ μπορεί να γραφτεί (έπειτα από κατάλληλες πράξεις) ως

$$x(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n!}$$

Ορίζοντας τη μεταβλητή $k = n - 1$, η παραπάνω έκφραση γίνεται

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{(k+1)!}$$

Παίρνοντας το ML και των δύο πλευρών κι εφαρμόζοντας την ιδιότητα της γραμμικότητας προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{(k+1)!}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \mathcal{L}\{t^k\}$$

Συμβουλευόμενοι τον Πίνακα 3.1 βρίσκουμε ότι

$$\mathcal{L}\{t^k\} = \frac{k!}{s^{k+1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

Συνεπώς

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \frac{k!}{s^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \frac{1}{s^{k+1}}$$

Το τελευταίο, όμως, άθροισμα είναι το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor γύρω απ' το μηδέν της συνάρτησης $\ln(1+w)$ με $w = 1/s$. Αυτό ορίζεται για $|w| < \infty$, δηλαδή $s \neq 0$. Τελικά:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right), \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

△

3. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML της συνάρτησης

$$X(s) = \frac{5s^2 - 15s + 7}{(s+1)(s-2)^3}, \quad \operatorname{Re}(s) > 2$$

Λύση: Αναπτύσσουμε τη $X(s)$ σε μερικά κλάσματα:

$$X(s) = \frac{5s^2 - 15s + 7}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)^3}$$

Στη συνέχεια, ακολουθώντας τη γνωστή διαδικασία, θα υπολογίσουμε τις σταθερές A, B, C , και D .

$$A = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)X(s) = -1$$

$$B = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^2}{ds^2} [(s-2)^3 X(s)] = 1$$

$$C = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{(3-2)!} \frac{d}{ds} [(s-2)^3 X(s)] = 2$$

$$D = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{(3-3)!} [(s-2)^3 X(s)] = -1$$

Άρα

$$X(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-2} + \frac{2}{(s-2)^2} - \frac{1}{(s-2)^3}$$

και τελικά

$$x(t) = \left(-e^{-t} + e^{2t} + 2te^{2t} - \frac{t^2}{2}e^{2t} \right) u(t)$$

△

4. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML της συνάρτησης

$$X(s) = \frac{2s^2 + 6s + 6}{(s+2)(s^2 + 2s + 2)}, \quad \operatorname{Re}(s) > -2$$

Λύση: Ο δευτεροβάθμιος παράγοντας του παρονομαστή παραγοντοποιείται ως

$$s^2 + 2s + 2 = (s+1+j)(s+1-j)$$

Έχοντας τώρα τρεις διαφορετικούς παράγοντες στον παρονομαστή, μπορούμε ν' ακολουθήσουμε τη γνωστή διαδικασία ανάλυσης σε μερικά κλάσματα και να βρούμε τη $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$.

Ένας εναλλακτικός τρόπος είναι να κρατήσουμε τους συζυγείς μιγαδικούς παράγοντες και να κάνουμε την εξής ανάλυση:

$$X(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

Το A βρίσκεται εύκολα κατά τα γνωστά:

$$A = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)X(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{2s^2 + 6s + 6}{s^2 + 2s + 2} = 1$$

Οι συντελεστές B και C μπορούν να υπολογιστούν είτε εξισώνοντας ομοβάθμιους όρους ή αντικαθιστώντας συγκεκριμένες τιμές του s στο ανάπτυγμα της $X(s)$. Ας δούμε το δεύτερο τρόπο. Για $s = 0$ παίρνουμε:

$$X(0) = \frac{A}{2} + \frac{C}{2}$$

άρα

$$C = 2X(0) - A = 2 \cdot \frac{6}{4} - 1 = 2$$

Για να βρούμε και το B , πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη του αναπτύγματος της $X(s)$ με s και παίρνουμε το όριο καθώς το $s \rightarrow \infty$:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sA}{s+2} + \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{Bs+2}{s^2+2s+2}$$

ή

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = A + B$$

και επομένως

$$B = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) - A = 2 - 1 = 1$$

Το ανάπτυγμα της $X(s)$ γίνεται λοιπόν:

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{s+2}{s^2+2s+2} = \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

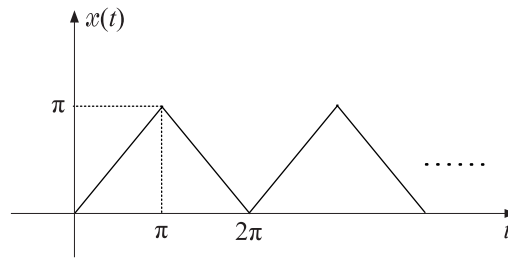
Τέλος, με τη βοήθεια του Πίνακα 3.1 βρίσκουμε

$$x(t) = [e^{-2t} + e^{-t}(\cos t + \sin t)]u(t)$$

△

5. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML της συνάρτησης

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$



Σχήμα 3.3 Η ημιπεριοδική συνάρτηση του Λυμένου Προβλήματος 6.

Λύση: Η $X(s)$ μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο των $X_1(s)$ και $X_2(s)$ όπου $X_1(s) = \frac{1}{s}$ και $X_2(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Οι αντίστροφοι ΜΛ των $X_1(s)$ και $X_2(s)$ είναι $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = u(t)$ και $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} = \sin(t)u(t)$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τώρα το θεώρημα της συνέλιξης, δηλαδή

$$\mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)X_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} * \mathcal{L}^{-1}\{X_2(s)\},$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \\ &= u(t) * [\sin(t)u(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \sin(t-\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \sin(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε τελικά:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = (1 - \cos t)u(t)$$

△

6. Να υπολογιστεί ο ΜΛ της ημιπεριοδικής συνάρτησης $x(t)$ που φαίνεται στο Σχήμα 3.3.

Λύση: Η $x(t)$ γράφεται αναλυτικά ως:

$$x(t) = x_0(t) + x_0(t-2\pi) + x_0(t-4\pi) + \dots$$

όπου

$$x_0(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \leq \pi \\ 2\pi - t, & \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

Από τη γνωστή ιδιότητα του ML ημιπεριοδικών συναρτήσεων, με $T = 2\pi$, παίρνουμε:

$$X(s) = \frac{X_0(s)}{1 - e^{-2\pi s}}$$

όπου

$$\begin{aligned} X_0(s) &= \int_0^{2\pi} x_0(t)e^{-st}dt = \int_0^{\pi} te^{-st}dt + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^{\pi} te^{-st}dt - \int_{\pi}^{2\pi} te^{-st}dt + 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} e^{-st}dt \end{aligned}$$

Τέλος, υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα (τα δύο πρώτα κατά παράγοντες) έχουμε

$$X_0(s) = \left(-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right) \Big|_0^{\pi} - \left(\frac{-te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right) \Big|_{\pi}^{2\pi} - \frac{2\pi e^{-st}}{s} \Big|_{\pi}^{2\pi}$$

και τελικά

$$X_0(s) = \frac{1 - 2e^{-\pi s} + e^{-2\pi s}}{s^2}$$

Αντικατάσταση του παραπάνω στον τύπο που δίνει το $X(s)$ συναρτήσει του $X_0(s)$ δίνει

$$X(s) = \frac{1 - 2e^{-\pi s} + e^{-2\pi s}}{s^2(1 - e^{-2\pi s})}$$

και μετά από πράξεις:

$$X(s) = \frac{1}{s^2} \frac{e^{\frac{\pi s}{2}} - e^{-\frac{\pi s}{2}}}{e^{\frac{\pi s}{2}} + e^{-\frac{\pi s}{2}}} = \frac{1}{s^2} \tanh\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

Η συνάρτηση $\tanh(x)$ είναι η υπερβολική εφαπτομένη της γωνίας x . △

7. Να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) + 5y(t) = x(t)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0) = y^{(1)}(0) = 0$ και

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi, t < 0 \end{cases}$$

Λύση: Κατ' αρχήν γράφουμε τη $x(t)$ ως

$$x(t) = u(t) - u(t - \pi)$$

οπότε η ΓΔΕ γίνεται

$$y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) + 5y(t) = u(t) - u(t - \pi)$$

Αν πάρουμε το ML και των δύο πλευρών της παραπάνω εξίσωσης, θα έχουμε

$$\mathcal{L}\{y^{(2)}(t)\} + 2\mathcal{L}\{y^{(1)}(t)\} + 5\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t - \pi)\}$$

Χρήση του Πίνακα 3.1 και των ιδιοτήτων του ML δίνει

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + 2sY(s) - 2y(0) + 5Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s}$$

Λύνοντας ως προς $Y(s)$ και αντικαθιστώντας τις αρχικές τιμές παίρνουμε:

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Δηλαδή:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 2s + 5)}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} - \mathcal{L}^{-1}\{e^{-\pi s} G(s)\} \end{aligned}$$

όπου

$$G(s) \equiv \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Είναι γνωστό από τις ιδιότητες του ML ότι:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\pi s} G(s)\} = g(t - \pi)u(t - \pi)$$

άρα αρκεί η εύρεση του $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα με τη μέθοδο ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα (αφήνεται ως άσκηση) και δίνει

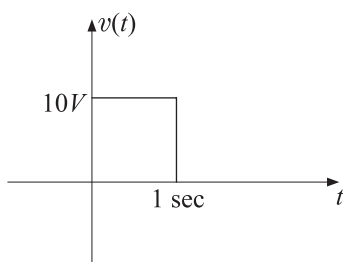
$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-t} \cos(2t) - \frac{1}{10}e^{-t} \sin(2t) \right] u(t)$$

Έχοντας υπολογίσει τη $g(t)$ (και ουσιαστικά τη $g(t - \pi)u(t - \pi)$) έχουμε τελικά για την $y(t)$:

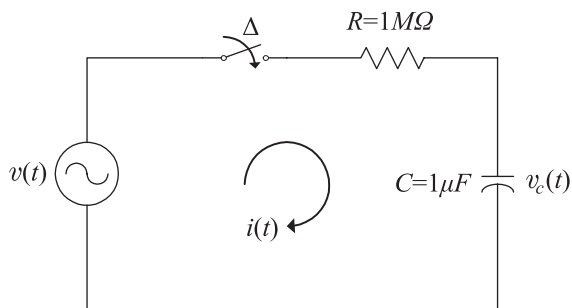
$$y(t) = \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-t} \cos(2t) - \frac{1}{10}e^{-t} \sin(2t) \right] u(t) - \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-(t-\pi)} \cos(2t) - \frac{1}{10}e^{-(t-\pi)} \sin(2t) \right] u(t - \pi)$$

△

8. Στο κύκλωμα του Σχήματος 3.4(β) ο διακόπτης κλείνει στο χρόνο $t = 0$ και η διέγερση $v(t)$ έχει τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 3.4(α). Ο πυκνωτής αρχικά



(α)



(β)

Σχήμα 3.4 (α) Η διέγερση και (β) το κύκλωμα του Λυμένου Προβλήματος 8.

θεωρείται αφόρτιστος. Να υπολογιστεί η ένταση του ρεύματος $i(t)$.

Λύση: Εκφράζουμε πρώτα τη συνάρτηση διέγερσης αναλυτικά ως εξής:

$$v(t) = 10[u(t) - u(t - 1)]$$

Από τη θεωρία ηλεκτρικών κυκλωμάτων ξέρουμε ότι η εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα του σχήματος είναι η

$$R i(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = v(t)$$

δηλαδή

$$10^6 i(t) + \frac{1}{10^{-6}} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = 10[u(t) - u(t-1)]$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τον Πίνακα 3.1 καθώς και τις ιδιότητες ολίσθησης και ολοκλήρωσης στο χρόνο, έχουμε:

$$10^5 I(s) + 10^5 \left[\frac{I(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau}{s} \right] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$$

Εφόσον ο πυκνωτής θεωρήθηκε αφόρτιστος στο χρόνο $t = 0$, το $\int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau$ (ποσότητα που εκφράζει “συσσώρευση” ηλεκτρικού φορτίου) θα είναι μηδέν. Δηλαδή έχουμε

$$I(s) = 10^{-5} \frac{1 - e^{-s}}{s + 1} = 10^{-5} \left(\frac{1}{s + 1} - \frac{e^{-s}}{s + 1} \right)$$

Ο αντίστροφος ML της παραπάνω συνάρτησης $I(s)$ υπολογίζεται εύκολα και είναι

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = 10^{-5} [e^{-t} u(t) - e^{-(t-1)} u(t-1)]$$

△

9) Κατά την ανάλυση ενός ηλεκτρικού κυκλώματος με χρήση ML έχουμε καταλήξει στο ότι

$$I(s) \equiv \mathcal{L}\{i(t)\} = \frac{E - v(0^+)}{R(s + \frac{1}{RC})}$$

Να υπολογιστεί η $i(0^+)$.

Λύση: Από το θεώρημα αρχικής τιμής έχουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} i(t) = i(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s I(s)$$

άρα

$$i(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s[E - v(0^+)]}{R(s + \frac{1}{RC})}$$

και τελικά:

$$i(0^+) = \frac{E - v(0^+)}{R}$$

△

3.11 Προβλήματα

1. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML των συναρτήσεων:

α) $X(s) = \frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)}, \operatorname{Re}(s) > 0$

β) $X(s) = \frac{2s+1}{s+2}, \operatorname{Re}(s) > -2$

γ) $X(s) = \frac{s^3+2s^2+6}{s^2+3s}, \operatorname{Re}(s) > 0$

2. Να υπολογιστεί (αν υπάρχει) ο ML των παρακάτω σημάτων:

α) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$

β) $x(t) = e^{-3t}u(t) + e^t u(-t)$

γ) $x(t) = e^{2t}u(t) + e^{-3t}u(-t).$

3. Θεωρούμε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα της μορφής του Σχήματος 3.4. Ο διακόπτης είναι κλειστός και η πηγή τάσης είναι κάποια συνάρτηση $v_s(t)$. Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση εάν:

α) Η είσοδος είναι η πηγή τάσης, $v_s(t)$, και η έξοδος η τάση στα άκρα του πυκνωτή, $v_c(t)$.

β) Η είσοδος είναι η πηγή τάσης, $v_s(t)$, και η έξοδος το ρεύμα βρόχου, $i(t)$.

4. Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) - 2y(t) = x(t)$$

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος για τις εξής τρεις περιπτώσεις:

α) Το σύστημα είναι αιτιατό.

β) Το σύστημα είναι ευσταθές.

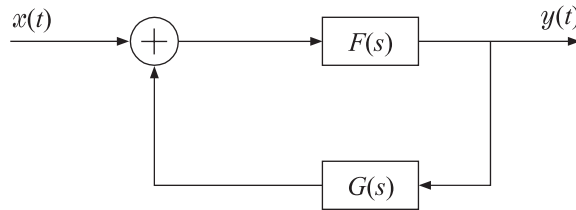
γ) Το σύστημα δεν είναι ούτε αιτιατό ούτε ευσταθές.

5. Τα υποσυστήματα $F(s)$ και $G(s)$ είναι διασυνδεδεμένα όπως στο Σχήμα 3.5 (σε σχήμα *ανάδρασης* όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 4). Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του ολικού συστήματος.

6. Να επιλυθούν οι παρακάτω ολοκληρωτικές εξισώσεις με χρήση του μονόπλευρου ML:

α) $x(t) = 1 + \alpha \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$

β) $x(t) = e^t \left[1 + \int_0^t e^{-\tau} y(\tau) d\tau \right], \quad t \geq 0.$



Σχήμα 3.5 Το σύστημα του Προβλήματος 5.

7. Δίνεται ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $x(t) = e^{-t}u(t)$ και χρονική απόκριση $h(t) = e^{-2t}u(t)$. Ζητούνται τα εξής:

- α) Να υπολογιστούν οι ML των $x(t)$ και $h(t)$.
- β) Να υπολογιστεί ο ML της εξόδου $y(t)$, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης, και στη συνέχεια η ίδια η έξοδος $y(t)$.
- γ) Να επαληθευτεί το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β) μέσω της απευθείας συνέλιξης των $x(t)$ και $h(t)$.

8. Δίνεται ένας μετρητής πίεσης ο οποίος, με είσοδο τη βηματική συνάρτηση, $u(t)$, έχει απόκριση την $(1 - e^{-t} - te^{-t})u(t)$. Σε μια συγκεκριμένη (αλλά άγνωστη) είσοδο η απόκριση του μετρητή είναι η $(2 - 3e^{-t} - e^{-3t})u(t)$. Θεωρώντας ότι ο εν λόγω μετρητής πίεσης μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ΓΧΑ σύστημα, να προσδιοριστεί η άγνωστη είσοδος.

9. Η είσοδος, $x(t)$, ενός ΓΧΑ συστήματος έχει μετασχηματισμό Laplace

$$X(s) = \frac{s+2}{s-2}$$

Επίσης, δίνεται ότι $x(t) = 0$, $t > 0$. Η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

Να υπολογιστούν:

- α) Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος και η περιοχή σύγκλισής της.
- β) Η χρονική απόκριση του συστήματος.
- γ) Η έξοδος του συστήματος όταν η είσοδός του είναι

$$x(t) = e^{3t}, \quad -\infty < t < \infty$$

10. Η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι

$$y(t) = e^{-2t}u(t)$$

και η συνάρτηση μεταφοράς του

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

Να υπολογιστεί μια είσοδος $x(t)$ που να παράγει την παραπάνω έξοδο. Είναι αυτή μοναδική;

Κεφάλαιο 4

Περιγραφή Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης

4.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace ως μαθηματικού εργαλείου για τη μελέτη γραμμικών χρονικά αμετάβλητων συστημάτων. Η χρήση του μετασχηματισμού Laplace συνδυάστηκε με την περιγραφή των συστημάτων με βάση τη σχέση εισόδου-εξόδου. Το σύστημα, δηλαδή, θεωρήθηκε ως ένα “μαύρο κουτί” όπου δεν είχαμε καμιά γνώση ως προς την εσωτερική του δομή. Η μόνη πληροφορία που είχαμε διαθέσιμη ήταν το ζεύγος σημάτων εισόδου-εξόδου και στη βάση αυτή κληθήκαμε να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος και να μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά και τη συμπεριφορά του, όπως, για παράδειγμα, την ευστάθειά του.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε την έννοια του χώρου κατάστασης, θα ορίσουμε τις μεταβλητές κατάστασης και θα δούμε πώς αυτές μπορούν να περιγράψουν ένα σύστημα με τη βοήθεια των καταστατικών εξισώσεων. Σε αντίθεση με την περιγραφή ενός συστήματος με βάση τα σήματα εισόδου-εξόδου, η μελέτη ενός συστήματος στο χώρο κατάστασης προϋποθέτει τη γνώση της λεπτομερέστερης δομής του συστήματος (αν και σε ορισμένες περιπτώσεις οι δυο παραπάνω μεθοδολογίες είναι ισοδύναμες). Στη γενική περίπτωση, η παραμετροποίηση ενός συστήματος στο χώρο κατάστασης παρέχει περισσότερη πληροφορία και απαντά

σε ερωτήματα όπου η περιγραφή εισόδου-εξόδου αποτυγχάνει. Επιπλέον, η παραμετροποίηση ενός συστήματος με μεταβλητές κατάστασης και η μελέτη του με τις καταστατικές εξισώσεις είναι μια γενική και κομψή μαθηματική διατύπωση, εφαρμόσιμη όχι μόνο σε γραμμικά χρονικά αμετάβλητα αλλά και σε μη γραμμικά καθώς και χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα.

4.2 Πόλοι στο Αριστερό Ημιεπίπεδο δεν Σημαίνουν Πάντα Ευστάθεια

Θεωρούμε το σύστημα που προκύπτει από την εν σειρά σύνδεση δύο ΓΧΑ συστημάτων που περιγράφονται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

$$\dot{y}(t) + y(t) = \dot{x}(t) - x(t) \quad (4.1)$$

και

$$\dot{y}(t) - y(t) = x(t) \quad (4.2)$$

όπου \dot{f} είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f . Στο κεφάλαιο αυτό θα συμβολίζουμε έτσι τις παραγώγους. Η δεύτερη παράγωγος της f θα δηλώνεται ως \ddot{f} , κ.ο.κ. Επίσης, θα κάνουμε την υπόθεση, όχι μόνο στο παράδειγμα αυτό αλλά και σ' όλα τα συστήματα που θα εξετάσουμε, ότι η είσοδος $x(t)$ και η έξοδος $y(t)$ είναι *συνεχείς* συναρτήσεις.

Από τις (4.1) και (4.2) υπολογίζουμε τις αντίστοιχες συναρτήσεις μεταφοράς

$$H_1(s) = \frac{s-1}{s+1} \quad (4.3)$$

και

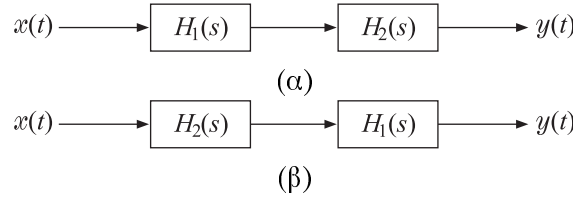
$$H_2(s) = \frac{1}{s-1} \quad (4.4)$$

Ανεξάρτητα από τη σειρά σύνδεσης των δύο παραπάνω συστημάτων, το σύστημα που προκύπτει έχει τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) = H_2(s)H_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad (4.5)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει έχει πόλο το -1 , άρα το σύστημα αναμένεται να είναι ΦΕΦΕ ευσταθές. Ας εξετάσουμε όμως λίγο πιο προσεκτικά τη συμπεριφορά ενός τέτοιου συστήματος.

1. Αρχικά ας δούμε την περίπτωση που φαίνεται στο Σχήμα 4.1(α), όπου εφαρμόζουμε την είσοδο στο $H_1(s)$ και παίρνουμε την έξοδο από το $H_2(s)$. Συμβολί-

**Σχήμα 4.1** Δύο τρόποι σύνδεσης δύο συστημάτων σε σειρά.

ζώντας με $y_1(t)$ την έξοδο του συστήματος $H_1(s)$, έχουμε

$$\dot{y}_1(t) + y_1(t) = \dot{x}(t) - x(t)$$

ή παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace¹

$$(s + 1)Y_1(s) - y_1(0) = (s - 1)X(s)$$

$$Y_1(s) = \frac{y_1(0)}{s + 1} + \frac{s - 1}{s + 1}X(s) \quad (4.6)$$

Λαμβάνοντας το $y_1(t)$ ως είσοδο στο $H_2(s)$ έχουμε

$$\dot{y}(t) - y(t) = y_1(t)$$

$$(s - 1)Y(s) - y(0) = Y_1(s) \quad (4.7)$$

Από τις (4.6) και (4.7) προκύπτει ότι

$$Y(s) = \frac{y(0)}{s - 1} + \frac{y_1(0)}{(s - 1)(s + 1)} + \frac{X(s)}{s + 1} \quad (4.8)$$

ή

$$y(t) = \left[y(0)e^t + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})y_1(0) + e^{-t} * x(t) \right] u(t) \quad (4.9)$$

Η (4.9) μας αποκαλύπτει ότι εάν το σύστημα είναι σε ηρεμία πριν από την εφαρμογή της $x(t)$ ($y(0) = 0$, $y_1(0) = 0$), τότε η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση και παραμένει φραγμένη για φραγμένη είσοδο $x(t)$. Εάν όμως το σύστημα έχει αρχικά αποθηκευμένη ενέργεια ($y(0) \neq 0$, $y_1(0) \neq 0$), τότε η έξοδος τείνει στο άπειρο ανεξάρτητα από

¹Στο παρόν κεφάλαιο χρησιμοποιείται ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace, που επιτρέπει ενσωμάτωση αρχικών συνθηκών. Έχοντας υποθέσει συνεχείς συναρτήσεις, την αρχική συνθήκη την εκφράζουμε στο 0 (0^- και 0^+ δεν παρέχουν επιπλέον πληροφορία).

την είσοδο που έχουμε. Στην πράξη, ένα τέτοιο σύστημα πάντα θα είναι ασταθές γιατί ποτέ δεν μπορούμε να έχουμε $y(0) = y_1(0) = 0$ με ακρίβεια.

2. Στη δεύτερη περίπτωση (βλ. Σχήμα 4.1(β)), εφαρμόζουμε την είσοδο στο $H_2(s)$ και παίρνουμε την έξοδο από το $H_1(s)$. Με ανάλογο τρόπο όπως και προηγουμένως έχουμε

$$\dot{y}_1(t) - y_1(t) = x(t)$$

$$Y_1(s) = \frac{y_1(0)}{s-1} + \frac{X(s)}{s-1} \quad (4.10)$$

ή

$$y_1(t) = [y_1(0)e^t + e^t * x(t)]u(t) \quad (4.11)$$

Επίσης

$$\dot{y}(t) + y(t) = \dot{y}_1(t) - y_1(t)$$

$$Y(s) = \frac{y(0)}{s+1} + \frac{X(s)}{s+1}$$

ή

$$y(t) = [y(0)e^{-t} + e^{-t} * x(t)]u(t) \quad (4.12)$$

Στη διάταξη αυτή παρατηρούμε ότι η έξοδος παραμένει πάντα φραγμένη ανεξάρτητα από αρχικές συνθήκες. Η (4.11) όμως δείχνει ότι η ενδιάμεση έξοδος δεν είναι φραγμένη και θα οδηγήσει αναπόφευκτα σε καταστροφή του συστήματος.

Και στις δύο περιπτώσεις του παραπάνω παραδείγματος παρατηρούμε ότι η άκριτη χρήση της συνάρτησης μεταφοράς μπορεί να μας οδηγήσει σε αντιφατικά αποτελέσματα. Ένα δεύτερο σημείο, που αξίζει να σημειωθεί, είναι ότι η τυχόν απαλοιφή μεταξύ μηδενικών και πόλων στη συνάρτηση μεταφοράς “κρύβει” από την έξοδο πόλους που διεγείρουν ασταθείς συνιστώσες, όπως για παράδειγμα την e^t .

Στη συνέχεια, με αφορμή την αδυναμία αυτή της περιγραφής εισόδου-εξόδου, θα εισάγουμε έναν άλλο τρόπο μελέτης συστημάτων, τον καλούμενο *χώρο κατάστασης* (*state space*), όπου λαμβάνεται υπόψη η εσωτερική δομή του υπό μελέτη συστήματος. Η επιπλέον αυτή γνώση μας βοηθά στο να προβλέπουμε και να υπερβαίνουμε προβλήματα όπως το παραπάνω και μάλιστα με μαθηματικά ελκυστικό τρόπο.

4.3 Χώρος Κατάστασης

4.3.1 Η Έννοια της Κατάστασης

Γνωρίζουμε από το Κεφάλαιο 1 ότι η έξοδος $y(t)$ ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου αιτιατού συστήματος με είσοδο $x(t)$ δίνεται από τη συνέλιξη

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (4.13)$$

όπου $h(t)$ η κρουστική απόκριση του συστήματος. Η (4.13) γράφεται ως

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t_0} x(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{t_0}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (4.14)$$

$$\equiv y(t, t_0) + \int_{t_0}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (4.15)$$

Υποθέτουμε ότι η είσοδος στο σύστημα είναι γνωστή στο διάστημα $[t_0, \infty)$. Τότε η έξοδος του συστήματος είναι πλήρως γνωστή στο ίδιο διάστημα, μόνο υπό την προϋπόθεση ότι το σύστημα ήταν σε ηρεμία τη χρονική στιγμή t_0 . Αυτό ισοδυναμεί με το $y(t, t_0) = 0$. Εάν αυτό δεν ισχύει, τότε η γνώση της εισόδου στο διάστημα $[t_0, \infty)$ δεν είναι αρκετή για να προσδιορίσει την έξοδο, και χρειαζόμαστε ένα επιπλέον στοιχείο, δηλαδή, το $y(t, t_0)$.

Ορισμός: Ορίζουμε ως κατάσταση (state) του συστήματος τη χρονική στιγμή t_0 το σύνολο της ελάχιστης πληροφορίας τη στιγμή t_0 , η οποία μαζί με τη γνώση της εισόδου $x(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, καθορίζει πλήρως τη συμπεριφορά του συστήματος για $t \geq t_0$. Ως συμπεριφορά του συστήματος εννοούμε τις μεταβολές που αυτό υφίσταται ως συνάρτηση του χρόνου (δηλαδή τις μεταβολές των σημάτων εξόδου και κατάστασης).

Με άλλα λόγια, η κατάσταση ενός συστήματος τη στιγμή t_0 συσσωρεύει όλη την απαραίτητη ιστορία του συστήματος. Θα πρέπει να τονιστεί ότι η τιμή της κατάστασης τη στιγμή t_0 είναι ανεξάρτητη από τη συγκεκριμένη πορεία που ακολούθησε το σύστημα για να φθάσει στην τιμή αυτή. Ο παραπάνω ορισμός είναι γενικός και δεν περιορίζεται σε γραμμικά ή χρονικά αμετάβλητα συστήματα.

Το σύνολο των μεταβλητών που καθορίζουν την κατάσταση ενός συστήματος είναι γνωστές ως μεταβλητές κατάστασης και θεωρούμε ότι αποτελούν τις συνιστώσες ενός διανύσματος που ορίζεται ως διάνυσμα κατάστασης. Οι μεταβλητές κατάστασης μπορεί να είναι ή να μην είναι μετρήσιμα (με πειραματικό τρόπο) μεγέθη, σε αντίθεση με την έξοδο που πάντα είναι μετρήσιμο μέγεθος.

Τέλος, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η επιλογή των μεταβλητών κατάστασης δεν είναι μονοσήμαντη αλλά υπάρχουν παραπάνω από ένας τρόποι για να περιγράψουμε ένα σύστημα στο χώρο κατάστασης.

Παράδειγμα 4.1: Έστω ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα με χρονική απόκριση

$$h(t) = e^{-t}u(t) \quad (4.16)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 εφαρμόζουμε την είσοδο $x(t)$, $t \geq t_0$. Εάν το σύστημα είναι σε ηρεμία τη χρονική στιγμή t_0 , τότε η έξοδος δίνεται ως

$$y(t) = \int_{t_0}^t x(\tau)e^{\tau-t}d\tau \quad (4.17)$$

Εάν το σύστημα δεν είναι σε ηρεμία, τότε υποθέτουμε ότι κάποια (άγνωστη σε μας) είσοδος, $x'(t)$, έφερε το σύστημα στην ενεργειακή του κατάσταση τη στιγμή t_0 . Τότε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t_0} x'(\tau)e^{\tau-t}d\tau + \int_{t_0}^t x(\tau)e^{\tau-t}d\tau$$

ή

$$y(t) = e^{-t}c(t_0) + \int_{t_0}^t x(\tau)e^{\tau-t}d\tau \quad (4.18)$$

όπου

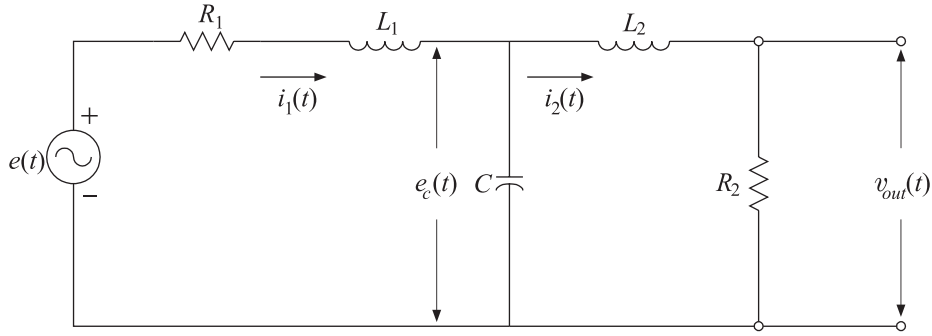
$$c(t_0) \equiv \int_{-\infty}^{t_0} x'(\tau)e^{\tau}d\tau$$

Η $c(t_0)$ είναι μια μεταβλητή κατάσταση του συστήματος. Η γνώση της για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t_0 , σε συνδυασμό με τη γνώση της εισόδου από τη στιγμή αυτή και πέρα, μας πληροφορεί πλήρως για τη συμπεριφορά του συστήματος. \triangle

4.3.2 Δυναμικές Εξισώσεις

Θεωρούμε το ηλεκτρικό κύκλωμα του Σχήματος 4.2. Θα ορίσουμε μεταβλητές κατάστασης και στη συνέχεια θα διατυπώσουμε τις εξισώσεις στις οποίες υπακούουν οι μεταβλητές αυτές. Το ζητούμενο είναι η τάση $v_{\text{out}}(t)$ στα άκρα της R_2 για είσοδο $e(t)$. Επιλέγουμε ως μεταβλητές κατάστασης τα ρεύματα $i_1(t)$, $i_2(t)$ και την τάση $e_c(t)$ στα άκρα του πυκνωτή. Το διάνυσμα κατάστασης, που θα συμβολίζουμε ως $\underline{x}(t)$, είναι

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ e_c(t) \end{bmatrix}$$



Σχήμα 4.2 Παράδειγμα ηλεκτρικού κυκλώματος RLC.

Γενικά, η υπογράμμιση θα δηλώνει διανύσματα. Δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσουμε ότι η παραπάνω επιλογή είναι πλήρως συμβατή με τον ορισμό των μεταβλητών κατάστασης, πράγμα που θα επιβεβαιώσουμε και παρακάτω. Από την εφαρμογή των νόμων του Kirchhoff έχουμε

$$L_1 \frac{di_1(t)}{dt} = -R_1 i_1(t) - e_c(t) + e(t) \quad (4.19)$$

$$L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = -R_2 i_2(t) + e_c(t) \quad (4.20)$$

$$C \frac{de_c(t)}{dt} = i_1(t) - i_2(t) \quad (4.21)$$

$$v_{out}(t) = i_2(t) R_2 \quad (4.22)$$

Οι τρεις πρώτες από τις παραπάνω εξισώσεις μας περιγράφουν την εξέλιξη των μεταβλητών κατάστασης στο χρόνο και η τέταρτη την έξοδο ως συνάρτηση μιας εκ των μεταβλητών κατάστασης. Από τις (4.19)-(4.22) είναι πλέον προφανές ότι εάν μας δίνονται οι αρχικές τιμές $i_1(t_0)$, $i_2(t_0)$, $e_c(t_0)$ και το $e(t)$, $t \in [t_0, \infty)$ για κάποιο t_0 , τότε λύνοντας τις διαφορικές εξισώσεις μπορούμε να γνωρίζουμε τόσο την κατάσταση ($\underline{x}(t)$) όσο και την έξοδο, για οποιοδήποτε $t \in [t_0, \infty)$.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε τις παραπάνω εξισώσεις με λίγο διαφορετική μορφή, κάτι που θα μας διευκολύνει στο δρόμο προς τη γενίκευση. Μετά από μια μικρή αναδιάθρωση των (4.19)-(4.22) παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{di_2(t)}{dt} \\ \frac{de_c(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ e_c(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e(t) \quad (4.23)$$

$$v_{\text{out}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ e_c(t) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Εάν ορίσουμε ως παράγωγο μιας διανυσματικής συνάρτησης το διάνυσμα των παραγώγων των στοιχείων της, οι (4.23), (4.24) γράφονται ως

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{b}e(t) \quad (4.25)$$

$$v_{\text{out}}(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) \quad (4.26)$$

με προφανείς ορισμούς για τα A , \underline{b} , και \underline{c} . Ο εκθέτης T δηλώνει αναστροφή.

Ορισμός: Οι εξισώσεις που περιγράφουν τις μονοσήμαντα ορισμένες σχέσεις μεταξύ εισόδου, εξόδου και μεταβλητών κατάστασης ονομάζονται *δυναμικές εξισώσεις*.

Σε μια πιο γενική μορφή, οι δυναμικές εξισώσεις γράφονται

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), v(t), t) \quad (4.27)$$

$$y(t) = h(\underline{x}(t), v(t), t) \quad (4.28)$$

όπου $\underline{x}(t)$ το διάνυσμα κατάστασης, $v(t)$ η είσοδος και $y(t)$ η έξοδος. Οι συναρτήσεις $f(\cdot)$ και $h(\cdot)$ δεν είναι απαραίτητα γραμμικές, η δε παρουσία του χρόνου ως όρισμα στις συναρτήσεις αυτές υποδηλώνει χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα. Η (4.27) καλείται *καταστατική εξίσωση* και η (4.28) *εξίσωση εξόδου*. Στο βιβλίο αυτό θ' ασχοληθούμε μόνο με γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα, για τα οποία οι (4.27) και (4.28) έχουν την ειδική μορφή

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{b}v(t) \quad (4.29)$$

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) + dv(t) \quad (4.30)$$

όπου $\underline{x}(t)$, \underline{b} και \underline{c} είναι διανύσματα $n \times 1$, το A είναι μητρώο διάστασης $n \times n$ και d είναι βαθμωτή ποσότητα. Η διάσταση n είναι γνωστή και ως *διάσταση* του συστήματος.

Μέχρι τώρα έχουμε αναφέρει συστήματα τα οποία διεγείρονται από μια είσοδο και παρέχουν μια έξοδο. Υπάρχουν όμως και συστήματα τα οποία δέχονται παραπάνω από μία εισόδους και έχουν τη δυνατότητα παροχής παραπάνω από μιας εξόδων. Στις περιπτώσεις αυτές τα $v(t)$, $y(t)$ είναι διανύσματα, με στοιχεία τις επιμέρους εισόδους και εξόδους, αντίστοιχα, και τα \underline{b} , \underline{c} (d) μητρώα (διάνυσμα). Στο βιβλίο αυτό θ' ασχοληθούμε μόνο με συστήματα μιας εισόδου και μιας εξόδου.

4.3.3 Γραμμικά Συστήματα

Από τα προηγούμενα είναι ήδη γνωστό ότι η έξοδος ενός γραμμικού συστήματος είναι συνάρτηση τόσο της εισόδου $v(t)$ για $t \geq t_0$ όσο και της αρχικής κατάστασης $\underline{x}(t_0)$. Υποθέτουμε ότι για $\underline{x}_1(t)$, $v_1(t)$, $t \geq t_0$ η έξοδος είναι $y_1(t)$, $t \geq t_0$ και για $\underline{x}_2(t)$, $v_2(t)$, $t \geq t_0$ η έξοδος είναι $y_2(t)$, $t \geq t_0$. Εάν α_1 , α_2 είναι σταθερές, το σύστημα λέγεται γραμμικό τότε και μόνον τότε όταν για αρχική συνθήκη

$$\alpha_1 \underline{x}_1(t_0) + \alpha_2 \underline{x}_2(t_0)$$

και είσοδο

$$\alpha_1 v_1(t) + \alpha_2 v_2(t), \quad t \geq t_0$$

η έξοδος ισούται με

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t), \quad t \geq t_0$$

Με άλλα λόγια, η υπέρθεση θα πρέπει να ισχύει όχι μόνο για τις εισόδους αλλά και για τις αρχικές συνθήκες.

4.4 Λύση των Δυναμικών Εξισώσεων

4.4.1 Δυναμοσειρές Τετραγωνικών Μητρώων

Στο εδάφιο αυτό θα εισάγουμε την έννοια της συνάρτησης ενός τετραγωνικού μητρώου διαστάσεων $n \times n$. Όπως γνωρίζουμε, μια συνάρτηση ορίζεται ως μια μονότιμη απεικόνιση από το πεδίο ορισμού στο πεδίο τιμών. Ας θεωρήσουμε αρχικά μια πολυωνυμική συνάρτηση²

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(\phi) = \phi^m + a_1 \phi^{m-1} + \dots + a_m$$

Ορίζουμε το αντίστοιχο πολυώνυμο μητρώων ως

$$f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$f(A) = A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_m I$$

όπου

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_k$$

²Περιορίζομαστε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών για λόγους απλότητας (μια και είναι ΓΧΑ συστήματα με πραγματική κρουστική απόκριση που συνήθως συναντούμε στην πράξη). Τα όσα παρουσιάζονται εδώ μεταφέρονται χωρίς δυσκολία στη μιγαδική περίπτωση.

και I το μοναδιαίο $n \times n$ μητρώο. Επίσης είναι $A^0 = I$. Έστω τώρα μια συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ εκφρασμένη σε μορφή δυναμοσειράς

$$g(\phi) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \phi^i, \quad |\phi| < \rho_0$$

Ορίζουμε την αντίστοιχη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ του μητρώου A ως

$$g(A) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i$$

Ο παραπάνω ορισμός έχει έννοια μόνον υπό την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}^{n \times n}$. Αποδεικνύεται ότι, εάν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι απόλυτα μικρότερες από το ρ_0 , η δυναμοσειρά συγκλίνει. Μια περίπτωση που αξίζει να σημειωθεί είναι όταν για κάποιο k είναι $A^k = 0$. Τότε, φυσικά, όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μηδενικές. Είναι προφανές ότι σε μια τέτοια περίπτωση

$$g(A) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i A^i$$

4.4.2 Εκθετική Συνάρτηση Μητρώων

Γνωρίζουμε ότι, για κάθε πεπερασμένο λ και t ,

$$e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \lambda^k$$

Κατά παρόμοιο τρόπο, σε κάθε μητρώο αντιστοιχεί ένα νέο $n \times n$ μητρώο $\Phi(t)$, που ορίζεται ως

$$\Phi(t) \equiv e^{At} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k \quad (4.31)$$

Από την (4.31) έχουμε αμέσως ότι

$$e^O = I \quad (4.32)$$

όπου O το μηδενικό $n \times n$ μητρώο. Επίσης, μπορεί να δειχτεί ότι

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2} \quad (4.33)$$

$$e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt} \quad (4.34)$$

Από την (4.33) για $t_1 = -t_2$ έχουμε

$$e^{A0} = I = e^{At_1} e^{-At_1}$$

ή

$$(e^{At_1})^{-1} = e^{-At_1} \quad (4.35)$$

Τέλος, από την (4.31) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{At}) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^k \\ &= A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k \end{aligned}$$

ή

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} \quad (4.36)$$

4.4.3 Μετασχηματισμός Laplace Εκθετικής Συνάρτησης

Ορίζουμε το μετασχηματισμό Laplace ενός μητρώου με στοιχεία συναρτήσεις ως εκείνο το μητρώο που έχει στοιχεία τους μετασχηματισμούς Laplace των αντίστοιχων συναρτήσεων (στοιχείων) του αρχικού μητρώου. Έτσι, από τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης μητρώων και την ιδιότητα της γραμμικότητας του ML έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{At}\} &= \mathcal{L} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L} \left\{ \frac{t^k}{k!} \right\} A^k \end{aligned} \quad (4.37)$$

Από τον Πίνακα 3.1 των μετασχηματισμών Laplace προκύπτει ότι

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{t^k}{k!} u(t) \right\} = s^{-(k+1)} \quad (4.38)$$

Συνδυασμός των (4.37) και (4.38) δίνει

$$\mathcal{L}\{e^{At}u(t)\} = s^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (s^{-1}A)^k \quad (4.39)$$

Είναι γνωστό ότι η απειροσειρά

$$g(\phi) = (1 - \phi)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \quad (4.40)$$

συγκλίνει για $|\phi| < 1$. Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε στο Εδάφιο 4.4.1, η απειροσειρά της (4.39) συγκλίνει στον $\mathbb{R}^{n \times n}$, υπό την προϋπόθεση ότι οι ιδιοτιμές του μητρώου $s^{-1}A$ είναι απόλυτα μικρότερες του 1, και αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{L}\{e^{At}u(t)\} = (sI - A)^{-1} \quad (4.41)$$

Παράδειγμα 4.2: Δίνεται το μητρώο

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστεί το μητρώο e^{At} .

Λύση:

1ος Τρόπος: Αρχικά θα διαγωνιοποιήσουμε τον A . Για το σκοπό αυτό υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του. Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι

$$p(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 6) + 20$$

με ρίζες (ιδιοτιμές του A)

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

Εφόσον οι ιδιοτιμές είναι διακριτές, ο πίνακας διαγωνιοποιείται κι έχουμε ότι

$$A = P\Lambda P^{-1} \quad (4.42)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Ο πίνακας ομοιότητας P αποτελείται από τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, τα οποία εύκολα υπολογίζονται ότι είναι τα

$$\underline{p}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \underline{p}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Άρα ο πίνακας P είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

και ο αντίστροφός του:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Από τον ορισμό του e^{At} έχουμε

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (P \Lambda P^{-1})^k \quad (4.46)$$

Αλλά

$$\begin{aligned} (P \Lambda P^{-1})^k &= (P \Lambda P^{-1})(P \Lambda P^{-1}) \dots (P \Lambda P^{-1}) \\ &= P \Lambda^k P^{-1} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Άρα

$$\begin{aligned} e^{At} &= P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Lambda^k \right) P^{-1} = P \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_2^k \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} P^{-1} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Σε συνδυασμό και με τις (4.44), (4.45) προκύπτει ότι

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 5e^t - 4e^{2t} & 10e^t - 10e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -4e^t + 5e^{2t} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Είναι προφανές ότι η παραπάνω μεθοδολογία μπορεί να γενικευτεί για οποιονδήποτε πίνακα A με διακριτές ιδιοτιμές.

2ος Τρόπος: Ο μετασχηματισμός Laplace του e^{At} , $t > 0$ δίνεται από την

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1} \quad (4.50)$$

όπου

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+3 & 10 \\ -2 & s-6 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \det(sI - A) &= (s+3)(s-6) + 20 \\ &= s^2 - 3s + 2 \end{aligned} \quad (4.52)$$

Άρα

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{At}\} &= \frac{1}{s^2 - 3s + 2} \begin{bmatrix} s - 6 & -10 \\ 2 & s + 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s-6}{(s-1)(s-2)} & \frac{-10}{(s-1)(s-2)} \\ \frac{2}{(s-1)(s-2)} & \frac{s+3}{(s-1)(s-2)} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.53)$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace καταλήγουμε στην (4.49), για $t \geq 0$. \triangle

Παράδειγμα 4.3: Να υπολογιστεί το μητρώο e^{At} όταν είναι

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Λύση: Το μητρώο είναι τριγωνικό, άρα οι ιδιοτιμές του δίνονται από τα διαγώνια στοιχεία του και οι λ_1, λ_2 είναι πολλαπλότητας 1 και 3, αντίστοιχα. Ένα τέτοιο μητρώο είναι γνωστό και ως μορφή Jordan, δηλαδή έχει τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο και μονάδες στις θέσεις πάνω από τις ιδιοτιμές με πολλαπλότητα μεγαλύτερη της μονάδας. Είναι γνωστό από τη γραμμική άλγεβρα ότι, όταν οι ιδιοτιμές ενός μητρώου δεν είναι διακριτές, τότε στη γενική περίπτωση το μητρώο αυτό δεν διαγωνιοποιείται με μετασχηματισμούς ομοιότητας και η μορφή Jordan είναι η πλησιέστερη στη διαγώνιο μορφή που μπορεί να πάρει το μητρώο. Εξαιρέση αποτελούν τα συμμετρικά (Hermitian) μητρώα που πάντα μπορούν να διαγωνιοποιηθούν.

Με απευθείας πολλαπλασιασμό παίρνουμε

$$\begin{aligned}A^2 &= \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 2\lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2^2 & 2\lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 3\lambda_2^2 & 3\lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_2^3 & 3\lambda_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2^3 \end{bmatrix} \\ A^4 &= \begin{bmatrix} \lambda_1^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 & 4\lambda_2^3 & 6\lambda_2^2 \\ 0 & 0 & \lambda_2^4 & 4\lambda_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2^4 \end{bmatrix}, \quad A^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & n\lambda_2^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda_2^{n-2} \\ 0 & 0 & \lambda_2^n & n\lambda_2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Από τον ορισμό του $\Phi(t) = e^{At}$ προκύπτει ότι τα στοιχεία του είναι

$$\Phi_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda_1^n = e^{\lambda_1 t}$$

και με τον ίδιο τρόπο

$$\begin{aligned} \Phi_{22} &= \Phi_{33} = \Phi_{44} = e^{\lambda_2 t} \\ \Phi_{34} &= \Phi_{23} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} n \lambda_2^{n-1} = \frac{d}{d\lambda_2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda_2^n \right) = \frac{d}{d\lambda_2} (e^{\lambda_2 t}) = t e^{\lambda_2 t} \\ \Phi_{24} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{n(n-1)}{2} \lambda_2^{n-2} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda_2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} n \lambda_2^{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\lambda_2^2} (e^{\lambda_2 t}) = \frac{1}{2} t^2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Άρα

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & t e^{\lambda_2 t} & (1/2) t^2 e^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & t e^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

△

4.5 Μητρώο Καταστατικής Μετάβασης

Θεωρούμε την καταστατική εξίσωση

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) \quad (4.54)$$

Η εξίσωση αυτή λέγεται και *ομογενής* και χαρακτηρίζεται από το ότι δεν περιλαμβάνει τον όρο $\underline{b}v(t)$. Θα υπολογίσουμε τη λύση της με την υπόθεση ότι αρχικά το καταστατικό διάνυσμα είναι $\underline{x}(0)$. Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace αμφοτέρων των πλευρών της (4.54), έχουμε

$$s \underline{X}(s) - \underline{x}(0) = A \underline{X}(s)$$

ή

$$\underline{X}(s) = (sI - A)^{-1} \underline{x}(0) \quad (4.55)$$

και από την (4.41) προκύπτει ότι

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}(0) \quad (4.56)$$

ή

$$\underline{x}(t) = \Phi(t)\underline{x}(0) \quad (4.57)$$

Το μητρώο $\Phi(t)$ ορίζεται ως το *μητρώο καταστατικής μετάβασης* διότι περιγράφει την εξέλιξη του $\underline{x}(t)$ στο χρόνο. Παρακάτω θα δώσουμε μερικές βασικές ιδιότητες του μητρώου αυτού:

1. $\Phi(0) = I$
2. $\Phi(-t) = \Phi^{-1}(t)$
3. $\Phi(t - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t - t_0)$

Οι παραπάνω ιδιότητες προκύπτουν απευθείας από τον ορισμό του μητρώου καταστατικής μετάβασης. Η 3η ιδιότητα έχει μια πολύ χρήσιμη ερμηνεία. Η τροχιά μετάβασης του καταστατικού διανύσματος μπορεί να διαιρεθεί σε διαδοχικά επιμέρους τμήματα. Πράγματι, για $t > t_2 > t_1 > t_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \Phi(t)\underline{x}(0) \\ &= \Phi(t - t_0)\Phi(t_0 - 0)\underline{x}(0) \\ &= \Phi(t - t_0)\underline{x}(t_0) \\ &= \Phi(t - t_1)\Phi(t_1 - t_0)\underline{x}(t_0) \\ &= \Phi(t - t_1)\underline{x}(t_1) \\ &= \Phi(t - t_2)\Phi(t_2 - t_1)\underline{x}(t_1) \\ &= \Phi(t - t_2)\underline{x}(t_2) \end{aligned}$$

4. Το σύστημα που ορίζεται από την (4.54) είναι χρονικά αμετάβλητο, δηλαδή ανεξάρτητο από το πού τοποθετούμε την αρχή των αξόνων. Έστω ότι το σύστημα ξεκινά από \hat{x} τη χρονική στιγμή t_0 . Τότε σύμφωνα με τα παραπάνω,

$$\underline{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\hat{x}$$

Εάν το σύστημα ξεκινήσει από το ίδιο \hat{x} τη στιγμή $t_1 = t_0 + \tau$, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \underline{x}'(t) &= e^{A(t-t_1)}\hat{x} \\ &= e^{A(t-\tau-t_0)}\hat{x} \\ &= \underline{x}(t - \tau) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Άρα οι δύο λύσεις είναι ίδιες, με μόνη διαφορά τη χρονική μετατόπιση. Φυσικά τα πράγματα θα ήταν διαφορετικά εάν το A ήταν συνάρτηση του χρόνου.

5. Το μητρώο $\Phi(t)$ υπακούει στην εξίσωση

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$$

και είναι μοναδικά ορισμένο. Πράγματι, εάν αντικαταστήσουμε την (4.57) στην (4.54) έχουμε

$$\left[\dot{\Phi}(t) - A\Phi(t) \right] \underline{x}(0) = 0$$

Αυτό ισχύει για οποιαδήποτε επιλογή του $\underline{x}(0)$, άρα ο παράγοντας που βρίσκεται μέσα στις αγκύλες είναι ταυτοτικά μηδέν. Το ίδιο δείξαμε και στην (4.36). Εάν τώρα υποθέσουμε ότι υπάρχει κι ένα άλλο μητρώο $\Phi_1(t)$ για το ίδιο $\underline{x}(0)$, θα έχουμε

$$\dot{\Phi}_1(t) = A\Phi_1(t)$$

ή

$$\dot{\Phi}_1(t) - \dot{\Phi}(t) \equiv \Delta\dot{\Phi}(t) = A[\Phi_1(t) - \Phi(t)] = A\Delta\Phi(t)$$

με αρχική συνθήκη $\Delta\Phi(0) = \Phi_1(0) - \Phi(0) = I - I = 0$ άρα $\Delta\dot{\Phi}(t) = 0$ ή $\Phi(t) = \Phi_1(t)$.

4.6 Ανάλυση στις Ιδιοσυχνότητες του Συστήματος

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από την ομογενή καταστατική εξίσωση

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t)$$

Υποθέτουμε ότι το μητρώο A έχει διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Τότε, όπως είναι γνωστό από τη γραμμική άλγεβρα, διαγωνιοποιείται ως

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

με

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Το μητρώο P έχει ως στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$P = [\underline{p}_1 \quad \underline{p}_2 \quad \cdots \quad \underline{p}_n]$$

Έστω \underline{q}_i^T , $i = 1, 2, \dots, n$, οι γραμμές του P^{-1} , δηλαδή

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{q}_1^T \\ \underline{q}_2^T \\ \vdots \\ \underline{q}_n^T \end{bmatrix}$$

Είναι προφανές ότι, εφόσον $P^{-1}P = I$, τότε

$$\underline{q}_i^T \underline{p}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (4.59)$$

Η λύση των καταστατικών εξισώσεων με αρχική συνθήκη $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ είναι

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}_0$$

ή, σύμφωνα με το Παράδειγμα 4.2,

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= P e^{At} P^{-1} \underline{x}_0 \\ &= \begin{bmatrix} \underline{p}_1 & \underline{p}_2 & \dots & \underline{p}_n \end{bmatrix} e^{At} \begin{bmatrix} \underline{q}_1^T \\ \underline{q}_2^T \\ \vdots \\ \underline{q}_n^T \end{bmatrix} \underline{x}_0 \\ &= \sum_{k=1}^n \underline{p}_k e^{\lambda_k t} (\underline{q}_k^T \underline{x}_0) \end{aligned} \quad (4.60)$$

Εάν η αρχική συνθήκη \underline{x}_0 ισούται με κάποιο ιδιοδιάνυσμα \underline{p}_i , τότε με τη βοήθεια των (4.59), (4.60) παίρνουμε ότι

$$\underline{x}(t) = e^{\lambda_i t} \underline{p}_i \quad (4.61)$$

Με άλλα λόγια, στον n -διάστατο χώρο το διάνυσμα $\underline{x}(t)$ παραμένει στη διεύθυνση του \underline{p}_i , το δε μέτρο του μεταβάλλεται σύμφωνα με το $e^{\lambda_i t}$. Οι συναρτήσεις $e^{\lambda_i t}$, $i = 1, 2, \dots, n$, είναι γνωστές και ως *ιδιοσυναρτήσεις* του συστήματος, ενώ οι λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ καλούνται *ιδιοσυχνότητες*. Στην (4.60) η $\underline{x}(t)$ εκφράζεται ως ο γραμμικός συνδυασμός των n γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων \underline{p}_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Με άλλα λόγια, για κάποια αυθαίρετη αρχική συνθήκη $\underline{x}_0 \neq \underline{p}_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, διεγείρονται όλες οι ιδιοσυχνότητες και η λύση είναι το αποτέλεσμα της υπέρθεσής τους. Πιο συγκεκριμένα, οι συντελεστές $\underline{q}_k^T \underline{x}_0$,

$k = 0, 1, 2, \dots, n$, είναι αυτοί που περιγράφουν την αρχική συνθήκη \underline{x}_0 ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων. Πράγματι, αν

$$\begin{aligned}\underline{x}_0 &= \alpha_1 \underline{p}_1 + \alpha_2 \underline{p}_2 + \dots + \alpha_n \underline{p}_n \\ &= \begin{bmatrix} \underline{p}_1 & \underline{p}_2 & \dots & \underline{p}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \equiv P \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},\end{aligned}$$

τότε

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = P^{-1} \underline{x}_0 \equiv \begin{bmatrix} \underline{q}_1^T \underline{x}_0 \\ \underline{q}_2^T \underline{x}_0 \\ \vdots \\ \underline{q}_n^T \underline{x}_0 \end{bmatrix}$$

και τελικά

$$\underline{x}_0 = (\underline{q}_1^T \underline{x}_0) \underline{p}_1 + (\underline{q}_2^T \underline{x}_0) \underline{p}_2 + \dots + (\underline{q}_n^T \underline{x}_0) \underline{p}_n$$

Παράδειγμα 4.4: Δίνεται η καταστατική εξίσωση

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \equiv A \underline{x}(t)$$

και ζητείται να υπολογίσουμε το $\underline{x}(t)$ για $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 = [1 \ 1]^T$.

Λύση: Από το Παράδειγμα 4.2 γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές είναι 1 και 2 και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\underline{p}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \underline{p}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Επίσης, από την (4.45) προκύπτει ότι

$$\underline{q}_1^T = [1 \ 2], \quad \underline{q}_2^T = [-2 \ -5]$$

Άρα $\underline{q}_1^T \underline{x}_0 = 3$ και $\underline{q}_2^T \underline{x}_0 = -7$. Σύμφωνα με την (4.60) έχουμε

$$\underline{x}(t) = 3e^t \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} - 7e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ή

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} 15e^t - 14e^{2t} \\ -6e^t + 7e^{2t} \end{bmatrix}$$

Το παραπάνω μπορεί να επαληθευτεί κι αν πολλαπλασιάσουμε το e^{At} της (4.49) με το διάνυσμα $[1 \ 1]^T$. \triangle

4.7 Εξίσωση Καταστατικής Μετάβασης

Στο προηγούμενο εδάφιο μελετήσαμε την *ομογενή καταστατική εξίσωση*, που σημαίνει ότι η είσοδος θεωρήθηκε ταυτοτικά μηδέν. Στο εδάφιο αυτό θα εξετάσουμε τη λύση των δυναμικών εξισώσεων με παρουσία μιας εισόδου $v(t)$, $t \geq 0$, δηλαδή

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{b}v(t) \quad (4.62)$$

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) + dv(t) \quad (4.63)$$

Παίρνοντας πάλι το μετασχηματισμό Laplace αμφοτέρων των πλευρών της καταστατικής εξίσωσης, έχουμε

$$s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) = A\underline{X}(s) + \underline{b}V(s)$$

ή

$$\underline{X}(s) = (sI - A)^{-1} \underline{x}(0) + (sI - A)^{-1} \underline{b}V(s) \quad (4.64)$$

Από την ιδιότητα του ML ότι το γινόμενο στο πεδίο του s αντιστοιχεί σε συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου, καθώς και από τον ορισμό του καταστατικού μητρώου μετάβασης, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της (4.64) δίνει

$$\underline{x}(t) = \Phi(t) \underline{x}(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau) \underline{b}v(\tau) d\tau \quad (4.65)$$

Στην (4.65) ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος είναι η λύση της αντίστοιχης ομογενούς και ο δεύτερος όρος εκφράζει τη συνεισφορά της εισόδου. Στο δεύτερο όρο χρησιμοποιήθηκε το ότι η είσοδος $v(t)$ υποτέθηκε αιτιατή καθώς και το γεγονός ότι ο αντίστροφος (μονόπλευρος) ML του $(sI - A)^{-1}$ είναι $e^{At}u(t)$. Θα εκφράσουμε τώρα τη $\underline{x}(t)$ όχι με βάση την αρχική συνθήκη στο 0 αλλά σε κάποιο χρόνο t_0 . Από την (4.65) για $t = t_0$ έχουμε

$$\underline{x}(t_0) = \Phi(t_0) \underline{x}(0) + \int_0^{t_0} \Phi(t_0 - \tau) \underline{b}v(\tau) d\tau \quad (4.66)$$

Επίσης

$$\Phi(t) \underline{x}(0) = \Phi(t - t_0) \Phi(t_0) \underline{x}(0) \quad (4.67)$$

Από τις (4.65)-(4.67) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= \Phi(t-t_0) \left[\underline{x}(t_0) - \int_0^{t_0} \Phi(t_0-\tau) \underline{b}v(\tau) d\tau \right] \\ &\quad + \int_0^{t_0} \Phi(t-\tau) \underline{b}v(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau) \underline{b}v(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (4.68)$$

Αλλά

$$\int_0^{t_0} \Phi(t-\tau) \underline{b}v(\tau) d\tau = \Phi(t-t_0) \int_0^{t_0} \Phi(t_0-\tau) \underline{b}v(\tau) d\tau \quad (4.69)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε

$$\underline{x}(t) = \Phi(t-t_0) \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau) \underline{b}v(\tau) d\tau \quad (4.70)$$

Έχοντας υπολογίσει τη $\underline{x}(t)$, η έξοδος $y(t)$ υπολογίζεται με προφανή αντικατάσταση της (4.70) στην (4.63).

Παράδειγμα 4.5: Δίνεται το σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)\end{aligned}$$

όπου $u(t)$ η μοναδιαία βηματική συνάρτηση και ζητείται η έξοδος του συστήματος για $t \geq 0$. Υποθέτουμε ότι η αρχική κατάσταση είναι $\underline{x}(0) = [1 \ 1]^T$.

Λύση: Από τα Παραδείγματα 4.2 και 4.4 έχουμε

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 5e^t - 4e^{2t} & 10e^t - 10e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -4e^t + 5e^{2t} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

και

$$\Phi(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15e^t - 14e^{2t} \\ -6e^t + 7e^{2t} \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

Από τις (4.65) και (4.72) για $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $v(t) = u(t)$ προκύπτει

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} 15e^t - 14e^{2t} \\ -6e^t + 7e^{2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 5e^{t-\tau} - 4e^{2(t-\tau)} \\ -2e^{t-\tau} + 2e^{2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau$$

Από την παραπάνω έκφραση εύκολα υπολογίζεται η τελική μορφή της $\underline{x}(t)$ και στη συνέχεια η έξοδος $y(t)$ του συστήματος. △

4.8 Συνάρτηση Μεταφοράς από Δυναμικές Εξισώσεις

Στο Κεφάλαιο 3 ορίσαμε τη συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού, χρονικά αμετάβλητου συστήματος και είδαμε το ρόλο που αυτή παίζει όχι μόνο στην ποσοτική αλλά και ποιοτική μελέτη ενός συστήματος, στο πλαίσιο της περιγραφής εισόδου-εξόδου. Στο εδάφιο αυτό θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος, έχοντας ως δεδομένο τις δυναμικές εξισώσεις στο χώρο κατάστασης. Η αφηρησία μας είναι το ζεύγος των εξισώσεων

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{b}v(t)$$

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) + dv(t)$$

Παίρνοντας το ML, έχουμε

$$\begin{aligned} (sI - A)\underline{X}(s) &= \underline{x}(0) + \underline{b}V(s) \\ Y(s) &= \underline{c}^T \underline{X}(s) + dV(s) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Για μηδενικές αρχικές συνθήκες (για τις οποίες έχει νόημα η συνάρτηση μεταφοράς) έχουμε

$$\frac{\underline{X}(s)}{V(s)} = (sI - A)^{-1} \underline{b}$$

και

$$H(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b} + d \quad (4.74)$$

Από το γνωστό θεώρημα αντιστροφής πινάκων η (4.74) γράφεται

$$H(s) = \underline{c}^T \frac{\text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \underline{b} + d \quad (4.75)$$

όπου ο $\text{Adj}(B)$ (adjoint) ενός τετραγωνικού πίνακα B ορίζεται ως ο πίνακας που έχει για στοιχεία του τα αλγεβρικά συμπληρώματα του B , και $\det(B)$ είναι η ορίζουσα του B . Από τον ορισμό των μεγεθών αυτών είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι στη ρητή συνάρτηση $\underline{c}^T \frac{\text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \underline{b}$ ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι πάντα μικρότερος από τον αντίστοιχο του παρονομαστή. Στην περίπτωση που η συνάρτηση μεταφοράς έχει τον ίδιο βαθμό σε αριθμητή και παρονομαστή, αυτό συνεισφέρεται από το d . *Συστήματα με βαθμό αριθμητή μεγαλύτερο του παρονομαστή δεν είναι υλοποιήσιμα και δεν μπορούν να περιγραφούν στο χώρο κατάστασης με δυναμικές εξισώσεις πεπερασμένης διάστασης.* Αντίθετα, μπορεί ν' αποδειχτεί ότι μια συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ μπορεί να υλοποιηθεί

από ένα γραμμικό σύστημα δυναμικών εξισώσεων πεπερασμένης διάστασης τότε και μόνο τότε όταν η συνάρτηση $H(s)$ είναι *γνήσια ρητή* (*proper rational*), δηλαδή ο βαθμός του πολυωνύμου στον αριθμητή είναι μικρότερος από ή το πολύ ίσος με αυτόν του παρονομαστή.

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε μια παρατήρηση που αποτελεί και το πρώτο βήμα για την ερμηνεία της συμπεριφοράς του “παράδοξου” συστήματος του Εδαφίου 4.2. Στη ρητή συνάρτηση

$$\underline{c}^T \frac{\text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \underline{b} \equiv \frac{\alpha(s)}{\pi(s)} \quad (4.76)$$

μπορεί να υπάρχουν κοινοί πόλοι και μηδενικά, οι οποίοι προφανώς απαλείφονται. Δηλαδή

$$\frac{\alpha(s)}{\pi(s)} = \frac{\alpha_p(s)}{\pi_p(s)}$$

όπου $\alpha_p(s)$, $\pi_p(s)$ είναι πολυώνυμα ίσου ή μικρότερου βαθμού με τα $\alpha(s)$, $\pi(s)$ και πρώτα μεταξύ τους. Αν γράψουμε την $H(s)$ ως

$$H(s) = \frac{\alpha_p(s)}{\pi_p(s)}, \quad (4.77)$$

αυτή δεν είναι δυνατόν ν’ απλοποιηθεί περαιτέρω και λέμε ότι είναι σε *μη συρρικνούμενη* ή *ανάγωγη* (*irreducible*) μορφή. Η περιγραφή ενός συστήματος με βάση την πληροφορία εισόδου-εξόδου εκφράζει την $H(s)$ στη μορφή της (4.77). Αντίθετα, η περιγραφή στο χώρο κατάστασης μας παρέχει επιπλέον πληροφορία, καθώς και τη δυνατότητα έκφρασης της $H(s)$ με τη μορφή της (4.76). Όπως θα δούμε παρακάτω, υπάρχουν περιπτώσεις που οι πόλοι που απαλείφονται από αντίστοιχα μηδενικά εσωκλείουν σημαντική πληροφορία, η οποία όμως χάνεται στη μη συρρικνούμενη αναπαράσταση της $H(s)$.

Συνδυάζοντας την (4.74) με την (4.41) προκύπτει ότι η χρονική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = \underline{c}^T e^{At} \underline{b} + d\delta(t) \quad (4.78)$$

Παράδειγμα 4.6: Δίνεται το σύστημα

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του.

Λύση: Έχουμε ότι

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 1 & s+2 \end{bmatrix}$$

και

$$\Delta = \det(sI - A) = s(s^2 + 2s + 1)$$

άρα

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} s(s+2) + 1 & s+2 & 1 \\ 0 & s(s+2) & s \\ 0 & -s & s^2 \end{bmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι οι όροι στον adjoint πίνακα είναι βαθμού μικρότερου του βαθμού του πολωνύμου που προκύπτει από την ορίζουσα. Τελικά

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ή

$$H(s) = \frac{s+1}{s(s^2+2s+1)}$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει είναι σε συρρικνωμένη μορφή και παίρνουμε

$$H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

△

4.9 Δυναμικές Εξισώσεις από Συνάρτηση Μεταφοράς

Στο εδάφιο αυτό θα μελετήσουμε το αντίθετο πρόβλημα από το προηγούμενο. Με σημείο εκκίνησης τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$, θα προσπαθήσουμε να διατυπώσουμε τις δυναμικές εξισώσεις εκείνες που αντιστοιχούν στην $H(s)$. Το πρόβλημα αυτό είναι πολύ σημαντικό όχι μόνο από θεωρητική αλλά και από πρακτική σκοπιά. Γνωρίζουμε, ήδη, ότι η συνάρτηση μεταφοράς δεν μας δίνει αρκετή πληροφορία σχετικά με τη λεπτομερή δομή του συστήματος, πληροφορία, όμως, απαραίτητη για την υλοποίησή του. Άρα το να είμαστε σε θέση να διατυπώνουμε δυναμικές εξισώσεις από τη συνάρτηση μεταφοράς είναι ισοδύναμο

με το να συνθέτουμε και να υλοποιούμε ένα σύστημα έτσι ώστε να έχει την επιθυμητή συμπεριφορά εισόδου-εξόδου όπως αυτή προδιαγράφεται πλήρως από τη δεδομένη συνάρτηση μεταφοράς. Θα δούμε ότι η απάντηση στο ερώτημα αυτό δεν είναι μονοσήμαντη αλλά υπάρχει μια απειρία δυνατοτήτων στις συνθέσεις ενός συστήματος με συγκεκριμένη συνάρτηση μεταφοράς. Από την απειρία αυτή θα περιγράψουμε δυο ειδικές, αλλά πολύ σημαντικές, μορφές, γνωστές ως *σχήμα ελεγχιμότητας* και *σχήμα παρατηρησιμότητας*.

1. Σχήμα ελεγχιμότητας. Μας δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{b}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \equiv \frac{Y(s)}{V(s)} \quad (4.79)$$

Η διαφορική εξίσωση που προκύπτει από την (4.79) είναι

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = b v(t) \quad (4.80)$$

Μια λογική επιλογή μεταβλητών κατάστασης για την παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι

$$\begin{aligned} x_1(t) &\equiv y(t) \\ x_2(t) &\equiv \dot{x}_1(t) = \frac{dy(t)}{dt} \\ x_3(t) &\equiv \dot{x}_2(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \\ &\vdots \\ x_n(t) &\equiv \dot{x}_{n-1}(t) = \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Διαφορίζοντας την τελευταία έχουμε

$$\dot{x}_n(t) = -a_1 x_n(t) - a_2 x_{n-1}(t) - \dots - a_n x_1(t) + b v(t) \quad (4.82)$$

Συνδυασμός των (4.81) και (4.82) μας δίνει

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{bmatrix} v(t) \quad (4.83)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Στη συνέχεια θα γενικεύσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα για την περίπτωση που η διαφορική εξίσωση έχει τη γενικότερη μορφή

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y(t) = b_1 \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} + b_2 \frac{d^{n-2} v(t)}{dt^{n-2}} + \cdots + b_n v(t) \quad (4.85)$$

με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) \equiv \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \quad (4.86)$$

Η (4.86) γράφεται

$$H(s) = \frac{Y(s)}{V'(s)} \frac{V'(s)}{V(s)} = H_1(s) H_2(s) \quad (4.87)$$

όπου

$$H_1(s) = b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n \quad (4.88)$$

$$H_2(s) = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \quad (4.89)$$

Από τις (4.87) και (4.88) και το αποτέλεσμα των (4.83), (4.84) έχουμε

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \quad (4.90)$$

$$v'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) = x_1(t) \quad (4.91)$$

Από τις (4.87), (4.88) και (4.91) έχουμε

$$y(t) = b_n v'(t) + b_{n-1} \frac{dv'(t)}{dt} + \cdots + b_1 \frac{d^{n-1} v'(t)}{dt^{n-1}} \quad (4.92)$$

Τελικά, από τις (4.90), (4.92) και τους ορισμούς (4.81) προκύπτει ότι:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \quad (4.93)$$

$$y(t) = [b_n \ b_{n-1} \ \cdots \ b_1] \underline{x}(t) \quad (4.94)$$

Οι δυναμικές εξισώσεις (4.93), (4.94), που προέκυψαν με αφετηρία τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ της (4.86), είναι γνωστές ως *σχήμα ελεγχιμότητας* για λόγους που θα δούμε λίγο αργότερα.

2. Σχήμα παρατηρησιμότητας. Έχοντας ως σημείο εκκίνησης τις (4.85) και (4.86), επιλέγουμε ως μεταβλητές κατάστασης τις ακόλουθες

$$\begin{aligned} x_n(t) &\equiv y(t) \\ x_{n-1}(t) &\equiv \dot{x}_n(t) + a_1 x_n(t) - b_1 v(t) \\ x_{n-2}(t) &\equiv \dot{x}_{n-1}(t) + a_2 x_n(t) - b_2 v(t) \\ &\vdots \\ x_2(t) &\equiv \dot{x}_3(t) + a_{n-2} x_n(t) - b_{n-2} v(t) \\ x_1(t) &\equiv \dot{x}_2(t) + a_{n-1} x_n(t) - b_{n-1} v(t) \end{aligned} \quad (4.95)$$

Από την παραπάνω επιλογή είναι εμφανές ότι η μεταβλητή κατάστασης $x_1(t)$ περιέχει την πρώτη παράγωγο της $x_2(t)$, άρα και της $a_{n-2}x_n(t) - b_{n-2}v(t)$. Μέσω της $\dot{x}_2(t)$, περιλαμβάνει τη δεύτερη παράγωγο της $x_3(t)$ και της $a_{n-3}x_n(t) - b_{n-3}v(t)$ και επαγωγικά την παράγωγο τάξης $(n-2)$ της $a_1x_n(t) - b_1v(t)$ και την παράγωγο τάξης $(n-2)$ της $x_{n-1}(t)$ και μέσω της τελευταίας την παράγωγο τάξης $(n-1)$ της $x_n(t) = y(t)$. Με άλλα λόγια,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + a_1 \frac{d^{n-2}y(t)}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}y(t) \\ &\quad - b_1 \frac{d^{n-2}v(t)}{dt^{n-2}} - b_2 \frac{d^{n-3}v(t)}{dt^{n-3}} - \cdots - b_{n-1}v(t) \end{aligned} \quad (4.96)$$

Από την τελευταία εξίσωση (4.96) κι από την (4.85) προκύπτει, έπειτα από παραγωγή, ότι

$$\dot{x}_1(t) = b_n v(t) - a_n y(t) = b_n v(t) - a_n x_n(t) \quad (4.97)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} v(t) \quad (4.98)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \quad (4.99)$$

Η μορφή των (4.98) και (4.99) ορίζει και το καλούμενο *σχήμα παρατηρησιμότητας*.

4.9.1 Ισοδύναμα Συστήματα

Παραπάνω είδαμε δύο διαφορετικές υλοποιήσεις (σχήματα) που αντιστοιχούν στην ίδια συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$. Αυτές οι δύο υλοποιήσεις δεν είναι και οι μοναδικές. Πράγματι, ας θεωρήσουμε τη γενική μορφή των δυναμικών εξισώσεων

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{b}v(t) \quad (4.100)$$

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) + dv(t) \quad (4.101)$$

Έστω P ένα $n \times n$ αντιστρέψιμο μητρώο. Ορίζουμε τα

$$A' = PAP^{-1} \quad (4.102)$$

$$\underline{b}' = P\underline{b} \quad (4.103)$$

$$\underline{c}'^T = \underline{c}^T P^{-1} \quad (4.104)$$

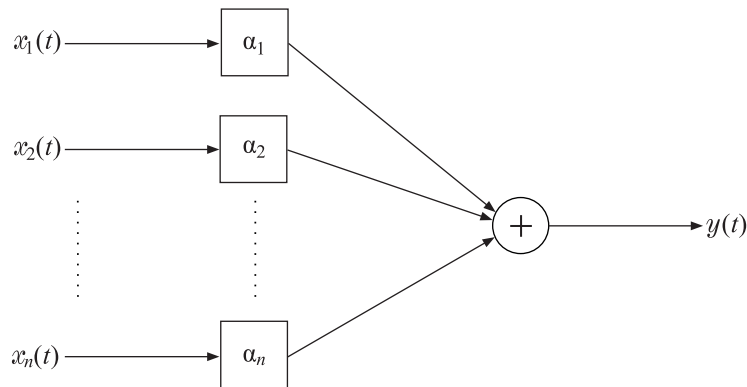
Τότε το σύστημα που περιγράφεται από τις

$$\dot{\underline{x}}'(t) = A'\underline{x}'(t) + \underline{b}'v(t) \quad (4.105)$$

$$y(t) = \underline{c}'^T \underline{x}'(t) + dv(t) \quad (4.106)$$

έχει την ίδια συνάρτηση μεταφοράς με το αντίστοιχο των (4.100), (4.101). Πράγματι:

$$\begin{aligned} H'(s) &= \underline{c}'^T (sI - A')^{-1} \underline{b}' + d \\ &= \underline{c}^T P^{-1} (sI - PAP^{-1})^{-1} P\underline{b} + d \\ &= \underline{c}^T P^{-1} [P(sI - A)P^{-1}]^{-1} P\underline{b} + d \\ &= \underline{c}^T P^{-1} P (sI - A)^{-1} P^{-1} P\underline{b} + d \\ &= \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b} + d \\ &= H(s) \end{aligned}$$



Σχήμα 4.3 Γραμμικός συνδυαστής.

Επίσης, είναι $\underline{x}' = P\underline{x}$.

Επομένως, όπως γίνεται προφανές από τα παραπάνω, υπάρχει μια απειρία συστημάτων που αντιστοιχούν σε μία μόνο συνάρτηση μεταφοράς. Τα συστήματα αυτά σχετίζονται μέσα από μετασχηματισμούς ομοιότητας που ορίζονται από τις (4.102), (4.103), (4.104) και θα τα ονομάζουμε *ισοδύναμα*.

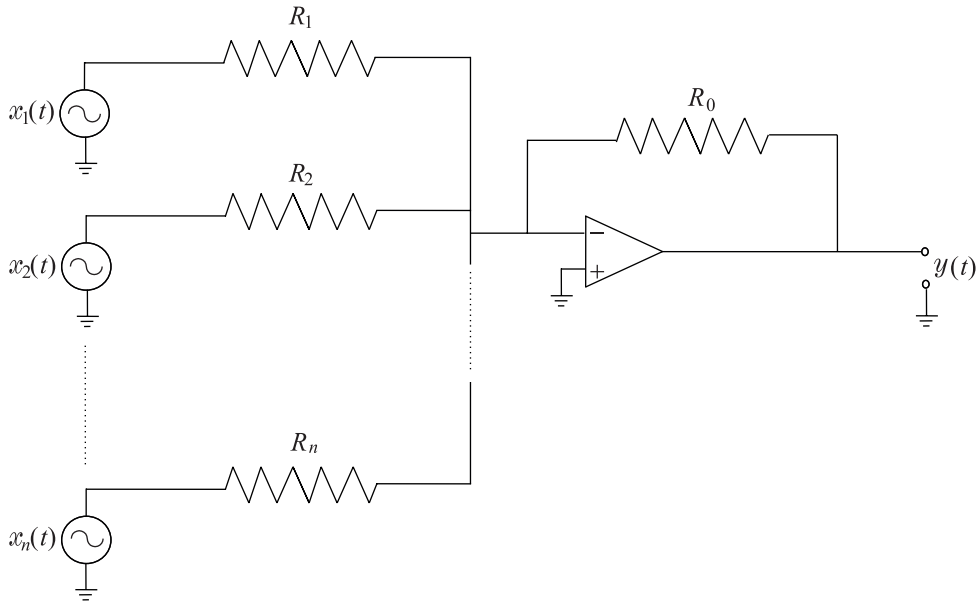
Τέλος, από την παραπάνω ανάλυση είναι προφανές ότι ο αριθμός των μεταβλητών κατάστασης (διάσταση του συστήματος) είναι ίδιος με τον αριθμό των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς. Στο σημείο αυτό θα επανέλθουμε στο Εδάφιο 4.12.

4.10 Υλοποίηση Δυναμικών Εξισώσεων με Αναλογικούς Υπολογιστές

Στο προηγούμενο εδάφιο θέσαμε το πρόβλημα της σύνθεσης ενός συστήματος που να υλοποιεί μια προκαθορισμένη συνάρτηση μεταφοράς. Η πορεία που ακολουθήσαμε ήταν να διατυπώσουμε δυναμικές εξισώσεις που ν' αντιστοιχούν στην προδιαγραφόμενη συνάρτηση μεταφοράς και είδαμε ότι έχουμε τη δυνατότητα επιλογής μέσα από μια απειρία τέτοιων σχημάτων. Το πρόβλημα της επιλογής εξαρτάται από τη συγκεκριμένη εφαρμογή και δεν θα μας απασχολήσει εδώ. Στο εδάφιο αυτό υποθέτουμε ότι έχουμε καταλήξει σε κάποιο σχήμα και θα δούμε πώς είναι δυνατόν αυτό να υλοποιηθεί. Τα ηλεκτρονικά στοιχεία που έχουμε στη διάθεσή μας είναι:

α) Γραμμικός συνδυαστής: Για το στοιχείο αυτό ισχύει $y(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)$. Η σχηματική του αναπαράσταση δίνεται στο Σχήμα 4.3. Ένα τέτοιο στοιχείο μπορεί να υλοποιηθεί με τη βοήθεια ενός τελεστικού ενισχυτή και n ζευγών αντιστάσεων

όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.4 (όπου $\alpha_i = -\frac{R_0}{R_i}$). Εάν υπάρχει μία μόνο είσοδος,



Σχήμα 4.4 Υλοποίηση γραμμικού συνδυαστή.

x_1 , το παραπάνω στοιχείο είναι ένας πολλαπλασιαστής, δηλαδή

$$y(t) = -\frac{R_0}{R_i}x(t) = \alpha x(t)$$

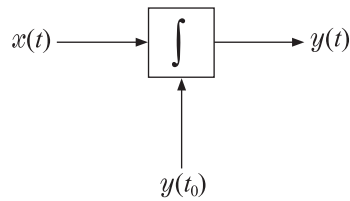
ενώ για $R_0 = R_1$ εκφυλίζεται σε αντιστροφέα. Επίσης, αν οι παράγοντες πολλαπλασιασμού α_i είναι ίσοι με 1, ο γραμμικός συνδυαστής γίνεται αθροιστής.

β) Ολοκληρωτής: Το στοιχείο αυτό συμβολίζεται όπως στο Σχήμα 4.5 όπου

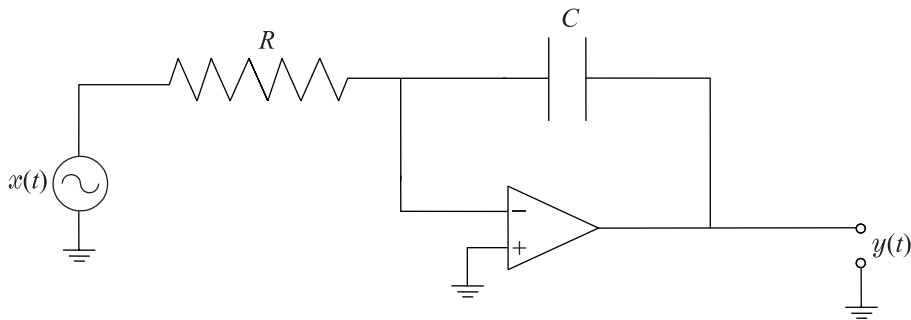
$$y(t) = \int_{t_0}^t x(\tau)d\tau + y(t_0)$$

Στο Σχήμα 4.6 φαίνεται η υλοποίηση του ολοκληρωτή με τη βοήθεια ενός τελεστικού ενισχυτή και η αντίστοιχη εξίσωση που τον περιγράφει είναι η

$$y(t) = y(t_0) + \frac{1}{RC} \int_{t_0}^t x(\tau)d\tau$$



Σχήμα 4.5 Ολοκληρωτής.



Σχήμα 4.6 Υλοποίηση ολοκληρωτή.

Πέρα από τα παραπάνω στοιχεία, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε και διαφοριστές. Στην πράξη όμως δεν χρησιμοποιούμε διαφοριστές διότι αφενός είναι δύσκολο να υλοποιηθούν και αφετέρου ενισχύουν τη συνιστώσα του θορύβου που πάντα θα υπάρχει.

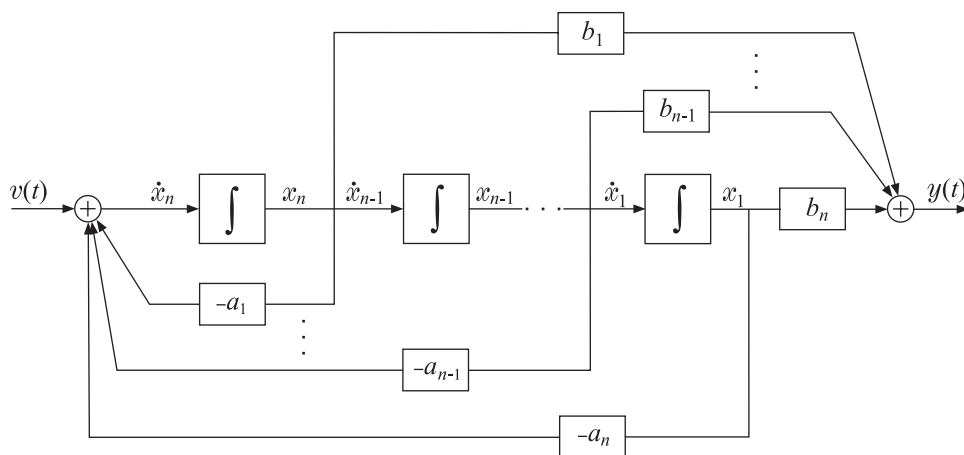
Αντιστοιχίζοντας στη συνέχεια τις μεταβλητές κατάστασης στις εξόδους ισάριθμων ολοκληρωτών και χρησιμοποιώντας τους σχετικούς συμβολισμούς, όπως αυτά περιγράφονται παραπάνω, καταλήγουμε στα Σχήματα 4.7 και 4.8 που δίνουν τις αντίστοιχες υλοποιήσεις για τα σχήματα ελεγχσιμότητας και παρατηρησιμότητας, στις (4.93), (4.94) και στις (4.98), (4.99), αντίστοιχα.

Παράδειγμα 4.7: Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς

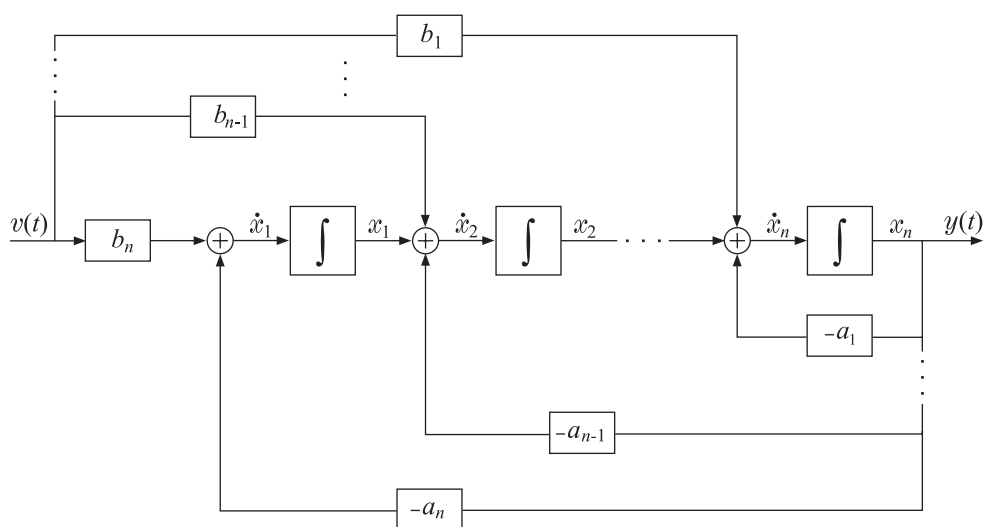
$$H(s) = \frac{2s^3 + 16s^2 + 15s + 19}{s^3 + 3s^2 + 5s + 6}$$

Ζητείται να σχεδιαστούν τα αντίστοιχα σχήματα ελεγχσιμότητας και παρατηρησιμότητας που την υλοποιούν.

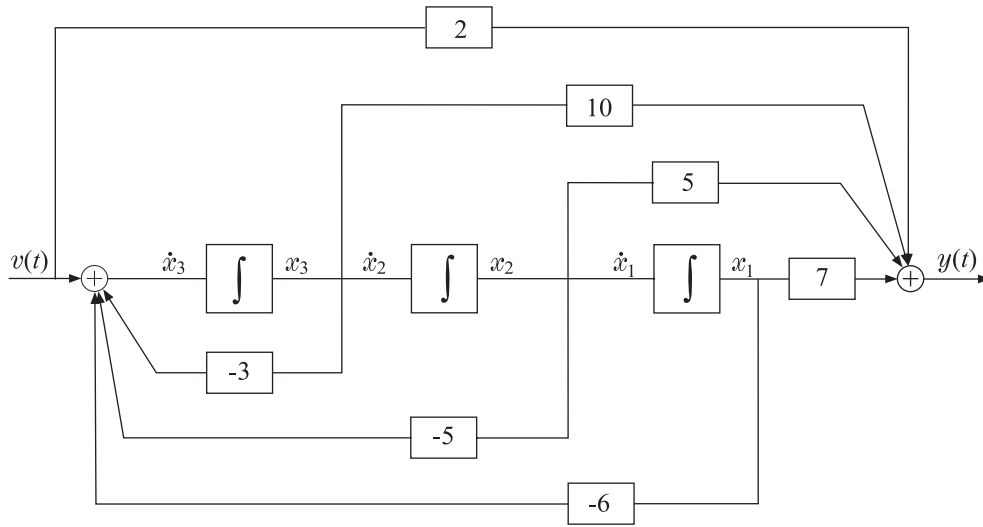
Λύση: Οι βαθμοί των πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή είναι ίδιοι. Διαι-



Σχήμα 4.7 Σχήμα ελεγχιμότητας.



Σχήμα 4.8 Σχήμα παρατηρησιμότητας.



Σχήμα 4.9 Σχήμα ελεγχιμότητας για το σύστημα του Παραδείγματος 4.7.

ρώντας αριθμητή με παρονομαστή έχουμε

$$H(s) = H_1(s) + 2 \equiv \frac{Y(s)}{V(s)}$$

άρα

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_1(s)V(s)\} + 2v(t)$$

όπου

$$H_1(s) = \frac{10s^2 + 5s + 7}{s^3 + 3s^2 + 5s + 6}$$

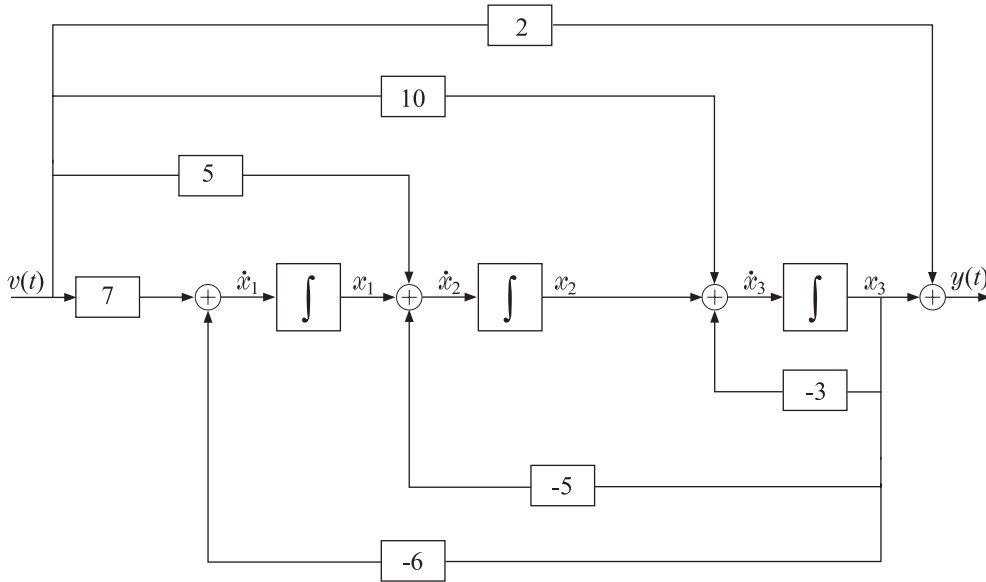
Συγκρίνοντας με την (4.75) παρατηρούμε ότι το 2 αντιστοιχεί στο d της εξίσωσης εξόδου. Αρκεί να υλοποιήσουμε την $H_1(s)$.

1. Σχήμα ελεγχιμότητας: Περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις καθώς και το Σχήμα 4.9.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + 2v(t)$$

2. Σχήμα παρατηρησιμότητας: Περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις και το Σχήμα 4.10.



Σχήμα 4.10 Σχήμα παρατηρησιμότητας για το σύστημα του Παραδείγματος 4.7.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + 2v(t)$$

Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε έναν απευθείας κλάδο από την είσοδο στην έξοδο, αποτέλεσμα του μη μηδενικού d ή ισοδύναμα απόρροια ισότητας των βαθμών των πολωνύμων αριθμητή και παρονομαστή. \triangle

4.11 Ελεγχιμότητα και Παρατηρησιμότητα

Στο εδάφιο αυτό θα εισάγουμε δύο νέες έννοιες που σχετίζονται με τη συμπεριφορά ενός συστήματος, αυτές της ελεγχιμότητας και της παρατηρησιμότητας. Γνωρίζουμε ήδη ότι η έξοδος ενός συστήματος καθορίζεται πλήρως από την είσοδο και τις αρχικές συνθήκες των μεταβλητών κατάστασης. Για να είμαστε σε

θέση να εκμεταλλευτούμε το σύστημα και να οδηγήσουμε την έξοδό του όπου εμείς θέλουμε, θα πρέπει να έχουμε τη δυνατότητα να επιλέγουμε εμείς τις αρχικές συνθήκες και να οδηγήσουμε όλες τις μεταβλητές κατάστασης στις τιμές που θέλουμε, εφαρμόζοντας κατάλληλη είσοδο. Εάν τούτο δεν είναι δυνατόν (και υπάρχουν τέτοια συστήματα), λέμε ότι το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο. Η έννοια της παρατηρησιμότητας σχετίζεται με τη δυνατότητα να μπορούμε να υπολογίζουμε τις τιμές που έχουν οι μεταβλητές κατάστασης ανά πάσα χρονική στιγμή, από αντίστοιχη γνώση των σημάτων εισόδου-εξόδου. Τέτοιου είδους προβλήματα προκύπτουν για λόγους διάγνωσης όπως επίσης και στα συστήματα αυτόματου ελέγχου.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε κριτήρια ώστε να μπορούμε ν' αποφανθούμε εάν ένα σύστημα είναι ελέγξιμο ή/και παρατηρήσιμο χωρίς να είναι ανάγκη να γνωρίζουμε την ακριβή συμπεριφορά του συστήματος.

Ορισμός 1: Δεδομένων των καταστατικών εξισώσεων (4.100) η κατάσταση του συστήματος λέγεται ότι είναι *ελέγξιμη* (*controllable*) στο t_0 εάν υπάρχει πεπερασμένο $t_1 > t_0$, τέτοιο ώστε για κάθε $\underline{x}(t_0)$ υπάρχει είσοδος $v(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, που μπορεί να οδηγήσει την $\underline{x}(t_0)$ σε οποιαδήποτε επιθυμητή κατάσταση $\underline{x}(t_1)$. Εάν αυτό ισχύει για κάθε t_0 , λέμε ότι το αντίστοιχο σύστημα είναι *ελέγξιμο* (*controllable*).

Θεώρημα 1: Έστω γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα που περιγράφεται από τις δυναμικές εξισώσεις (4.100), (4.101). Το σύστημα είναι ελέγξιμο τότε και μόνον τότε όταν το $n \times n$ μητρώο

$$S = [\underline{b} \quad A\underline{b} \quad A^2\underline{b} \quad \dots \quad A^{n-1}\underline{b}] \quad (4.107)$$

έχει βαθμό (rank) ίσο με n , με άλλα λόγια όταν το S είναι αντιστρέψιμο. Το μητρώο αυτό καλείται *μητρώο ελεγχιμότητας* (*controllability matrix*).

Απόδειξη: Για την απόδειξη, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην προτεινόμενη βιβλιογραφία, π.χ., [Kailath80]. \triangle

Ορισμός 2: Δεδομένων των δυναμικών εξισώσεων (4.100), (4.101), η κατάσταση του συστήματος στη χρονική στιγμή $t = t_0$ λέγεται ότι είναι *παρατηρήσιμη* (*observable*) εάν υπάρχει πεπερασμένο t_1 έτσι ώστε αν γνωρίζουμε την είσοδο (όποια κι αν είναι) στο διάστημα $[t_0, t_1]$ και την αντίστοιχη έξοδο στο ίδιο διάστημα, να μπορούμε να υπολογίσουμε την κατάσταση $\underline{x}(t_0)$. Εάν αυτό ισχύει για κάθε t_0 , λέμε ότι το σύστημα είναι *παρατηρήσιμο* (*observable*).

Θεώρημα 2: Έστω το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα που περιγράφεται

από τις δυναμικές εξισώσεις (4.100), (4.101). Το σύστημα είναι παρατηρήσιμο τότε και μόνο τότε όταν το ακόλουθο $n \times n$ μητρώο

$$V = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T A \\ \underline{c}^T A^2 \\ \vdots \\ \underline{c}^T A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

έχει βαθμό ίσο με n , είναι δηλαδή αντιστρέψιμο. Το μητρώο αυτό καλείται *μητρώο παρατηρησιμότητας* (*observability matrix*).

Απόδειξη: Από την εμπειρία μας είναι λογικό ν' αναμένουμε ότι το καταστατικό διάνυσμα $\underline{x}(t_0)$ θα εξαρτάται όχι μόνο από την έξοδο αλλά και από τις παραγώγους της εξόδου $y(t)$. Από τις (4.100), (4.101) έχουμε

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) + dv(t)$$

ή

$$\dot{y}(t) = \underline{c}^T \dot{\underline{x}}(t) + d\dot{v}(t) = \underline{c}^T A \underline{x}(t) + \underline{c}^T \underline{b}v(t) + d\dot{v}(t)$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= \underline{c}^T A \dot{\underline{x}}(t) + \underline{c}^T \underline{b} \dot{v}(t) + d\ddot{v}(t) \\ &= \underline{c}^T A^2 \underline{x}(t) + \underline{c}^T A \underline{b}v(t) + \underline{c}^T \underline{b} \dot{v}(t) + d\ddot{v}(t) \end{aligned}$$

Επαγωγικά καταλήγουμε στο ότι

$$\underline{Y}(t) = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T A \\ \vdots \\ \underline{c}^T A^{n-1} \end{bmatrix} \underline{x}(t) + T \underline{V}(t) \quad (4.109)$$

όπου

$$\begin{aligned} \underline{Y}(t) &\equiv \begin{bmatrix} y(t) & \frac{dy(t)}{dt} & \dots & \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^T, \\ \underline{V}(t) &\equiv \begin{bmatrix} v(t) & \frac{dv(t)}{dt} & \dots & \frac{d^{n-1}v(t)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

και T είναι το κάτω τριγωνικό μητρώο

$$T = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \underline{c}^T \underline{b} & d & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \underline{c}^T A \underline{b} & \underline{c}^T \underline{b} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \underline{c}^T A^{n-2} \underline{b} & \underline{c}^T A^{n-3} \underline{b} & \cdots & \underline{c}^T A \underline{b} & \underline{c}^T \underline{b} & d \end{bmatrix}$$

Από την (4.109) συμπεραίνουμε ότι, για να υπολογίσουμε το $\underline{x}(t_0)$ από τα διανύσματα εισόδου και εξόδου, $\underline{V}(t)$, και $\underline{Y}(t)$, το μητρώο της (4.108) θα πρέπει να είναι αντιστρέψιμο. \triangle

Παρατήρηση: Στην παραπάνω απόδειξη, ο χρόνος t_1 που αναφέρεται στον Ορισμό 2 δεν υπεισέρχεται. Αυτό οφείλεται στο ότι ο ορισμός είναι γενικότερος ώστε να περιλαμβάνει και τα χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα. Για χρονικά αμετάβλητα συστήματα η αναφορά στους χρόνους t_0, t_1 δεν είναι αναγκαία.

Παράδειγμα 4.8: Θα επανέλθουμε στο γραμμικό σύστημα του Εδαφίου 4.2, που ήταν και το έναυσμα για τη διαδρομή μας στο χώρο κατάστασης. Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, πριν από την απλοποίηση πόλων με μηδενικά, είναι

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2-1} \quad (4.110)$$

Θα υλοποιήσουμε το σύστημα με τα δύο σχήματα που γνωρίζουμε και θα εφαρμόσουμε τα κριτήρια ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας.

1. Σχήμα ελεγχιμότητας: Συγκρίνοντας την (4.110) με την (4.86), έχουμε $b_2 = -1$, $b_1 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$. Επομένως, οι (4.93), (4.94) εξειδικεύονται ως

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \quad (4.111)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

α) Ελεγχιμότητα:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 1 & \vdots & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

ή

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Το μητρώο S είναι αντιστρέψιμο ($\det(S) \neq 0$), άρα το σύστημα (4.110), υλοποιημένο με τη μορφή των (4.111), (4.112), είναι ελέγξιμο.

β) Παρατηρησιμότητα:

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \dots & \dots \\ [-1 & 1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ή

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Το V δεν είναι αντιστρέψιμο ($\det(V) = 0$) άρα το σύστημα (4.110) υλοποιούμενο με τις (4.111), (4.112) δεν είναι παρατηρήσιμο.

Στο σημείο αυτό είναι ενδιαφέρον να λύσουμε τις δυναμικές εξισώσεις (4.111), (4.112). Με βάση τη μεθοδολογία που έχουμε ήδη αναπτύξει, υπολογίζουμε πρώτα το μητρώο καταστατικής μετάβασης. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$, με αντίστοιχα (ορθοκανονικά) ιδιοδιανύσματα

$$\underline{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

και, σύμφωνα με την (4.42),

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Με τη μεθοδολογία του Παραδείγματος 4.2 παίρνουμε

$$\Phi(t) \equiv e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

Ξεκινώντας από $t_0 = 0$ με αρχικές συνθήκες \underline{x}_0 και εφαρμόζοντας την (4.70), οι μεταβλητές κατάστασης θα δίνονται από την

$$\underline{x}(t) = \Phi(t)\underline{x}_0 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t * v(t) - e^{-t} * v(t) \\ e^t * v(t) + e^{-t} * v(t) \end{bmatrix}$$

Είναι προφανές ότι η παρουσία της ιδιοσυνάρτησης e^t ωθεί τις μεταβλητές κατάστασης στο άπειρο όσο μεγαλώνει ο χρόνος. Αντίθετα, η έξοδος είναι

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

ή

$$y(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} \underline{x}_0 + e^{-t} * v(t)$$

δηλαδή για φραγμένη $v(t)$ παραμένει κι αυτή φραγμένη.

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι η παρουσία της ιδιοσυχνότητας e^t δεν ανιχνεύεται στην έξοδο. Αυτό είναι το αποτέλεσμα της μη παρατηρησιμότητας του συστήματος, όπως έχει υλοποιηθεί με τη μορφή (4.111), (4.112).

2. Σχήμα παρατηρησιμότητας: Εξειδικεύοντας τις (4.98), (4.99) παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \quad (4.114)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

Άρα, και πάλι το $\Phi(t)$ δίνεται από την (4.113). Για το $\underline{x}(t)$ έχουμε

$$\underline{x}(t) = \Phi(t)\underline{x}_0 + \begin{bmatrix} -e^{-t} * v(t) \\ e^{-t} * v(t) \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

και η έξοδος είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} [e^t - e^{-t} \quad e^t + e^{-t}] \underline{x}_0 + e^{-t} * v(t) \\ &= \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})x_{01} + \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})x_{02} + e^{-t} * v(t) \end{aligned} \quad (4.117)$$

α) Ελεγχιμότητα:

$$S = \begin{bmatrix} -1 & \vdots & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 1 & \vdots & \end{bmatrix}$$

ή

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Το μητρώο S δεν είναι αντιστρέψιμο ($\det(S) = 0$) άρα το σύστημα υλοποιούμενο με τις (4.114), (4.115) δεν είναι ελέγξιμο. Αυτό φαίνεται και από τις (4.116) όπου η είσοδος δεν επηρεάζει την ιδιοσυνάρτηση e^t .

β) Παρατηρησιμότητα

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ [0 & 1] & [0 & 1] \\ [1 & 0] & [1 & 0] \end{bmatrix}$$

ή

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Το μητρώο V είναι αντιστρέψιμο ($\det(V) \neq 0$) άρα το σύστημα είναι παρατηρήσιμο. \triangle

Μερικά από τα αποτελέσματα που παρατέθηκαν στο παράδειγμα αυτό είναι γενικά και τα συνοψίζουμε παρακάτω:

1. Το σχήμα ελεγχιμότητας είναι πάντα ελέγξιμο.
2. Το σχήμα παρατηρησιμότητας είναι πάντα παρατηρήσιμο.
3. Μια συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να υλοποιηθεί με σχήματα που είναι είτε ελέγξιμα είτε παρατηρήσιμα ανάλογα με την επιλογή μας.

Στο σημείο αυτό δημιουργούνται δύο ερωτήματα: α) Εάν ένα σύστημα είναι ελέγξιμο (παρατηρήσιμο), ποιο είναι το αποτέλεσμα εφαρμογής ενός μετασχηματισμού ομοιότητας και β) μπορεί ένα σύστημα να είναι ταυτόχρονα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο και κάτω από ποιες συνθήκες;

Θεώρημα 3: Εάν σ' ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο και ελέγξιμο (παρατηρήσιμο) σύστημα εφαρμοστούν μετασχηματισμοί ομοιότητας, αυτό παραμένει ελέγξιμο (παρατηρήσιμο).

Απόδειξη: Θα δώσουμε την απόδειξη για το ελέγξιμο. Το παρατηρήσιμο αποδεικνύεται ανάλογα. Θεωρούμε τα συστήματα (4.100), (4.101) και (4.105), (4.106), που σχετίζονται με τους μετασχηματισμούς ομοιότητας (4.102)-(4.104). Εάν το πρώτο είναι ελέγξιμο, έτσι παραμένει και το δεύτερο. Πράγματι:

$$\begin{aligned} S' &= [\underline{b}' \quad A'\underline{b}' \quad \cdots \quad (A')^{n-1}\underline{b}'] \\ &= [P\underline{b} \quad PAP^{-1}P\underline{b} \quad \cdots \quad PA^{n-1}P^{-1}P\underline{b}] \\ &= P[\underline{b} \quad A\underline{b} \quad \cdots \quad A^{n-1}\underline{b}] \\ &= PS \end{aligned}$$

Εφόσον τα P και S είναι αντιστρέψιμα, και το S' είναι αντιστρέψιμο. \triangle

Το θεώρημα αυτό μας οδηγεί σ' ένα άλλο που μας βοηθάει να δούμε μια πρακτική προέκταση των εννοιών της ελεγχιμότητας και της παρατηρησιμότητας.

Θεώρημα 4: Έστω το σύστημα που περιγράφεται από τις δυναμικές εξισώσεις (4.100), (4.101). Θα υποθέσουμε ότι οι ιδιοτιμές, λ_i , $i = 1, \dots, n$, του A είναι διακριτές. Το σύστημα (4.100), (4.101) είναι ελέγξιμο (παρατηρήσιμο) τότε και μόνον τότε όταν το διάνυσμα \underline{b}' (\underline{c}') που προκύπτει από τον ακόλουθο μετασχηματισμό ομοιότητας:

$$\underline{b}' = P^{-1}\underline{b} \quad (\underline{c}' = P^T \underline{c})$$

με

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = P^{-1}AP$$

δεν περιέχει μηδενικά.

Απόδειξη: Θεωρούμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\dot{\underline{x}}'(t) = \Lambda \underline{x}'(t) + \underline{b}'v(t) \quad (4.118)$$

$$y(t) = \underline{c}'^T \underline{x}'(t) + dv(t) \quad (4.119)$$

Το παραπάνω σύστημα είναι ελέγξιμο (άρα και το ισοδύναμο σύστημα των (4.100), (4.101)) τότε και μόνον τότε όταν το μητρώο

$$S' = \begin{bmatrix} \underline{b}' & \Lambda \underline{b}' & \cdots & \Lambda^{n-1} \underline{b}' \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμο. Αλλά

$$\Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

Άρα, εάν το \underline{b}' έχει κάποιο μηδενικό, τότε η αντίστοιχη γραμμή του S' είναι μηδέν. Συνεπώς το S' δεν είναι αντιστρέψιμο. Αντίθετα, εάν το \underline{b}' δεν έχει μηδενικά, είναι εύκολο να δούμε ότι οι γραμμές του S' είναι γραμμικά ανεξάρτητες, άρα το S' είναι αντιστρέψιμο.

Η απόδειξη για το παρατηρήσιμο είναι ανάλογη. \triangle

Παράδειγμα 4.9:

α) Θεωρούμε το σύστημα (4.111), (4.112), το οποίο γνωρίζουμε ότι δεν είναι παρατηρήσιμο. Έχουμε:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Αρα

$$\begin{aligned} \underline{c}^T &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ας εξετάσουμε προσεκτικότερα το ισοδύναμο σύστημα που προκύπτει:

$$\dot{\underline{x}}'(t) = \Lambda \underline{x}'(t) + \underline{b}'v(t) \quad (4.120)$$

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}'(t) \quad (4.121)$$

όπου

$$\underline{b}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Το γεγονός ότι το A είναι διαγώνιο έχει ως συνέπεια την ανεξαρτητοποίηση της μιας μεταβλητής κατάστασης από την άλλη. Πράγματι, η (4.120) γράφεται:

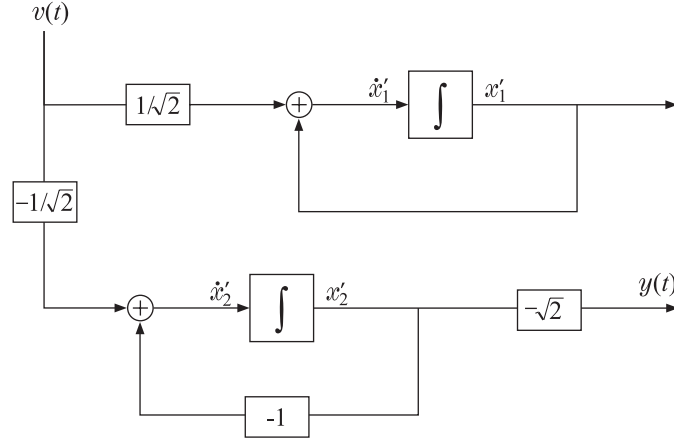
$$\dot{x}'_1(t) = x'_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}v(t)$$

$$\dot{x}'_2(t) = -x'_2(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}v(t)$$

Στο Σχήμα 4.11 φαίνεται η υλοποίηση του συστήματος των (4.120) και (4.121). Παρατηρούμε κάτι πολύ ενδιαφέρον. Η έξοδος $y(t)$ εξαρτάται μόνο από τη $x'_2(t)$, άρα είναι προφανές ότι η γνώση της $y(t)$ δεν μπορεί να μας οδηγήσει σε συμπεράσματα σχετικά με τις τιμές της $x'_1(t)$.

β) Στη συνέχεια, θεωρούμε το σύστημα (4.114), (4.115), που γνωρίζουμε ότι δεν είναι ελέγξιμο. Έχουμε ότι

$$\underline{b}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$



Σχήμα 4.11 Το σύστημα του Παραδείγματος 4.9(α).

$$\underline{c}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

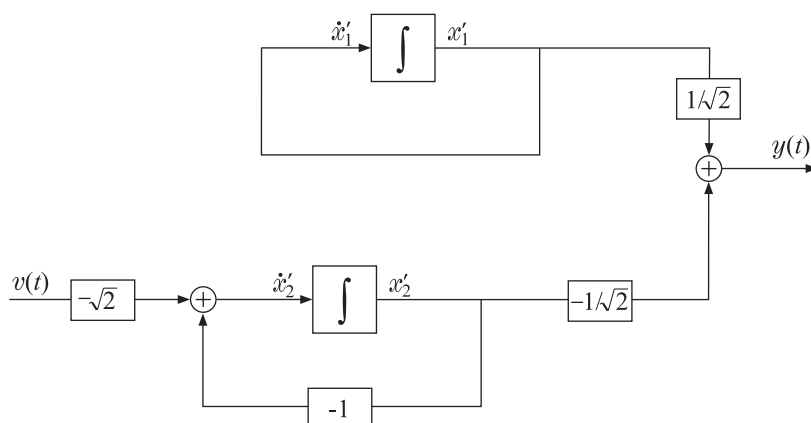
Άρα, το ισοδύναμο σύστημα είναι

$$\begin{aligned} \dot{x}'_1(t) &= x'_1(t) \\ \dot{x}'_2(t) &= -x'_2(t) - \sqrt{2}v(t) \\ y(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [x'_1(t) - x'_2(t)] \end{aligned}$$

Η υλοποίησή του φαίνεται στο Σχήμα 4.12, από το οποίο επιβεβαιώνεται ότι το σύστημα δεν είναι δυνατόν να είναι ελέγξιμο. Εφόσον η είσοδος δεν επηρεάζει καθόλου τη $x_1(t)$, δεν μπορούμε να βρούμε και είσοδο που να οδηγεί τη $x_1(t_0)$ σε κάποιο $x_1(t_1)$. Αυτό είναι αποτέλεσμα της αποσύνδεσης των μεταβλητών κατάστασης από τη μεταξύ τους αλληλεξάρτηση και της ύπαρξης μηδενικού στο \underline{b}' , που με τη σειρά του αποσυνδέει την είσοδο από την αντίστοιχη μεταβλητή κατάστασης.

△

Είδαμε παραπάνω ότι στην περίπτωση διαγώνιου μητρώου μπορούμε να διαπιστώσουμε αμέσως εάν ένα σύστημα είναι ελέγξιμο (παρατηρήσιμο) από το εάν υπάρχει πρόσβαση από την είσοδο (έξοδο) προς όλες τις μεταβλητές κατάστασης. Στις περιπτώσεις που το μητρώο δεν είναι διαγώνιο, αυτή η σχέση δεν είναι προφανής αλλά αναδύεται μέσα από τα κριτήρια ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας που διατυπώθηκαν.



Σχήμα 4.12 Το σύστημα του Παραδείγματος 4.9(β).

4.12 Ταυτόχρονη Ελεγχσιμότητα και Παρατηρησιμότητα

Στο εδάφιο αυτό θα εξετάσουμε το δεύτερο ερώτημα που διατυπώθηκε στο τέλος του Παραδείγματος 4.8, δηλαδή, κάτω από ποιες συνθήκες ένα σύστημα είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο *ταυτόχρονα*. Θα δούμε ότι η απαίτηση αυτή σχετίζεται άμεσα με τη συνάρτηση μεταφοράς.

Θεώρημα 5: Η συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος είναι μη συρρικνούμενη τότε και μόνο τότε όταν το σύστημα είναι ταυτόχρονα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.

Απόδειξη: Θεωρούμε τις δυναμικές εξισώσεις (4.100) και (4.101). Θα περιορίσουμε την απόδειξη σ' εκείνες τις περιπτώσεις που οι ιδιοτιμές του μητρώου A , λ_i , $i = 1, \dots, n$ είναι διακριτές. Για γενικότερη απόδειξη ο αναγνώστης παραπέμπεται στην προτεινόμενη βιβλιογραφία (π.χ., [Kailath80]).

Με αφετηρία τις (4.100) και (4.101) υπολογίζουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\dot{\underline{x}}'(t) = \underline{A} \underline{x}'(t) + \underline{b}'v(t) \quad (4.122)$$

$$y(t) = \underline{c}'^T \underline{x}'(t) + dv(t) \quad (4.123)$$

όπου A το διαγώνιο μητρώο με στοιχεία τις ιδιοτιμές του A . Από την (4.122) έχουμε

$$\dot{x}'_i(t) = \lambda_i x'_i(t) + b'_i v(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ή, παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace για μηδενικές αρχικές συνθήκες,

$$X'_i(s) = \frac{b'_i V(s)}{s - \lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.124)$$

Εφαρμογή του ML στην (4.123) μας δίνει

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n c'_i X'_i(s) + dV(s) \quad (4.125)$$

Συνδυάζοντας τις (4.124) και (4.125) παίρνουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = H_1(s) + d \quad (4.126)$$

όπου

$$H_1(s) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{c'_i b'_i}{s - \lambda_i} \quad (4.127)$$

Επικαλούμενοι την (4.75) έχουμε

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{\underline{c}'^T \text{Adj}(sI - \Lambda) \underline{b}'}{\det(sI - \Lambda)} \\ &= \frac{D(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)}, \quad m < n \end{aligned} \quad (4.128)$$

όπου D σταθερά. Αναπτύσσοντας την (4.128) σε μερικά κλάσματα καταλήγουμε στο ότι

$$H_1(s) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - \lambda_i} \quad (4.129)$$

Εάν η $H_1(s)$ είναι συρρικνούμενη ($z_k = \lambda_j$ για κάποια k και j), τότε τα αντίστοιχα A_i μηδενίζονται. Συγκρίνοντας τις (4.127) και (4.129) είναι προφανές ότι

$$A_i = c'_i b'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Επομένως, ένα από τα ακόλουθα είναι αληθές:

α) Κάποια από τα c'_i είναι μηδέν. Αυτό όμως βάσει του Θεωρήματος 4 του Εδαφίου 4.11 συνεπάγεται μη παρατηρησιμότητα.

β) Κάποια b'_i είναι μηδέν. Αυτό συνεπάγεται μη ελεγχιμότητα του συστήματος.

Άρα, εάν η συνάρτηση μεταφοράς είναι συρρικνούμενη, το σύστημα δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο. Το αντίστροφο είναι επίσης αληθές και αποδεικνύεται ανάλογα. \triangle

Στο Εδάφιο 4.9, όταν διατυπώσαμε τις δυναμικές εξισώσεις ξεκινώντας από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$, είδαμε ότι η διάσταση του προκύπτοντος συστήματος ήταν ίδια με το βαθμό του χαρακτηριστικού πολωνύμου του μητρώου (ή το βαθμό του πολωνύμου στον παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς που συνθέσαμε). Είναι προφανές ότι, εάν η συνάρτηση μεταφοράς είναι σε συρρικνούμενη μορφή, τότε έπειτα από σταδιακή απαλοιφή κοινών πόλων και μηδενικών θα καταλήξουμε σε δυναμικές εξισώσεις με συνεχώς ελαττούμενη διάσταση. Όλες αυτές οι δυναμικές εξισώσεις θ' αντιστοιχούν στην ίδια συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{(s - s_1) \cdots (s - s_i) \alpha_p(s)}{(s - s_1) \cdots (s - s_i) \pi_p(s)} \equiv \frac{\alpha_p(s)}{\pi_p(s)}$$

όπου $\alpha_p(s)$, $\pi_p(s)$ πρώτα μεταξύ τους. Οι δυναμικές εξισώσεις που προκύπτουν από τη μη συρρικνούμενη μορφή έχουν διάσταση ίση με το βαθμό του πολωνύμου $\pi_p(s)$. Αυτή είναι και η ελάχιστη δυνατή διάσταση συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$. Οι αντίστοιχες υλοποιήσεις είναι γνωστές και ως *ελάχιστες (minimal) υλοποιήσεις*. Οι υλοποιήσεις αυτές είναι που μας ενδιαφέρουν στην πράξη αφού υλοποιούν μια ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς με τον ελάχιστο αριθμό μεταβλητών κατάστασης (άρα και ολοκληρωμάτων).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι τα παρακάτω είναι *πλήρως ισοδύναμα*:

- α) Σύστημα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο
- β) Συνάρτηση μεταφοράς μη συρρικνούμενη
- γ) Ελάχιστη υλοποίηση.

Παράδειγμα 4.10: Θεωρούμε το σύστημα που περιγράφεται από τις δυναμικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \end{aligned}$$

Να μελετηθεί η τριάδα: ελεγχσιμότητα-παρατηρησιμότητα-συνάρτηση μεταφοράς.

Λύση:

α) Ελεγχσιμότητα:

$$\begin{aligned} S &= \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 1 & \vdots & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Το S είναι αντιστρέψιμο, άρα το σύστημα είναι ελέγξιμο. Αυτό βέβαια το αναμέναμε αφού οι παραπάνω δυναμικές εξισώσεις είναι διατυπωμένες σε σχήμα ελεγχιμότητας.

β) Παρατηρησιμότητα:

$$V = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ \dots & \dots \\ [3 & 1] & [0 & 1] \\ & [-2 & -3] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Το V είναι αντιστρέψιμο, άρα το σύστημα είναι και παρατηρήσιμο.

γ) Συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{\underline{c}^T \text{Adj}(sI - A) \underline{b}}{\det(sI - A)}$$

ή

$$H(s) = \frac{s + 3}{(s + 2)(s + 1)}$$

Η $H(s)$ είναι μη συρρικνούμενη, χωρίς κοινά μηδενικά και πόλους. Άρα το αρχικό σχήμα ελεγχιμότητας είναι μια ελάχιστη υλοποίηση της $H(s)$. \triangle

Συγκρίνοντας το παρόν παράδειγμα με το Παράδειγμα 4.8, είναι αμέσως εμφανές ότι τα σχήματα που δόθηκαν εκεί δεν ήταν ελάχιστα. Μια ελάχιστη υλοποίηση θα είχε διάσταση 1, ίση δηλαδή με το βαθμό του παρονομαστή της εκεί $H(s)$, μετά την απαλοιφή κοινών όρων ($H(s) = \frac{1}{s+1}$).

4.13 Ευστάθεια ΓΧΑ Συστημάτων

Το θέμα της ευστάθειας των ΓΧΑ συστημάτων μας έχει ήδη απασχολήσει. Στο Κεφάλαιο 1 ορίσαμε την ευστάθεια με βάση τα χαρακτηριστικά εισόδου-εξόδου ενός συστήματος και διατυπώσαμε σχετικά κριτήρια βασισμένα είτε στην κρουστική απόκριση του συστήματος ή (στο Κεφάλαιο 3) στη συνάρτηση μεταφοράς. Στη συνέχεια (στο Εδάφιο 4.2) είδαμε πως αυτός ο ορισμός της ευστάθειας, που απορρέει από την πληροφορία εισόδου-εξόδου και μόνο, δεν είναι αρκετά γενικός για να περιλάβει την κατηγορία εκείνη των συστημάτων που δεν είναι ταυτόχρονα ελέγξιμα και παρατηρήσιμα. Η άκριτη δε εφαρμογή του σε τέτοιου είδους συστήματα μας οδηγεί σε εσφαλμένα συμπεράσματα.

Στο εδάφιο αυτό, έχοντας την εμπειρία της περιγραφής των συστημάτων στο χώρο κατάστασης, θα δώσουμε έναν νέο ορισμό της ευστάθειας, που θα λαμβάνει υπόψη του όχι μόνο τη συμπεριφορά εισόδου-εξόδου αλλά και την υπάρχουσα εσωτερική δομή του συστήματος.

Ορισμός: Ένα δυναμικό σύστημα που περιγράφεται από τις καταστατικές εξισώσεις

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{b}v(t)$$

λέγεται *ασυμπτωτικά ευσταθές* τότε και μόνον τότε όταν η λύση των ομογενών καταστατικών εξισώσεων

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0, \quad t \geq t_0$$

τείνει στο μηδέν για οποιοδήποτε \underline{x}_0 , δηλαδή

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = \underline{0}, \quad \forall \underline{x}_0$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, *ασυμπτωτική ευστάθεια σημαίνει ότι, απουσία εισόδου, το σύστημα εκφορτίζει ασυμπτωτικά την ενέργεια που έχει αποθηκευμένη λόγω της αρχικής μη μηδενικής συνθήκης.*

Στη συνέχεια, θα διατυπώσουμε ένα κριτήριο για να ελέγχουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια ενός συστήματος, χωρίς να είναι ανάγκη να υπολογίσουμε την ακριβή λύση και να μελετήσουμε την ασυμπτωτική πορεία της. Γνωρίζουμε ότι η λύση της ομογενούς καταστατικής εξίσωσης είναι

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}_0$$

Για ασυμπτωτική ευστάθεια θα πρέπει $\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = \underline{0}$, για κάθε \underline{x}_0 . Αυτό όμως είναι ισοδύναμο με την απαίτηση

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = O$$

Αλλά

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \right] \quad (4.130)$$

Επομένως, η συμπεριφορά του μητρώου e^{At} καθορίζεται πλήρως από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A , δηλαδή από τις ίδιες τις ιδιοτιμές του. Όπως φαίνεται από την (4.130), τα στοιχεία του μητρώου e^{At} περιλαμβάνουν όρους της μορφής

$t^j e^{\lambda_n t}$, όπου j η πολλαπλότητα της n -στής ιδιοτιμής. Οδηγούμαστε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι το e^{At} τείνει στο μηδενικό μητρώο τότε και μόνον τότε όταν

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad \forall \lambda_i \quad (4.131)$$

Το παραπάνω κριτήριο, σε συνδυασμό με το γνωστό μας από τη Γραμμική Άλγεβρα αποτέλεσμα ότι ο μετασχηματισμός ομοιότητας ενός πίνακα διατηρεί τις ιδιοτιμές του, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι *δύο ισοδύναμα συστήματα είναι είτε και τα δύο ασυμπτωτικά ευσταθή ή και τα δύο ασυμπτωτικά ασταθή*.

Στο σημείο αυτό είναι εύκολο να δούμε το λόγο για τον οποίο η ασυμπτωτική ευστάθεια είναι γενικότερη από την ευστάθεια τύπου ΦΕΦΕ. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος δίνεται ως

$$H(s) = \frac{\underline{c}^T \operatorname{Adj}(sI - A) \underline{b}}{\det(sI - A)} \quad (4.132)$$

Άρα, εάν μετά τον πολλαπλασιασμό με \underline{c}^T και \underline{b} το πολυώνυμο του αριθμητή που προκύπτει έχει κοινές ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, αυτές απαλείφονται. Μερικές απ' αυτές τις κοινές ρίζες μπορεί να έχουν πραγματικό μέρος θετικό. Την πληροφορία όμως αυτή δεν μπορούμε να την ανακτήσουμε από την (4.132), δηλαδή μελετώντας την $H(s)$ και τους πόλους της. Αντίθετα, η πληροφορία αυτή υπάρχει στην (4.130) και μας παρέχεται μελετώντας τις ιδιοτιμές του A . Είδαμε ότι, αν ένα σύστημα είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο, δεν υπάρχουν κοινά μηδενικά και πόλοι στην (4.132). Άρα στην περίπτωση αυτή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και ο παρονομαστής της συνάρτησης μεταφοράς ταυτίζονται και οι ορισμοί ασυμπτωτικής και ΦΕΦΕ ευστάθειας είναι ισοδύναμοι. Ανακεφαλαιώνοντας, μπορούμε να πούμε ότι *εάν ένα σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, είναι και ΦΕΦΕ ευσταθές. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα*.

Παράδειγμα 4.11: Μας δίνεται η, γνώριμη πια, συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

και η μη ελάχιστη υλοποίηση του συστήματος που περιγράφεται από τις (4.114), (4.115). Υπενθυμίζουμε εδώ την καταστατική εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \quad (4.133)$$

Οι ιδιοτιμές του μητρώου A είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Άρα το σύστημα δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Η ιδιοτιμή 1, που διεγείρει την ασταθή ιδιοσυχνότητα (βλ.

Παράδειγμα 4.8), δεν εμφανίζεται στην $H(s)$, λόγω απαλοιφής. Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι, ως γνωστόν, σε συρρικνούμενη μορφή, δηλαδή

$$H'(s) = \frac{s-1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s+1} = H(s)$$

△

4.14 Σταθεροποίηση Δυναμικών Συστημάτων - Ανάδραση

Στο προηγούμενο εδάφιο ορίσαμε την ασυμπτωτική ευστάθεια και διατυπώσαμε ένα κριτήριο ώστε να μπορούμε ν' αποφανθούμε εάν ένα σύστημα είναι ευσταθές ή όχι. Το επόμενο λογικό ερώτημα, με το οποίο θ' ασχοληθούμε τώρα, είναι να διερευνήσουμε εάν και πώς ένα σύστημα που είναι ασταθές μπορεί να σταθεροποιηθεί, να γίνει δηλαδή ευσταθές. Η ευστάθεια ενός συστήματος είναι προϋπόθεση για να μπορεί το σύστημα να χρησιμοποιηθεί στην πράξη, να μας παρέχει δηλαδή τη δυνατότητα η έξοδός του να οδηγείται εκεί που εμείς επιθυμούμε εφαρμόζοντας κατάλληλη είσοδο και αρχικές συνθήκες. Ένα ασταθές σύστημα οδηγείται αργά ή γρήγορα είτε στον κορεσμό είτε στην αυτοκαταστροφή του.

Έστω τώρα το δυναμικό σύστημα

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{b}v(t) \quad (4.134)$$

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) + dv(t) \quad (4.135)$$

Υποθέτουμε ότι το σύστημα αυτό είναι ασταθές, μερικές δηλαδή από τις ιδιοτιμές του A έχουν θετικό πραγματικό μέρος. Ένας τρόπος για να προκύψει από το παραπάνω σύστημα ένα άλλο που να είναι ευσταθές είναι να παρέμβουμε κατά τέτοιο τρόπο που να ισοδυναμεί με μεταβολή του πίνακα A , έτσι ώστε ο νέος πίνακας που θα προκύψει να έχει ιδιοτιμές με πραγματικό μέρος αρνητικό. Για το σκοπό αυτό δίνουμε ως είσοδο στο σύστημα (4.134), (4.135) την

$$\hat{v}(t) = v(t) + \underline{k}^T \underline{x}(t) \quad (4.136)$$

με

$$\underline{k}^T = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n] \quad (4.137)$$

ένα $n \times 1$ διάνυσμα. Συνδυασμός των (4.134)-(4.137) δίνει

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + \underline{b}v(t) + \underline{b} \underline{k}^T \underline{x}(t) \\ &= (A + \underline{b} \underline{k}^T) \underline{x}(t) + \underline{b}v(t) \end{aligned} \quad (4.138)$$

και

$$\begin{aligned} y(t) &= \underline{c}^T \underline{x}(t) + d\dot{v}(t) \\ &= (\underline{c}^T + d\underline{k}^T) \underline{x}(t) + dv(t) \end{aligned} \quad (4.139)$$

Επιλέγοντας, επομένως, ως είσοδο στο σύστημά μας την (4.136), το πρόβλημα ανάγεται στο να επιλέξουμε κατάλληλο \underline{k} ώστε το μητρώο $A + \underline{b}\underline{k}^T$ να έχει ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος. Πριν όμως προχωρήσουμε σ' αυτό, είναι αναγκαίο να σταθούμε λίγο στις (4.138), (4.139). Παρατηρούμε ότι η είσοδος του συστήματος είναι το άθροισμα της εξωτερικής διέγερσης $v(t)$ κι ενός γραμμικού συνδυασμού των μεταβλητών κατάστασης. Η τροφοδότηση ενός συστήματος με είσοδο αυτής της μορφής είναι γνωστή ως *ανάδραση κατάστασης* (*state feedback*). Η έννοια της ανάδρασης έχει πολύ μεγάλη σημασία στη σπουδή των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου και τη συναντάμε σε μια πληθώρα συστημάτων, όχι μόνο μηχανικών και ηλεκτρικών αλλά και βιολογικών. Αναφέρεται στον κλειστό εκκείνο κύκλο όπου το “αιτιατό” ή “αποτέλεσμα” (έξοδος) επιστρέφει και γίνεται “αιτία” (είσοδος). Αυτού του είδους η διαδικασία παρέχει τη δυνατότητα στο σύστημα να παρακολουθεί εάν το “αιτιατό” οδηγείται στο επιθυμητό σημείο και, εάν όχι, να αυτοδιορθώνεται για την επίτευξη του προδιαγεγραμμένου στόχου. Είναι χαρακτηριστικό αυτό που αναφέρει σχετικά ο N. Wiener στο γνωστό βιβλίο του *Κυβερνητική και Κοινωνία*: “Ένας άλλος ασθενής έρχεται. Όταν κάθεται, δεν φαίνεται να παρουσιάζει κάτι το παθολογικό. Όμως προσφέρετέ του ένα τσιγάρο κι αυτός, στην προσπάθειά του να το πάρει, θα τελειώσει το χέρι του πέρα από το τσιγάρο. Κατόπιν θα εκτελέσει μια εξίσου μάταια κίνηση προς την αντίθετη κατεύθυνση και μετά μια τρίτη κίνηση προς τα πίσω ωσότου η κίνηση του χεριού του καταστεί μια μάταιη και βίαιη ταλάντωση.” Και συνεχίζει: “Βλέπουμε λοιπόν, ότι για να δρούμε αποτελεσματικά στον έξω κόσμο, δεν είναι βασικό να έχουμε μόνο καλούς εκτελεστές, αλλά πρέπει και η απόκριση των εκτελεστών τούτων ν' αναφέρεται κατάλληλα στο κεντρικό νευρικό σύστημα κι ακόμα οι αναγνώσεις αυτών των αναφορών πρέπει να συνδυάζονται κατάλληλα με τις άλλες πληροφορίες ... σε τρόπο ώστε να παράγεται κατάλληλα εξομαλυσμένη έξοδος προς τους εκτελεστές.”

Έπειτα απ' αυτό το μικρό “φιλοσοφικό” διάλειμμα, ας επανέλθουμε στο αρχικό μας πρόβλημα κι ας δούμε εάν μπορούμε να υπολογίσουμε κατάλληλο \underline{k} ώστε να μετακινήσουμε όλες τις ιδιοτιμές του A στο αριστερό ημιεπίπεδο.

Θεώρημα 6: Εάν το σύστημα (4.134), (4.135) είναι ελέγξιμο, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τουλάχιστο ένα διάνυσμα \underline{k} τέτοιο ώστε οι ιδιοτιμές του $A + \underline{b}\underline{k}^T$ να είναι ίσες με n αυθαίρετα προκαθορισμένες τιμές $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n$, υπό την

προϋπόθεση ότι τυχόν μιγαδικές τιμές απαντώνται σε συζυγή ζεύγη.³ Το διάνυσμα \underline{k} είναι γνωστό και ως *κέρδος ανάδρασης* (*feedback gain*).

Απόδειξη: Ο αναγνώστης παραπέμπεται στην προτεινόμενη βιβλιογραφία, π.χ., [Kailath80]. \triangle

Παρατήρηση: Η αξία του θεωρήματος αυτού δεν περιορίζεται μόνο στη σταθεροποίηση ενός συστήματος. Γνωρίζουμε ήδη ότι οι ιδιοτιμές ενός συστήματος καθορίζουν και τη συμπεριφορά του (ιδιοσυχνότητες). Άρα, εάν ένα σύστημα είναι ελέγξιμο, έχουμε τη δυνατότητα να τοποθετούμε τις ιδιοτιμές εκεί που θέλουμε και να προσαρμόζουμε το σύστημα στις εκάστοτε απαιτήσεις μας.

Παράδειγμα 4.12: Θεωρούμε το σύστημα (4.111), (4.112), το οποίο γνωρίζουμε ότι είναι ελέγξιμο. Ζητείται οι ιδιοτιμές του συστήματος, μετά τη χρήση ανάδρασης κατάστασης, να είναι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$.

Λύση: Έστω $\underline{k}^T = [k_1, k_2]$. Έχουμε

$$\begin{aligned} A + \underline{b}\underline{k}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 + 1 & k_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παραπάνω μητρώου είναι

$$\lambda^2 - k_2\lambda - (k_1 + 1)$$

το οποίο εκ ταυτότητας θα πρέπει να ισούται με

$$\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

Άρα $k_1 = k_2 = -3$. Στη συνέχεια ας πάρουμε το σύστημα (4.114), (4.115). Το σύστημα αυτό δεν είναι ελέγξιμο. Ας προσπαθήσουμε, όμως, να τοποθετήσουμε τις ιδιοτιμές στις τιμές $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Έχουμε

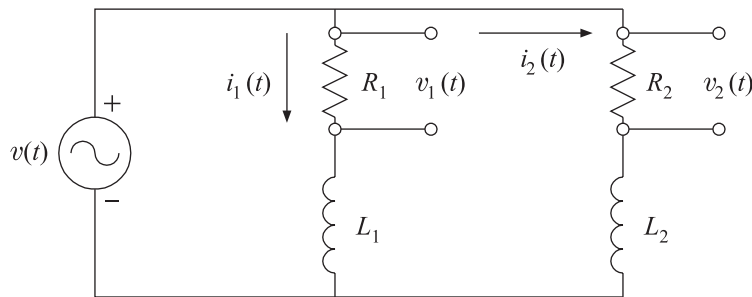
$$\begin{aligned} A + \underline{b}\underline{k}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -k_1 & 1 - k_2 \\ 1 + k_1 & k_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Το αντίστοιχο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\lambda^2 - \lambda(k_2 - k_1) + (k_2 - k_1) - 1$$

θα πρέπει να είναι εκ ταυτότητας ίσο με $\lambda^2 + 2\lambda + 2$, πράγμα ανέφικτο. \triangle

³Αν πρόκειται για πραγματικό σύστημα.



Σχήμα 4.13 Το κύκλωμα του Λυμένου Προβλήματος 1.

4.15 Λυμένα Προβλήματα

1. Δίνεται το κύκλωμα του Σχήματος 4.13, όπου $v(t)$ η τάση εισόδου και $i_1(t)$, $i_2(t)$ τα ρεύματα που διαρρέουν το κύκλωμα. Ποια είναι η συνθήκη που πρέπει να πληρούν τα R_1 , L_1 , R_2 και L_2 για να είναι το σύστημα ελέγξιμο; Ελέγξτε την παρατηρησιμότητα του συστήματος στην περίπτωση που η έξοδος είναι: α) η τάση $v_2(t)$ στα άκρα της R_2 και β) το άθροισμα $\frac{1}{R_2}v_2(t) + \frac{1}{R_1}v_1(t)$, όπου $v_1(t)$ η τάση στα άκρα της R_1 .

Λύση: Οι εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα είναι οι

$$i_1(t)R_1 + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} = v(t)$$

$$i_2(t)R_2 + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = v(t)$$

ή

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{di_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} v(t)$$

Για να είναι το σύστημα ελέγξιμο θα πρέπει

$$\det(S) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1^2} \\ \frac{1}{L_2} & -\frac{R_2}{L_2^2} \end{bmatrix} \neq 0$$

ή

$$\frac{R_2}{L_2} \neq \frac{R_1}{L_1}$$

α) Η εξίσωση εξόδου είναι

$$v_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

Αυτό το σύστημα δεν μπορεί να είναι παρατηρήσιμο. Πράγματι

$$\det V = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} = 0$$

β) Η εξίσωση εξόδου είναι

$$v(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

Άρα

$$\det(V) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix}$$

και το σύστημα είναι παρατηρήσιμο εάν $\det(V) \neq 0$, δηλαδή εάν

$$\frac{R_1}{L_1} \neq \frac{R_2}{L_2}$$

△

2. Δίνεται το σύστημα

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

Η είσοδος $v(t)$ είναι η βηματική συνάρτηση $u(t)$ και υποθέτουμε ότι το σύστημα ξεκινά από ηρεμία, δηλαδή $\underline{x}(0) = \underline{0}$. Ν' αποδειχτεί ότι η έξοδος τείνει ασυμπτωτικά σε μια σταθερά. Υπάρχει τρόπος να επιταχυνθεί η μετάβαση της εξόδου στη μόνιμη κατάστασή της;

Λύση: Εφόσον οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς για τον υπολογισμό της εξόδου (σε διαφορετική περίπτωση η λύση θα έπρεπε να περάσει μέσα από την (4.70)). Έχουμε λοιπόν

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

και

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

Άρα

$$H(s) = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2} \equiv \frac{Y(s)}{V(s)}$$

Αλλά $V(s) = \frac{1}{s}$. Άρα

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{2s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)} \right\} \end{aligned}$$

ή

$$y(t) = \left(\frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \right) u(t)$$

Άρα

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{3}{2}$$

Η ταχύτητα με την οποία η έξοδος τείνει στη μόνιμη κατάστασή της καθορίζεται από τις ιδιοσυναρτήσεις e^{-t} , e^{-2t} που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Υπενθυμίζουμε ότι στην περίπτωση αυτή, που δεν έχουμε απαλοιφή μηδενικών και πόλων στην $H(s)$, οι ιδιοτιμές συμπίπτουν με τους πόλους της $H(s)$. Για την ακρίβεια, η ιδιοσυνάρτηση e^{-t} που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ παίζει τον καθοριστικό ρόλο. Για το λόγο αυτόν η μεγαλύτερη ιδιοτιμή ενός συστήματος είναι γνωστή και ως *επικρατούσα ιδιοτιμή*. Για να επιταχύνουμε τη μετάβαση της εξόδου στη μόνιμή της κατάσταση (σταθερά) αρκεί να μετατοπίσουμε τις ιδιοτιμές αριστερότερα στο αριστερό ημιεπίπεδο s . Αυτό θα το επιτύχουμε με ανάδραση κατάστασης. Πράγματι

$$A + \underline{bk}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 + 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του παραπάνω πίνακα δίνονται από την

$$(\lambda - k_1)(\lambda + 3) + 2(k_2 + 1) = 0$$

ή

$$\lambda^2 + (3 - k_1)\lambda + 2(k_2 + 1) - 3k_1 = 0$$

ή

$$\lambda_{1,2} = \frac{k_1 - 3 \pm \sqrt{(3 - k_1)^2 - 8k_2 - 8 + 12k_1}}{2}$$

Επιλέγοντας κατάλληλα τα k_1, k_2 έχουμε τη δυνατότητα να επιτύχουμε $\lambda_{1,2} < -1$. Πράγματι, έστω $k_1 = -4$ και $k_2 = -1$. Τότε

$$\lambda_1 = -4$$

$$\lambda_2 = -3$$

Το ισοδύναμο σύστημα με ανάδραση κατάστασης είναι

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t)$$

Για μηδενικές αρχικές συνθήκες η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+4 & 0 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή

$$H(s) \equiv \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{s+3}{(s+4)(s+3)}$$

ή

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+4)}$$

και τελικά

$$y(t) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-4t} \right) u(t)$$

Πράγματι, η έξοδος τείνει στη μόνιμη κατάσταση ταχύτερα απ' ό,τι προηγουμένως.

Παρατήρηση: Στην έξοδο του συστήματος με ανάδραση παίρνουμε τη μια από τις ιδιοσυχνότητες (η e^{-3t} δεν εμφανίζεται). Αυτό είναι συνέπεια της μη παρατηρησιμότητας του συστήματος. Το αρχικό, χωρίς ανάδραση, σύστημα ήταν ταυτόχρονα και ελέγξιμο και παρατηρήσιμο. Μετά την ανάδραση το σύστημα παραμένει

ελέγξιμο αλλά όχι παρατηρήσιμο (η συνάρτηση μεταφοράς είναι σε συρρικνούμενη μορφή). Το αποτέλεσμα αυτό είναι γενικό. *Η ανάδραση κατάστασης σέβεται και διατηρεί την ελεγχσιμότητα.* Σε ό,τι αφορά την παρατηρησιμότητα, η ύπαρξη της θα εξαρτηθεί από το εάν οι νέες ιδιοτιμές θα συμπίπτουν με κάποια μηδενικά της $H(s)$ ή όχι. \triangle

3. Δίνεται το δυναμικό σύστημα

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & -6 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

Να υπολογιστεί το διάνυσμα συντελεστή ανάδρασης \underline{k} ώστε οι ιδιοτιμές να είναι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1 - j$ και $\lambda_3 = -1 + j$.

Λύση: Το παραπάνω σύστημα είναι σε μορφή ελεγχσιμότητας. Εάν $\underline{k} = [k_1 \ k_2 \ k_3]^T$, τότε

$$\underline{b} \underline{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

και το σύστημα που προκύπτει,

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_1 - 6 & k_2 - 1 & k_3 - 6 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t),$$

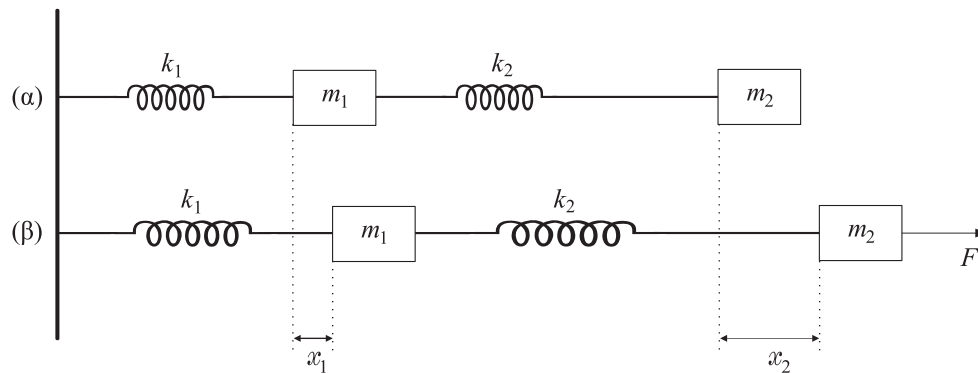
$$y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t),$$

είναι και πάλι σε μορφή ελεγχσιμότητας. Το αντίστοιχο χαρακτηριστικό πολυώνυμο δίνεται απευθείας από τους συντελεστές της τελευταίας γραμμής του μητρώου A :

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (6 - k_3)\lambda^2 + (1 - k_2)\lambda + 6 - k_1$$

Οι συντελεστές της τελευταίας γραμμής είναι αυτοί του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς που ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, εάν δεν έχουμε απαλείψει τυχόν κοινούς πόλους και μηδενικά. Γνωρίζουμε όμως ότι εάν λ_1 , λ_2 , λ_3 οι ρίζες ενός πολυωνύμου, τότε

$$p(\lambda) = \lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3)\lambda - \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$



Σχήμα 4.14 Το σύστημα του Λυμένου Προβλήματος 4.

Για τις δοσμένες ιδιοτιμές έχουμε

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2$$

Με απευθείας σύγκριση προκύπτει ότι

$$k_3 = 3, \quad k_2 = -3, \quad k_1 = 4$$

Η παραπάνω μεθοδολογία γενικεύεται εύκολα για υλοποιήσεις οποιασδήποτε διάστασης. Η ευκολία με την οποία υπολογίζεται το κέρδος ανάδρασης για τις μορφές ελεγχιμότητας είναι προφανής. Αυτό μας οδηγεί ώστε πολλές φορές στην πράξη ν' ακολουθούμε την εξής διαδικασία: πρώτα να μετασχηματίζουμε ένα ελέγξιμο σύστημα, με μετασχηματισμό ομοιότητας, στην ισοδύναμη μορφή ελεγχιμότητας (αποδεικνύεται ότι αυτό είναι πάντα δυνατό) και στη συνέχεια να υπολογίζουμε το κέρδος ανάδρασης του σχήματος ελεγχιμότητας από το οποίο προκύπτει το κέρδος ανάδρασης του αρχικού συστήματος. \triangle

4. Δίνεται το φυσικό σύστημα του Σχήματος 4.14, αποτελούμενο από δύο ελατήρια με σταθερές δύναμης k_1, k_2 , και δύο σώματα μάζας m_1, m_2 συνδεδεμένα σε σειρά. Έστω b_1, b_2 οι συντελεστές τριβής στην κίνηση των δύο σωμάτων και F η δύναμη που ασκείται στο σώμα m_2 . Θεωρώντας το παραπάνω ως ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο την F , να επιλέξετε κατάλληλες μεταβλητές κατάστασης και να γράψετε τις αντίστοιχες καταστατικές εξισώσεις.

Λύση: Στο Σχήμα 4.14(α) φαίνονται τα ελατήρια στις θέσεις ισορροπίας τους. Αν x_1 και x_2 είναι οι μετατοπίσεις τους ως αποτέλεσμα της δύναμης F (βλ.

Σχήμα 4.14(β)), τότε θα έχουμε τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) - b_1 \dot{x}_1 + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1) - b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F \end{aligned}$$

Επιλέγουμε τις μεταβλητές κατάστασης $x_1(t), x_2(t)$ και τις

$$\begin{aligned} x_3(t) &= \dot{x}_1(t) \\ x_4(t) &= \dot{x}_2(t) \end{aligned}$$

Τότε, με $\underline{x} \equiv [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν τις ακόλουθες εξισώσεις κατάστασης:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{b_1+b_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} F$$

△

5. Δίνεται το δυναμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) &= [1 \ 0 \ 0] \underline{x}(t) \end{aligned}$$

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι η κρουστική απόκριση του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$h(t) = \underline{c}^T e^{At} \underline{b}$$

Για τον υπολογισμό του e^{At} υπολογίζουμε κατ' αρχήν τις ιδιοτιμές του A , που είναι

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2,$$

στη συνέχεια τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\underline{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

και το μητρώο

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Τότε

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Τελικά

$$h(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ή

$$h(t) = e^{2t}$$

Με άλλα λόγια, στην χρονική απόκριση εμφανίζεται μόνο η μία από τις τρεις ιδιοσυχνότητες. Ας το διερευνήσουμε αυτό λίγο περισσότερο. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό ομοιότητας

$$\Lambda = P^{-1}AP$$

$$\underline{b}' = P^{-1}b$$

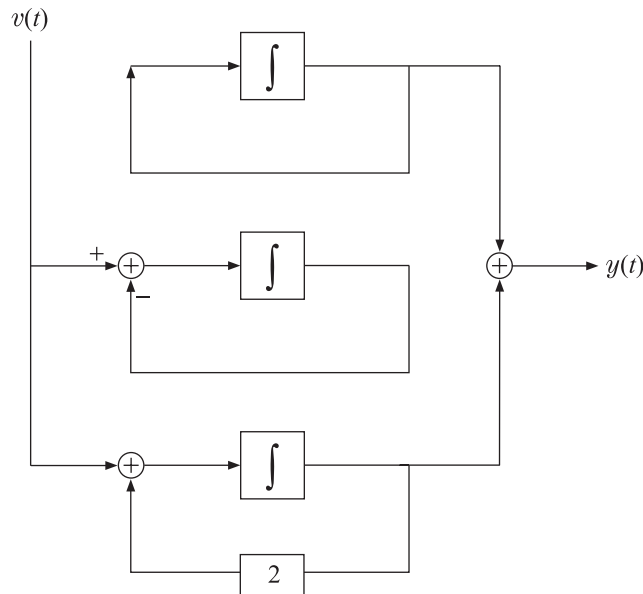
$$\underline{c}'^T = \underline{c}^T P$$

καταλήγουμε στο ακόλουθο ισοδύναμο σύστημα

$$\dot{\underline{x}}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}'(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}'(t)$$

που, όπως ήδη γνωρίζουμε, έχει την ίδια ακριβώς συμπεριφορά εισόδου-εξόδου με το προηγούμενο. Από την παραπάνω μορφή των \underline{b}' και \underline{c}' και το Θεώρημα 4



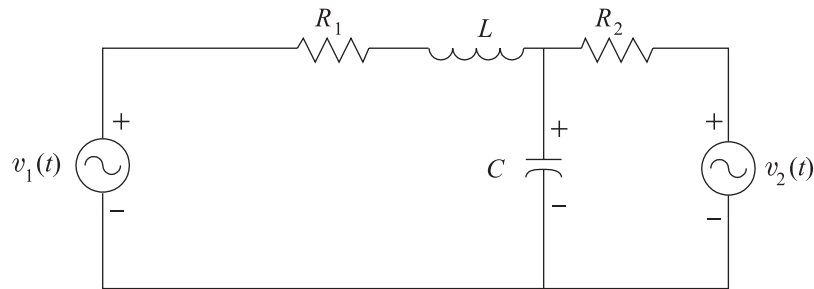
Σχήμα 4.15 Υλοποίηση του διαγώνιου συστήματος του Λυμένου Προβλήματος 5.

του Εδαφίου 4.11, έπεται ότι το αρχικό σύστημα, και βέβαια το ισοδύναμο διαγώνιο, δεν είναι ούτε ελέγξιμο ούτε παρατηρήσιμο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα στη συνάρτηση μεταφοράς να γίνονται απαλοιφές κοινών πόλων και μηδενικών, με αποτέλεσμα οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες να μην παρουσιάζονται στην χρονική απόκριση. Η υλοποίηση του διαγώνιου σχήματος φαίνεται στο Σχήμα 4.15.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι το διαγώνιο σύστημα αποτελείται στην ουσία από τρία υποσυστήματα για τα οποία παρατηρούμε τα εξής:

- α) Το πρώτο αντιστοιχεί στην ιδιοσυχνότητα 1 και δεν είναι ελέγξιμο.
- β) Το δεύτερο αντιστοιχεί στην ιδιοσυχνότητα -1 και δεν είναι παρατηρήσιμο.
- γ) Το τρίτο είναι ταυτόχρονα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.

Εδώ θα πρέπει να τονίσουμε κάτι πολύ ενδιαφέρον. Στην χρονική απόκριση του συστήματος συνεισφέρει αποκλειστικά και μόνο το σύστημα που είναι ταυτόχρονα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο. Παρατηρώντας το Σχήμα 4.15, μπορούμε ν' αντιληφθούμε ότι δεν θα μπορούσε να είναι αλλιώς. Το μη παρατηρήσιμο δεν συνεισφέρει στην έξοδο. Το μη ελέγξιμο επίσης δεν συνεισφέρει για μηδενικές αρχικές συνθήκες (προϋπόθεση για τον υπολογισμό της χρονικής απόκρισης). Εδώ διαφέρει και το μη ελέγξιμο από το μη παρατηρήσιμο. Το πρώτο συνεισφέρει στην έξοδο για μη μηδενικές αρχικές συνθήκες (θυμηθείτε το σύστημα



Σχήμα 4.16 Το σύστημα του Προβλήματος 2.

του Εδαφίου 4.2). Τα παραπάνω είναι δυνατόν να γενικευτούν για οποιοδήποτε δυναμικό σύστημα. \triangle

4.16 Προβλήματα

1. Στις παρακάτω περιπτώσεις δίνεται το μητρώο συστήματος και ζητείται να υπολογιστεί το αντίστοιχο μητρώο καταστατικής μετάβασης:

$$\alpha) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\beta) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

2. Να γραφτούν οι δυναμικές εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα του Σχήματος 4.16. Θεωρούμε ως εισόδους τις τάσεις $v_1(t)$, $v_2(t)$ κι εξόδους τις εντάσεις των ρευμάτων που διαρρέουν τις αντιστάσεις R_1 και R_2 (σύστημα δύο εισόδων - δύο εξόδων).

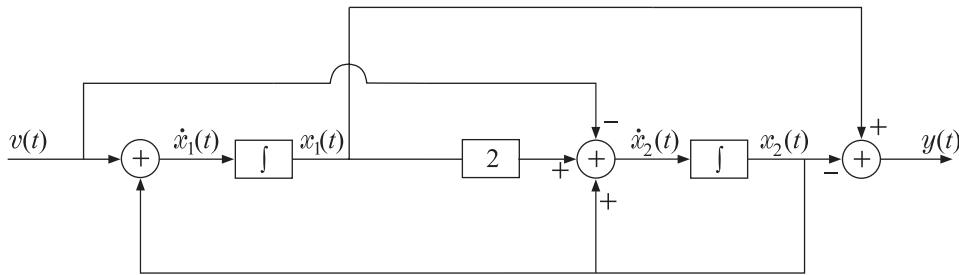
3. Να γραφτούν καταστατικές εξισώσεις για το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 4\dot{v}(t) + v(t)$$

4. Έστω ΓΧΑ σύστημα με την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{3s + 7}{(s + 1)(s + 2)(s + 5)}$$

Να περιγραφεί το σύστημα αυτό στο χώρο κατάστασης.



Σχήμα 4.17 Το σύστημα του Προβλήματος 7.

5. Ένα σύστημα περιγράφεται από τις παρακάτω δυναμικές εξισώσεις.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Να σχεδιαστεί αναλογικός υπολογιστής που να το υλοποιεί.

6. Δίνεται ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς όπως αυτή του Προβλήματος 4. Να περιγραφεί το σύστημα αυτό στο χώρο κατάστασης κατά τρόπο που το μητρώο του συστήματος να είναι διαγώνιο.

7. Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα του Σχήματος 4.17. Ζητούνται τα εξής:

- α) Να διερευνηθεί εάν το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
- β) Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.
- γ) Να διερευνηθεί εάν το σύστημα είναι ευσταθές τύπου ΦΕΦΕ.

8. Για το σύστημα του Προβλήματος 7 να μελετηθούν α) η ελεγχσιμότητα και β) η παρατηρησιμότητα του συστήματος.

9. Δίνεται το μητρώο

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν τα e^{At} και $\int_0^t e^{A\tau} d\tau$. (Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $A^3 = O$.)

10. Δίνεται το σύστημα με καταστατική εξίσωση

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t)$$

όπου A είναι ένα 2×2 μητρώο. Από δοκιμές του συστήματος προκύπτει ότι

$$\text{αν } \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ τότε } \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

και

$$\text{αν } \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ τότε } \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} 3e^t \\ 3e^t \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

Να υπολογιστεί το μητρώο A . (Υπόδειξη: Η λύση διευκολύνεται αν χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα του Εδαφίου 4.6.)

11. Δίνεται το σύστημα με καταστατική εξίσωση:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

α) Ν' αποδείξετε ότι το σύστημα είναι ελέγξιμο.

β) Να υπολογίσετε το κέρδος ανάδρασης κατάστασης ώστε το σύστημα που προκύπτει μετά την ανάδραση να έχει όλες τις ιδιοτιμές στο -1 .

Κεφάλαιο 5

Σήματα και Συστήματα Διακριτού Χρόνου - Μετασχηματισμός Z

5.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια το αντικείμενο μελέτης ήταν τα σήματα και συστήματα συνεχούς χρόνου. Στο κεφάλαιο αυτό, όπως και στα επόμενα, θα μας απασχολήσουν τα σήματα (και τα συστήματα) διακριτού χρόνου, αυτά δηλαδή των οποίων το πεδίο ορισμού είναι ένα διακριτό σύνολο και για την ακρίβεια ένα υποσύνολο του συνόλου των ακεραίων, π.χ., το σύνολο των φυσικών αριθμών. Στη θέση των συναρτήσεων, που είχαμε για την περιγραφή των αναλογικών σημάτων (συστημάτων), θα έχουμε τώρα ακολουθίες $\{x(n)\}$. Τα σήματα διακριτού χρόνου προκύπτουν με τους εξής δύο τρόπους:

α) Από πηγές διακριτής πληροφορίας. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν σήματα που προκύπτουν από μετρήσεις μιας μετρήσιμης ποσότητας σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Για παράδειγμα, η θερμοκρασία σ' έναν μετεωρολογικό κλωβό κάθε μία ώρα, ο δείκτης πληθωρισμού κάθε μήνα κ.λπ.

β) Από αναλογικά σήματα διαμέσου της διαδικασίας της δειγματοληψίας με τη βοήθεια ενός μετατροπέα A/D (αναλογικού σε ψηφιακό). Με άλλα λόγια, δειγματοληπτούμε (μετρούμε) την τιμή που έχει το αναλογικό σήμα κάθε, π.χ., T δευτερόλεπτα. Σε μια τέτοια περίπτωση, εάν $x(t)$ είναι το αναλογικό σήμα, τότε το αντίστοιχο σήμα διακριτού χρόνου είναι η ακολουθία $x(n) \equiv x(nT)$. Ο λόγος

που κάτι τέτοιο είναι επιθυμητό είναι ότι έτσι μας παρέχεται η δυνατότητα χρήσης υπολογιστών για την αναγκαία επεξεργασία. Με τον τρόπο αυτό εκμεταλλευόμαστε όλα τα πλεονεκτήματα που η ψηφιακή τεχνολογία παρέχει σε σύγκριση με την αναλογική.

Στο πλαίσιο αυτού του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε βασικούς ορισμούς και μερικά απλά σήματα που θα μας είναι χρήσιμα για την ανάπτυξη μαθηματικών εργαλείων ανάλυσης και μελέτης των διακριτών σημάτων και συστημάτων. Επίσης, θα εισάγουμε το μετασχηματισμό Z , που είναι, για τον κόσμο των σημάτων διακριτού χρόνου, ότι ο μετασχηματισμός Laplace για τα σήματα συνεχούς χρόνου.

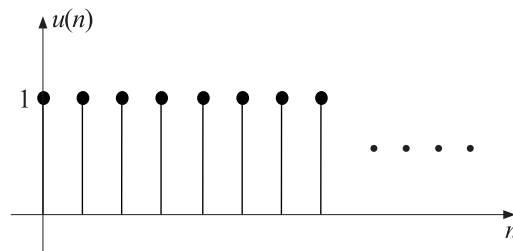
5.2 Ειδικές Περιπτώσεις Σημάτων Διακριτού Χρόνου

5.2.1 Μοναδιαία Βηματική Ακολουθία

Το σήμα αυτό ορίζεται ως

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

και φαίνεται στο Σχήμα 5.1. Στο σχήμα θα έπρεπε να υπάρχουν μόνο τα σημεία



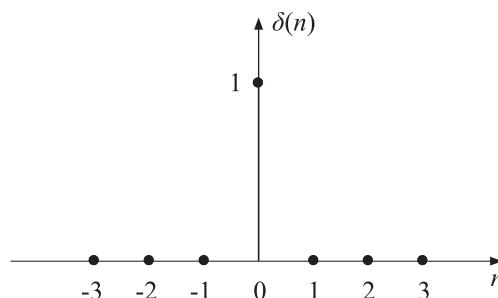
Σχήμα 5.1 Η μοναδιαία βηματική ακολουθία $u(n)$.

που αντιστοιχούν στις τιμές της ακολουθίας, αλλά η σύνδεση με τον οριζόντιο άξονα γίνεται για να φαίνεται καλύτερα η αντιστοίχιση με τις στιγμές n .

5.2.2 Κρουστική Ακολουθία

Το σήμα αυτό θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ο “διακριτός συγγενής” της συνάρτησης $\delta(t)$. Ορίζεται ως

$$\delta(n - k) = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$



Σχήμα 5.2 Η κρουστική ακολουθία $\delta(n)$.

και φαίνεται στο Σχήμα 5.2. Παρατηρούμε εδώ ότι ο ορισμός της κρουστικής ακολουθίας δεν ενέχει καμία δυσκολία, όπως ήταν το πρόβλημα με τη συνάρτηση $\delta(t)$. Η $\delta(n)$ είναι μια καλώς ορισμένη ακολουθία. Από τον παραπάνω ορισμό είναι εύκολο να δείξουμε την ταυτότητα

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k)x(n-k) = x(n) * \delta(n)$$

που θα μας διευκολύνει αργότερα σε διάφορους υπολογισμούς.

5.2.3 Περιοδικές Ακολουθίες

Σε αναλογία με τα περιοδικά αναλογικά σήματα, ένα σήμα διακριτού χρόνου λέγεται περιοδικό αν υπάρχει ακέραιος N , τέτοιος ώστε

$$x(n) = x(n + N), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

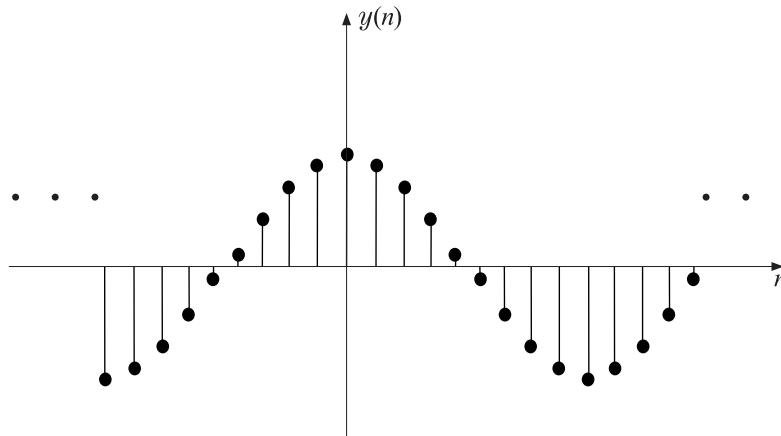
όπου \mathbb{Z} είναι το σύνολο των ακεραίων. Ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει η παραπάνω ιδιότητα ονομάζεται *περίοδος* του σήματος. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν N είναι η περίοδος, τότε

$$x(n) = x(n + kN), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Η μιγαδική εκθετική ακολουθία ορίζεται ως

$$x(n) = e^{j\omega n} = \cos \omega n + j \sin \omega n$$

όπου $\cos \omega n$, $\sin \omega n$, είναι το διακριτό συνημίτονο και ημίτονο αντίστοιχα. Εάν $\omega = \frac{2k\pi}{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, τότε η $x(n)$ είναι περιοδική με περίοδο N . Δηλαδή είναι



Σχήμα 5.3 Η ακολουθία $\cos(\frac{\pi}{9}n)$.

$x(n) = x(n + N)$. Στην περίπτωση αυτή, το ω ονομάζεται (κυκλική) συχνότητα και όλα τα σχόλια που έγιναν για τα αναλογικά σήματα σχετικά με θετικές και αρνητικές συχνότητες και την αναπαράσταση πραγματικών σημάτων με τη βοήθεια μιγαδικών ισχύουν κι εδώ. Στο Σχήμα 5.3 φαίνεται η ακολουθία $x(n) = \cos \omega n$ για $\omega = \pi/9$.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στο ω και το Ω , που χρησιμοποιήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Θεωρούμε το δείκτη n της ακολουθίας καθαρό αριθμό, άρα και το ω είναι καθαρός αριθμός, σε αντιδιαστολή με τα αναλογικά σήματα όπου το t ήταν χρόνος και επομένως το Ω είχε μονάδες συχνότητας (rad/sec). Σε περίπτωση που το διακριτό σήμα είναι της μορφής $x(nT)$, δηλαδή η διακριτή μεταβλητή έχει μονάδα μέτρησης και υποδηλώνει τις τιμές ενός σήματος τις χρονικές στιγμές $0, T, 2T, \dots$, τότε θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε Ω , όπως για παράδειγμα στο διακριτό σήμα

$$x(nT) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}nT\right) \equiv \cos(\Omega nT)$$

Η διαφορά δηλαδή στο συμβολισμό είναι για να μας θυμίζει τη διαφορά ως προς την ύπαρξη μονάδας μέτρησης ή όχι. Η χρήση καθαρού αριθμού n στη μελέτη σημάτων διακριτού χρόνου διευκολύνει ως προς το συμβολισμό των ακολουθιών, δεδομένου ότι και το T είναι μια σταθερά. Αριθμητικά αυτό ισοδυναμεί με την υπόθεση $T = 1$ ή ότι έχει γίνει μία κανονικοποίηση στη μονάδα του χρόνου. Στη συνέχεια, θα υιοθετήσουμε τη σύμβαση του n ως καθαρού αριθμού, και όπου

χρειάζεται να ληφθεί υπόψη η τιμή $T \neq 1$ και η μονάδα μέτρησής της, θα υπάρξει ειδική μνεία.

5.3 Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Θ' ασχοληθούμε εδώ με τα *συστήματα διακριτού χρόνου* (*discrete-time systems*). Η εισαγωγή των σχετικών εννοιών και η ανάπτυξη των θεωρημάτων και των ιδιοτήτων δεν απέχουν πολύ απ' αυτά που έχουμε ήδη αναφέρει για τα συστήματα συνεχούς χρόνου.

1. Γραμμικά συστήματα

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου είναι στην ουσία ένας μετασχηματισμός, $\mathcal{T}(\cdot)$, που μετασχηματίζει ένα σήμα εισόδου $x(n)$, διακριτού χρόνου, σ' ένα σήμα εξόδου $y(n)$, διακριτού και πάλι χρόνου, δηλαδή

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)]$$

Ένα σύστημα, που είναι σε κατάσταση ηρεμίας, είναι γραμμικό τότε και μόνον τότε όταν ισχύει η ιδιότητα της υπέρθεσης, δηλαδή

$$\mathcal{T}[ax(n) + by(n)] = a\mathcal{T}[x(n)] + b\mathcal{T}[y(n)]$$

για οποιεσδήποτε σταθερές a, b .

2. Χρονικά Αμετάβλητα συστήματα

Όπως και στην περίπτωση των συστημάτων συνεχούς χρόνου, ένα σύστημα διακριτού χρόνου λέγεται χρονικά αμετάβλητο εάν ισχύει

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)] \iff y(n - n_0) = \mathcal{T}[x(n - n_0)], \quad \forall n_0 \in \mathbb{Z}$$

3. Αιτιατά συστήματα

Όπως και στα συστήματα συνεχούς χρόνου, ένα σύστημα λέγεται αιτιατό εάν η έξοδός του δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου του.

4. Απόκριση ΓΧΑ συστημάτων - Συνέλιξη

Αν $\mathcal{T}(\cdot)$ ο μετασχηματισμός που περιγράφει τη σχέση εισόδου-εξόδου, τότε

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)]$$

Από τον ορισμό της κρουστικής ακολουθίας έχουμε την προφανή σχέση

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (5.1)$$

Άρα

$$y(n) = \mathcal{T} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k) \right] \quad (5.2)$$

ή λόγω της γραμμικότητας (στο $-\infty$ το σύστημα είναι πάντα σε ηρεμία) και υποθέτοντας την απεικόνιση $\mathcal{T}(\cdot)$ “αρκούντως ομαλή” (βλ. Εδάφιο 1.3.3)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \mathcal{T}[\delta(n-k)] \quad (5.3)$$

ή

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h_k(n) \quad (5.4)$$

όπου $h_k(n)$ είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος τη στιγμή n , όταν η κρουστική ακολουθία εφαρμόζεται στην είσοδο τη χρονική στιγμή k . Ας υποθέσουμε τώρα ότι το γραμμικό σύστημα είναι και χρονικά αμετάβλητο. Τότε, αν $h(n)$ είναι η απόκριση του συστήματος όταν η κρουστική ακολουθία εφαρμόζεται τη στιγμή 0 (η είσοδος, δηλαδή, είναι $\delta(n)$), τότε η απόκριση του συστήματος, αν εφαρμόσουμε την κρουστική ακολουθία τη χρονική στιγμή k (είσοδος $\delta(n-k)$), θα είναι $h(n-k)$.

Έτσι, για χρονικά αμετάβλητα συστήματα έχουμε $h_k(n) = h(n-k)$ και η (5.4) γίνεται

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) \quad (5.5)$$

όπου $h(n)$ η κρουστική απόκριση του συστήματος. Η (5.5) είναι η *συνέλιξη* μεταξύ εισόδου και κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Όλα τα σχόλια που κάναμε για τα αναλογικά συστήματα ισχύουν και για την παρούσα περίπτωση. Η μόνη διαφορά είναι ότι το ολοκλήρωμα αντικαθίσταται από άθροισμα. Ένα, δηλαδή, ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου χαρακτηρίζεται από την κρουστική του απόκριση, η γνώση της οποίας είναι αρκετή για να υπολογίσουμε την απόκριση του συστήματος σε οποιαδήποτε διέγερση της εισόδου. Από την (5.5), με αλλαγή μεταβλητής, καταλήγουμε στο ότι

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) \quad (5.6)$$

Όπως και στα συνεχή συστήματα, η συνέλιξη συμβολίζεται ως

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

Η συνέλιξη στο διακριτό χρόνο έχει ιδιότητες ίδιες μ' αυτές στο συνεχή χρόνο. Δηλαδή

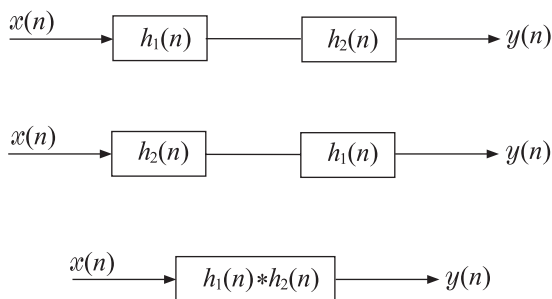
$$\alpha) \quad x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n)$$

$$\beta) \quad x_1(n) * [x_2(n) * x_3(n)] = [x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n)$$

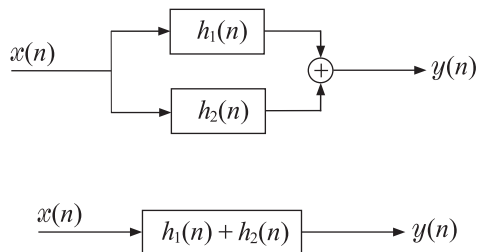
$$\gamma) \quad x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)] = x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n)$$

$$\delta) \quad x(n) * \delta(n) = x(n).$$

Αν $h_1(n)$ και $h_2(n)$ αντιπροσωπεύουν κρουστικές αποκρίσεις ΓΧΑ συστημάτων, τότε οι παραπάνω ιδιότητες οδηγούν στις ισοδυναμίες του Σχήματος 5.4.



(α)



(β)

Σχήμα 5.4 Ερμηνεία των ιδιοτήτων της συνέλιξης.

Μια προσεκτική παρατήρηση της συνέλιξης αναδεικνύει αυτό που έχουμε αναφέρει και για τα αναλογικά σήματα, ότι δηλαδή η σχέση αυτή εισόδου-εξόδου

είναι απόκριση της μνήμης του συστήματος, η οποία εκφράζεται μέσω της χρονικής απόκρισης. Πράγματι, ας θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα σύστημα με $h(n) = 0$, $n < 0$, που ξεκινάει από ηρεμία. Σύμφωνα με την (5.6), η έξοδος τη χρονική στιγμή $n = 0$ είναι $h(0)x(0)$. Την επόμενη χρονική στιγμή, $n = 1$, η έξοδος θα είναι $h(0)x(1) + h(1)x(0)$. Τη χρονική στιγμή $n = 2$ θα είναι $h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0)$ κ.ο.κ. Το σύστημα, δηλαδή, στην έξοδο, δίνει “βαρύτητα” $h(0)$ στην τιμή της εισόδου την παρούσα χρονική στιγμή n , βαρύτητα $h(1)$ στην τιμή που είχε η είσοδος την προηγούμενη χρονική στιγμή $n - 1$ (μνήμη), βαρύτητα $h(2)$ στην τιμή που είχε την προπροηγούμενη στιγμή $n - 2$ (μνήμη) κ.ο.κ. Οι τιμές, δηλαδή, της ακολουθίας της χρονικής απόκρισης εκφράζουν ποσοτικά τη μνήμη του συστήματος. Άρα, συστήματα με μεγάλη μνήμη έχουν και χρονική απόκριση που τείνει στο μηδέν αργά, σε αντίθεση με συστήματα με μικρή μνήμη, όπου η χρονική απόκριση τείνει στο μηδέν γρήγορα. Όπως θα δούμε σε λίγο, όταν μιλήσουμε για ευστάθεια, η ακολουθία της χρονικής απόκρισης πρέπει να τείνει στο μηδέν (αργά ή γρήγορα) για να είναι το σύστημα ευσταθές.

Παράδειγμα 5.1: Να υπολογιστεί η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος του οποίου η χρονική απόκριση είναι

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

η δε είσοδος στο σύστημα είναι

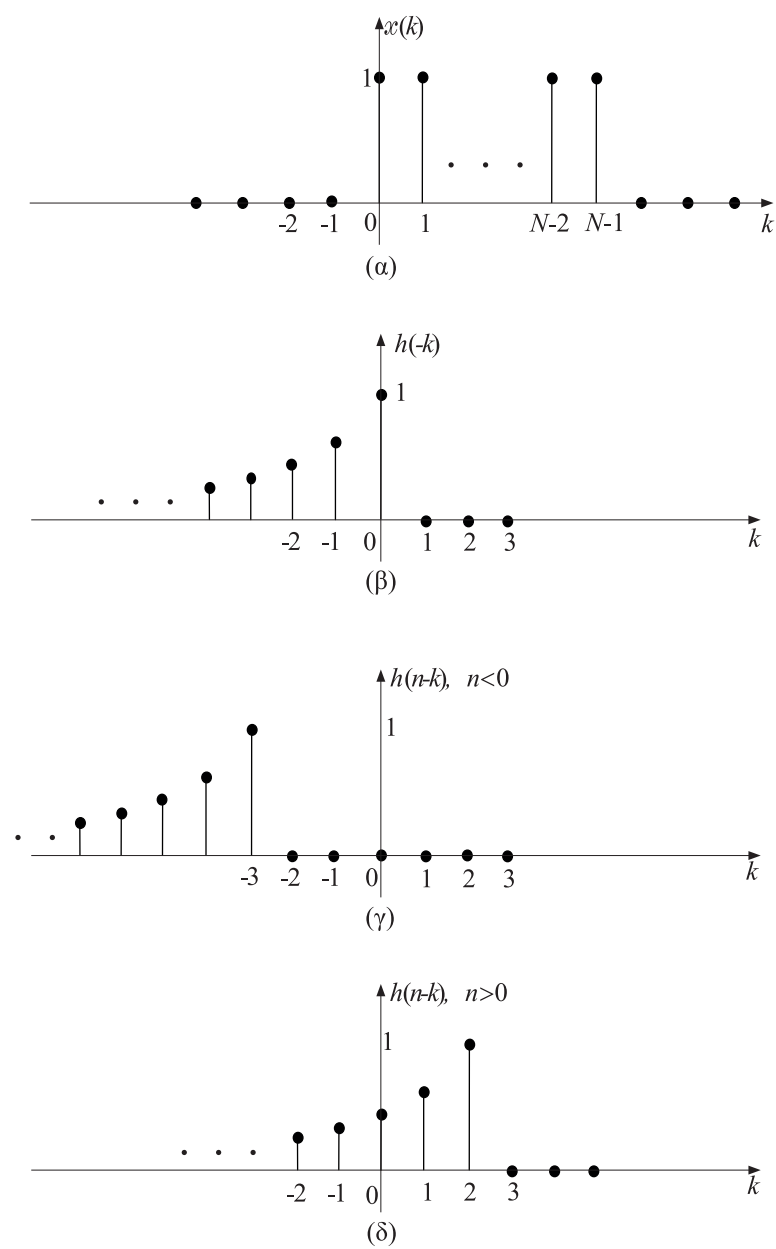
$$x(n) = u(n) - u(n - N)$$

Λύση: Η έξοδος $y(n)$ του συστήματος δίνεται από τη συνέλιξη

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την έξοδο ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Δημιουργούμε την ακολουθία $h(-k)$, δηλαδή την κατοπτρική της χρονικής απόκρισης $h(k)$, ως προς 0.
- Ολισθαίνουμε την $h(-k)$ κατά n , δημιουργώντας την $h(n-k)$.
- Πολλαπλασιάζουμε τη $x(k)$ με την $h(n-k)$ και αθροίζουμε πάνω σε όλα τα k .



Σχήμα 5.5 Υπολογισμός της συνέλιξης στο Παράδειγμα 5.1.

Στο Σχήμα 5.5 φαίνεται η διαδικασία για το εν λόγω παράδειγμα. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 5.5(α) φαίνεται η $x(n)$, στο Σχήμα 5.5(β) η $h(-k)$ και στα Σχήματα 5.5(γ) και 5.5(δ) η $h(n-k)$ για $n < 0$ και $n > 0$, αντίστοιχα. Από το σχήμα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

α) Για $n < 0$ είναι $y(n) = 0$.

β) Για $0 \leq n \leq N-1$ είναι

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^n 1 \cdot a^{n-k} = a^n \sum_{k=0}^n a^{-k} \\ &= a^n \frac{1 - a^{-(n+1)}}{1 - a^{-1}} \end{aligned}$$

γ) Για $N \leq n$ είναι

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^{N-1} 1 \cdot a^{n-k} \\ &= a^n \frac{1 - a^{-N}}{1 - a^{-1}} \end{aligned}$$

△

Πρόβλημα: Ν' αποδειχτεί ότι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα ΓΧΑ σύστημα αιτιατό είναι η κρουστική του απόκριση να είναι αιτιατή ακολουθία, δηλαδή

$$h(n) = 0, \quad n < 0$$

Υπόδειξη λύσης: Όπως ορίστηκε και στο Κεφάλαιο 1, ένα σύστημα λέγεται αιτιατό όταν η έξοδός του σε μια δεδομένη χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από την παρούσα ή και τις παρελθούσες τιμές της εισόδου, αλλά σε καμία περίπτωση δεν εξαρτάται από μελλοντικές εισόδους. Με άλλα λόγια, η έξοδος του συστήματος σε κάποια χρονική στιγμή n_0 εξαρτάται μόνο από τιμές της εισόδου $x(n)$ στις χρονικές στιγμές $n \leq n_0$. Έτσι λοιπόν, για ν' αποδείξουμε το ζητούμενο, θα ξεκινήσουμε από τη συνελικτική έκφραση για το $y(n_0)$ και θα χωρίσουμε το συνελικτικό άθροισμα σε δύο αθροίσματα, από τα οποία το ένα θα περιέχει τους όρους με την τρέχουσα καθώς και παρελθούσες εισόδους ενώ το άλλο θα περιέχει τους όρους με τις μελλοντικές εισόδους. △

5. Ευστάθεια Φραγμένης Εισόδου - Φραγμένης Εξόδου (ΦΕΦΕ)

Από τον ορισμό της ευστάθειας τύπου ΦΕΦΕ στο Κεφάλαιο 1 και ακολουθώντας

ανάλογη πορεία όπως εκεί (αντικαθιστώντας το ολοκλήρωμα με άθροισμα) αποδεικνύεται ότι ένα ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές κατά ΦΕΦΕ τότε και μόνον τότε όταν

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (5.7)$$

η ακολουθία, δηλαδή, της χρονιστικής απόκρισης είναι απόλυτα αθροίσιμη. Όπως γνωρίζουμε, βέβαια, από τη Μαθηματική Ανάλυση, για να ισχύει η (5.7) θα πρέπει αναγκαστικά $h(n) \rightarrow 0$ για $n \rightarrow \infty$. Με άλλα λόγια, η μνήμη του συστήματος να τείνει στο μηδέν για το μακρινό παρελθόν.

5.4 Ο Μετασχηματισμός Z

Ο μετασχηματισμός Z (MZ) ενός σήματος διακριτού χρόνου $x(n)$ ορίζεται ως η δυναμοσειρά

$$X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (5.8)$$

όπου z είναι μια μιγαδική μεταβλητή. Ο μετασχηματισμός Z, όπως ορίζεται από την (5.8), ονομάζεται *αμφίπλευρος* σε αντιδιαστολή με το μονόπλευρο MZ, που θα παρουσιάσουμε αργότερα. Για λόγους συμβατότητας με τον τρόπο παρουσίασης που συνηθίζεται στη διεθνή βιβλιογραφία, θ' αναπτύξουμε πρώτα τον αμφίπλευρο MZ, ώστε να κατανοήσουμε καλύτερα και την έννοια της περιοχής σύγκλισης, και προς το τέλος του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε συνοπτικά το μονόπλευρο MZ. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η έννοια του αρνητικού χρόνου δεν είναι σπάνια στη μελέτη σημάτων διακριτού χρόνου. Αν και ο αρνητικός χρόνος δεν έχει έννοια σε συστήματα πραγματικού χρόνου (on-line), σε συστήματα επεξεργασίας μη πραγματικού χρόνου (off-line), όπου η επεξεργασία γίνεται σε αποθηκευμένα δεδομένα, η αρχή του χρόνου μπορεί να τοποθετηθεί αυθαίρετα σ' ένα σημείο, οπότε χρονικές στιγμές πριν απ' αυτό θεωρούνται αρνητικές.

Όπως και στους ορισμούς των άλλων μετασχηματισμών, που είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, το πρώτο ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι το πότε η (5.8) έχει νόημα, δηλαδή πότε η δυναμοσειρά συγκλίνει και ο $X(z)$ υπάρχει. Από την (5.8) έχουμε

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|r^{-n} \quad (5.9)$$

όπου r το μέτρο του $z = re^{j\theta}$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1η Περίπτωση: Έστω ότι το σήμα είναι $x(n) = 0, \forall n < 0$. Όπως θα δούμε αργότερα, και κατ' αναλογία με τα σήματα συνεχούς χρόνου, ένα τέτοιο σήμα καλείται αιτιατό. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$|X(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| r^{-n} \quad (5.10)$$

Άρα η σύγκλιση του μετασχηματισμού Z εξασφαλίζεται εάν η ακολουθία $x(n)r^{-n}$ είναι *αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή* (*absolutely summable*). Η τελευταία αυτή συνθήκη ισοδυναμεί με την υπόθεση ότι το εν λόγω σήμα, $x(n)$, δεν αυξάνεται ταχύτερα από την εκθετική ακολουθία. Πράγματι, εάν υποθέσουμε ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί M και r_- τέτοιοι ώστε

$$|x(n)| < M r_-^n, \quad (5.11)$$

τότε η (5.10) φράσσεται από δεξιά με πεπερασμένο φράγμα κι επομένως ο μετασχηματισμός υπάρχει.

Απόδειξη:

Εάν η (5.11) ισχύει, τότε

$$|X(z)| < \sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{r_-}{r}\right)^n = M \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_-}{r}\right)^n \quad (5.12)$$

και ο $X(z)$ υπάρχει για όλα τα z με $|z| = r > r_-$. Με άλλα λόγια, η περιοχή σύγκλισης (ΠΣ) του μετασχηματισμού Z για αιτιατό σήμα εκτείνεται έξω από έναν κύκλο με κέντρο 0 και ακτίνα r_- στο επίπεδο των z , όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.6.

Επίσης αντίστροφα, εάν υπάρχει r_- για το οποίο

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| r_-^{-n} < \infty$$

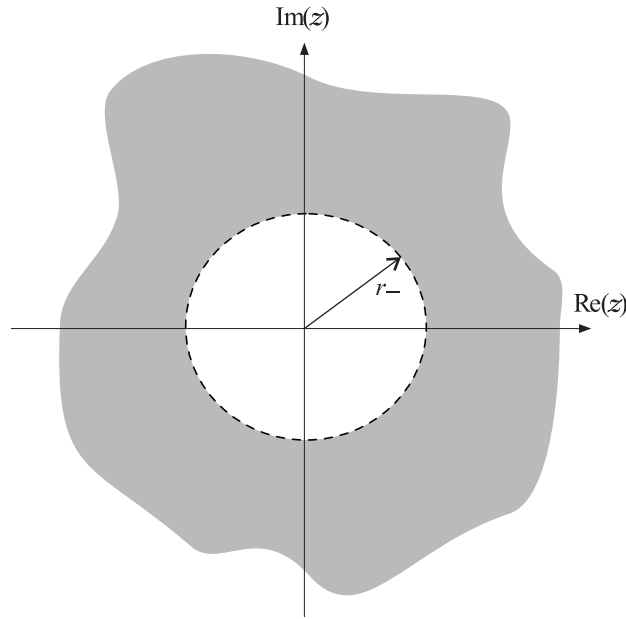
τότε κάθε όρος της ακολουθίας είναι φραγμένος και θα υπάρχει M τέτοιος ώστε

$$|x(n)| < M r_-^n$$

△

2η Περίπτωση: Έστω ότι $x(n) = 0, \forall n \geq 0$. Ένα τέτοιο σήμα λέγεται και *αντιαιτιατό*. Για την περίπτωση αυτή

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n}$$



Σχήμα 5.6 Περιοχή σύγκλισης MZ αιτιατού σήματος.

και η συνθήκη της απόλυτης αθροισσιμότητας εξασφαλίζεται εάν

$$|x(-n)| < Mr_+^{-n}$$

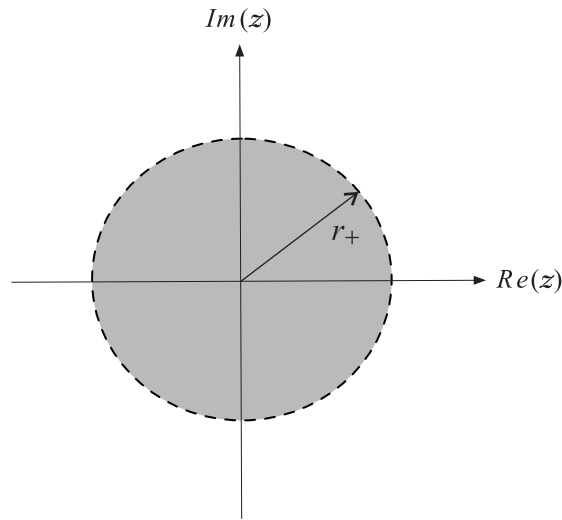
Η αντίστοιχη περιοχή σύγκλισης είναι το εσωτερικό ενός κύκλου ακτίνας r_+ , όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.7, δηλαδή $|z| < r_+$. \triangle

3η Περίπτωση: Το σήμα $x(n)$ είναι μη μηδενικό για θετικές και αρνητικές τιμές του n . Τότε ο μετασχηματισμός Z γράφεται

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x(-n)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

και η συνολική απόλυτη αθροισσιμότητα ισοδυναμεί με την απόλυτη αθροισσιμότητα των επιμέρους όρων. Άρα, στην περίπτωση αυτή, η ισοδύναμη ΠΣ είναι η τομή των δύο περιοχών του επιπέδου z για τις οποίες $|z| > r_-$ και $|z| < r_+$ αντίστοιχα. Απαραίτητη βέβαια προϋπόθεση είναι να ισχύει $r_- < r_+$. Η κοινή ΠΣ, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.8, έχει μορφή δακτυλίου. \triangle

Παρατήρηση: Παραπάνω, ανάλογα με το είδος του σήματος, καταλήξαμε σε τρεις διαφορετικές μορφές περιοχών σύγκλισης. Το αντίστροφο όμως είναι επίσης αληθές. Εάν, δηλαδή, η περιοχή σύγκλισης του $X(z)$ είναι της μορφής του



Σχήμα 5.7 Περιοχή σύγκλισης MZ αντιαιτιατού σήματος.

Σχήματος 5.6, δηλαδή εκτείνεται έξω από έναν κύκλο ακτίνας r_- , τότε το σήμα είναι αναγκαστικά αιτιατό, δηλαδή ισχύει $x(n) = 0 \ \forall \ n < 0$. Πράγματι, από τον ορισμό έχουμε

$$X(z) = \cdots + x(-2)z^2 + x(-1)z + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

Εφόσον όμως το ∞ ανήκει στην περιοχή σύγκλισης, οι όροι για $n < 0$ θα πρέπει αναγκαστικά να μηδενίζονται. Ανάλογο σκεπτικό μπορούμε ν' ακολουθήσουμε και στις άλλες δύο περιπτώσεις. Για σύγκριση, θυμηθείτε τις περιοχές σύγκλισης που ισχύουν για τον αμφίπλευρο ML.

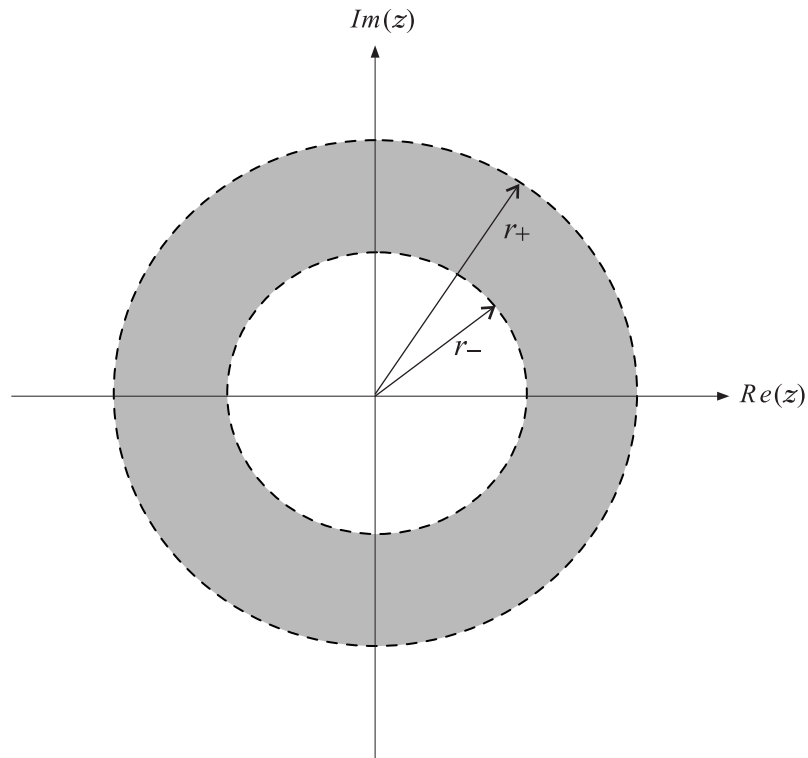
Παράδειγμα 5.2: Δίνεται το εκθετικό σήμα $x(n) = a^n u(n)$ του Σχήματος 5.9. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z του $x(n)$.

Λύση:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

ή

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|$$



Σχήμα 5.8 Περιοχή σύγκλισης ΜΖ σήματος $x(n)$ που είναι μη μηδενικό για θετικές και αρνητικές τιμές του n .

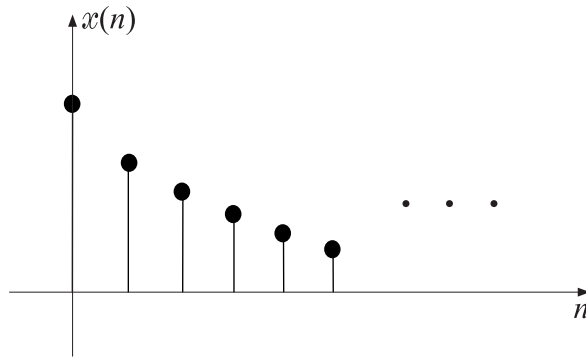
Άρα, η ΠΣ είναι έξω από έναν κύκλο ακτίνας $r_- = |a|$. Το a είναι ο πόλος της $X(z)$. \triangle

Παράδειγμα 5.3: Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ -b^n, & n < 0 \end{cases}$$

Λύση: Εφαρμόζοντας τον ορισμό του αμφίπλευρου ΜΖ πάνω στην ακολουθία $x(n)$ έχουμε

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -(bz^{-1})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$



Σχήμα 5.9 Το εκθετικό σήμα $x(n] = a^n u(n)$, $a < 1$.

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=-\infty}^{-1} -(bz^{-1})^n + \frac{z}{z-a} \\
 &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (b^{-1}z)^n + \frac{z}{z-a}, \quad |a| < |z|
 \end{aligned}$$

και συνεχίζοντας

$$\begin{aligned}
 X(z) &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{z}{b}} + \frac{z}{z-a} \\
 &= \frac{z}{z-b} + \frac{z}{z-a}, \quad |a| < |z| < |b|
 \end{aligned}$$

όπου κάναμε την υπόθεση ότι $|b| > |a|$. Εάν αυτό δεν ισχύει, τότε ο ΜΖ δεν υπάρχει. \triangle

Παρατήρηση: Τόσο η ακολουθία a^n , $n \geq 0$ όσο και η ακολουθία $-b^n$, $n < 0$, έχουν μετασχηματισμό Ζ της ίδιας ακριβώς μορφής. Αυτό που τους διαφοροποιεί είναι η περιοχή σύγκλισης. Με άλλα λόγια, εάν μας δοθεί η συνάρτηση $X(z) = \frac{z}{z-a}$, τότε αυτή θ' αντιστοιχεί στο μετασχηματισμό Ζ της $a^n u(n)$ εάν $|z| > |a|$ ή στο μετασχηματισμό Ζ της $-a^n u(-n-1)$ εάν $|z| < |a|$.

5.4.1 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Ζ

1. Γραμμικότητα

Εάν a και b είναι σταθερές και είναι

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}, \quad r_{x-} < |z| < r_{x+}$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(n)\}, \quad r_{y-} < |z| < r_{y+}$$

τότε ισχύει

$$\mathcal{Z}\{ax(n) + by(n)\} = a\mathcal{Z}\{x(n)\} + b\mathcal{Z}\{y(n)\}, \quad r_- < |z| < r_+$$

όπου

$$r_- \leq \max(r_{x-}, r_{y-}) \quad r_+ \geq \min(r_{x+}, r_{y+})$$

Με άλλα λόγια, η προκύπτουσα ΠΣ είναι τουλάχιστον η κοινή ΠΣ των $X(z)$ και $Y(z)$. Το “τουλάχιστον” απορρέει από το γεγονός ότι κατά την άθροιση κάποιοι από τους πόλους μπορεί να εξαλειφονται από αντίστοιχα μηδενικά. Για παράδειγμα, αν

$$X(z) = \frac{z}{z-1}$$

και

$$Y(z) = \frac{1}{z-1},$$

τότε ο μετασχηματισμός της διαφοράς τους είναι

$$X(z) - Y(z) = 1$$

με ΠΣ όλο το επίπεδο των μιγαδικών αριθμών. Η απόδειξη της γραμμικότητας είναι προφανής: Αρκεί ν’ ακολουθήσει κανείς τον ορισμό του μετασχηματισμού Z.

2. Χρονική ολίσθηση

Εάν

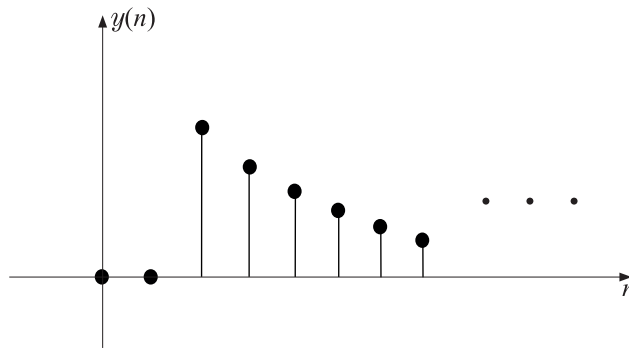
$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}, \quad r_{x-} < |z| < r_{x+}$$

τότε

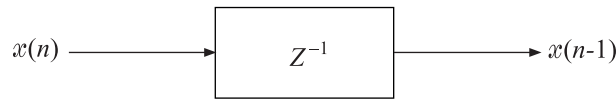
$$\mathcal{Z}\{x(n-m)\} = z^{-m}X(z), \quad r_{x-} < |z| < r_{x+}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x(n-m)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)z^{-n} \\ &= z^{-m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)z^{-(n-m)} \\ &= z^{-m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} = z^{-m}X(z) \end{aligned}$$



Σχήμα 5.10 Το σήμα $y(n) = a^{n-2}u(n-2)$, $a < 1$.



Σχήμα 5.11 Καθυστερητής.

Η ΠΣ παραμένει η ίδια με πιθανή εξαίρεση τα σημεία 0 και ∞ λόγω του παράγοντα z^{-m} . △

Παράδειγμα 5.4: Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z της ακολουθίας του Σχήματος 5.10, η οποία γράφεται ως

$$y(n) = a^{n-2}u(n-2)$$

Λύση: Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Z της ακολουθίας $x(n) = a^n u(n)$ είναι ίσος με

$$X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

Άρα

$$\mathcal{Z}\{y(n)\} = \mathcal{Z}\{x(n-2)\} = z^{-2} \frac{z}{z-a} = \frac{1}{z(z-a)}, \quad |z| > |a|$$

△

Παρατήρηση: Το z^{-1} καλείται μονάδα καθυστέρησης και υλοποιείται στην πράξη μ' έναν καθυστερητή, συμβολίζεται δε όπως στο Σχήμα 5.11.

3. Κλιμάκωση στο επίπεδο του z

Εάν

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}, \quad r_{x-} < |z| < r_{x+}$$

τότε

$$X(wz) = \mathcal{Z}\{w^{-n}x(n)\}, \quad \frac{1}{|w|}r_{x-} < |z| < \frac{1}{|w|}r_{x+}$$

όπου το w είναι μη-μηδενικός μιγαδικός αριθμός.**Απόδειξη:**

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{w^{-n}x(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} w^{-n}x(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(wz)^{-n} \\ &= X(wz), \quad r_{x-} < |wz| < r_{x+} \end{aligned}$$

△

4. Παραγωγήση

Εάν

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}, \quad r_{x-} < |z| < r_{x+}$$

τότε

$$\mathcal{Z}\{nx(n)\} = -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad r_{x-} < |z| < r_{x+}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{nx(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n} \\ &= z \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n-1} \\ &= -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{dz^{-n}}{dz} \\ &= -z \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ &= -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad r_{x-} < |z| < r_{x+} \end{aligned}$$

△

5. Συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου

Έστω

$$\begin{aligned}
 w(n) \equiv x(n) * y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)x(n-k)
 \end{aligned}$$

Εάν οι μετασχηματισμοί Z των δύο αρχικών ακολουθιών είναι $Z\{x(n)\} = X(z)$ και $Z\{y(n)\} = Y(z)$, τότε ισχύει ότι

$$Z\{w(n)\} = X(z)Y(z)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
 Z\{w(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(n)z^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) \right] z^{-n} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k)z^{-n} \right] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k)z^{-(n-k)} \right] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(l)z^{-l} \\
 &= X(z)Y(z)
 \end{aligned}$$

Η περιοχή σύγκλισης του $W(z)$ είναι τουλάχιστον η περιοχή σύγκλισης των $X(z)$ και $Y(z)$, όπως ακριβώς δηλαδή και στην περίπτωση της ιδιότητας 1 για τη γραμμικότητα. △

Παράδειγμα 5.5: Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z της ακολουθίας

$$w(n) = nu(n)$$

Λύση: Το $w(n)$ γράφεται ως

$$w(n) = nu(n) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)u(n-1-k)$$

δηλαδή ως η συνέλιξη του $u(n)$ με τον εαυτό του, υπολογισμένη στο $n-1$. Αλλά

$$\mathcal{Z}\{u(n)\} = \mathcal{Z}\{1^n u(n)\} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

οπότε

$$W(z) = z^{-1} \mathcal{Z}\{u(n)\} \mathcal{Z}\{u(n)\} = z^{-1} \frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1$$

△

6. Συζυγής ακολουθία

Εάν

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = X(z), \quad r_{x-} < |z| < r_{x+},$$

τότε

$$\mathcal{Z}\{x^*(n)\} = X^*(z^*), \quad r_{x-} < |z| < r_{x+}$$

Απόδειξη:

$$X_1(z) \equiv \mathcal{Z}\{x^*(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)z^{-n}$$

ή

$$X_1^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^*)^{-n}$$

ή

$$X_1(z) = X^*(z^*), \quad r_{x-} < |z| < r_{x+}$$

△

7. Κατοπτρισμός στον άξονα του χρόνου

Εάν

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = X(z), \quad r_{x-} < |z| < r_{x+},$$

τότε

$$\mathcal{Z}\{x(-n)\} = X(z^{-1}), \quad \frac{1}{r_{x+}} < |z| < \frac{1}{r_{x-}}$$

Απόδειξη:

$$\mathcal{Z}\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)(z^{-1})^{-l} = X(z^{-1}),$$

$$\mu\epsilon \frac{1}{r_{x+}} < |z| < \frac{1}{r_{x-}}.$$

△

8. Συσχέτιση

Η ακολουθία συσχέτισης δύο σημάτων $x(n)$ και $y(n)$ ορίζεται ως

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(k-n)$$

Εάν οι μετασχηματισμοί Z των δύο αρχικών ακολουθιών είναι $\mathcal{Z}\{x(n)\} = X(z)$ και $\mathcal{Z}\{y(n)\} = Y(z)$, τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{Z}\{r_{xy}(n)\} = X(z)Y(z^{-1})$$

Απόδειξη: Από τους ορισμούς των ακολουθιών συσχέτισης και συνέλιξης έχουμε ότι

$$r_{xy}(n) = x(n) * y(-n)$$

Συνδυάζοντας τις ιδιότητες 5 και 7 προκύπτει απευθείας το ζητούμενο. Να σημειωθεί επίσης ότι η ΠΣ του $\mathcal{Z}\{r_{xy}(n)\}$ είναι τουλάχιστον ίση με την τομή των ΠΣ των $X(z)$ και $Y(z^{-1})$. △

5.4.2 Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

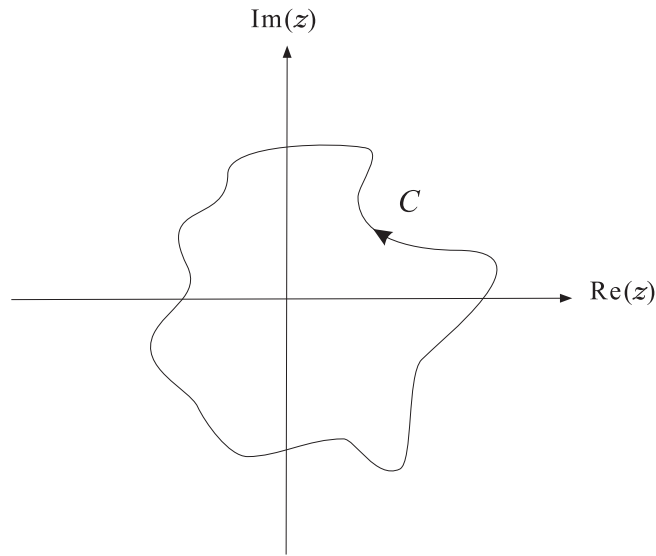
Προκειμένου να καταλήξουμε στην έκφραση του αντίστροφου MZ , θα χρησιμοποιήσουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy, σύμφωνα με τον οποίο

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{k-1} dz = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

όπου C είναι μια κλειστή διαδρομή (contour) στο επίπεδο z , που περικλείει την αρχή των αξόνων, η δε ολοκλήρωση γίνεται αντίστροφα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού (βλ. Σχήμα 5.12). Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Z έχουμε

$$\oint_C X(z)z^{k-1} dz = \oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n+k-1} dz \quad (5.14)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \oint_C z^{-n+k-1} dz \quad (5.15)$$



Σχήμα 5.12 Καμπύλη ολοκλήρωσης για τον αντίστροφο MZ.

Συνδυάζοντας τις (5.13) και (5.15) καταλήγουμε στο ότι

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (5.16)$$

Για να έχει νόημα η (5.16), θα πρέπει η καμπύλη ολοκλήρωσης C να βρίσκεται εντός της ΠΣ της $X(z)$ και να περικλείει την αρχή των αξόνων. Η (5.16) ορίζει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z της $X(z)$. Όπως και στην περίπτωση του μετασχηματισμού Laplace, θα δούμε σε λίγο ότι μια ιδιαίτερα χρήσιμη κατηγορία μετασχηματισμών Z είναι αυτή των ρητών συναρτήσεων $X(z)$.

5.4.3 Υπολογισμός του Αντίστροφου MZ για Ρητές $X(z)$

Υπολογισμός με Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα

Όταν ο $X(z)$ είναι ρητή συνάρτηση του z , τότε ο υπολογισμός της (5.16) απλοποιείται χάρη στη χρήση της τεχνικής των ολοκληρωτικών υπολοίπων από τη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων. Έστω ότι η $X(z)z^{n-1}$ είναι ρητή συνάρτηση του z με έναν πόλο, πολλαπλότητας r , στο σημείο z_0 . Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$X(z)z^{n-1} = \frac{F(z)}{(z - z_0)^r}$$

Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $X(z)z^{n-1}$ στο z_0 ορίζεται ως

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1} \text{ στο } z = z_0] = \frac{1}{(r-1)!} \left[\frac{d^{r-1}F(z)}{dz^{r-1}} \right]_{z=z_0} \quad (5.17)$$

Αν ο πόλος είναι απλός, τότε η (5.17) απλοποιείται στην

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1} \text{ στο } z = z_0] = F(z_0) \quad (5.18)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων, αν η $X(z)z^{n-1}$ έχει N πόλους z_i , $i = 1, 2, \dots, N$, εντός της γραμμής ολοκλήρωσης, τότε ισχύει

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz \quad (5.19)$$

$$= \sum_{i=1}^N \text{Res}[X(z)z^{n-1} \text{ στο } z = z_i] \quad (5.20)$$

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η ΠΣ πρέπει να είναι συνεκτική περιοχή, δεν πρέπει, δηλαδή, ν' αποτελείται από την ένωση δύο ή περισσότερων περιοχών. Το ίδιο ισχύει, όπως ήδη γνωρίζουμε, και για τον αμφίπλευρο ML. Η ΠΣ δεν περιλαμβάνει πόλους και ορίζεται από περιοχές μεταξύ διαδοχικών πόλων. Αν η περιοχή σύγκλισης θα μπορούσε να είναι ένωση δύο τέτοιων περιοχών, τότε, με βάση τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Z , θα είχαμε περισσότερες από μία ακολουθίες για τον ίδιο μετασχηματισμό Z , ανάλογα με την περιοχή στην οποία θα λάμβανε χώρα η ολοκλήρωση (5.16). Δηλαδή, ανάλογα με την περιοχή, κάθε φορά η καμπύλη C θα περιέκλειε διαφορετικό αριθμό πόλων και το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης θα ήταν διαφορετικό. Η συνεκτικότητα, δηλαδή, της ΠΣ εξασφαλίζει τη μοναδικότητα του αντίστροφου MZ .

Παράδειγμα 5.6: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της συνάρτησης

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}, \quad |z| > 1$$

Λύση: Έχουμε

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^2 z^{n-1}}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}, \quad |z| > 1$$

και διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

α) Για $n \geq 0$ έχουμε δύο απλούς πόλους στα σημεία 1 και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα. Άρα

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1} \text{ στο } z = 1] = \left. \frac{z^2 z^{n-1}}{z - \frac{1}{2}} \right|_{z=1} = 2$$

και

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1} \text{ στο } z = \frac{1}{2}] = \left. \frac{z^2 z^{n-1}}{z - 1} \right|_{z=\frac{1}{2}} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Επομένως είναι

$$x(n) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

β) Για $n < 0$, και ειδικότερα για $n \leq -2$ όπου υπάρχουν πολλαπλοί πόλοι και στο σημείο $z = 0$, θα πρέπει να υπολογιστούν τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα. Οι υπολογισμοί αυτοί όμως δεν απαιτούνται γιατί θα καταλήξουν αναγκαστικά σε $x(n) = 0$ για $n < 0$. Πράγματι, εφόσον η περιοχή σύγκλισης της $X(z)$ είναι έξω από έναν κύκλο και περιλαμβάνει το ∞ , συνεπάγεται ότι το σήμα που αντιστοιχεί στο $X(z)$ είναι αιτιατό, δηλαδή $x(n) = 0$, $\forall n < 0$. Άρα τελικά

$$x(n) = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] u(n)$$

△

Υπολογισμός με Ανάπτυξη σε Δυναμοσειρά

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία αυτή, αναπτύσσουμε το μετασχηματισμό $X(z)$ σε δυναμοσειρά και στη συνέχεια το ζητούμενο $x(n)$ υπολογίζεται με αντιστοίχιση στους συντελεστές της δυναμοσειράς. Η ανάπτυξη σε δυναμοσειρά επιτυγχάνεται ή με γνωστές μαθηματικές σχέσεις (εάν εφαρμόζονται) ή με συνεχή διαίρεση.

Παράδειγμα 5.7: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος MZ της συνάρτησης

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|$$

Λύση: Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της συνάρτησης $\ln(1+x)$, για $|x| < 1$, έχουμε

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{a}{z}\right)^n}{n}$$

Άρα

$$x(n) = (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n} u(n-1)$$

Παράδειγμα 5.8: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος MZ της συνάρτησης του Παραδείγματος 5.6 για τις περιπτώσεις: α) $|z| > 1$, και β) $|z| < \frac{1}{2}$.

Λύση:

α) Για $|z| > 1$ το σήμα $x(n)$ είναι αιτιατό, δηλαδή ο $X(z)$ περιλαμβάνει μόνο δυνάμεις του z^{-1} , άρα η ανάπτυξη πρέπει να γίνει με διαίρεση αριθμητή προς παρονομαστή ως προς z^{-1} . Δηλαδή έχουμε

$$\begin{array}{r|l} z^2 - 1.5z + 0.5 & \frac{1 + 1.5z^{-1} + 1.75z^{-2} + 1.875z^{-3} + \dots}{z^2} \\ & \frac{z^2 - 1.5z + 0.5}{1.5z - 0.5} \\ & \frac{1.5z - 2.25 + 0.75z^{-1}}{1.75 - 0.75z^{-1}} \\ & \frac{1.75 - 2.625z^{-1} + 0.875z^{-2}}{1.875z^{-1} - 0.875z^{-2}} \end{array}$$

Άρα

$$X(z) = 1 + 1.5z^{-1} + 1.75z^{-2} + 1.875z^{-3} + \dots$$

και επομένως είναι

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 1.5, \quad x(2) = 1.75, \quad x(3) = 1.875, \quad \dots$$

που προφανώς συμπίπτουν με τις αντίστοιχες τιμές τους, όπως αυτές υπολογίζονται μέσω της λύσης του Παραδείγματος 5.6.

β) Για $|z| < \frac{1}{2}$ πρέπει να είναι $x(n) = 0, \forall n \geq 0$, άρα θα πρέπει να αναπτύξουμε τη $X(z)$ σε δυναμοσειρά ως προς z , δηλαδή

$$\begin{array}{r|l} 0.5 - 1.5z + z^2 & \frac{2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + \dots}{z^2} \\ & \frac{z^2 - 3z^3 + 2z^4}{3z^3 - 2z^4} \\ & \frac{3z^3 - 9z^4 + 6z^5}{7z^4 - 6z^5} \\ & \frac{7z^4 - 21z^5 + 14z^6}{15z^5 - 14z^6} \end{array}$$

κι επομένως είναι

$$x(-1) = 0, \quad x(-2) = 2, \quad x(-3) = 6, \quad x(-4) = 14, \quad \dots$$

△

Είναι σαφές από τα παραπάνω ότι η μεθοδολογία της διαίρεσης δεν είναι υπολογιστικά αποδοτική και χρησιμοποιείται κυρίως για τον υπολογισμό των πρώτων όρων του αναπτύγματος.

Υπολογισμός με Ανάπτυξη σε Απλά Κλάσματα

Την ανάπτυξη μιας ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα την έχουμε διαπραγματευτεί στο Κεφάλαιο 3. Εξειδικεύοντας την τεχνική στην περίπτωση του μετασχηματισμού Z, διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

α) Έστω ότι ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή. Τότε

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{K_{11}}{z - z_1} + \dots + \frac{K_{1n_1}}{(z - z_1)^{n_1}} \\ &+ \frac{K_{21}}{z - z_2} + \dots + \frac{K_{2n_2}}{(z - z_2)^{n_2}} \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{K_{l1}}{z - z_l} + \dots + \frac{K_{ln_l}}{(z - z_l)^{n_l}} \end{aligned}$$

όπου z_1, z_2, \dots, z_l είναι οι l πόλοι της $X(z)$ με πολλαπλότητες n_1, n_2, \dots, n_l αντίστοιχα, και $n = n_1 + n_2 + \dots + n_l$ είναι ο βαθμός του πολωνύμου του παρονομαστή. Οι συντελεστές K_{ij} δίνονται από τη σχέση

$$K_{ij} = \frac{1}{(n_i - j)!} \frac{d^{n_i-j}}{dz^{n_i-j}} (z - z_i)^{n_i} X(z) \Big|_{z=z_i}$$

για

$$i = 1, 2, \dots, l \quad j = 1, 2, \dots, n_i$$

Στην περίπτωση απλού πόλου, π.χ., $n_i = 1$, έχουμε

$$K_{i1} = (z - z_i) X(z) \Big|_{z=z_i}$$

Έχοντας αναλύσει τη συνάρτηση $X(z)$ σε απλά κλάσματα, μπορούμε στη συνέχεια, σχετικά εύκολα, να υπολογίσουμε τον ζητούμενο αντίστροφο μετασχηματισμό Z. Πράγματι, υπολογίζουμε πρώτα τους επιμέρους αντίστροφους MZ των

Πίνακας 5.1 Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Z		
Σήμα $x(n)$	MZ $X(z)$	ΠΣ
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$nu(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a $
$na^n u(n)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a $
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z < a $
$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z < a $
$(\cos \omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$(\sin \omega_0 n)u(n)$	$\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$(a^n \cos \omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^2 - az \cos \omega_0}{z^2 - 2az \cos \omega_0 + a^2}$	$ z > a $
$(a^n \sin \omega_0 n)u(n)$	$\frac{az \sin \omega_0}{z^2 - 2az \cos \omega_0 + a^2}$	$ z > a $

απλών κλασμάτων και ύστερα αθροίζουμε τις προκύπτουσες εκφράσεις. Ο Πίνακας 5.1 συνοψίζει τα ζεύγη σημάτων και αντίστοιχων μετασχηματισμών Z για ορισμένες περιπτώσεις που συναντώνται συνήθως στην πράξη.

β) Αν ο βαθμός m του πολωνύμου του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από ή ίσος με το βαθμό n του πολωνύμου του παρονομαστή, τότε διαιρούμε πρώτα τα πολώνυμα και καταλήγουμε σε μια έκφραση της μορφής

$$X(z) = B_{m-n}z^{m-n} + \dots + B_0z^0 + X_1(z)$$

όπου η ρητή συνάρτηση $X_1(z)$ έχει βαθμό αριθμητή μικρότερο του βαθμού του παρονομαστή. Στη συνέχεια αναπτύσσουμε τη $X_1(z)$ σε απλά κλάσματα σύμφωνα με τα προηγούμενα.

Παράδειγμα 5.9: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος MZ της συνάρτησης

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}, \quad |z| > 2$$

Λύση: Έχουμε

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-2}$$

Με βάση τη διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω (πρώτη περίπτωση) υπολογίζουμε τους συντελεστές A_1 και A_2 , δηλαδή

$$A_1 = (z-1)X(z)|_{z=1} = -1$$

$$A_2 = (z-2)X(z)|_{z=2} = 2$$

Άρα

$$X(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{2}{z-2} = -z^{-1} \frac{z}{z-1} + 2z^{-1} \frac{z}{z-2}$$

Από την παραπάνω έκφραση και με εφαρμογή της ιδιότητας της ολίσθησης προκύπτει εύκολα ότι

$$x(n) = -u(n-1) + 2 \cdot 2^{n-1}u(n-1) = (2^n - 1)u(n-1)$$

ή

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad x(2) = 3, \quad \dots$$

△

Παρατήρηση: Όπως μπορεί να δει κανείς στον Πίνακα 5.1, κατ' αναλογία με ό,τι συμβαίνει στο ML, πόλοι εντός (εκτός) του μοναδιαίου κύκλου αντιστοιχούν στο πεδίο του χρόνου σε σήματα πολλαπλασιασμένα με a^n , $a < 1$ ($a > 1$). Μιγαδικοί συζυγείς πόλοι αντιστοιχούν σε ακολουθίες που υφίστανται ταλάντωση. Αν οι πόλοι βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο ($a = 1$), τότε έχουμε συντηρούμενη ταλάντωση. Αλλιώς η ταλάντωση είναι εκθετικά φθίνουσα ή αύξουσα. Παραδείγματα αυτών των περιπτώσεων δίνονται στο Σχήμα 5.13.

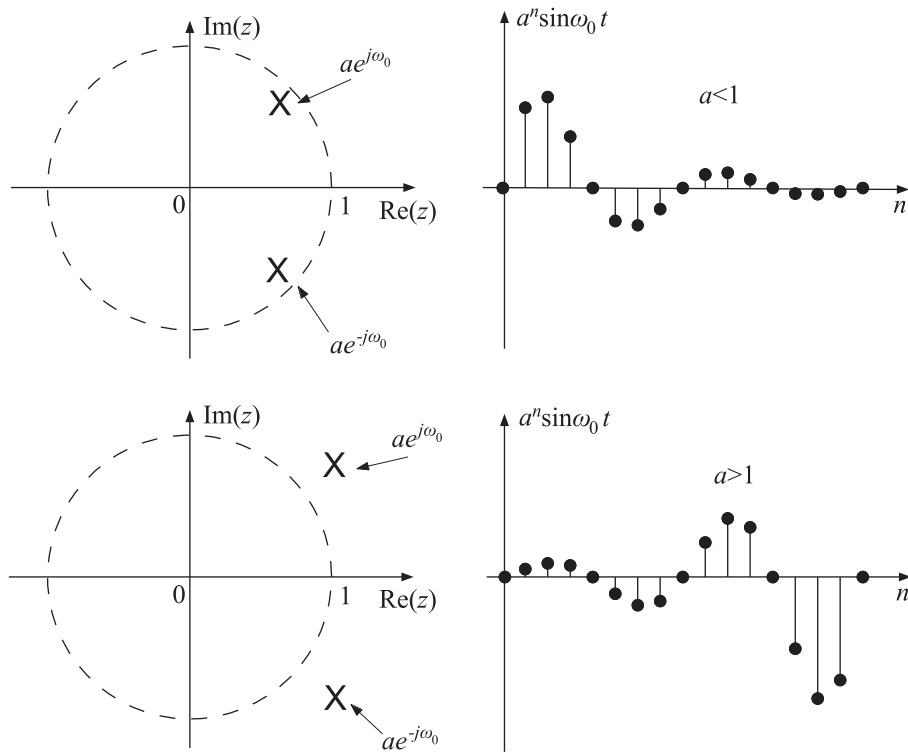
5.4.4 Συνέλιξη στο Επίπεδο του z^1

Εάν $Z\{x(n)\} = X(z)$ και $Z\{y(n)\} = Y(z)$, τίθεται το ζήτημα του υπολογισμού του μετασχηματισμού Z του γινομένου $w(n) \equiv x(n)y(n)$. Θ' αποδείξουμε ότι

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv \quad (5.21)$$

όπου C είναι κλειστή γραμμή (contour) στην κοινή περιοχή σύγκλισης των $X(v)$, $Y\left(\frac{z}{v}\right)$.

¹Μπορεί να παραλειφθεί σε μια πρώτη ανάγνωση.



Σχήμα 5.13 Εκθετικά φθίνουσα και αύξουσα ταλάντωση λόγω ζεύγους συζυγών μιγαδικών πόλων εντός και εκτός του μοναδιαίου κύκλου, αντίστοιχα.

Απόδειξη: Από τον ορισμό έχουμε

$$\begin{aligned}
 W(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n)z^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)v^{n-1}dv \right] y(n)z^{-n} \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \left(\frac{z}{v} \right)^{-n} \right] v^{-1}dv \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1}dv
 \end{aligned}$$

Σε ό,τι αφορά την αντίστοιχη περιοχή σύγκλισης έχουμε ότι

$$r_{x-} < |v| < r_{x+} \quad r_{y-} < \left| \frac{z}{v} \right| < r_{y+}$$

Άρα για την ΠΣ του $W(z)$ θα πρέπει να ισχύει

$$r_{x-} r_{y-} < |z| < r_{x+} r_{y+}$$

Εάν υπάρχουν απαλοιφές πόλων με μηδενικά, τότε η παραπάνω ΠΣ μπορεί να επεκταθεί. \triangle

5.5 Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Στο εδάφιο αυτό θα εισάγουμε το μετασχηματισμό Fourier σημάτων διακριτού χρόνου, που είναι μια ειδική περίπτωση του MZ. Θα προτιμήσουμε όμως, για την εισαγωγή του MF, ν' ακολουθήσουμε μια πορεία ανάλογη μ' αυτή που ακολουθήσαμε για το MF σημάτων συνεχούς χρόνου, αφού αυτή αναδεικνύει και μια χρήσιμη φυσική ιδιότητα του MF.

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση $h(n)$. Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι η είσοδος στο σύστημα αυτό διεγείρεται από ένα εκθετικό μιγαδικό σήμα της μορφής

$$e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j \sin(\omega n) \quad (5.22)$$

Η έξοδος του συστήματος θα είναι

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{j\omega(n-k)}$$

ή

$$y(n) = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k} = e^{j\omega n} H(e^{j\omega})$$

όπου

$$H(e^{j\omega}) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k} \quad (5.23)$$

Όπως, δηλαδή, και στην περίπτωση των αναλογικών συστημάτων, η έξοδος είναι το ίδιο το σήμα πολλαπλασιασμένο με μια μιγαδική ποσότητα $H(e^{j\omega})$, η οποία απλά αλλάζει το πλάτος και τη φάση του σήματος εισόδου. Πράγματι, γράφοντας

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)}$$

τότε

$$y(n) = |H(e^{j\omega})|e^{j[n\omega + \phi(\omega)]}$$

Η $H(e^{j\omega})$ είναι μια μιγαδική συνάρτηση του ω , περιοδική με περίοδο 2π . Το τελευταίο είναι προφανές αν λάβουμε υπόψη το ότι $e^{-j(\omega+2\pi)k} = e^{-j\omega k}$. Από τη μέχρι τώρα εμπειρία μας με τις εκθετικές μιγαδικές συναρτήσεις, δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι η (5.23) συνεπάγεται και την αντίστροφη σχέση, δηλαδή

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (5.24)$$

Για την απόδειξη της παραπάνω σχέσης αρκεί ν' αντικαταστήσουμε το $H(e^{j\omega})$ στην (5.24) από την ισοδύναμη έκφραση στην (5.23).²

Μια προσεκτική παρατήρηση της (5.24) αναδεικνύει και τη φυσική σημασία του αναπτύγματος, όπως και στην περίπτωση των αναλογικών σημάτων. Είναι το ανάπτυγμα της ακολουθίας $h(n)$ σ' ένα άπειρο (μη αριθμήσιμο) άθροισμα (ολοκλήρωμα) απλών εκθετικών μιγαδικών σημάτων $e^{j\omega n}$, το καθένα κυκλικής συχνότητας $\omega \in [-\pi, \pi]$. Η ερμηνεία αυτή μας δίνει το έναυσμα να ορίσουμε μια ανάλογη σχέση για κάθε σήμα διακριτού χρόνου.

Το ζεύγος μετασχηματισμού Fourier ενός σήματος διακριτού χρόνου, $x(n)$, ορίζεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \\ x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{aligned}$$

Η πρώτη σχέση είναι ο μετασχηματισμός Fourier και η δεύτερη ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier. Όπως και στα αναλογικά σήματα, ο μετασχηματισμός Fourier δεν ορίζεται για όλες τις ακολουθίες, το αντίστοιχο δηλαδή άθροισμα άπειρων όρων δεν συγκλίνει πάντα.

Παρατηρήστε ότι τα όρια του ολοκληρώματος στον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier είναι από $-\pi$ έως π , στο διάστημα δηλαδή μιας περιόδου. Ολοκλήρωση έξω απ' αυτό το διάστημα δεν θα είχε νόημα, δεδομένου ότι όλη η αναγκαία πληροφορία υπάρχει στο βασικό διάστημα της περιόδου. Επιπλέον τα όρια ολοκλήρωσης θα μπορούσαν να είναι διαφορετικά από $\pm\pi$ αρκεί το διάστημα ολοκλήρωσης να είχε μήκος 2π , δηλαδή $[\omega_0, \omega_0 + 2\pi]$.

²Εναλλακτικά, μπορούμε να δούμε ότι η (5.23) είναι η εκθετική σειρά Fourier, με συντελεστές $h(k)$, της περιοδικής συνάρτησης $H(e^{j\omega})$, με βασική συχνότητα $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

Αν ο δείκτης της ακολουθίας δίνεται σε μονάδες χρόνου, δηλαδή $x(nT)$, τότε το ανάπτυγμα θα πρέπει να γίνει σε εκθετικά μιγαδικά σήματα της μορφής $e^{j\Omega nT}$. Το Ω , τώρα, έχει μονάδες συχνότητας (rad/sec), ώστε συνολικά ο εκθέτης να είναι καθαρός αριθμός, και το ζεύγος μετασχηματισμών Fourier (εάν υπάρχει) γίνεται

$$X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\Omega nT} \quad (5.25)$$

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\Omega T})e^{j\Omega nT} d\Omega \quad (5.26)$$

Παρατηρούμε ότι, στην περίπτωση αυτή, ο μετασχηματισμός Fourier είναι συνάρτηση περιοδική με περίοδο $\frac{2\pi}{T}$ ($e^{j\Omega nT} = e^{j(\Omega + \frac{2\pi}{T})nT}$).

Παρατηρήσεις:

α) Ο μετασχηματισμός Fourier σημάτων διακριτού χρόνου $x(n)$ ($x(nT)$) είναι πάντα περιοδική συνάρτηση, με περίοδο 2π (ή $2\pi/T$). Αυτός είναι και ο λόγος που συμβολίζουμε το μετασχηματισμό Fourier των σημάτων διακριτού χρόνου ως $X(e^{j\omega})$ και όχι ως $X(\omega)$, για να μας τονίζει την περιοδικότητα.

β) Δεν είναι δύσκολο να παρατηρήσουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier, $X(e^{j\omega})$, ενός σήματος διακριτού χρόνου, $x(n)$, συμπίπτει με το μετασχηματισμό Z, $X(z)$, για $z = e^{j\omega}$, δηλαδή *πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, υπό την προϋπόθεση βέβαια ότι ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην περιοχή σύγκλισής του*.

γ) Η ύπαρξη του μετασχηματισμού Fourier μιας ακολουθίας, $x(n)$, εξασφαλίζεται (ικανή συνθήκη) αν η ακολουθία αυτή είναι απολύτως αθροίσιμη, δηλαδή $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| < \infty$.

δ) Γνωρίζουμε ότι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ένα ΓΧΑ σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές είναι η κρουστική απόκριση $h(n)$ να είναι απολύτως αθροίσιμη. Άρα, ο μετασχηματισμός Fourier $H(e^{j\omega})$ της κρουστικής απόκρισης ΦΕΦΕ ΓΧΑ συστημάτων υπάρχει πάντα.

Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier σημάτων διακριτού χρόνου είναι ανάλογες μ' αυτές του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου και συνοψίζονται στον Πίνακα 5.2.

Πίνακας 5.2 Βασικές ιδιότητες του MF διακριτού χρόνου		
Ιδιότητα	Πεδίο του Χρόνου	Πεδίο της Συχνότητας
Περιοδικότητα	$x(n)$	$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$
Συζυγία στο χρόνο	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
Συζυγία στη συχνότητα	$x^*(-n)$	$X^*(e^{j\omega})$
Ανάκλαση	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
Γραμμικότητα	$ax(n) + by(n)$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Χρονική Μετατόπιση	$x(n - n_0)$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
Ολίσθηση Συχνότητας	$e^{j\omega_0 n} x(n)$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Πραγματικό Σήμα	$x(n) \equiv x^*(n)$	$\text{Re}[X(e^{j\omega})] = \text{Re}[X(e^{-j\omega})]$
„	„	$\text{Im}[X(e^{j\omega})] = -\text{Im}[X(e^{-j\omega})]$
„	„	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $
„	„	$\arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{-j\omega})]$
Συνέλιξη	$x(n) * y(n)$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Διαμόρφωση	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j(\omega-\theta)})Y(e^{j\theta})d\theta$
Διαφόριση	$(-j)^k n^k x(n)$	$\frac{d^k}{d\omega^k} X(e^{j\omega})$
Θεώρημα Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2$	$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

Παράδειγμα 5.10: Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0, \quad n \geq N \end{cases}$$

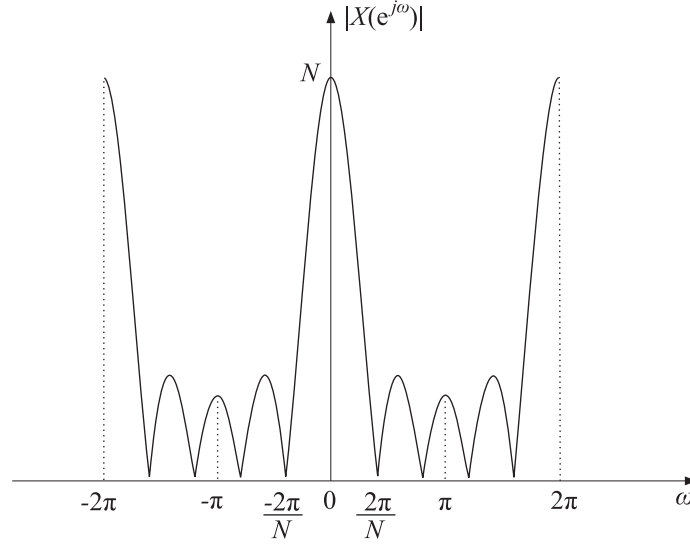
Λύση:

Από τον ορισμό του MF διακριτού χρόνου έχουμε

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\omega} \\ &= \frac{e^{-jN\omega} - 1}{e^{-j\omega} - 1} = \frac{e^{-j\frac{N\omega}{2}} e^{-j\frac{N\omega}{2}} - e^{-j\frac{N\omega}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}} e^{-j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}} \end{aligned}$$

ή

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}} \frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$



Σχήμα 5.14 Το μέτρο του MF διακριτού χρόνου του Παραδείγματος 5.10, για $N = 5$.

Το μέτρο $|X(e^{j\omega})|$ του παραπάνω μετασχηματισμού, για την περίπτωση $N = 5$, φαίνεται στο Σχήμα 5.14. Αν θα θέλαμε να είχαμε μονάδες (χρόνου) στην ανεξάρτητη μεταβλητή του σήματος ($x(nT)$), τότε το γράφημα του μέτρου του μετασχηματισμού Fourier, $|X(e^{j\Omega T})|$, θα ήταν ακριβώς το ίδιο, εκτός από τον οριζόντιο άξονα που θα ήταν Ω και οι μονάδες θα έπρεπε να πολλαπλασιαστούν με $\frac{1}{T}$. Αυτός είναι ο λόγος που στις περισσότερες περιπτώσεις, κι αν ακόμη η ελεύθερη διακριτή μεταβλητή έχει μονάδες, εργαζόμαστε με $x(n)$, θεωρώντας, ουσιαστικά, το $T = 1$, και η μετάβαση από το ω στο Ω είναι απλά

$$\boxed{\omega = \Omega T}$$

△

5.6 Θεώρημα Parseval

Αν $x(n)$, $y(n)$ είναι σήματα διακριτού χρόνου με αντίστοιχους μετασχηματισμούς Z τους $X(z)$, $Y(z)$, τότε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv \quad (5.27)$$

όπου C κλειστή γραμμή στην κοινή περιοχή σύγκλισης των $X(v)$ και $Y(\frac{1}{v^*})$.

Απόδειξη: Έστω $w(n) = x(n)y^*(n)$. Συνδυάζοντας την ιδιότητα 6 του μετασχηματισμού Z με την (5.21) έχουμε

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y^*\left(\frac{z^*}{v^*}\right)v^{-1}dv \quad (5.28)$$

Άρα για $z = 1$ έχουμε

$$W(z)|_{z=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

Η (5.27) αποκτά ιδιαίτερη σημασία εάν η καμπύλη C συμπέσει με τον μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή $v = e^{j\omega}$. Τότε

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{-j\omega})d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) (Y(e^{j\omega}))^* d\omega \end{aligned}$$

△

Αν επιπλέον $y(n) = x(n)$, τότε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (5.29)$$

Το πρώτο μέλος της ισότητας είναι η ενέργεια του σήματος. Με άλλα λόγια, το θεώρημα Parseval μας λέει ότι η ενέργεια αυτή ισούται με το εμβαδό που εσωκλείει το τετράγωνο του μέτρου του μετασχηματισμού Fourier πάνω σε μία περίοδο (επί $\frac{1}{2\pi}$). Άρα, όπως και στα σήματα συνεχούς χρόνου, η συνάρτηση $|X(e^{j\omega})|^2$ εκφράζει την πυκνότητα ενέργειας του σήματος στη συχνότητα $\frac{\omega}{2\pi}$.

5.7 Συνάρτηση Μεταφοράς ενός ΓΧΑ Συστήματος

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(n)$. Όπως ήδη γνωρίζουμε, οι ακολουθίες εισόδου - εξόδου σχετίζονται μέσα από την πράξη της συνέλιξης, δηλαδή

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (5.30)$$

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Z αμφοτέρων των πλευρών καταλήγουμε στο ότι

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

ή

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (5.31)$$

Η συνάρτηση $H(z)$ είναι γνωστή και ως *συνάρτηση μεταφοράς* του ΓΧΑ συστήματος. Ο μετασχηματισμός Z δηλαδή της κρουστικής απόκρισης είναι το πηλίκο των αντίστοιχων μετασχηματισμών των σημάτων εξόδου και εισόδου.

Ένας άλλος τρόπος για να εκφράσουμε το πηλίκο $\frac{Y(z)}{X(z)}$ στην (5.31) προκύπτει εάν εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι η σχέση εισόδου - εξόδου στα ΓΧΑ συστήματα περιγράφεται από *εξίσωση διαφορών* (όπως αντίστοιχα στα αναλογικά συστήματα περιγράφεται από διαφορική εξίσωση). Τα συστήματα αυτά υλοποιούνται στην πράξη με χρήση πολλαπλασιαστών, αθροιστών και καθυστερητών. Η γενική μορφή περιγραφής της σχέσης εισόδου - εξόδου είναι

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad (5.32)$$

ή

$$\begin{aligned} a_0 y(n) &= -a_1 y(n-1) - \dots - a_N y(n-N) \\ &\quad + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M) \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, η έξοδος τη χρονική στιγμή n ισούται με το γραμμικό συνδυασμό τιμών της εισόδου στην ίδια χρονική στιγμή και σε προηγούμενες χρονικές στιγμές, καθώς επίσης και τιμών της εξόδου σε προηγούμενες χρονικές στιγμές.

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Z στην (5.32) και λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της ολίσθησης έχουμε

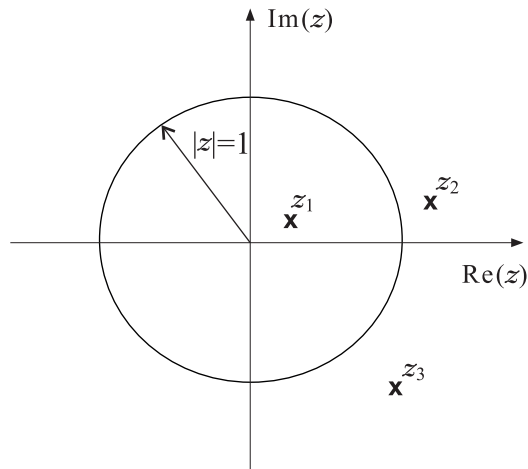
$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{Z}[y(n-k)] = \sum_{r=0}^M b_r \mathcal{Z}[x(n-r)]$$

ή

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{r=0}^M b_r z^{-r}$$

ή

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \equiv H(z) \quad (5.33)$$



Σχήμα 5.15 Πόλοι συνάρτησης μεταφοράς.

Η συνάρτηση μεταφοράς γι' αυτού του είδους τα συστήματα είναι προφανώς ρητή συνάρτηση. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι *έχουμε υιοθετήσει σιωπηρά την υπόθεση της αρχικής ηρεμίας του συστήματος*, δεδομένου ότι στον αμφίπλευρο μετασχηματισμό Z , υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε τα σήματα εισόδου - εξόδου στο $-\infty$, όπου το σύστημα εξ ορισμού είναι σε ηρεμία.

Τίθεται τώρα το εξής εύλογο ερώτημα. Εάν γνωρίζουμε τη διαφοροεξίσωση που διαπλέκει τα σήματα εισόδου και εξόδου, πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίστοιχη χρονστική απόκριση του συστήματος; Από τα όσα έχουμε αναφέρει, αρκεί να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z της (5.33). Αυτό που δεν είναι ακόμη δεδομένο είναι η επιλογή μας σχετικά με την ΠΣ του $H(z)$ (στην οποία ΠΣ θα τοποθετήσουμε την κλειστή καμπύλη C της (5.16)). Η επιλογή της ΠΣ εξαρτάται από τους περιορισμούς που θα επιβάλουμε στο σύστημά μας. Έστω, για παράδειγμα, ότι η $H(z)$ της (5.33) έχει τρεις πόλους (δηλαδή $N = 3$) οι οποίοι φαίνονται στο Σχήμα 5.15 μαζί με το μοναδιαίο κύκλο $|z| = 1$.

Οι δυνατές ΠΣ (που όπως έχουμε ήδη αναφέρει πρέπει να είναι συνεκτικές) είναι οι

$$\begin{aligned} |z| &< |z_1| \\ |z_1| &< |z| < |z_2| \\ |z_2| &< |z| < |z_3| \end{aligned}$$

$$|z_3| < |z|$$

Αν απαιτήσουμε το σύστημά μας να είναι αιτιατό, τότε αναγκαστικά θα επιλέξουμε

$$|z_3| < |z|$$

Όπως ήδη γνωρίζουμε, αυτό ισχύει γιατί για αιτιατές ακολουθίες η περιοχή σύγκλισης εκτείνεται μέχρι το ∞ .

Μια άλλη εύλογη απαίτηση είναι το σύστημα να είναι ευσταθές. Γνωρίζουμε ότι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για ΦΕΦΕ ευστάθεια είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Η συνθήκη όμως αυτή συνεπάγεται και την ύπαρξη του μετασχηματισμού Fourier, άρα η ΠΣ είναι αυτή στην οποία βρίσκεται ο μοναδιαίος κύκλος, δηλαδή

$$|z_1| < |z| < |z_2|$$

Από τα παραπάνω προκύπτει και η ακόλουθη συνθήκη:

Για να είναι ένα σύστημα ταυτόχρονα ευσταθές και αιτιατό θα πρέπει όλοι οι πόλοι του να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Παράδειγμα 5.11: Έστω το σύστημα με σχέση εισόδου - εξόδου

$$y(n) - \frac{7}{2}y(n-1) + \frac{3}{2}y(n-2) = x(n-2)$$

Να υπολογιστεί η χρονική απόκριση του συστήματος έτσι ώστε το σύστημα να είναι α) αιτιατό και β) ευσταθές.

Λύση: Η συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω συστήματος είναι

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-2}}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}}$$

ή

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - \frac{7}{2}z + \frac{3}{2}} = \frac{1}{(z - \frac{1}{2})(z - 3)}$$

Αναπτύσσοντας σε απλά κλάσματα έχουμε

$$H(z) = \frac{A}{z - \frac{1}{2}} + \frac{B}{z - 3}$$

όπου

$$A = H(z) \left(z - \frac{1}{2} \right) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{2}{5}$$

$$B = H(z)(z - 3) \Big|_{z=3} = \frac{2}{5}$$

ή

$$H(z) = \frac{2}{5} \frac{1}{z - 3} - \frac{2}{5} \frac{1}{z - \frac{1}{2}}$$

α) Για να είναι το σύστημα αιτιατό θα πρέπει η ΠΣ να είναι $|z| > 3$. Είναι

$$\frac{z}{z - 3} = \mathcal{Z} [3^n u(n)], \quad |z| > 3$$

$$\frac{z}{z - \frac{1}{2}} = \mathcal{Z} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n u(n) \right], \quad |z| > 3$$

Άρα

$$h(n) = \frac{2}{5} 3^{n-1} u(n-1) - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} u(n-1)$$

β) Για να είναι το σύστημα ευσταθές θα πρέπει η ΠΣ να περιέχει το μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή

$$\frac{1}{2} < |z| < 3$$

Άρα

$$\frac{z}{z - 3} = \mathcal{Z} [-3^n u(-n-1)], \quad |z| < 3$$

$$\frac{z}{z - \frac{1}{2}} = \mathcal{Z} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n u(n) \right], \quad |z| > \frac{1}{2}$$

και τελικά

$$h(n) = -\frac{2}{5} 3^{n-1} u(-n) - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} u(n-1)$$

Το παραπάνω δηλαδή σύστημα δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα ευσταθές και αιτιατό. \triangle

5.8 Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Z

Στο προηγούμενο εδάφιο είδαμε πώς υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος που περιγράφεται από μια διαφοροεξίσωση στην οποία εμπλέκονται τα σήματα εισόδου και εξόδου. Γνωρίζοντας την $H(z)$ και το σήμα εισόδου $X(z)$, εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε το σήμα εξόδου μέσω της σχέσης

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

και με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Z. Το βασικό όμως μειονέκτημα της μεθοδολογίας αυτής προέρχεται από το γεγονός ότι τα παραπάνω ισχύουν για συστήματα τα οποία βρίσκονται σε αρχική ηρεμία, και συνεπώς δεν παρέχεται η δυνατότητα ενσωμάτωσης της πληροφορίας σχετικά με τυχόν διεγέρσεις που έχει υποστεί το σύστημα πριν την εφαρμογή του γνωστού σήματος εισόδου, $x(n)$. Τη διέξοδο θα την αναζητήσουμε στο *μονόπλευρο μετασχηματισμό Z*, με τον οποίο θ' ασχοληθούμε σ' αυτό το εδάφιο.

5.8.1 Ορισμός

Ως *μονόπλευρος μετασχηματισμός Z* του σήματος $x(n)$ ορίζεται η μιγαδική συνάρτηση

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (5.34)$$

Με άλλα λόγια, αθροίζουμε από το 0, ανεξάρτητα από το εάν η ακολουθία είναι αιτιατή ή όχι. Προφανώς, για αιτιατά σήματα ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Z ταυτίζεται με τον αμφίπλευρο που μελετήσαμε στο Εδάφιο 5.4.

Παρατηρήσεις:

α) Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Z δεν περιέχει πληροφορία για το σήμα στις αρνητικές χρονικές στιγμές.

β) Είναι μοναδικός μόνο για αιτιατά σήματα, διότι σήματα που είναι διαφορετικά για $n < 0$ έχουν τον ίδιο μονόπλευρο μετασχηματισμό Z, εάν για $n \geq 0$ ταυτίζονται.

γ) Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Z ταυτίζεται με τον αμφίπλευρο του σήματος $x(n)u(n)$. Εφόσον το σήμα $x(n)u(n)$ είναι σήμα αιτιατό, συνεπάγεται ότι η ΠΣ του μονόπλευρου $X(z)$ είναι πάντα το εξωτερικό ενός κύκλου. Άρα δεν είναι αναγκαίο να ορίσουμε περιοχή σύγκλισης για το μονόπλευρο μετασχηματισμό Z. *Η περιοχή σύγκλισης είναι η εξωτερική περιοχή του κύκλου που περνάει από τον πόλο με το μεγαλύτερο μέτρο.*

δ) Σχεδόν όλες οι ιδιότητες του αμφίπλευρου μετασχηματισμού Z ισχύουν και για το μονόπλευρο. Η ιδιότητα της ολίσθησης, που θα δούμε αμέσως παρακάτω, είναι εξαίρεση και ταυτόχρονα η δύναμη του μονόπλευρου μετασχηματισμού Z .

5.8.2 Η Ιδιότητα της Χρονικής Ολίσθησης

α) Δεξιά ολίσθηση - Καθυστερήση:

Αν

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)],$$

τότε

$$\mathcal{Z}[x(n-k)] = z^{-k} \left[X(z) + \sum_{n=1}^k x(-n)z^n \right], \quad k > 0$$

Απόδειξη:

$$\mathcal{Z}[x(n-k)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-k)z^{-n} = \sum_{l=-k}^{\infty} x(l)z^{-l-k}$$

ή

$$\mathcal{Z}[x(n-k)] = z^{-k} \left[\sum_{l=0}^{\infty} x(l)z^{-l} + \sum_{l=-k}^{-1} x(l)z^{-l} \right]$$

από την οποία προκύπτει το ζητούμενο. Η ιδιότητα αυτή, όπως θα δούμε, μας παρέχει τη δυνατότητα ενσωμάτωσης αρχικών συνθηκών. \triangle

β) Αριστερή ολίσθηση - Προήγηση:

Εάν

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)],$$

τότε

$$\mathcal{Z}[x(n+k)] = z^k \left[X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{-n} \right], \quad k > 0$$

Απόδειξη:

$$\mathcal{Z}[x(n+k)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+k)z^{-n} = \sum_{l=k}^{\infty} x(l)z^{-l+k}$$

ή

$$\mathcal{Z}[x(n+k)] = z^k \left[\sum_{l=0}^{\infty} x(l)z^{-l} - \sum_{l=0}^{k-1} x(l)z^{-l} \right]$$

\triangle

Παρατήρηση: Η παραπάνω ιδιότητα επιβεβαιώνει ότι, αθροίζοντας από 0 έως ∞ , α) κατά τη δεξιά ολίσθηση νέα δείγματα εισέρχονται στο διάστημα $[0, \infty]$, και συγκεκριμένα τα $x(-1), x(-2), \dots, x(-k)$, και β) κατά την αριστερή ολίσθηση το διάστημα $[0, \infty]$ δεν περιλαμβάνει πλέον τα δείγματα $x(0), x(1), \dots, x(k-1)$.

Παράδειγμα 5.12: Αν $x(n) = a^n$, να υπολογιστούν οι μονόπλευροι MZ α) $\mathcal{Z}[x(n-3)]$ και β) $\mathcal{Z}[x(n+3)]$.

Λύση: Ο μονόπλευρος $\mathcal{Z}[x(n)]$ ταυτίζεται με τον αμφίπλευρο του $a^n u(n)$ και είναι

$$\mathcal{Z}[x(n)] = \frac{z}{z-a}$$

Αρα
α)

$$\mathcal{Z}[x(n-3)] = z^{-3} \left[\frac{z}{z-a} + a^{-1}z + a^{-2}z^2 + a^{-3}z^3 \right]$$

ή

$$\mathcal{Z}[x(n-3)] = \frac{z^{-2}}{z-a} + a^{-1}z^{-2} + a^{-2}z^{-1} + a^{-3}$$

β)

$$\mathcal{Z}[x(n+3)] = z^3 \left[\frac{z}{z-a} - a^0 - az^{-1} - a^2z^{-2} \right]$$

ή

$$\mathcal{Z}[x(n+3)] = \frac{z^4}{z-a} - z^3 - az^2 - a^2z$$

△

5.8.3 Το Θεώρημα Αρχικής Τιμής

Αν $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$ είναι ο μονόπλευρος MZ του $x(n)$, τότε

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Απόδειξη: Αφήνεται ως άσκηση.

△

5.8.4 Το Θεώρημα Τελικής Τιμής

Αν $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$ είναι ο μονόπλευρος MZ του $x(n)$, τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$$

Απόδειξη: Αφήνεται ως άσκηση. \triangle

Παρατήρηση: Το παραπάνω θεώρημα μας βοηθά να υπολογίσουμε την ασυμπτωτική τιμή του $x(n)$ χωρίς να είναι ανάγκη να υπολογίσουμε το ίδιο το $x(n)$ από το $X(z)$ με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Z . Προϋπόθεση βέβαια εφαρμογής του θεωρήματος είναι η $\Pi\Sigma$ του $(z-1)X(z)$ να περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Προφανώς, στην πράξη, η υπόθεση αυτή πάντα ισχύει, δεδομένου ότι ένα σύστημα είναι πρακτικά υλοποιήσιμο μόνον όταν είναι ευσταθές.

5.9 Απόκριση ΓΧΑ Συστήματος με Αρχικές Συνθήκες

Θεωρούμε ένα ΓΧΑ αιτιατό και ευσταθές σύστημα το οποίο περιγράφεται από τη διαφοροεξίσωση

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad (5.35)$$

Υποθέτουμε ότι το σήμα $x(n)$ εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $n = 0$. Το σύστημα δεν βρίσκεται σε ηρεμία (λόγω προηγούμενων διεγέρσεων του $x(n)$) αλλά γνωρίζουμε τις αρχικές τιμές, $y(-N), y(-N+1), \dots, y(-1)$, της εξόδου που οφείλονται στις προηγούμενες διεγέρσεις. Συνήθως, και χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε $a_0 = 1$, διότι πάντα μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το συντελεστή αυτόν και να προκύψει μονάδα. Παίρνοντας το μονόπλευρο μετασχηματισμό Z αμφοτέρων των πλευρών και με τη χρήση της ιδιότητας της ολίσθησης έχουμε

$$Y(z) + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \left[Y(z) + \sum_{m=1}^k y(-m) z^m \right] = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} X(z) \quad (5.36)$$

ή

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \sum_{m=1}^k y(-m) z^m}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \\ &\equiv H(z) X(z) + \frac{N(z)}{A(z)} \end{aligned} \quad (5.37)$$

όπου $H(z)$ η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος (κατάσταση ηρεμίας). Ο όρος $\frac{N(z)}{A(z)}$ εκφράζει τη συνεισφορά των αρχικών συνθηκών στη δημιουργία του σήματος εξόδου.

Παράδειγμα 5.13: Δίνεται το σύστημα

$$y(n) - \frac{5}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) = x(n-2) \quad (5.38)$$

Η είσοδος στο σύστημα είναι η μοναδιαία βηματική ακολουθία, $u(n)$, και οι αρχικές συνθήκες είναι $y(-1) = y(-2) = 1$. Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος.

Λύση: Εφαρμόζοντας το μονόπλευρο μετασχηματισμό Z στη διαφοροεξίσωση του συστήματος και λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε

$$Y(z) \left(1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2} \right) - \frac{5}{6}(z^{-1}z) + \frac{1}{6}z^{-2}(z + z^2) = z^{-2}X(z)$$

ή

$$Y(z) = \frac{z^{-2}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} X(z) - \frac{\frac{1}{6}(z^{-1} - 4)}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

ή

$$Y(z) = \frac{1}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})} X(z) - \frac{1}{6} \frac{z(1 - 4z)}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})} \quad (5.39)$$

Προφανώς

$$H(z) = \frac{1}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})}$$

Για τη μοναδιαία βηματική ακολουθία έχουμε

$$X(z) = \frac{z}{z - 1}$$

Αν κάνουμε ανάπτυξη σε απλά κλάσματα, τότε ο πρώτος όρος του αθροίσματος γίνεται

$$\frac{z}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})(z - 1)} = \frac{3}{z - 1} + \frac{3}{z - \frac{1}{3}} - \frac{6}{z - \frac{1}{2}}$$

Η συνιστώσα της απόκρισης εξόδου $y(n)$ που οφείλεται στον παραπάνω όρο είναι

$$y_0(n) = 3u(n-1) + 3 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} u(n-1) - 6 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} u(n-1)$$

Η συνεισφορά αυτού του όρου είναι γνωστή και ως *απόκριση μηδενικής κατάστασης* (*zero state response*) και είναι αυτή που θα παίρναμε με μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Ο δεύτερος όρος στην (5.39) γράφεται ως

$$B(z) = -\frac{1}{6} \frac{z(1-4z)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)}$$

ή

$$\frac{B(z)}{z} = -\frac{1}{6} \frac{1-4z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{z - \frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \frac{1}{z - \frac{1}{3}}$$

ή

$$B(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

και η συνεισφορά του στην έξοδο είναι

$$y_i(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Η συνιστώσα $y_i(n)$ της απόκρισης εξόδου είναι γνωστή και ως *απόκριση μηδενικής εισόδου* (*zero input response*) και οφείλεται στη διεγερση από τις αρχικές συνθήκες και μόνο.

Η ολική απόκριση στην έξοδο του συστήματος είναι η υπέρθεση των δύο παραπάνω συνιστωσών, δηλαδή

$$y(n) = y_0(n) + y_i(n)$$

△

5.10 Περιγραφή Συστημάτων Διακριτού Χρόνου στο Χώρο Κατάστασης

Όσα έχουμε αναπτύξει για την περιγραφή αναλογικών συστημάτων στο χώρο κατάστασης μεταφέρονται και στην περίπτωση συστημάτων διακριτού χρόνου. Τη θέση των διαφορικών εξισώσεων έχουν τώρα οι εξισώσεις διαφορών και του μετασχηματισμού Laplace ο μετασχηματισμός Z . Ως χαρακτηριστικά, και ταυτόχρονα ιδιαίτερα χρήσιμα, παραδείγματα αυτής της αντιστοίχισης αναφέρουμε τα παρακάτω:

- Οι δυναμικές εξισώσεις ενός ΓΧΑ συστήματος, που αντιστοιχούν στις εξισώσεις (4.29) και (4.30), θα είναι της μορφής

$$\underline{x}(n+1) = A\underline{x}(n) + \underline{b}v(n) \quad (5.40)$$

$$y(n) = \underline{c}^T \underline{x}(n) + dv(n) \quad (5.41)$$

- Ακολουθώντας ανάλογη πορεία, μπορούμε να δείξουμε ότι το μητρώο καταστατικής μετάβασης $\Phi(n)$ ισούται με

$$\Phi(n) = A^n = A \cdot A \cdots A \quad (5.42)$$

(Υπενθυμίζουμε ότι στο μετασχηματισμό Laplace ένας πόλος τιμής a αντιστοιχεί σε όρο της μορφής e^{at} ενώ στο μετασχηματισμό Z σε όρο της μορφής a^n).

- Η αντίστοιχη της (4.70) εξίσωση καταστατικής μετάβασης είναι η

$$\underline{x}(n) = \Phi(n - n_0)\underline{x}(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \Phi(n - 1 - k)\underline{b}v(n) \quad (5.43)$$

- Η αντίστοιχη της (4.75) σχέση υπολογισμού της συνάρτησης μεταφοράς είναι η

$$H(z) = \underline{c}^T \frac{\text{Adj}(zI - A)}{\det(zI - A)} \underline{b} + d \quad (5.44)$$

- Και, τέλος, η αντίστοιχη της (4.78) σχέση για την κρουστική απόκριση είναι η

$$h(n) = \underline{c}^T A^{n-1} \underline{b}u(n-1) + d\delta(n) \quad (5.45)$$

5.11 Δειγματοληψία - Θεώρημα Nyquist

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου, ένας τρόπος με τον οποίο μπορεί να προκύψει ένα σήμα διακριτού χρόνου, $x(n)$, είναι με δειγματοληψία ενός σήματος συνεχούς χρόνου, $x_a(t)$, με σκοπό την αποθήκευση ή/και επεξεργασία του από ψηφιακό υπολογιστή. Η διαδικασία της *δειγματοληψίας* (*sampling*) συνίσταται στη μέτρηση των τιμών του σήματος συνεχούς χρόνου σε διακριτές χρονικές στιγμές. Η δειγματοληψία αποτελεί το πρώτο στάδιο στη διαδικασία της ψηφιοποίησης ενός αναλογικού σήματος, δηλαδή της μετατροπής του σε ακολουθία από 0 και 1. Οι μετρούμενες τιμές καλούνται *δείγματα* (*samples*) του σήματος. Συνήθως, η μέτρηση γίνεται σε τακτά διαστήματα διάρκειας T sec, δηλαδή³

$$x(n) \equiv x_a(nT) \quad (5.46)$$

Το χρονικό διάστημα T είναι γνωστό ως *περίοδος δειγματοληψίας*. Το αντίστροφό του, $f_s \equiv \frac{1}{T}$, καλείται *συχνότητα* (ή *ρυθμός*) *δειγματοληψίας*.

³Αυτή η μέθοδος δειγματοληψίας καλείται *ομοιόμορφη* (ή *περιοδική*) και είναι αυτή που συναντάται σε πρακτικές συσκευές ψηφιοποίησης (A/D).

Η επιλογή κατάλληλης τιμής για την περίοδο (ή ισοδύναμα το ρυθμό) δειγματοληψίας συνιστά το κεντρικό ερώτημα. Η δειγματοληψία θα πρέπει να γίνει έτσι ώστε ούτε να χαθεί πληροφορία που περιέχεται στο σήμα συνεχούς χρόνου, αλλά ούτε και ν' αυξηθούν χωρίς λόγο η απαιτούμενη μνήμη και ταχύτητα των χρησιμοποιούμενων κυκλωμάτων (με αντίστοιχη αύξηση του κόστους). Στο εδάφιο αυτό θα δείξουμε ότι υπάρχει μια σχέση που συνδέει τη μέγιστη επιτρεπτή περίοδο δειγματοληψίας με τη μέγιστη συχνότητα στο σήμα συνεχούς χρόνου.

Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να κατανοήσουμε πώς η ακολουθία των δειγμάτων, $x(n)$, συνδέεται με το αρχικό σήμα, $x_a(t)$. Τη σχέση αυτή θα την αναζητήσουμε στο πεδίο των συχνοτήτων. Ας θυμηθούμε, κατ' αρχήν, το ζεύγος MF συνεχούς χρόνου:

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (5.47)$$

$$X_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (5.48)$$

Από τις (5.46) και (5.47) έχουμε

$$x(n) = x_a(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega) e^{jn\Omega T} d\Omega \quad (5.49)$$

Επίσης, από τον τύπο του αντίστροφου MF διακριτού χρόνου γνωρίζουμε ότι για το $x(n)$ ισχύει:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (5.50)$$

Λόγω της μοναδικότητας του MF και του αντιστροφού του, οι δύο αναπαράστασεις του $x(n)$ στις (5.49) και (5.50) δεν μπορεί παρά να ταυτίζονται. Στη σύγκριση αυτών των δύο σχέσεων θα βοηθηθούμε αν εκφράσουμε το ολοκλήρωμα στην (5.49) ως άθροισμα ολοκληρωμάτων πάνω σε διαστήματα μήκους $\frac{2\pi}{T}$:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{(2r-1)\frac{\pi}{T}}^{(2r+1)\frac{\pi}{T}} X_a(\Omega) e^{jn\Omega T} d\Omega$$

Για ν' απλοποιήσουμε τα όρια στα παραπάνω ολοκληρώματα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $\Omega' = \Omega - \frac{2\pi}{T}r$:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_a\left(\Omega' + \frac{2\pi r}{T}\right) e^{jn\Omega' T} e^{j2\pi r n} d\Omega'$$

Αν αλλάξουμε τη σειρά της ολοκλήρωσης και της άθροισης και θυμηθούμε ότι $e^{j2\pi rn} = 1$ για ακέραιους r και n , παίρνουμε

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a \left(\Omega + \frac{2\pi r}{T} \right) e^{jn\Omega T} d\Omega \quad (5.51)$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $\Omega = \frac{\omega}{T}$, η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a \left(\frac{\omega}{T} + \frac{2\pi r}{T} \right) \right] e^{j\omega n} d\omega \quad (5.52)$$

Συγκρίνοντας τις (5.50) και (5.52) είναι τώρα εύκολο να συμπεράνουμε ότι

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a \left(\frac{\omega}{T} + \frac{2\pi r}{T} \right) \quad (5.53)$$

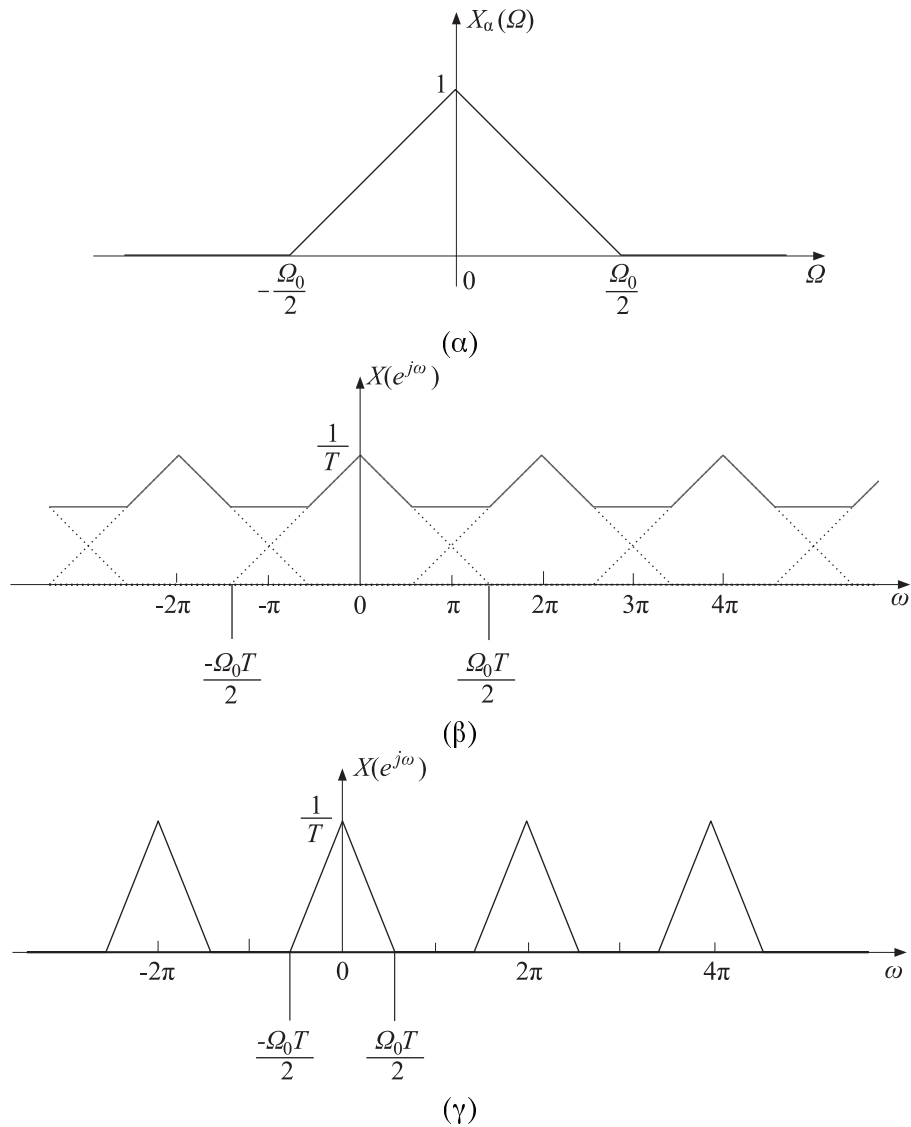
ή ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή $\Omega = \omega/T$,

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a \left(\Omega + \frac{2\pi r}{T} \right) \quad (5.54)$$

Η σχέση (5.53) μας λέει ότι ο MF του σήματος διακριτού χρόνου, που αντιστοιχεί στην περιοδική δειγματοληψία με περίοδο T του αναλογικού σήματος $x_a(t)$, προκύπτει από την περιοδική επανάληψη του MF του αναλογικού σήματος με περίοδο επανάληψης $\frac{2\pi}{T}$. Το Σχήμα 5.16 εξηγεί γραφικά τη σχέση αυτή. Στο Σχήμα 5.16(α) φαίνεται ο MF του σήματος συνεχούς χρόνου (που, για διευκόλυνσή μας, υποθέτουμε ότι είναι πραγματικός). Έστω $\frac{\Omega_0}{2}$ η μέγιστη συχνότητα, δηλαδή η συχνότητα πέρα από την οποία ο MF του αναλογικού σήματος είναι μηδέν. Με άλλα λόγια, όπως φαίνεται και στο σχήμα,

$$X_a(\Omega) = 0, \quad |\Omega| > \frac{\Omega_0}{2} \quad (5.55)$$

Η μέγιστη συχνότητα $\frac{\Omega_0}{2}$ καλείται και *εύρος ζώνης (bandwidth)* του σήματος. Σύμφωνα με την (5.53), ο MF του σήματος διακριτού χρόνου, $X(e^{j\omega})$, θα είναι όπως στο Σχήμα 5.16(β) αν $\frac{\Omega_0}{2} > \frac{\pi}{T}$. Είναι φανερό ότι σ' αυτή την περίπτωση οι διαδοχικές επαναλήψεις του $X_a(\Omega)$ (που φαίνονται με διακεκομμένες γραμμές) επικαλύπτονται και αθροιζόμενες δημιουργούν τον $X(e^{j\omega})$, στον οποίο όμως έχει χαθεί η αρχική μορφή του MF $X_a(\Omega)$ από τον οποίο προέκυψε. Σ' αυτή την περίπτωση είναι αδύνατο ν' ανακτήσουμε τον $X_a(\Omega)$ από τον $X(e^{j\omega})$ που προκύπτει



Σχήμα 5.16 Σχέση μεταξύ των MF ενός σήματος συνεχούς χρόνου και της ακολουθίας δειγμάτων του. (α) MF του σήματος συνεχούς χρόνου. (β) MF του σήματος διακριτού χρόνου που προκύπτει με δειγματοληψία. Η περίοδος δειγματοληψίας είναι μεγάλη με αποτέλεσμα η περιοδική επανάληψη του MF συνεχούς χρόνου να οδηγεί σε επικάλυψη. (γ) Όπως στο (β) αλλά με περίοδο δειγματοληψίας αρκετά μικρή ώστε ν' αποφεύγεται το φαινόμενο της επικάλυψης.

με τη δειγματοληψία, και κατά συνέπεια το αρχικό σήμα, $x_a(t)$, από τα δείγματά του, $x(n)$. Με άλλα λόγια, το πέρασμα από το $x_a(t)$ στα δείγματά του ισοδυναμεί με απώλεια πληροφορίας. Λόγω της επικάλυψης μεταξύ των περιοδικών επαναλήψεων του $X_a(\Omega)$ αναφερόμαστε στο φαινόμενο αυτό ως *επικάλυψη* (ή *αναδίπλωση* (*wrap-around*)). Στο Σχήμα 5.16(γ) φαίνεται η περίπτωση όπου

$$\frac{\Omega_0}{2} \leq \frac{\pi}{T} \quad (5.56)$$

Ο $X(e^{j\omega})$ ταυτίζεται τότε με τον $X_a(\Omega)$ στο διάστημα $-\pi \leq \omega \leq \pi$ κι επομένως, όπως θα δούμε παρακάτω, είναι δυνατή η ανάκτηση του $X_a(\Omega)$ από τον $X(e^{j\omega})$, άρα και του αρχικού σήματος, $x_a(t)$, από τα δείγματά του, $x(n)$. Ισοδύναμα η (5.56) γράφεται

$$\Omega_0 \leq \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s \quad (5.57)$$

ή αν $\Omega_s \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s$ είναι η συχνότητα δειγματοληψίας σε rad/sec,

$$\boxed{\Omega_s \geq \Omega_0} \quad (5.58)$$

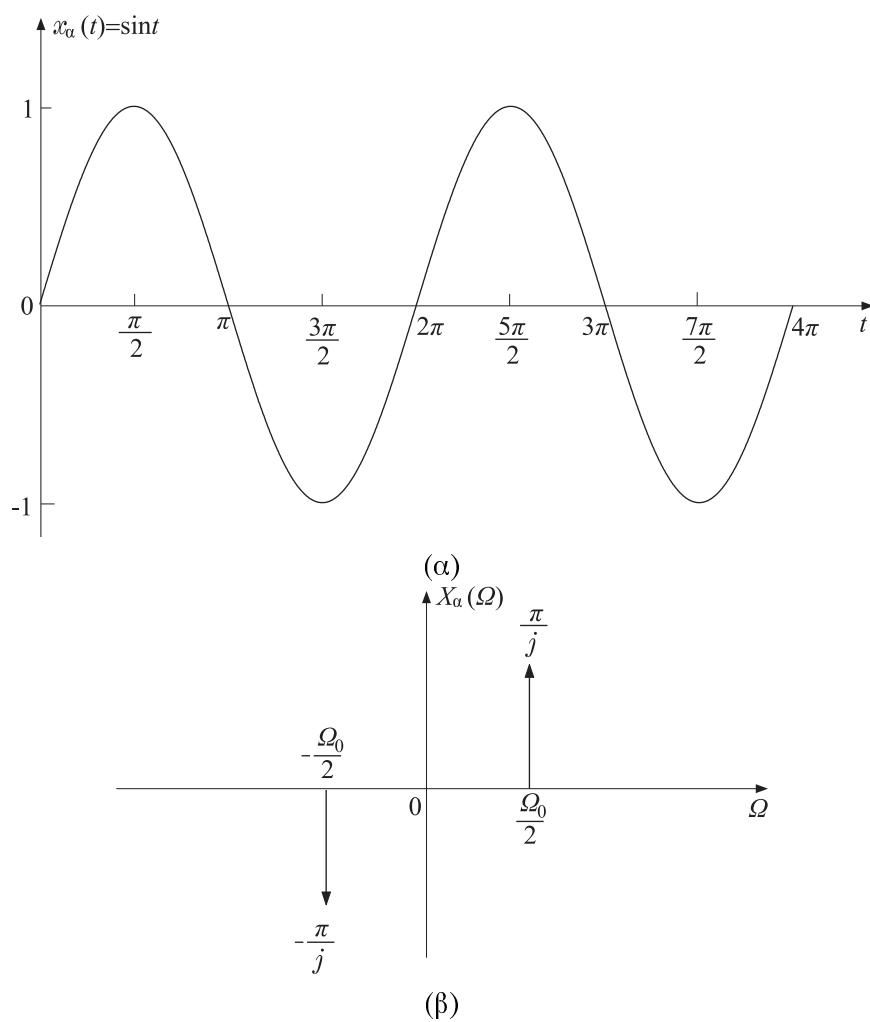
Η παραπάνω σχέση δίνει την ελάχιστη επιτρεπτή (κυκλική) συχνότητα δειγματοληψίας για την αποφυγή της επικάλυψης και είναι γνωστή ως *θεώρημα ή κριτήριο του Nyquist*:

Η ελάχιστη συχνότητα με την οποία πρέπει να ληφθούν δείγματα από ένα σήμα συνεχούς χρόνου, $x_a(t)$, ώστε να είναι δυνατή η ανάκτησή του από τα δείγματά του, $x(n)$ (δηλαδή να μην υπάρχει επικάλυψη) ισούται με το διπλάσιο της μέγιστης συχνότητας που υπάρχει στο $x_a(t)$.

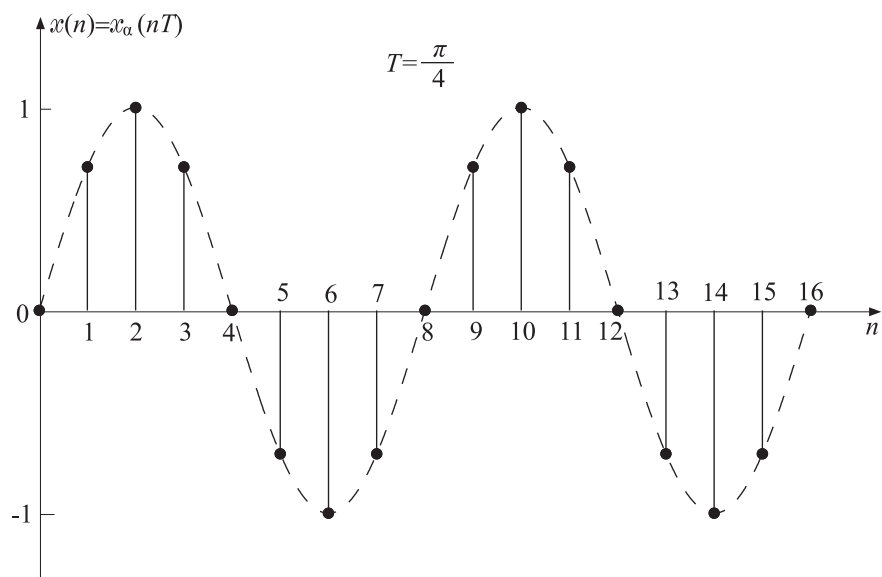
Με άλλα λόγια, όσο πιο γρήγορα μεταβάλλεται το σήμα μας στη μονάδα του χρόνου (δηλ. όσο πιο μεγάλη η Ω_0) τόσο πιο συχνά θα πρέπει να γίνεται η δειγματοληψία, αποτέλεσμα που βρίσκεται σε πλήρη αρμονία και με την κοινή λογική.

Παράδειγμα 5.14: Δίνεται το σήμα συνεχούς χρόνου $x_a(t) = \sin t$. Δώστε δύο τιμές της περιόδου δειγματοληψίας T , μία που να πληροί και μία που να μην πληροί το κριτήριο του Nyquist.

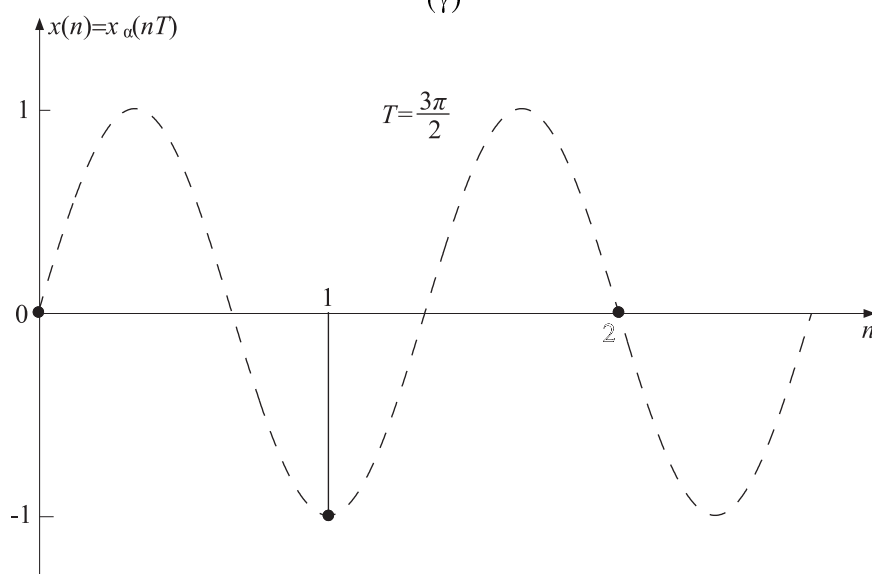
Λύση: Το δοσμένο σήμα και ο MF του φαίνονται στα Σχήματα 5.17(α) και (β), αντίστοιχα. Η μέγιστη (και μοναδική) συχνότητα που υπάρχει σ' αυτό είναι 1 rad/sec, δηλαδή $\Omega_0 = 2$ rad/sec. Άρα, μια επιτρεπτή τιμή για την περίοδο δειγματοληψίας T είναι, π.χ., $T = \frac{\pi}{4}$ sec $< \frac{2\pi}{\Omega_0}$ sec. Τα δείγματα που προκύπτουν μ' αυτή την περίοδο δειγματοληψίας φαίνονται στο Σχήμα 5.17(β). Είναι φανερό ότι



Σχήμα 5.17 (α) Το σήμα $x_a(t) = \sin t$. (β) Ο ΜΦ $X_a(\Omega)$. Δειγματοληψία του $x_a(t)$ με περίοδο (γ) $T = \frac{\pi}{4}$ και (δ) $T = \frac{3\pi}{2}$.



(γ)



(δ)

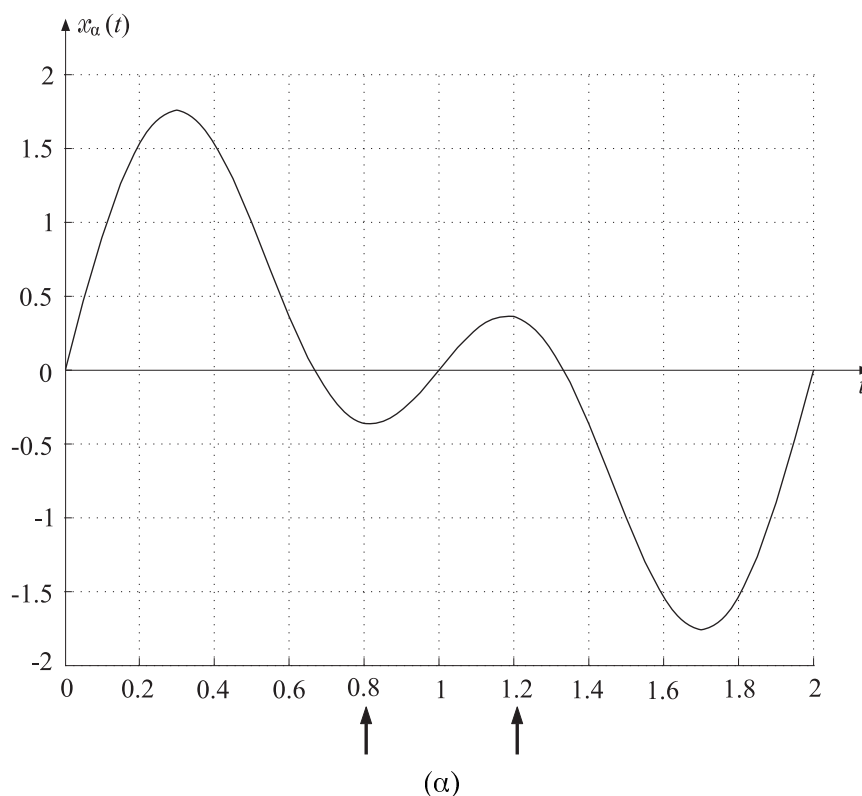
Σχήμα 5.17 (Συνεχ.)

η ακολουθία των δειγμάτων παρακολουθεί τη μορφή του $x_a(t)$. Στο Σχήμα 5.17(δ) φαίνεται το αποτέλεσμα της δειγματοληψίας με περίοδο $T = \frac{3\pi}{2} \text{ sec} > \frac{2\pi}{\Omega_0} \text{ sec}$. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει επικάλυψη και η ακολουθία των δειγμάτων δεν θυμίζει σε τίποτε το αρχικό μας σήμα. \triangle

Παρατηρήσεις:

α) Είδαμε ότι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας για αποφυγή της επικάλυψης συνδέεται με τη μέγιστη συχνότητα που υπάρχει στο σήμα συνεχούς χρόνου. Από τη φυσική σημασία της συχνότητας γνωρίζουμε ότι γρήγορες μεταβολές ενός σήματος στο χρόνο αντιστοιχούν στην ύπαρξη μεγάλων τιμών συχνότητας με υψηλή ενέργεια και αντίστροφα. Όσο μεγαλύτερο το εύρος ζώνης ($\frac{\Omega_0}{2}$) του σήματος τόσο ο ρυθμός μεταβολής του σήματος στο πεδίο του χρόνου είναι μεγαλύτερος. Χονδρικά, μπορούμε να πούμε ότι εάν τ είναι η διάρκεια της ταχύτερης μεταβολής από ένα τοπικό ελάχιστο (μέγιστο) σ' ένα τοπικό μέγιστο (ελάχιστο), τότε το Ω_0 είναι περίπου ίσο με $\frac{2\pi}{\tau}$. Η περίοδος δειγματοληψίας θα πρέπει να είναι μικρότερη από τ ώστε να μη χαθεί σημαντική πληροφορία. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα το σήμα $x_a(t)$ που φαίνεται στο Σχήμα 5.18(α), για το οποίο η ταχύτερη μεταβολή από ένα τοπικό ελάχιστο σ' ένα γειτονικό τοπικό μέγιστο διαρκεί 0.4 sec (το διάστημα αυτό σημειώνεται με βέλη στο σχήμα). Είναι λογικό να σκεφτούμε τότε ότι η περίοδος δειγματοληψίας θα πρέπει να είναι το πολύ ίση με 0.4 sec. Στο Σχήμα 5.18(β) φαίνονται τα δείγματα για περίοδο δειγματοληψίας 0.2 sec. Είναι προφανές ότι μπορούμε να παρακολουθήσουμε τις μεταβολές της αρχικής κυματομορφής από τα δείγματά της. Στο Σχήμα 5.18(γ) φαίνονται τα δείγματα για περίοδο δειγματοληψίας 0.8 sec. Στην περίπτωση αυτή τα δείγματα που προκύπτουν είναι αδύνατο να μας πληροφορήσουν για τη μορφή του σήματος $x_a(t)$ και σημαντική πληροφορία έχει χαθεί.

β) Υποθέσαμε παραπάνω ότι υπάρχει πεπερασμένη μέγιστη συχνότητα, $\frac{\Omega_0}{2}$, στο σήμα συνεχούς χρόνου, δηλαδή ικανοποιείται η (5.55). Τέτοια σήματα λέγονται *σήματα περιορισμένου εύρους ζώνης (bandlimited)*. Είναι φανερό από τα παραπάνω ότι δεν είναι δυνατή η ανάκτηση ενός σήματος συνεχούς χρόνου από τα δείγματά του αν αυτό δεν είναι περιορισμένου εύρους ζώνης. Η (5.55) συχνά δεν ικανοποιείται στην πράξη, παρά μόνο προσεγγιστικά. Σε τέτοιες περιπτώσεις η περίοδος δειγματοληψίας επιλέγεται τόσο μικρή όσο απαιτείται προκειμένου η απώλεια πληροφορίας να είναι αμελητέα και ταυτόχρονα το πλήθος των δειγμάτων που προκύπτουν να μην υπερβαίνει τη διαθέσιμη μνήμη. Η αναπαραγωγή του αρχικού σήματος, αν και όχι πλήρης, μπορεί να είναι ικανοποιητική αν ο $X_a(\Omega)$ μειώνεται στο μηδέν αρκετά γρήγορα καθώς $|\Omega| \rightarrow \infty$, κάτι που ισχύει για τα σήματα που συναντά κανείς στην πράξη.



Σχήμα 5.18 (α) Σήμα συνεχούς χρόνου $x_a(t)$.

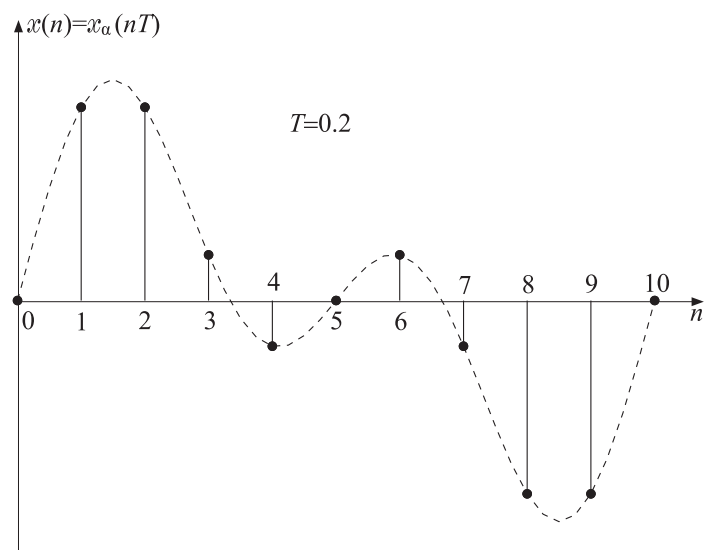
5.11.1 Ανάκτηση Σήματος Συνεχούς Χρόνου από τα Δείγματά του

Όπως φαίνεται από τις σχέσεις (5.53), (5.54) και το Σχήμα 5.16, όταν δεν υπάρχει επικάλυψη, η αρχική μορφή του φάσματος διατηρείται στο φάσμα του σήματος διακριτού χρόνου που προκύπτει από τη δειγματοληψία. Στην περίπτωση αυτή τα δείγματα $x(n)$ που προκύπτουν είναι αρκετά πυκνά για ν' αναπαραγάγουν το αναλογικό σήμα, $x_a(t)$, από το οποίο προέκυψαν. Ας δούμε πώς και γιατί.

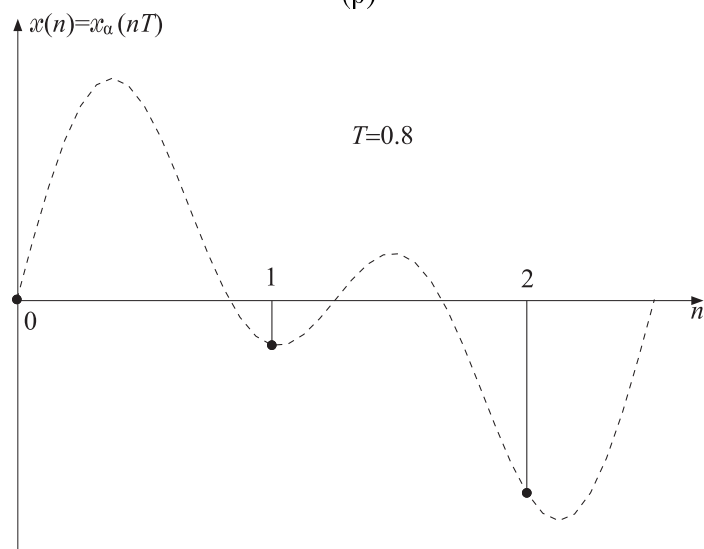
Από τις (5.54) και (5.47) για $\frac{\Omega_0}{2} < \frac{2\pi}{T}$ έχουμε

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} X_a(\Omega), \quad -\frac{\pi}{T} \leq \Omega \leq \frac{\pi}{T}$$

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$



(β)



(γ)

Σχήμα 5.18 (Συνεχ.) (β), (γ) Αποτέλεσμα δειγματοληψίας του (α) με περίοδο $T = 0.2 \text{ sec}$ και $T = 0.8 \text{ sec}$, αντίστοιχα.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_a(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\
&= \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X(e^{j\Omega T}) e^{j\Omega t} d\Omega
\end{aligned}$$

Αλλά

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega T n}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
x_a(t) &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega T n} \right] e^{j\Omega t} d\Omega \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[\frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{j\Omega(t-nT)} d\Omega \right]
\end{aligned}$$

ή τελικά

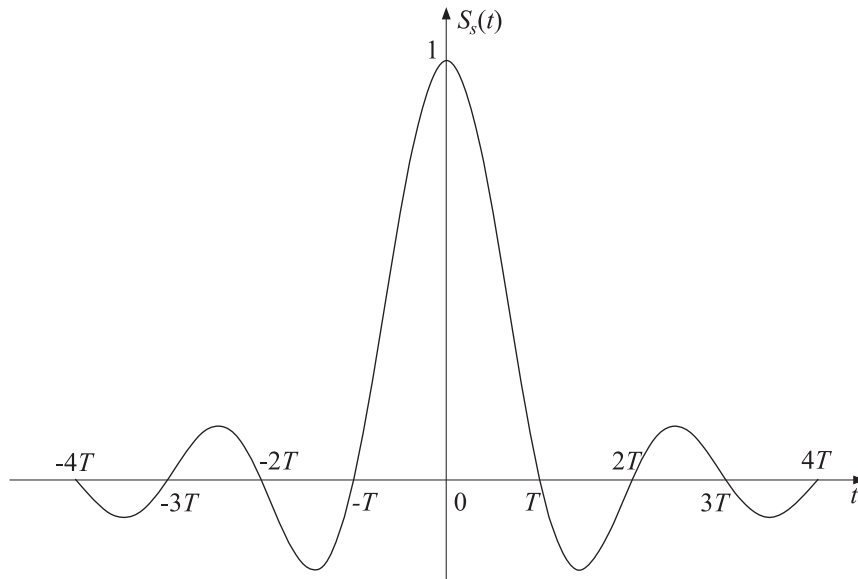
$$\begin{aligned}
x_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\sin \left[\frac{\pi}{T}(t-nT) \right]}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) S_s(t-nT)
\end{aligned} \tag{5.59}$$

όπου

$$S_s(t) \equiv Sa\left(\frac{\pi}{T}t\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)}{\frac{\pi}{T}t} \tag{5.60}$$

και $Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$ είναι η συνάρτηση δειγματοληψίας που ορίστηκε στο Παράδειγμα 2.1. Η συνάρτηση $S_s(t)$ φαίνεται στο Σχήμα 5.19. Είναι μηδενική στα σημεία $t = nT$, $n \neq 0$, ενώ η τιμή της στο $t = 0$ ορίζεται ως το όριο της εκεί, δηλαδή $S_s(0) = 1$. Ο τύπος (5.59) μας λέει ότι, αν η περίοδος δειγματοληψίας ικανοποιεί το κριτήριο του Nyquist, τότε το αρχικό αναλογικό σήμα μπορεί να προκύψει ως άθροισμα συναρτήσεων S_s ολισθημένων στις στιγμές δειγματοληψίας και πολλαπλασιασμένων με τα αντίστοιχα δείγματα. Στο Σχήμα 5.20 φαίνονται τρεις από τους όρους που συνεισφέρουν στο άθροισμα (5.59). Για την τιμή $x_a(t_1)$, όπου t_1 μια χρονική στιγμή που δεν συμπίπτει με στιγμή δειγματοληψίας ($t_1 \neq nT$), θα έχουμε

$$x_a(t_1) = \cdots + x(1)S_s(t_1 - T) + x(2)S_s(t_1 - 2T) + x(3)S_s(t_1 - 3T) + \cdots$$



Σχήμα 5.19 Η συνάρτηση $S_s(t) = \sin(\pi t/T)/(\pi t/T)$.

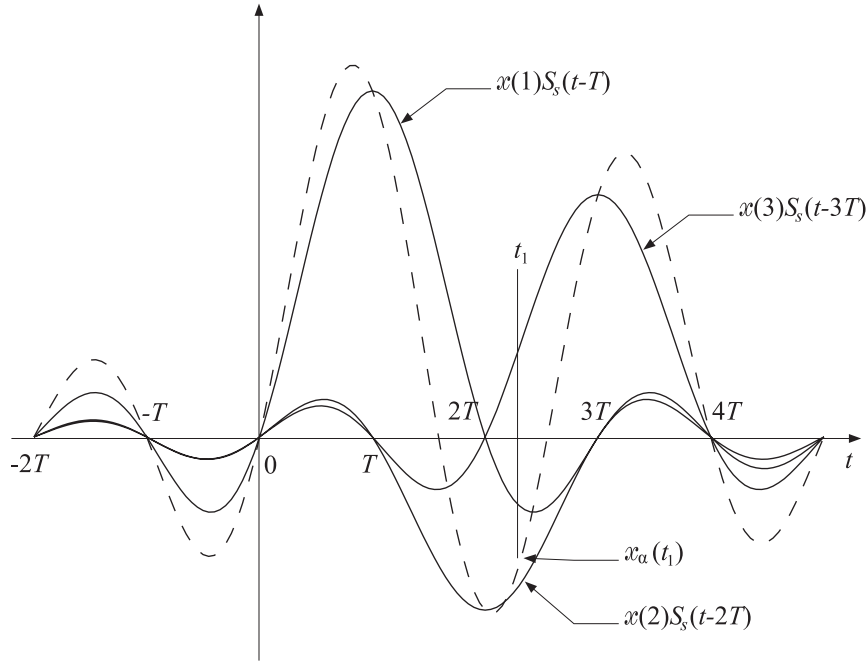
Η συνάρτηση $S_s(t - nT)$ είναι μηδενική σε όλες τις στιγμές δειγματοληψίας εκτός της στιγμής $t = nT$ στην οποία παίρνει την τιμή 1. Άρα, κατά τον υπολογισμό του $x_a(t)$ σε κάποια από τις στιγμές δειγματοληψίας, ας πούμε $t = n_1T$, ο μόνος όρος που συνεισφέρει στο άθροισμα είναι ο $x(n_1)S_s(t - n_1T)$ και καταλήγουμε στην ταυτοτική σχέση

$$x_a(n_1T) = x(n_1)S_s(n_1T - n_1T) = x(n_1)$$

Αυτό σημαίνει ότι το ανακατασκευασμένο σήμα θα συμπίπτει ακριβώς με το $x_a(t)$ στις στιγμές δειγματοληψίας. Το εκπληκτικό στον τύπο (5.59) είναι ότι το άθροισμα αυτό θα συμπίπτει με το αρχικό σήμα όχι μόνο στις στιγμές δειγματοληψίας αλλά και σε όλες τις ενδιάμεσες στιγμές t !

Η εξίσωση (5.59) έχει μια άμεση φυσική ερμηνεία. Εκφράζει το σήμα $x_a(t)$ ως την έξοδο ενός ιδανικού αναλογικού κατωπερατού φίλτρου με είσοδο την ακολουθία των δειγμάτων. Για να το δούμε αυτό, αρκεί να θεωρήσουμε το σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$ ως μια ειδική περίπτωση σήματος συνεχούς χρόνου, που εκφράζεται με τη βοήθεια κρουστικών συναρτήσεων:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t - nT)$$



Σχήμα 5.20 Οι όροι του αθροίσματος (5.59) που αντιστοιχούν στα δείγματα $x(1), x(2), x(3)$. Η διακεκομμένη γραμμή παριστάνει το άθροισμα όλων των όρων, που ισούται με το $x_a(t)$.

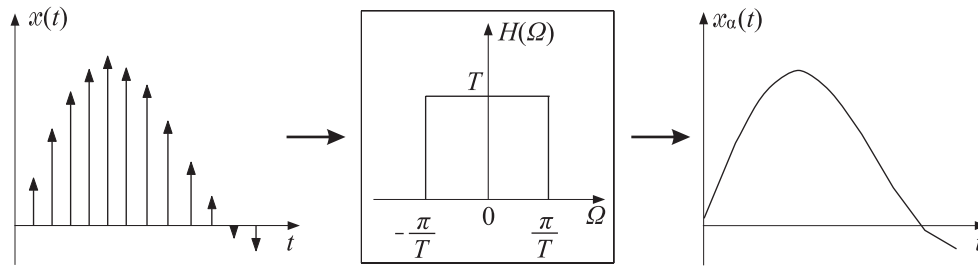
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) \quad (5.61)$$

Είναι φανερό από το Σχήμα 5.16(γ) ότι ο MF $X_a(\Omega)$ μπορεί ν' αναπαραχθεί από το άθροισμα των περιοδικών του επαναλήψεων αν με τη βοήθεια ενός ιδανικού κατωπερατού φίλτρου (βλ. Εδάφιο 2.3.4) “απομονώσουμε” τη βασική του επανάληψη, αυτή με κέντρο τη μηδενική συχνότητα, και την πολλαπλασιάσουμε με T . Ας θεωρήσουμε λοιπόν το αναλογικό ιδανικό κατωπερατό φίλτρο με απόκριση συχνοτήτων

$$H(\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\Omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

Η συχνότητα αποκοπής του είναι $\Omega_c = \frac{\pi}{T}$. Αν $x(t)$ είναι η είσοδος σ' αυτό, η έξοδός του, $y(t)$, θα έχει MF

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) \quad (5.62)$$



Σχήμα 5.21 Ανάκτηση αναλογικού σήματος από τα δείγματά του με τη βοήθεια ιδανικού κατωπερατού φίλτρου.

που, σύμφωνα με το Σχήμα 5.16(γ), θα είναι

$$Y(\Omega) = X_a(\Omega)$$

ή ισοδύναμα

$$y(t) = x_a(t)$$

Με άλλα λόγια, μ' ένα τέτοιο σύστημα ανακτούμε το αναλογικό μας σήμα. Η κρουστική απόκριση αυτού του φίλτρου είναι (βλ. Εδάφιο 2.3.4)

$$h(t) = Sa\left(\frac{\pi}{T}t\right) = S_s(t)$$

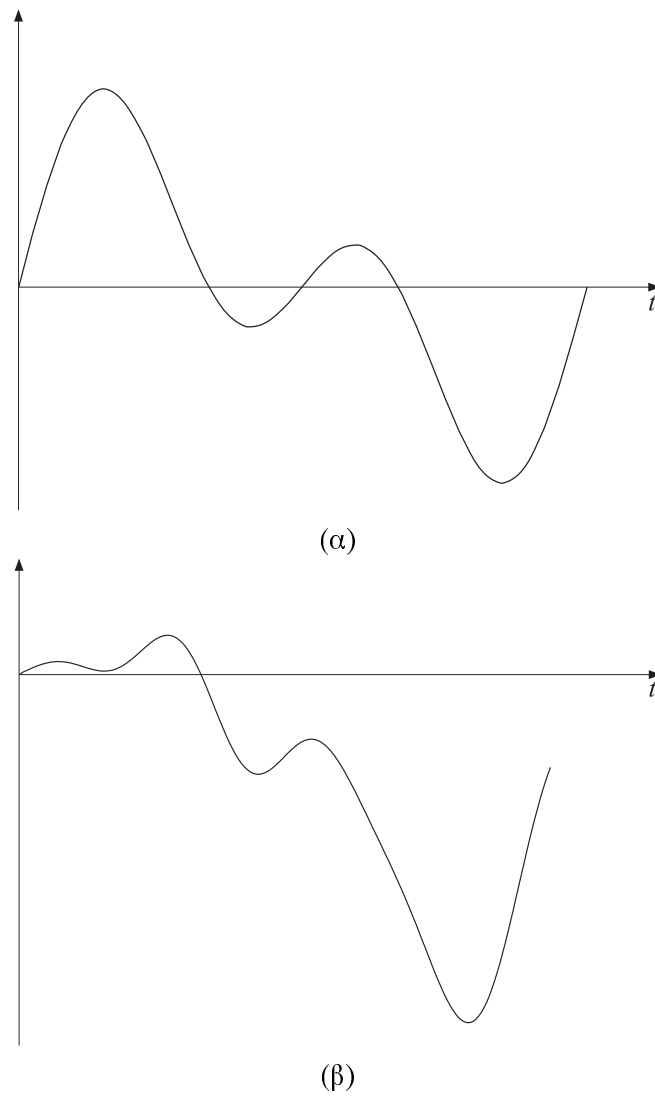
Η έξοδος, επομένως, του συστήματος δίνεται από τη συνέλιξη των $x(t)$, $S_s(t)$, που δεν είναι τίποτε άλλο από τη σχέση (5.59). Η διαδικασία ανακατασκευής που περιγράψαμε φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 5.21.

Στο Σχήμα 5.22 δίνονται τα ανακατασκευασμένα σήματα για τις ακολουθίες δειγμάτων των Σχημάτων 5.18(β) και (γ), αντίστοιχα. Είναι σαφές ότι το αποτέλεσμα της ανακατασκευής για την περίπτωση (β), όπου ο ρυθμός δειγματοληψίας δεν ικανοποιεί το κριτήριο του Nyquist, απέχει πολύ από το αρχικό σήμα.

Παράδειγμα 5.15: Δίνεται το αναλογικό σήμα

$$x_a(t) = 2 \cos(2\pi 100t) \cos(2\pi 600t)$$

Έστω ότι δειγματοληπτούμε το σήμα αυτό με συχνότητα $f_s = 2$ kHz. Να προσδιοριστεί το διάστημα των δυνατών συχνοτήτων αποκοπής του κατωπερατού φίλτρου που θα χρησιμοποιηθεί για την ανάκτηση του $x_a(t)$ από τα δείγματά του.



Σχήμα 5.22 (α), (β) Αποτελέσματα εφαρμογής του τύπου ανακατασκευής για τα σήματα διακριτού χρόνου των Σχημάτων 5.18(β) και (γ), αντίστοιχα.

Λύση:

Το σήμα $x_a(t)$ γράφεται

$$x_a(t) = \cos(2\pi 500t) + \cos(2\pi 700t)$$

Γνωρίζουμε ότι, αν $x(t) = \cos \Omega_0 t$, τότε

$$X(\Omega) = \pi [\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$$

άρα ο MF του $x_a(t)$ είναι όπως στο Σχήμα 5.23(α). Ο MF του σήματος διακριτού χρόνου που προκύπτει με δειγματοληψία με περίοδο

$$T = \frac{1}{f_s} = 0.5 \text{ msec}$$

φαίνεται στο Σχήμα 5.23(β). Από τα Σχήματα 5.23(α) και (β) γίνεται φανερό ότι η συχνότητα αποκοπής του κατωπερατού φίλτρου μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε μεταξύ $f_1 = 700 \text{ Hz}$ και $f_2 = f_s - 700 = 1300 \text{ Hz}$. \triangle

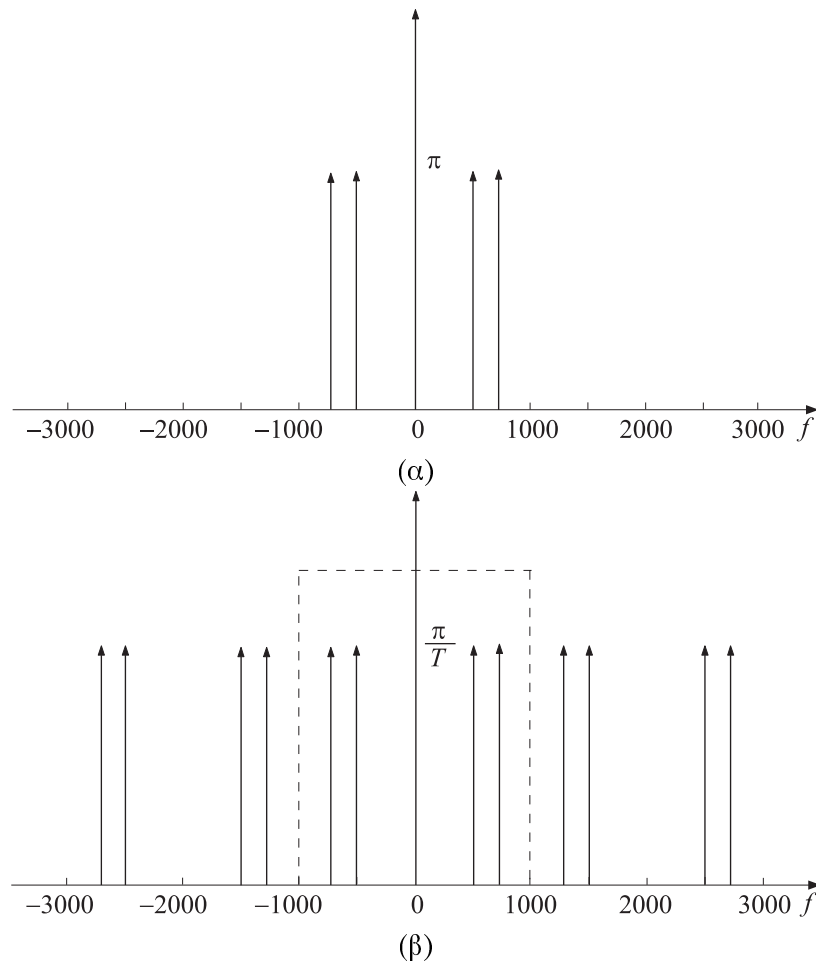
Παρατηρήσεις:

α) Το φαινόμενο της επικάλυψης είναι γνωστό κι ως *παράλλαξη* ή *ψευδωνυμία* (*aliasing*). Ο λόγος είναι ότι, κατά την επικάλυψη, οι υψηλές ($> \frac{\Omega_s}{2}$) συχνότητες στον $X_a(\Omega)$ παίρνουν την “ταυτότητα” των χαμηλών ($< \frac{\Omega_s}{2}$) συχνοτήτων στον $X(e^{j\omega})$ κι εμφανίζονται ως συχνότητες χαμηλότερες της $\frac{\Omega_s}{2}$. Ο καλύτερος τρόπος για να το δούμε αυτό είναι μέσω ενός παραδείγματος. Έστω ότι ένα σήμα $x_a(t)$, αποτελούμενο από το άθροισμα δύο ημιτονοειδών σημάτων με συχνότητες Ω_1 και $\Omega_2 > \Omega_1$, δηλαδή

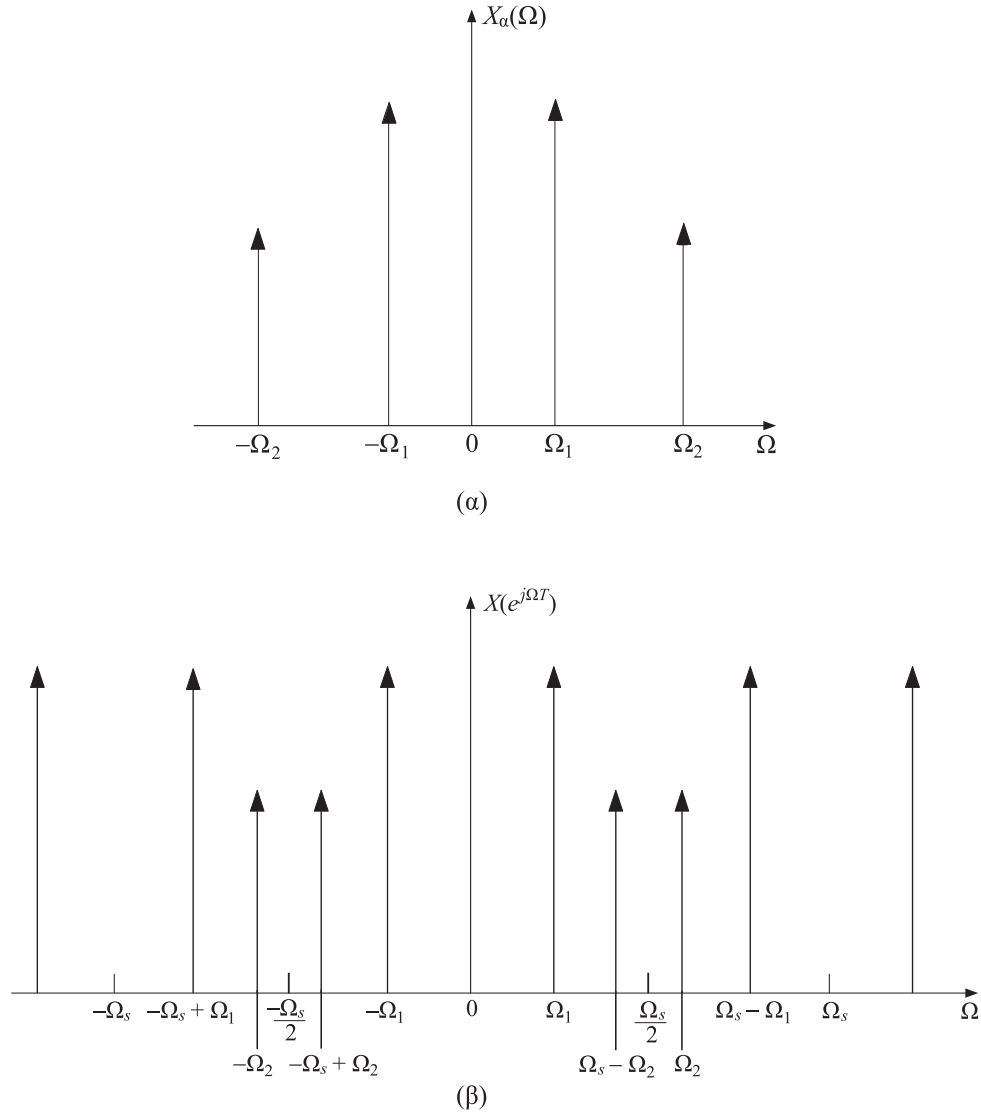
$$x_a(t) = A_1 \cos \Omega_1 t + A_2 \cos \Omega_2 t,$$

υφίσταται δειγματοληψία με περίοδο T η οποία δεν ικανοποιεί το κριτήριο του Nyquist, με άλλα λόγια, $\Omega_s \equiv \frac{2\pi}{T} < 2\Omega_2$. Ο MF του $x_a(t)$, $X_a(\Omega)$, φαίνεται στο Σχήμα 5.24(α) ενώ το Σχήμα 5.24(β) δείχνει το MF της προκύπτουσας ακολουθίας δειγμάτων. Παρατηρούμε ότι η συχνότητα Ω_2 , που είναι υψηλή στο φάσμα $X_a(\Omega)$, εμφανίζεται ως χαμηλή πλέον συχνότητα στο $X(e^{j\Omega T})$, με το “ψευδώνυμο” $\Omega' \equiv \Omega_s - \Omega_2$. Επειδή $\Omega' < \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$, κατά την ανακατασκευή του σήματος συνεχούς χρόνου, θα πάρουμε στην έξοδο του κατωπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής $\frac{\Omega_s}{2}$ άθροισμα δύο ημιτονοειδών σημάτων με συχνότητες Ω_1 και Ω' αντί της Ω_2 . Αυτό μπορεί κανείς να το δει και γράφοντας το αρχικό σήμα ως

$$x_a(t) = A_1 \cos \Omega_1 t + A_2 \cos[(\Omega_s - \Omega')t]$$



Σχήμα 5.23 (α) Φάσμα του σήματος συνεχούς χρόνου $x_a(t) = 2 \cos(2\pi 100t) \cos(2\pi 600t)$.
 (β) Φάσμα του αποτελέσματος της δειγματοληψίας του με περίοδο $T = 0.5$ msec.



Σχήμα 5.24 Παράδειγμα του φαινομένου της ψευδωνυμίας (aliasing). (α) ΜF σήματος συνεχούς χρόνου. (β) ΜF της ακολουθίας δειγμάτων με περίοδο δειγματοληψίας T . Η υψηλή συχνότητα Ω_2 του $X_a(\Omega)$ εμφανίζεται ως χαμηλή στον $X(e^{j\Omega T})$, με τη νέα “ταυτότητα” $\Omega_s - \Omega_2$.

Μετά τη δειγματοληψία θα είναι:

$$\begin{aligned} x(n) &= x_a(nT) \\ &= A_1 \cos(\Omega_1 nT) + A_2 \cos[(\Omega_s - \Omega')nT] \\ &= A_1 \cos(\Omega_1 nT) + A_2 \cos(\Omega_s nT) \cos(\Omega' nT) + A_2 \sin(\Omega_s nT) \sin(\Omega' nT) \end{aligned}$$

και επειδή $\Omega_s nT = 2\pi n$,

$$x(n) = A_1 \cos(\Omega_1 nT) + A_2 \cos(\Omega' nT)$$

Βλέπουμε επομένως ότι τα δείγματα είναι σαν να προέρχονται από ημιτονοειδή σήματα στις συχνότητες Ω_1 και Ω' . Ανάλογα ισχύουν και για γενικότερα σήματα αποτελούμενα από περισσότερες συχνότητες. Όταν υπάρχει επικάλυψη κατά τη δειγματοληψία, η ενέργεια στις συχνότητες τις υψηλότερες της $\frac{\Omega_s}{2}$ εμφανίζεται ότι προέρχεται από αντίστοιχες ψευδώνυμες συχνότητες στο διάστημα $[0, \frac{\Omega_s}{2}]$.

β) Το πρόβλημα της ανακατασκευής ενός σήματος, $x_a(t)$, από τα δείγματά του, $x_a(nT)$, είναι στην πραγματικότητα ίδιο μ' αυτό του υπολογισμού των τιμών της συνάρτησης $x_a(t)$ ανάμεσα στα σημεία όπου αυτή είναι γνωστή και είναι γνωστό ως πρόβλημα *παρεμβολής (interpolation)* στην αριθμητική ανάλυση. Γράφοντας τον τύπο (5.59) στη γενικότερη μορφή

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \phi_n(t)$$

με τους συντελεστές α_n να είναι τα δείγματα $x(n)$ και τις συναρτήσεις $\phi_n(t)$ να δίνονται ως $\phi_n(t) = S_s(t - nT)$, βλέπουμε ότι πρόκειται επίσης για το ανάπτυγμα της συνάρτησης $x_a(t)$ στη βάση που ορίζεται από τις συναρτήσεις $\phi_n(t)$, με συντεταγμένες α_n . Κατά συνέπεια, ο τύπος ανακατασκευής (5.59) δεν είναι ο μόνος δυνατός. Άλλες συναρτήσεις $\phi_n(t)$ θα μπορούσαν επίσης να χρησιμοποιηθούν. Η επιλογή των συναρτήσεων $S_s(t - nT)$ όμως έχει δύο πολύ σημαντικά πλεονεκτήματα. Πρώτον, οι συντελεστές α_n συμπίπτουν με τα διαθέσιμα δείγματα, $x(n)$, και δεύτερο, διατηρείται η συνέλιξη. Το τελευταίο σημαίνει ότι αν $y_a(t)$ είναι η συνέλιξη των σημάτων $x_a(t)$ και $h_a(t)$, τότε τα αντίστοιχα δειγματοληπτημένα σήματα συνδέονται επίσης με διακριτή συνέλιξη, αρκεί βέβαια η χρησιμοποιούμενη περίοδος δειγματοληψίας να μην οδηγεί σε επικάλυψη. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ χρήσιμη όταν χρειάζεται να προσομοιωθεί ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου από ένα άλλο διακριτού χρόνου (βλ. Πρόβλημα 14). Επιπλέον, ο τύπος (5.59) μπορεί να ερμηνευτεί, όπως είδαμε παραπάνω, κι ως ένα ιδανικό

κατωπερατό φίλτρο. Το μειονέκτημα των συναρτήσεων $S_s(t - nT)$ είναι ότι δεν εφαρμόζονται σε σήματα που δεν είναι περιορισμένου εύρους ζώνης. Για περισσότερα πάνω σ' αυτό το θέμα παραπέμπουμε τον αναγνώστη σε πιο προχωρημένα βιβλία, π.χ. [Oppen75].

Πρέπει να τονιστεί ότι η παραπάνω διαδικασία ανακατασκευής, όπως αυτή περιγράφεται στο Σχήμα 5.21, δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην πράξη όπως έχει, δεδομένου ότι το ιδανικό κατωπερατό φίλτρο δεν είναι πραγματοποιήσιμο (βλ. Εδάφιο 2.3.4). Η αξία της έγκειται στο ότι παρέχει το θεωρητικό πλαίσιο για την ανάπτυξη πιο πρακτικών μεθόδων. Είναι εύκολο να δούμε ότι, εάν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι αρκετά μεγαλύτερος από την ελάχιστη επιτρεπτή τιμή που υπαγορεύει το θεώρημα του Nyquist, δηλαδή εάν $\frac{\Omega_0}{2} \ll \frac{\pi}{T}$, τότε, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.16(γ), το κατωπερατό φίλτρο που χρειάζεται δεν απαιτείται ν' ακολουθεί την απόκριση του ιδανικού φίλτρου με ακρίβεια. Με άλλα λόγια, η μετάβαση της απόκρισης συχνοτήτων του από την τιμή T στο μηδέν μπορεί να είναι βαθμιαία. Κι αυτό γιατί σε μια τέτοια περίπτωση το διάστημα μεταξύ των συχνοτήτων $\frac{\Omega}{2}$ και $\frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$, στο οποίο ο $X(e^{j\Omega T})$ είναι μηδέν, είναι αρκετά μεγάλο ώστε να επιτρέπει τη βαθμιαία μετάβαση της απόκρισης συχνοτήτων του φίλτρου από το T στο μηδέν. Μάλιστα, τόσο πιο εύκολα υλοποιήσιμο θα είναι το φίλτρο όσο μεγαλύτερος είναι ο ρυθμός δειγματοληψίας.

Στη συνέχεια, θα δούμε έναν πρακτικά υλοποιήσιμο τρόπο ανακατασκευής ενός αναλογικού σήματος από τα δείγματά του, γνωστό με το όνομα *δειγματοληψία και συγκράτηση* (*sample-and-hold (SH)*), που συναντάται συχνά σε πρακτικές συσκευές μετατροπής από ψηφιακό σε αναλογικό (D/A). Όπως δηλώνει και το όνομά της, η μέθοδος συνίσταται απλά στο να “κρατηθεί” η τιμή κάθε δείγματος μέχρι την επόμενη στιγμή δειγματοληψίας. Το αποτέλεσμα είναι ένα σήμα συνεχούς χρόνου με “κλιμακωτή” μορφή, όπως φαίνεται στο παράδειγμα του Σχήματος 5.25. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί απλά περνώντας το σήμα (5.61) μέσα από το αναλογικό φίλτρο με χρονιστική απόκριση

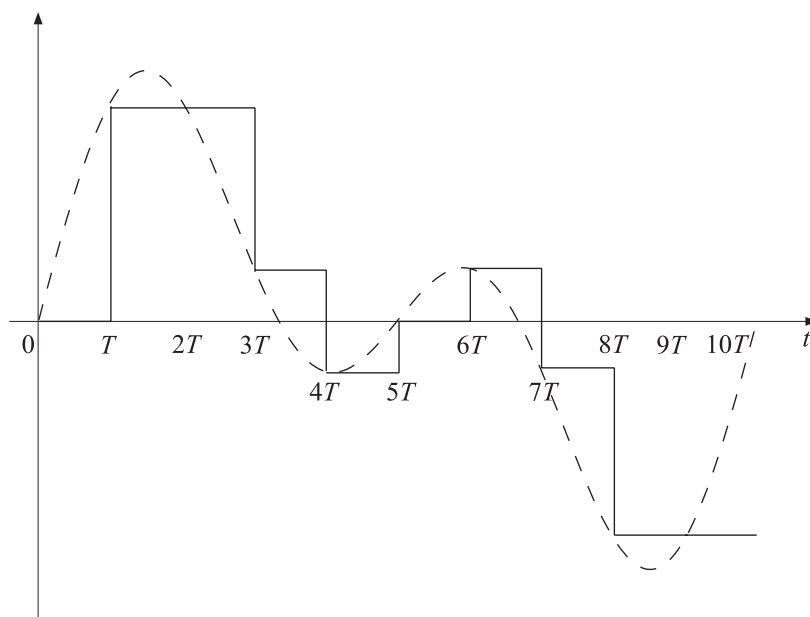
$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (5.63)$$

Η απόκριση συχνοτήτων του φίλτρου αυτού εύκολα υπολογίζεται σε

$$H(\Omega) = T \frac{\sin(\Omega T/2)}{\Omega T/2} e^{-j\Omega T/2}$$

και το μέτρο της φαίνεται στο Σχήμα 5.26. Η έξοδος του φίλτρου θα είναι

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$



Σχήμα 5.25 Η λειτουργία της συγκράτησης των δειγμάτων.

όπου $X(\Omega) = \frac{1}{T} X_a(\Omega)$ στο διάστημα $-\frac{\pi}{T} \leq \Omega \leq \frac{\pi}{T}$. Από το τελευταίο και το Σχήμα 5.26 συνάγεται ότι η συγκράτηση των δειγμάτων καταστέλλει το τμήμα του φάσματος $X(\Omega)$ που βρίσκεται έξω από την επιθυμητή περιοχή συχνοτήτων και επομένως οδηγεί σε ανακατασκευή του σήματος $x_a(t)$. Η απορρόφηση των ανεπιθύμητων συχνοτήτων δεν είναι πλήρης και στην πράξη ίσως χρειαστεί ν' ακολουθηθεί από ένα επιπλέον κατωπερατό φίλτρο. Πρέπει να σημειωθεί όμως ότι το φίλτρο SH είναι πολύ εύκολο να υλοποιηθεί.

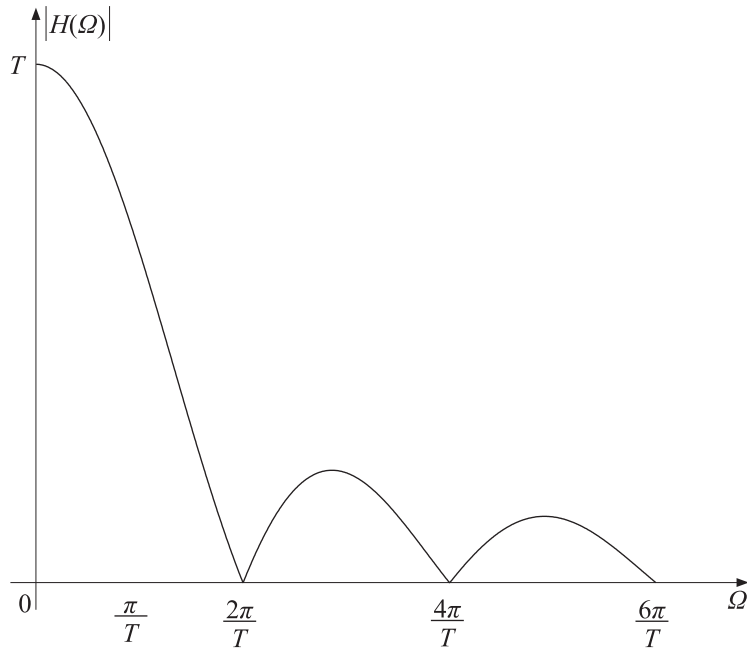
Λόγω της μη ιδανικής μορφής της $H(\Omega)$ στη βασική ζώνη συχνοτήτων $(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T})$, το φάσμα $X_a(\Omega)$ δεν αναπαράγεται τέλεια. Αν χρειαστεί, μπορεί στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί κι ένα *φίλτρο ισοστάθμισης (equalizer)*, όπως λέγεται, που σχεδιάζεται ώστε η απόκριση συχνοτήτων του να προσεγγίζει τη χαρακτηριστική $x/\sin x$ κι έτσι ν' ακυρώνει την παραμόρφωση που εισάγει η $H(\Omega)$.

5.12 Λυμένα Προβλήματα

1. Δίνεται το σήμα διακριτού χρόνου

$$x(n) = 2 \cos(0.1\pi n) + \cos(0.2\pi n)$$

Να υπολογιστεί η περίοδος του σήματος.



Σχήμα 5.26 Το μέτρο της απόκρισης συχνοτήτων του φίλτρου που αντιστοιχεί στη διαδικασία sample-and-hold.

Λύση: Αν N η περίοδος, τότε θα πρέπει

$$x(n) = x(n + N) = 2 \cos(0.1\pi n + 0.1\pi N) + \cos(0.2\pi n + 0.2\pi N)$$

Άρα θα πρέπει

$$0.1\pi N = 2\pi r, \quad r \in \mathbb{Z}$$

$$0.2\pi N = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

δηλαδή $N = 20r$ και $N = 10k$, και το μικρότερο N για το οποίο ισχύει το παραπάνω είναι $N = 20$. \triangle

2. Να εξεταστούν οι ιδιότητες α) γραμμικότητας, β) χρονικής μεταβλητότητας, γ) ΦΕΦΕ ευστάθειας και δ) αιτιότητας για καθένα από τα συστήματα που περιγράφονται από τις ακόλουθες σχέσεις εισόδου-εξόδου:

$$1. \quad y(n) = nx(n)$$

$$2. \quad y(n) = x^2(n)$$

$$3. \quad y(n) = \beta + \sum_{l=0}^5 x(n-l)$$

$$4. \quad y(n) = \beta + \sum_{l=-5}^5 x(n-l)$$

Λύση:

1.

α) Είναι γραμμικό γιατί

$$n[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n) = a_1y_1(n) + a_2y_2(n)$$

για οποιεσδήποτε σταθερές a_1, a_2 .

β) Είναι χρονικά μεταβαλλόμενο γιατί

$$y'(n) \equiv nx(n - n_0) \neq (n - n_0)x(n - n_0) = y(n - n_0)$$

γ) Δεν είναι ευσταθές γιατί για φραγμένη είσοδο η έξοδος τείνει στο άπειρο για $n \rightarrow \infty$.

δ) Είναι αιτιατό, γιατί η έξοδος δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου.

2.

α) Δεν είναι γραμμικό λόγω της τετραγωνικής εξάρτησης της εξόδου από την είσοδο.

β) Είναι χρονικά αμετάβλητο γιατί

$$y'(n) \equiv x^2(n - n_0) = y(n - n_0)$$

γ) Είναι ευσταθές, γιατί για κάθε φραγμένη είσοδο η έξοδος παραμένει φραγμένη.

δ) Είναι αιτιατό.

3.

α) Το σύστημα δεν είναι γραμμικό διότι

$$\begin{aligned} y'(n) &\equiv \beta + \sum_{l=0}^5 [a_1 x_1(n-l) + a_2 x_2(n-l)] \\ &\neq a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) \\ &\equiv (a_1 + a_2)\beta + \sum_{l=0}^5 [a_1 x_1(n-l) + a_2 x_2(n-l)] \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, η ύπαρξη του σταθερού όρου είναι η αιτία της μη γραμμικότητας. Παρατηρήστε ότι ο όρος αυτός ισοδυναμεί με αρχική συνθήκη, γιατί ακόμη και για μηδενική είσοδο το σύστημα παρέχει μη μηδενική έξοδο. Για να ισχύει η γραμμικότητα θα πρέπει να έχουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες ή αυτές να συνδυάζονται αντίστοιχα με τις εισόδους, δηλαδή $a_1 x_1(0) + a_2 x_2(0)$.

β) Είναι χρονικά αμετάβλητο γιατί

$$y'(n) \equiv \beta + \sum_{l=0}^5 x(n - n_0 - l) = y(n - n_0)$$

γ) Είναι ΦΕΦΕ ευσταθές γιατί η έξοδος προκύπτει ως άθροισμα πεπερασμένου πλήθους όρων της εισόδου, άρα είναι φραγμένη για φραγμένη είσοδο.

δ) Είναι αιτιατό γιατί η έξοδος εξαρτάται μόνο από παρούσες και παρελθούσες τιμές της εισόδου.

4.

α) Δεν είναι γραμμικό, για τον ίδιο λόγο που δεν είναι και το σύστημα 3).

β) Είναι χρονικά αμετάβλητο.

γ) Είναι ΦΕΦΕ ευσταθές όπως το 3).

δ) Δεν είναι αιτιατό γιατί η έξοδος εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου.

△

3. Έστω $x(n)$ μια ακολουθία δεξιάς έκτασης (*right-sided*), δηλαδή $x(n) = 0$ για κάθε $n < N_1$. Έστω ότι ο ΜΖ αυτής, $X(z)$, συγκλίνει για κάποιο z . Ναδειχτεί ότι η ΠΣ του $X(z)$ είναι της μορφής

$$|z| > r_{\max} \quad \text{ή} \quad \infty > |z| > r_{\max}$$

όπου r_{\max} είναι το μέτρο του μέγιστου (κατά μέτρο) πόλου του $X(z)$.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι η $X(z)$ συγκλίνει για $|z| = r_0$. Τότε:

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| r_0^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x(n)| r_0^{-n} < \infty$$

Για $r_1 > r_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=N_1}^{\infty} |x(n)| r_1^{-n} &= \sum_{n=N_1}^{\infty} |x(n)| \left(r_0 \frac{r_1}{r_0} \right)^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x(n)| r_0^{-n} \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{-n} \\ &\leq \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{-N_1} \sum_{n=N_1}^{\infty} |x(n)| r_0^{-n} < \infty \end{aligned}$$

διότι η $\left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{-n}$ είναι φθίνουσα. Συνεπώς η $X(z)$ συγκλίνει για $r = r_1$ και η ΠΣ είναι της μορφής $|z| > r_0$. Εξ' ορισμού η ΠΣ δεν μπορεί να περιέχει πόλους, άρα είναι της μορφής $|z| > r_{\max}$ όπου r_{\max} είναι το μέτρο του μεγαλύτερου (κατά μέτρο) πόλου.

Εάν ο $N_1 < 0$, τότε από τον ορισμό του ΜΖ διαπιστώνουμε ότι η $X(z)$ περιέχει και όρους με θετικές δυνάμεις του z . Άρα, στην περίπτωση αυτή η ΠΣ δεν μπορεί να περιέχει το ∞ διότι αυτοί οι όροι απειρίζονται. Συνεπώς η ΠΣ μπορεί να είναι της μορφής $\infty > |z| > r_{\max}$ μόνον όταν ο N_1 είναι μη αρνητικός (δηλαδή όταν η $x(n)$ δεν είναι απλώς δεξιιάς έκτασης αλλά και αιτιατή). \triangle

4. Ν' αποδειχτεί ότι όταν συνελίσσονται δυο ακολουθίες $x(n), y(n)$ μήκους N και M , αντίστοιχα, το μήκος της προκύπτουσας ακολουθίας είναι $N + M - 1$.

Λύση: Έστω

$$z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} x(k) y(n-k)$$

η συνέλιξη των δύο ακολουθιών. Θα ερευνήσουμε το μήκος του διαστήματος (πόσα, δηλαδή, n) εκτός του οποίου το παραπάνω άθροισμα είναι μηδέν, ανεξάρτητα από τις τιμές των $x(n), y(n)$. Το διάστημα αυτό καθορίζεται από τα n εκείνα για τα οποία

$$0 \leq n - k \leq N - 1$$

Η μικρότερη τιμή του n είναι το μηδέν και γι' αυτή την περίπτωση στο παραπάνω άθροισμα συνεισφέρει μόνο ο όρος $x(0)y(0)$, ενώ όλοι οι άλλοι είναι μηδέν. Όταν

$n = 1$, συνεισφέρουν δύο όροι κ.ο.κ. Η μεγαλύτερη τιμή του n , για την οποία υπάρχουν μη μηδενικοί όροι (στη γενική περίπτωση) στο συνελικτικό άθροισμα, ισούται με $n = N + M - 2$. Για την περίπτωση αυτή υπάρχει πάλι ένας όρος που συνεισφέρει, αντιστοιχεί στο $k = M - 1$ και είναι ο $x(M - 1)y(N - 1)$. Για μεγαλύτερα n τα γινόμενα στη συνέλιξη δεν θα έχουν κοινούς μη μηδενικούς όρους. Άρα το μήκος της συνέλιξης είναι $N + M - 1$.

Ένας άλλος τρόπος να δούμε το ίδιο πράγμα είναι να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι οι όροι μιας ακολουθίας $x(n)$ πεπερασμένου μήκους N είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου βαθμού $N - 1$ που δίνεται από το ΜΖ της, $X(z)$. Από την ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο, γνωρίζουμε ότι $Z(z) = X(z)Y(z)$. Το $Z(z)$ είναι το γινόμενο ενός πολυωνύμου βαθμού $N - 1$ μ' ένα πολυώνυμο βαθμού $M - 1$, άρα έχει βαθμό $N + M - 2$, δηλαδή $N + M - 1$ όρους. \triangle

5. Να υπολογιστεί ο ΜΖ της ακολουθίας $x(n) = a^{|n|}$, $a > 0$. Να εξεταστούν οι περιπτώσεις $a < 1$ και $a > 1$.

Λύση: Η ακολουθία $x(n)$ γράφεται

$$x(n) = a^n u(n) + a^{-n} u(-n - 1)$$

Με τη βοήθεια του Πίνακα 5.1 έχουμε ότι

$$a^n u(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z - a} \quad |z| > a$$

$$a^{-n} u(-n - 1) \longleftrightarrow -\frac{z}{z - \frac{1}{a}} \quad |z| < \frac{1}{a}$$

Εάν $a < 1$, τότε υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των επιμέρους ΠΣ και ο ΜΖ είναι

$$X(z) = \frac{z}{z - a} - \frac{z}{z - \frac{1}{a}} = \frac{a^2 - 1}{a} \frac{z}{(z - a)(z - \frac{1}{a})}, \quad a < |z| < \frac{1}{a}$$

Εάν $a > 1$, τότε οι επιμέρους ΠΣ δεν έχουν κοινή περιοχή και συνεπώς η $x(n)$ δεν έχει ΜΖ. \triangle

6. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ΜΖ της

$$X(z) = \ln \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right), \quad |z| > |a|$$

Λύση: Η ανάπτυξη σε δυναμοσειρά της συνάρτησης $\ln(1 - x)$ είναι

$$\ln(1 - x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad |x| < 1$$

Άρα,

$$X(z) = \ln \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = -\ln(1 - az^{-1}), \quad |z| > |a|$$

Εφόσον $|z| > |a|$, θα ισχύει ότι $|az^{-1}| < 1$ και συνεπώς η $X(z)$ γράφεται ως

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (az^{-1})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a^n z^{-n},$$

απ' όπου εύκολα φαίνεται ότι

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} a^n, & n \geq 1 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$x(n) = \frac{1}{n} a^n u(n-1)$$

△

7. Να βρεθεί ο αντίστροφος MZ της συνάρτησης

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}, \quad |z| > 2$$

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της ανάπτυξης σε απλά κλάσματα. Είναι

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{B_1}{z-2} + \frac{B_2}{(z-2)^2}$$

όπου

$$A_1 = (z-1) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=1} = 1$$

$$B_2 = (z-2)^2 \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=2} = 1$$

Άρα

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{1}{z-1} + \frac{B_1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2}$$

Με εξίσωση των ομοβάθμιων όρων των αριθμητών βρίσκουμε ότι $B_1 = -1$. Τελικά:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-2} + \frac{z}{(z-2)^2}, \quad |z| > 2$$

Εφόσον η ΠΣ είναι $|z| > 2$, η ακολουθία $x(n)$ είναι αιτιατή κι εύκολα βρίσκουμε ότι ισούται με

$$x(n) = (1 - 2^n + n2^{n-1})u(n)$$

△

8. Εάν η είσοδος $x(n)$ και η χρονστική απόκριση $h(n)$ ενός ΓΧΑ συστήματος είναι $x(n) = u(n)$ και $h(n) = a^n u(n)$, αντίστοιχα, με $0 < a < 1$, να υπολογιστεί η έξοδος $y(n)$ του συστήματος.

Λύση: Έχουμε ότι

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1$$

$$H(z) = \frac{z}{z-a} \quad |z| > a$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης για το ΜΖ έχουμε ότι

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-a)} \quad |z| > 1$$

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα παίρνουμε

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-a)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-a}$$

όπου

$$A_1 = (z-1) \frac{Y(z)}{z} \Big|_{z=1} = \frac{1}{1-a}$$

$$A_2 = (z-a) \frac{Y(z)}{z} \Big|_{z=a} = -\frac{a}{1-a}$$

Άρα

$$Y(z) = \frac{1}{1-a} \frac{z}{z-1} - \frac{a}{1-a} \frac{z}{z-a} \quad |z| > 1$$

και

$$y(n) = \frac{1}{1-a} u(n) - \frac{a}{1-a} a^n u(n) = \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a} \right) u(n)$$

△

9. Η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος με είσοδο τη $x(n) = u(n)$ είναι $y(n) = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$. Να υπολογιστεί η χρονστική απόκριση του συστήματος.

Λύση: Οι MZ των ακολουθιών εισόδου και εξόδου είναι

$$X(z) = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z - \frac{1}{3}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

Συνεπώς η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2(z-1)}{z - \frac{1}{3}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{2(z-1)}{z(z - \frac{1}{3})} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z - \frac{1}{3}}$$

όπου με το γνωστό τρόπο βρίσκουμε ότι $A_1 = 6$ και $A_2 = -4$. Άρα

$$H(z) = 6 - 4 \frac{z}{z - \frac{1}{3}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

και τελικά

$$h(n) = 6\delta(n) - 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

△

10. Δίνεται ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου το οποίο περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση διαφορών

$$3y(n) - 4y(n-1) + y(n-2) = x(n)$$

όπου $x(n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ είναι η είσοδος, και οι αρχικές τιμές για την έξοδο είναι $y(-1) = 1$ και $y(-2) = 2$. Να υπολογιστεί η $y(n)$.

Λύση: Ο αμφίπλευρος MZ της εισόδου είναι

$$X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Παίρνοντας στη συνέχεια το μονόπλευρο MZ και των δύο πλευρών της εξίσωσης διαφορών έχουμε

$$3Y(z) - 4[z^{-1}Y(z) + y(-1)] + [z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] = X(z)$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση τη $X(z)$ και τις αρχικές συνθήκες και κάνοντας τις πράξεις παίρνουμε

$$Y(z) = \frac{z(3z^2 - 2z + \frac{1}{2})}{3(z-1)(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})}$$

Ανάλυση της $Y(z)$ σε απλά κλάσματα δίνει

$$Y(z) = \frac{3}{2} \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

Συνεπώς

$$y(n) = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq -2$$

△

11. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος MF διακριτού χρόνου της $X(e^{j\omega})$ που έχει μορφή ορθογώνιου παλμού και που στα πλαίσια της βασικής περιόδου $[-\pi, \pi]$ ορίζεται ως

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq W \\ 0, & W \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Λύση: Αν εφαρμόσουμε τον ορισμό του αντίστροφου MF διακριτού χρόνου απευθείας στην παραπάνω συνάρτηση φάσματος, παίρνουμε

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$

△

12. Να υπολογιστεί ο MF της ακολουθίας

$$x(n) = \cos(\omega_0 n)$$

με $|\omega_0| \leq \pi$.

Λύση: Από τη σχέση του Euler έχουμε

$$\cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$$

Όπως μπορούμε ν' αποδείξουμε απευθείας από τον ορισμό του MF διακριτού χρόνου, εάν $x(n) = 1, \forall n$, τότε $X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega), |\omega| \leq \pi$. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, καθώς και τις ιδιότητες της ολίσθησης στη συχνότητα

και γραμμικότητας, μπορούμε, ξεκινώντας από τη σχέση του Euler, να δείξουμε εύκολα ότι ο ζητούμενος MF είναι

$$X(e^{j\omega}) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)], \quad |\omega|, |\omega_0| \leq \pi$$

△

13. Δίνεται η ακολουθία

$$x(n) : \{2, 1, -1, 0, 3, 2, 0, -3, 4\}$$

με μήκος $N = 9$. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα μεγέθη απευθείας από τα δείγματα:

1. $X(e^{j0}), X(e^{j\pi})$
2. $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$
3. $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$
4. $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega$

Λύση:

1. Από τον ορισμό του MF έχουμε

$$\begin{aligned} X(e^{j0}) &= \sum_{n=0}^8 x(n)e^{-jn0} = \sum_{n=0}^8 x(n) = 8 \\ X(e^{j\pi}) &= \sum_{n=0}^8 x(n)e^{-jn\pi} = \sum_{n=0}^8 (-1)^n x(n) \\ &= [x(0) + x(2) + x(4) + x(6) + x(8)] - [x(1) + x(3) + x(5) + x(7)] \\ &= 8 - 0 = 8 \end{aligned}$$

2. Από τον ορισμό του αντίστροφου MF έχουμε

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} d\omega$$

άρα

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = 2\pi x(0) = 4\pi$$

3. Από το θεώρημα του Parseval έχουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=0}^8 x^2(n) = 88\pi$$

4. Παραγωγίζοντας το MF παίρνουμε

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=0}^8 -jnx(n)e^{-j\omega n}$$

ή

$$\frac{j dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=0}^8 [nx(n)]e^{-j\omega n}$$

επομένως, με χρήση του θεωρήματος Parseval,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=0}^8 [nx(n)]^2 = 1700\pi$$

△

14. Για το ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + v(n)$$

ζητούνται:

- α) Η περιγραφή στο χώρο κατάστασης.
- β) Ο έλεγχος της ελεγχιμότητας του συστήματος.
- γ) Ο έλεγχος της παρατηρησιμότητας του συστήματος.
- δ) Η εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς.

Λύση:

α) Επιλέγουμε ως μεταβλητές κατάστασης τις $x_1(n) = y(n-2)$ και $x_2(n) = y(n-1)$. Τότε οι καταστατικές εξισώσεις γράφονται

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= x_2(n) \\ x_2(n+1) &= -\frac{1}{8}x_1(n) + \frac{3}{4}x_2(n) + v(n) \\ y(n) &= -\frac{1}{8}x_1(n) + \frac{3}{4}x_2(n) + v(n) \end{aligned}$$

και σε μορφή πινάκων

$$\begin{aligned}\underline{x}(n+1) &= A\underline{x}(n) + \underline{b}v(n) \\ y(n) &= \underline{c}^T \underline{x}(n) + dv(n)\end{aligned}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad d = 1$$

β) Ο πίνακας ελεγχσιμότητας του συστήματος είναι

$$S = [\underline{b} \quad A\underline{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Είναι $\det(S) = -1 \neq 0$ άρα ο πίνακας S είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς το σύστημα είναι ελέγξιμο.

γ) Ο πίνακας παρατηρησιμότητας του συστήματος είναι

$$V = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{32} & \frac{7}{16} \end{bmatrix}$$

Είναι $\det(V) = \frac{1}{64} \neq 0$ άρα ο πίνακας V είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

δ) Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι

$$\begin{aligned}H(z) &= \underline{c}^T (zI - A)^{-1} \underline{b} + d \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 \\ \frac{1}{8} & z - \frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\end{aligned}$$

και μετά από πράξεις καταλήγουμε στο ότι

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

Το αποτέλεσμα αυτό αναμενόταν και από τη δοσμένη διαφοροεξίσωση. \triangle

15. Έστω το σήμα συνεχούς χρόνου $x_a(t) = \sin\left(\frac{\Omega_0}{2}t\right)$. Εξηγήστε γιατί η ελάχιστη επιτρεπτή συχνότητα δειγματοληψίας πρέπει να είναι *αυστηρά* μεγαλύτερη από Ω_0 .

Λύση:

Ο MF του δοσμένου σήματος είναι

$$X_a(\Omega) = \frac{\pi}{j} \delta\left(\Omega - \frac{\Omega_0}{2}\right) - \frac{\pi}{j} \delta\left(\Omega + \frac{\Omega_0}{2}\right)$$

όπως δόθηκε και στο Σχήμα 5.17(β). Είναι φανερό ότι κατά την περιοδική του επανάληψη με περίοδο Ω_0 οι δύο κρουστικές συναρτήσεις αντίθετου πλάτους θ' ακυρωθούν με αποτέλεσμα μηδέν. Αυτό έχει σαν συνέπεια μια μηδενική ακολουθία δειγμάτων αν χρησιμοποιηθεί περίοδος δειγματοληψίας $T = \frac{2\pi}{\Omega_0}$. Γενικότερα, λόγω της ειδικής μορφής του φάσματος ημιτονοειδών σημάτων (υπάρχει κρουστική συνάρτηση στη μέγιστη συχνότητα), η δειγματοληψία τους πρέπει να γίνεται με ρυθμό που να υπερβαίνει αυτόν που δίνεται από το κριτήριο του Nyquist. \triangle

16. Ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x_a(t)$ δημιουργείται ως γραμμικός συνδυασμός ημιτονοειδών σημάτων με συχνότητες $f_1 = 300$ Hz, $f_2 = 400$ Hz, $f_3 = 1.3$ kHz, $f_4 = 3.6$ kHz, και $f_5 = 4.3$ kHz. Το σήμα $x_a(t)$ δειγματοληπτείται με ρυθμό $f_s = 2$ kHz και η ακολουθία των δειγμάτων που προκύπτει περνάει από ένα ιδανικό κατωπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 900$ Hz. Ποιες συχνότητες υπάρχουν στην έξοδο του φίλτρου;

Λύση:

Είναι γνωστό ότι το φάσμα του σήματος, $x(t)$, που εισάγεται στο κατωπερατό φίλτρο προκύπτει από το άθροισμα των περιοδικών επαναλήψεων του $X_a(\Omega)$ με περίοδο (σε Hz) f_s . Θα περιέχει λοιπόν τις συχνότητες $F_i = f_i + f_s k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Αυτές είναι:

$$\begin{aligned} F_1 &= 300, 1700, 2300, \dots, \text{ Hz} \\ F_2 &= 400, 1600, 2400, \dots, \text{ Hz} \\ F_3 &= 700, 1300, 3300, \dots, \text{ Hz} \\ F_4 &= 400, 1600, 3600, \dots, \text{ Hz} \\ F_5 &= 300, 2300, 4300, \dots, \text{ Hz} \end{aligned}$$

Έτσι, αφού το φίλτρο απορροφά όλες τις συχνότητες που είναι μεγαλύτερες από 900 Hz, στην έξοδό του θα υπάρχουν οι συχνότητες 300, 400, και 700 Hz. \triangle

5.13 Προβλήματα

1. Να βρεθεί ο ΜΖ και η ΠΣ για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad x_1(n) &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - u(n-10) \\ \beta) \quad x_2(n) &= 7 \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{2\pi n}{6} + \frac{\pi}{4}\right) u(n) \end{aligned}$$

2. Έστω μια πραγματική ακολουθία $x(n)$. Ζητούνται τα εξής:

- Να δειχτεί ότι $X(z) = X^*(z^*)$.
- Με τη βοήθεια του προηγούμενου αποτελέσματος να δειχτεί ότι, εάν υπάρχει

έναν πόλο (μηδενικό) στο σημείο $z = z_0$, τότε αντίστοιχα θα υπάρχει κι ένας πόλος (μηδενικό) στο σημείο $z = z_0^*$.

γ) Να εφαρμοστούν τα προηγούμενα στις ακολουθίες:

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$x_2(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1) + \frac{1}{4}\delta(n-2)$$

3. Δίνεται μια αιτιατή ακολουθία $x(n)$ στην οποία το $x(0)$ είναι μη μηδενικό και πεπερασμένο. Ζητούνται τα εξής:

α) Να δειχτεί, με χρήση του θεωρήματος αρχικής τιμής, ότι ο ΜΖ της $x(n)$, $X(z)$, δεν έχει πόλους ή μηδενικά στο ∞ .

β) Να δειχτεί, ως συνέπεια του προηγούμενου αποτελέσματος, ότι ο αριθμός των πόλων του $X(z)$ στο πεπερασμένο επίπεδο z ισούται με τον αριθμό των μηδενικών στην ίδια περιοχή (όπου ως πεπερασμένο επίπεδο z ορίζεται όλο το επίπεδο πλην του ∞).

4. Η ακολουθία αυτοσυσχέτισης $r_{xx}(n)$ μιας ακολουθίας $x(n)$ ορίζεται ως

$$r_{xx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(k-n)$$

Να βρεθεί ο ΜΖ της $r_{xx}(n)$ συναρτήσει του ΜΖ της $x(n)$.

5. Για καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις διαφορών και τις αντίστοιχες εισόδους και αρχικές συνθήκες να βρεθεί η $y(n)$ χρησιμοποιώντας το μονόπλευρο ΜΖ:

α) $y(n) + 3y(n-1) = x(n), \quad x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n), \quad y(-1) = 1$

β) $y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1), \quad x(n) = u(n), \quad y(-1) = 0$

γ) $y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1), \quad x(n) = u(n), \quad y(-1) = 1$

6. Να υπολογιστεί ο ΜΖ των ακολουθιών:

α)

$$x_1(n) = \begin{cases} 1, & -N \leq n \leq N \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

β)

$$x_2(n) = \begin{cases} N - |n|, & -N \leq n \leq N \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι $x_2(n) = x_1(n) * x_1(n)$.)

7. Ν' αποδείξετε ότι, εάν

$$z(n) = x(n) * y(n),$$

τότε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z(n) = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} y(l) \right]$$

8. Δίνεται αιτιατό ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) = x(n)$$

Ζητούνται τα εξής:

α) Να βρεθεί η *απόκριση συχνοτήτων* $H(e^{j\omega})$ του συστήματος.

β) Να βρεθεί η απόκριση του συστήματος στις εισόδους:

$$x_1(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$x_2(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

γ) Να βρεθεί η απόκριση του συστήματος σε είσοδο της οποίας ο ΜΦ είναι $X(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-3j\omega}$.

9. Δίνεται σύστημα διακριτού χρόνου που απαρτίζεται από την εν σειρά διασύνδεση δύο ΓΧΑ συστημάτων με αποκρίσεις συχνότητας τις

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{2 - e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\omega}}$$

Ζητούνται τα εξής:

α) Να βρεθεί η εξίσωση διαφορών που περιγράφει το ολικό σύστημα.

β) Να βρεθεί η χρονστική απόκριση του συστήματος.

10. Να γραφτούν καταστατικές εξισώσεις για το ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

11. Να υλοποιηθεί (με χρήση καθυστερητών, αθροιστών και πολλαπλασιαστών)

το ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από τις παρακάτω δυναμικές εξισώσεις

$$\begin{aligned}\underline{x}(n+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \underline{x}(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} v(n) \\ y(n) &= [3 \quad -2] \underline{x}(n)\end{aligned}$$

12. Δίνεται ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου το οποίο περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση διαφορών

$$3y(n) - 4y(n-1) + y(n-2) = x(n)$$

όπου $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ είναι η είσοδος, και οι αρχικές τιμές για την έξοδο είναι $y(-1) = 1$ και $y(-2) = 2$. Να βρεθεί η έξοδος $y(n)$, περιγράφοντας το σύστημα στο χώρο κατάστασης.

Σημείωση: Ένας τρόπος υπολογισμού της $y(n)$ έχει ήδη παρουσιαστεί στο Λυμένο Πρόβλημα 10. Εδώ ζητείται η καταστατική προσέγγιση του ίδιου προβλήματος.

13. Ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x_a(t)$ δημιουργείται ως γραμμικός συνδυασμός ημιτονοειδών σημάτων με συχνότητες f_i Hz, $i = 1, 2, 3, 4$. Το σήμα $x_a(t)$ δειγματοληπτείται με ρυθμό $f_s = 3$ kHz και η ακολουθία δειγμάτων που προκύπτει περνάει από ένα ιδανικό κατωπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 1.4$ kHz. Η απόκριση του φίλτρου είναι ένα σήμα συνεχούς χρόνου $y_a(t)$ που αποτελείται από τρία ημιτονοειδή σήματα με συχνότητες 350 Hz, 425 Hz, και 918 Hz. Ποιές είναι οι δυνατές τιμές των f_1, \dots, f_4 ; Είναι μοναδική η απάντηση; Αν όχι, δώστε κι ένα δεύτερο πιθανό σύνολο τιμών για τις συχνότητες αυτές.

14. Έστω το σήμα συνεχούς χρόνου

$$x_a(t) = s_a(t) + \alpha s_a(t - T)$$

Υποθέστε ότι είναι περιορισμένου εύρους ζώνης με μέγιστη συχνότητα $\frac{\pi}{T}$ και δειγματοληπτείται με τον ελάχιστο επιτρεπτό ρυθμό για να δώσει την ακολουθία

$$x(n) = x_a(nT)$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση ενός συστήματος διακριτού χρόνου τέτοιου ώστε

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k)h(n-k)$$

όπου $s(n) = s_a(nT)$.

Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

6.1 Εισαγωγή

Στο Εδάφιο 5.5 ορίσαμε το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου και είδαμε ότι είναι συνάρτηση περιοδική με περίοδο 2π ($\frac{2\pi}{T}$ ως προς Ω). Στην πράξη, βέβαια, είναι αδύνατον να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier, με τη βοήθεια ενός υπολογιστή, για κάθε τιμή της συνεχούς μεταβλητής ω , γιατί αυτό θ' απαιτούσε "άπειρο" χρόνο. Στο κεφάλαιο αυτό θ' ασχοληθούμε με τη διατύπωση ενός τρόπου υπολογισμού του μετασχηματισμού Fourier, έχοντας στη διάθεσή μας έναν πεπερασμένο αριθμό δειγμάτων στο πεδίο συχνοτήτων. Αρχικά θα υποθέσουμε ότι το σήμα διακριτού χρόνου είναι πεπερασμένης χρονικής διάρκειας. Μια τέτοια υπόθεση είναι πολύ λογική, δεδομένου ότι στην πράξη, πάντα, έχουμε στη διάθεσή μας μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό δειγμάτων του σήματος αποθηκευμένων στη μνήμη του υπολογιστή. Στην περίπτωση που το σήμα είναι άπειρης διάρκειας θα πρέπει να το προσεγγίσουμε μ' ένα άλλο πεπερασμένης διάρκειας. Μια τέτοια προσέγγιση είναι καλή εάν θεωρήσουμε ότι το πλάτος του σήματος, από μιά χρονική στιγμή και μετά, γίνεται απειροελάχιστα μικρό. Εάν αυτό δεν ισχύει, τότε μια τέτοια υπόθεση ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό του σήματος μ' ένα παράθυρο, που είναι μονάδα για ένα διάστημα χρονικών στιγμών και μηδέν αλλού. Η παραθύρωση αυτή θα έχει σαν αποτέλεσμα την αλλοίωση του μετασχηματισμού Fourier που υπολογίζουμε, σε σχέση με αυτόν του αρχικού σήματος, όπως έχουμε ήδη περιγράψει σε προηγούμενο κεφάλαιο.

6.2 Δειγματοληψία MF Σήματος Διακριτού Χρόνου Πεπερασμένης Διάρκειας

Θεωρούμε το σήμα $x(n)$ διάρκειας N δειγμάτων, με $x(n) = 0$ για $n < 0$ και $n \geq N$. Ο MF του σήματος, όπως ορίστηκε στο Εδάφιο 5.5, είναι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n} \quad (6.1)$$

Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε μια περίοδο δειγματοληψίας, ω_s , στο πεδίο συχνοτήτων, κι έναν αριθμό M δειγμάτων του $X(e^{j\omega})$ από τα οποία να είμαστε σε θέση να υπολογίζουμε το $X(e^{j\omega})$ για κάθε ω . Όπως και στην περίπτωση δειγματοληψίας στο χρόνο, τα δείγματα που θα προκύψουν θα πρέπει να είναι αρκετά ώστε να μπορούμε ν' ανακτήσουμε το MF για κάθε συχνότητα. Γι' αυτές τις M συχνότητες (δείγματα) ισχύει

$$X(k) \equiv X(e^{jk\omega_s}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega_s kn}, \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (6.2)$$

Στο Εδάφιο 5.11 είδαμε ότι, εάν $\frac{\Omega_0}{2}$ είναι η μέγιστη συχνότητα σ' ένα αναλογικό σήμα, $x_a(t)$, και η περίοδος δειγματοληψίας πληροί το κριτήριο Nyquist, δηλαδή $T \leq \frac{2\pi}{\Omega_0}$, τότε τα δείγματα που προκύπτουν αρκούν για ν' αναπαράγουν το σήμα $x_a(t)$ για κάθε χρονική στιγμή t . Με τελείως ανάλογο τρόπο είναι εύκολο να δείχτεί ότι το θεώρημα του Nyquist ισχύει και για δειγματοληψία στο πεδίο συχνοτήτων του MF ενός σήματος διακριτού χρόνου, υπό την προϋπόθεση ότι το σήμα αυτό στο πεδίο του χρόνου είναι πεπερασμένης διάρκειας, N . Στην περίπτωση αυτή, η περίοδος δειγματοληψίας στο πεδίο συχνοτήτων, ω_s , θα πρέπει να πληροί μια αντίστοιχη σχέση Nyquist, δηλαδή

$$\omega_s \leq \frac{2\pi}{N} \quad (6.3)$$

Λαμβάνοντας την οριακή τιμή

$$\omega_s = \frac{2\pi}{N}, \quad (6.4)$$

η σχέση (6.2) γράφεται

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (6.5)$$

Είναι εύκολο τώρα να δούμε ότι η ακολουθία $X(k)$, όπως ορίζεται από την (6.5), είναι περιοδική με περίοδο N . Επιλέγοντας, επομένως, $M = N$, τα N δείγματα που προκύπτουν καλύπτουν μια πλήρη περίοδο της $X(e^{j\omega})$. Για την ακρίβεια, αποτελούν τα δείγματα στις συχνότητες $0, \frac{2\pi}{N}, \dots, (N-1)\frac{2\pi}{N}$, από τα οποία μπορούμε ν' αναπαράγουμε τη συνάρτηση $X(e^{j\omega})$, για κάθε τιμή του ω , σύμφωνα με το θεώρημα του Nyquist.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι τα δείγματα $X(k)$ όχι μόνον αναπαράγουν το MF $X(e^{j\omega})$ αλλά υπάρχει μια σχέση ανάλογη της (6.5), μέσω της οποίας μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική μας ακολουθία $x(n)$ απευθείας από τα δείγματα $X(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (6.5) με $e^{j\frac{2\pi}{N}km}$, όπου $m = 0, 1, \dots, N-1$, και αθροίζοντας ως προς k , έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}km} &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Αλλά ισχύει ότι (βλ. και Παράδειγμα 6.2, παρακάτω),

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} = \begin{cases} N, & l = rN \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (6.7)$$

όπου r ακέραιος. Από την (6.7) συνεπάγεται ότι το δεύτερο μέλος της (6.6) είναι μη μηδενικό μόνο για $m = n$, άρα,

$$x(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}km}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.8)$$

Η ομοιότητα των σχέσεων (6.5) και (6.8) είναι προφανής και θεωρούμε ότι αποτελούν ένα ζευγάρι μετασχηματισμών:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.9)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.10)$$

Οι (6.9) και (6.10) ορίζουν τις σχέσεις ανάλυσης και σύνθεσης του *διακριτού μετασχηματισμού Fourier (Discrete Fourier Transform (DFT))* της ακολουθίας $x(n)$.

Η (6.9) είναι ο DFT της $x(n)$ και η (6.10) ο αντίστροφος DFT της $X(k)$. Θα γράφουμε $x(n) \longleftrightarrow X(k)$. Η σπουδαιότητα του μετασχηματισμού αυτού έγκειται στην ύπαρξη ενός πολύ γρήγορου υπολογιστικού αλγορίθμου, του καλούμενου *FFT (Fast Fourier Transform)*, με τη βοήθεια του οποίου είμαστε σε θέση να υπολογίζουμε το DFT μιας ακολουθίας σε χρόνο πολύ μικρότερο απ' αυτόν που θ' απαιτούσε ο απευθείας υπολογισμός μέσω του ορισμού από τη σχέση (6.9). Τον αλγόριθμο FFT θα τον παρουσιάσουμε στο τέλος αυτού του κεφαλαίου.

Παράδειγμα 6.1: Να υπολογιστεί α) ο DFT της ακολουθίας 1,1,0,0 και β) ο αντίστροφος DFT της ακολουθίας 1,0,1,0.

Λύση:

α)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}kn}$$

$$X(k) = 1 + e^{-j\frac{\pi}{2}k}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Άρα $X(k) : \{2, 1 - j, 0, 1 + j\}$

β)

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k)e^{j\frac{2\pi}{4}kn}$$

ή

$$x(n) = \frac{1}{4}(1 + e^{j\pi n}), \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Άρα τελικά

$$x(n) : \left\{ \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0 \right\}$$

△

Παράδειγμα 6.2: Ν' αποδειχτεί ότι

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} = \begin{cases} 1, & k = rN \\ 0, & k \neq rN \end{cases}$$

όπου r ακέραιος.

Λύση:

α) Εάν $k = rN$, τότε $e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} = e^{-j2\pi mr} = 1$ και η σχέση είναι προφανής.

β) Εάν $k \neq rN$, το άθροισμα δεν είναι τίποτε άλλο από το άθροισμα των N πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο τη μονάδα και λόγο το $e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$. Επομένως, από το σχετικό τύπο, προκύπτει ότι:

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}km} = \frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}kN} - 1}{e^{-j\frac{2\pi}{N}k} - 1} = \frac{1 - 1}{e^{-j\frac{2\pi}{N}k} - 1} = 0$$

Η σχέση αυτή είναι πολύ χρήσιμη και τη συναντά κανείς πολύ συχνά στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος και εικόνας. \triangle

Την παραπάνω σχέση μπορούμε να την επιβεβαιώσουμε και σαν εφαρμογή του διακριτού μετασχηματισμού Fourier. Πράγματι, για $k \neq rN$ γράφουμε $k = rN - n$, όπου r ακέραιος και n ακέραιος ώστε $1 \leq n \leq N - 1$. Τότε το άθροισμα γίνεται

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}mn}$$

Το δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης είναι ο αντίστροφος DFT της ακολουθίας $X(m) = 1$, $m = 0, 1, \dots, N - 1$, που είναι η ακολουθία $x(n) = \delta(n)$,

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n = 1, 2, \dots, N - 1 \end{cases}$$

Πράγματι, ο DFT της $\delta(n)$ δίνεται από τη σχέση

$$\Delta(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nm} = 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

Επομένως, το ζητούμενο άθροισμα είναι πάντα μηδέν για $n \neq 0$.

6.3 Ιδιότητες του DFT

1. Γραμμικότητα

Εάν $x_1(n)$, $x_2(n)$ είναι ακολουθίες πεπερασμένου μήκους N και

$$x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n), \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (6.11)$$

όπου a, b σταθερές, τότε

$$X_3(k) = aX_1(k) + bX_2(k), \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (6.12)$$

Η απόδειξη είναι εύκολη και δίνεται ως άσκηση.

2. Ιδιότητες συμμετρίας

Εάν $x(n)$ είναι πραγματική ακολουθία πεπερασμένου μήκους N , τότε ισχύει ότι

$$\operatorname{Re}[X(k)] = \operatorname{Re}[X(N-k)]$$

$$\operatorname{Im}[X(k)] = -\operatorname{Im}[X(N-k)]$$

για $k = 1, 2, \dots, N-1$, όπου, υπενθυμίζουμε, με $\operatorname{Re}(\cdot)$, $\operatorname{Im}(\cdot)$ συμβολίζουμε το πραγματικό και φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού, αντίστοιχα.

Απόδειξη: Από τον ορισμό του DFT έχουμε

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (6.13)$$

$$X(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (6.14)$$

Άρα, για πραγματικά $x(n)$, από τις σχέσεις (6.13) και (6.14) προκύπτει ότι:

$$X(k) = X^*(N-k), \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.15)$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\operatorname{Re}[X(k)] = \operatorname{Re}[X(N-k)]$$

$$\operatorname{Im}[X(k)] = -\operatorname{Im}[X(N-k)]$$

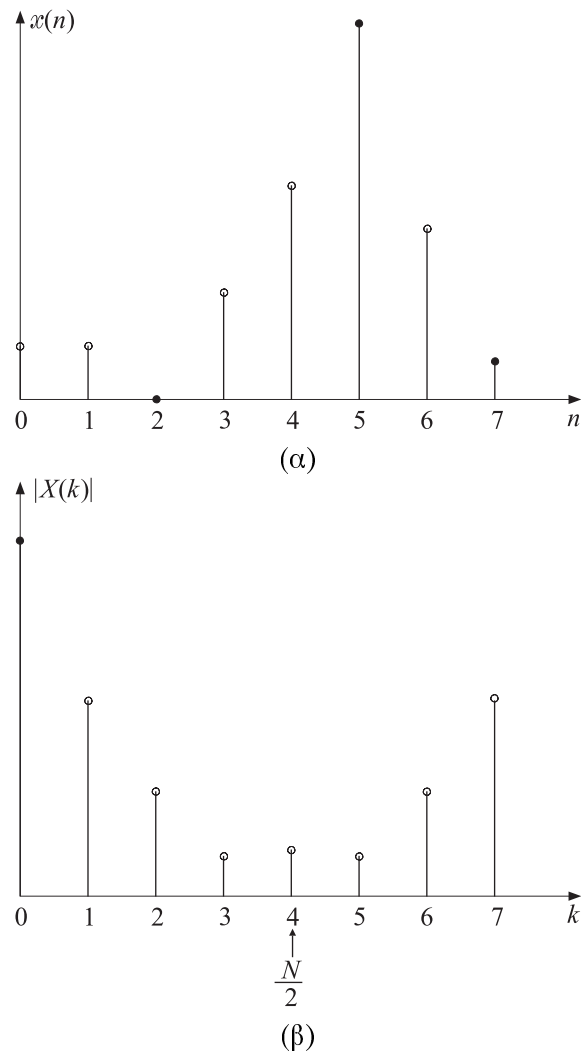
△

Είναι προφανές από τις παραπάνω σχέσεις ότι η ακολουθία του μέτρου του DFT είναι μια συμμετρική (ως προς $\frac{N}{2}$) ακολουθία, δηλαδή, $|X(k)| = |X(N-k)|$ και η ακολουθία φάσης αντισυμμετρική. Αυτό φαίνεται και στο Σχήμα 6.1 και εξηγείται από το γεγονός ότι οι τιμές του DFT για $k \geq \frac{N}{2}$ είναι τα δείγματα του $X(e^{j\omega})$ για αρνητικές τιμές του ω , λόγω της περιοδικότητας του MF της $x(n)$. Γνωρίζουμε όμως ότι, για πραγματικά σήματα, το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier είναι συμμετρική συνάρτηση, η δε φάση αντισυμμετρική.

3. Πραγματικές και συμμετρικές ακολουθίες

Από τον ορισμό του ζεύγους DFT μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στο ότι

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[X(k)] &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\operatorname{Re}[x(n)] \cos \frac{2\pi kn}{N} + \operatorname{Im}[x(n)] \sin \frac{2\pi kn}{N} \right] \\ \operatorname{Im}[X(k)] &= - \sum_{n=0}^{N-1} \left[\operatorname{Re}[x(n)] \sin \frac{2\pi kn}{N} - \operatorname{Im}[x(n)] \cos \frac{2\pi kn}{N} \right] \end{aligned}$$



Σχήμα 6.1 (α) Πραγματική ακολουθία μήκους $N = 8$. (β) Το μέτρο του DFT της. Είναι συμμετρικό ως προς το $\frac{N}{2} = 4$.

και

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[x(n)] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\operatorname{Re}[X(k)] \cos \frac{2\pi kn}{N} - \operatorname{Im}[X(k)] \sin \frac{2\pi kn}{N} \right] \\ \operatorname{Im}[x(n)] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\operatorname{Re}[X(k)] \sin \frac{2\pi kn}{N} + \operatorname{Im}[X(k)] \cos \frac{2\pi kn}{N} \right]\end{aligned}$$

Εάν η $x(n)$ είναι πραγματική και συμμετρική, δηλαδή, $x(n) = x(N-n)$, $0 < n \leq N-1$, τότε, δεδομένου ότι η ακολουθία $s(n) \equiv \sin \frac{2\pi kn}{N}$ είναι αντισυμμετρική (δηλαδή $s(n) = -s(N-n)$), έπεται από τις παραπάνω σχέσεις ότι το φανταστικό μέρος του DFT είναι μηδέν, $\operatorname{Im}[X(k)] = 0$, κι επομένως

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{2\pi kn}{N}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Άρα και ο DFT είναι επίσης μια πραγματική ακολουθία και αντιστοιχεί στο μετασχηματισμό συνημιτόνου, όπως είδαμε και στο κεφάλαιο του μετασχηματισμού Fourier. Αντίστροφα, είναι εύκολο να δούμε ότι, εφόσον στην περίπτωση αυτή $\operatorname{Im}[X(k)] = 0$, τότε και ο αντίστροφος DFT μπορεί ν' αποκτηθεί ως

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cos \frac{2\pi kn}{N}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

4. Πραγματικές αντισυμμετρικές ακολουθίες

Εάν μια πραγματική ακολουθία πεπερασμένου μήκους N είναι αντισυμμετρική, δηλαδή, $x(n) = -x(N-n)$, $0 < n \leq N-1$, τότε με τελείως ανάλογο τρόπο όπως και πριν μπορούμε να δείξουμε ότι το πραγματικό μέρος του DFT είναι μηδέν, $\operatorname{Re}[X(k)] = 0$, και

$$\begin{aligned}X(k) &= -j \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin \frac{2\pi kn}{N}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \\ x(n) &= \frac{j}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sin \frac{2\pi kn}{N}, \quad 0 \leq n \leq N-1\end{aligned}$$

5. Κυκλική ολίσθηση ακολουθίας

Διαπραγματευόμενοι τόσο το μετασχηματισμό Fourier όσο και τους μετασχηματισμούς Laplace και Z, είδαμε ότι μια από τις πιο χρήσιμες ιδιότητες ήταν αυτή που συνδέει τους μετασχηματισμούς ενός σήματος με τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς της χρονικής του ολίσθησης. Στην περίπτωση μας όμως, που διαπραγματευόμαστε σήματα σ' ένα πεπερασμένο διάστημα, $[0, N-1]$, η χρονική ολίσθηση υπό τη συνήθη της έννοια δεν θα είχε νόημα. Πράγματι, κι αν ακόμη διαθέταμε πληροφορία για το σήμα εκτός του χρονικού μας παραθύρου $[0, N-1]$, έπειτα από κάθε ολίσθηση το τμήμα του σήματος εντός του παραθύρου θα ήταν διαφορετικό και ίσως τελείως διαφορετικό σε σχέση μ' αυτό πριν από την ολίσθηση. Στο παρόν εδάφιο, θα ορίσουμε μια διαφορετική χρονική ολίσθηση, της οποίας η χρησιμότητα θ' αναδειχτεί σταδιακά όπως προχωρούμε στο κεφάλαιο.

Εάν $x(n)$ είναι σήμα διακριτού χρόνου ορισμένο στο διάστημα $0 \leq n \leq N-1$, καλούμε κυκλική ολίσθηση του $x(n)$ κατά m δείγματα το σήμα $x_{c,m}(n)$ που ορίζεται ως

$$x_{c,m}(n) \equiv x((n-m))_N \quad (6.16)$$

όπου

$$((n-m))_N = (n-m) \bmod N \quad (6.17)$$

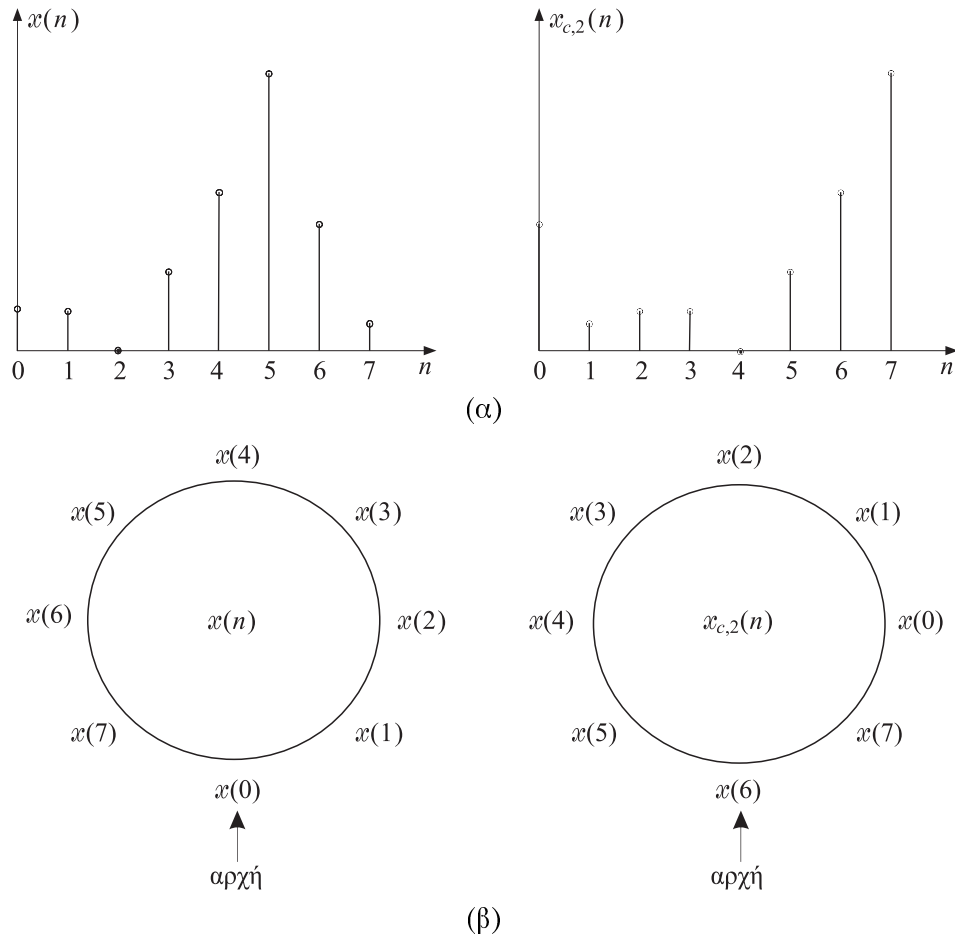
Με άλλα λόγια, πρόκειται για ολίσθηση modulo N , που μας εξασφαλίζει πάντα ότι και μετά την ολίσθηση οι χρονικές στιγμές (δείκτες της ακολουθίας) παίρνουν τιμές πάνω στο διάστημα $[0, N-1]$, όπου εμείς έχουμε “δικαιοδοσία”. Για παράδειγμα, ας πάρουμε $N=8$ και $m=2$. Έστω ότι οι τιμές της $x(n)$ για $n=0, 1, \dots, 7$, είναι αντίστοιχα $\{1.0, 1.0, 0.0, 2.0, 4.0, 7.0, 3.2, 0.7\}$. Τότε η κυκλικά ολισθημένη κατά $m=2$ δείγματα ακολουθία $x_{c,2}(n)$ είναι

$$\begin{aligned} x_{c,2}(0) &= x((0-2))_8 = x((-2))_8 = x(6) = 3.2 \\ x_{c,2}(1) &= x((1-2))_8 = x((-1))_8 = x(7) = 0.7 \\ x_{c,2}(2) &= x((2-2))_8 = x((0))_8 = x(0) = 1.0 \\ x_{c,2}(3) &= x((3-2))_8 = x((1))_8 = x(1) = 1.0 \\ x_{c,2}(4) &= x((4-2))_8 = x((2))_8 = x(2) = 0.0 \\ x_{c,2}(5) &= x((5-2))_8 = x((3))_8 = x(3) = 2.0 \\ x_{c,2}(6) &= x((6-2))_8 = x((4))_8 = x(4) = 4.0 \\ x_{c,2}(7) &= x((7-2))_8 = x((5))_8 = x(5) = 7.0 \end{aligned}$$

Για τους παραπάνω υπολογισμούς, χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $-m = (-1)N + (N-m)$ απ' την οποία παίρνουμε ότι $((-m))_N = N-m$.

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι και η κυκλικά ολισθημένη ακολουθία ορίζεται στο διάστημα $[0, N-1]$ και αποτελείται από τα ίδια δείγματα με τη $x(n)$ αλλά χρονικά

αναδιαταγμένα, όπως συμβαίνει και με κάθε χρονική ολίσθηση. Είναι προφανές ότι η $x_{c,m}(n)$ είναι μια τελείως διαφορετική ακολουθία απ' αυτή που θα προέκυπτε από απλή χρονική ολίσθηση, όπως τη γνωρίζαμε ως τώρα. Αυτό επιβεβαιώνεται και από το Σχήμα 6.2(α). Εποπτικά, την πράξη της κυκλικής ολίσθησης μπορούμε



Σχήμα 6.2 Κυκλική ολίσθηση.

να τη δούμε και ως εξής. Θεωρούμε τα δείγματα $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$ τοποθετημένα πάνω σε μια περιφέρεια όπως στο Σχήμα 6.2(β). Για τον υπολογισμό της κυκλικής ολίσθησης κατά m δείγματα, περιστρέφουμε την περιφέρεια κατά m βήματα (βλ. Σχήμα 6.2(β) για το παράδειγμα $m = 2$). Με άλλα λόγια, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το διάστημά μας κυκλικό, και ως μετατόπιση νοείται

η περιστροφή σύμφωνα με τη φορά ή αντίστροφα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού, ανάλογα με το εάν η μετατόπιση είναι $-m$ ή m , για $m > 0$. Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι μετακινούμε τη θέση του μηδενός m θέσεις πάνω στην περιφέρεια. Η “κυκλικότητα” του πεδίου ορισμού είναι απόρροια της modulo N πράξης. Αντίθετα, στην “κλασική” ολίσθηση το πεδίο ορισμού ήταν ο “γραμμικός” άξονας των ακεραίων και η ολίσθηση αντιστοιχούσε σε μετατόπιση του μηδενός προς τα δεξιά ή αριστερά. Είναι προφανές, από τις ιδιότητες της modulo N πράξης, ότι

$$x_{c,m}(n) = x_{c,m+N}(n)$$

μετά δηλαδή από N διαδοχικές κυκλικές ολισθήσεις αναπαράγουμε την ίδια ακολουθία. Υπάρχει δηλαδή περιοδικότητα και για ένα διάστημα μήκους N υπάρχουν μόνο N δυνατές κυκλικά ολισθημένες ακολουθίες ενός σήματος $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$.

Μια άλλη φυσική ερμηνεία της κυκλικής ολίσθησης προκύπτει ως εξής. Θεωρούμε το σήμα $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, ως τη βασική περίοδο μιας περιοδικής ακολουθίας με περίοδο N , δηλαδή

$$x_p(n + rN) = x(n), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad r = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Η κυκλική ολίσθηση προκύπτει εάν ολισθήσουμε τη $x_p(n)$ κατά m δείγματα και κρατήσουμε τα δείγματα στο διάστημα $[0, N-1]$, δηλαδή

$$x_{c,m}(n) = x_p(n - m), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Η παραπάνω σχέση θα μπορούσε ν' αποτελέσει κι ένα ισοδύναμο ορισμό της κυκλικής ολίσθησης. Η διαδικασία φαίνεται στο Σχήμα 6.3.

Στη συνέχεια θ' αποδείξουμε ότι εάν

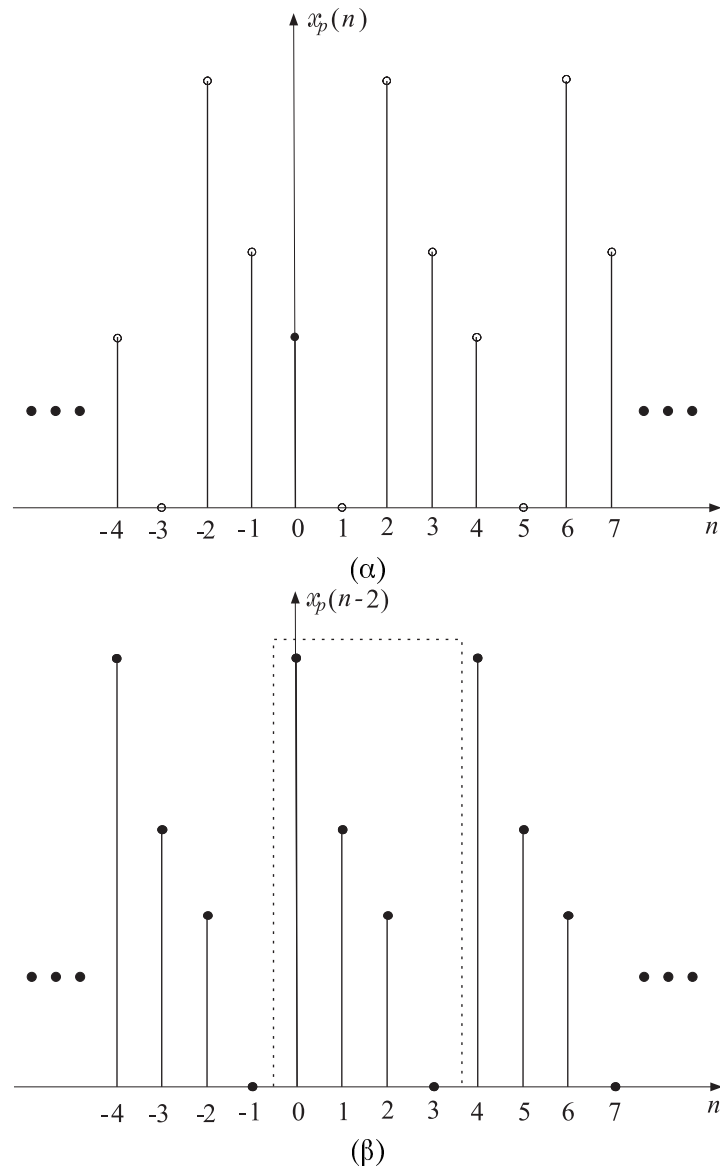
$$x(n) \longleftrightarrow X(k),$$

τότε

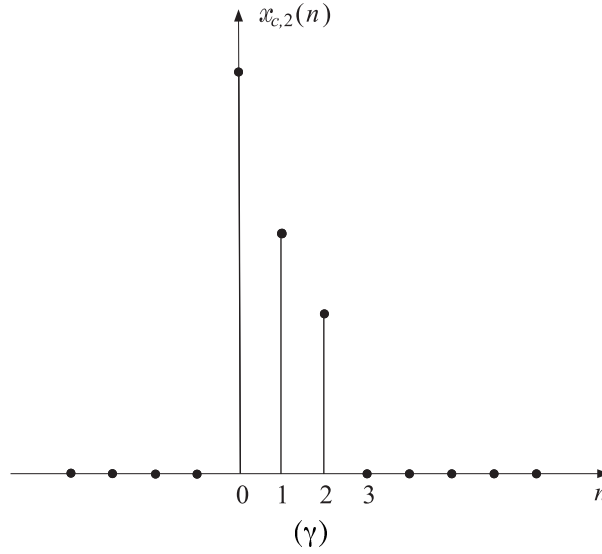
$$x_{c,m}(n) \longleftrightarrow X(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \quad (6.18)$$

Απόδειξη: Έστω $X'(k)$ ο DFT της $x_{c,m}(n)$. Από τον ορισμό και για $0 \leq m \leq N-1$ έχουμε

$$\begin{aligned} X'(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x((n-m))_N e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} x((n-m))_N e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &\quad + \sum_{n=m}^{N-1} x((n-m))_N e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \end{aligned}$$



Σχήμα 6.3 (α) Περιοδική επέκταση $x_p(n)$ ακολουθίας $x(n)$ μήκους $N = 4$. (β) Η $x_p(n)$ ολισθημένη κατά 2: $x_p(n - 2)$.



Σχήμα 6.3 (Συνεχ.) (γ) Η βασική περίοδος της $x_p(n-2)$ είναι η $x(n)$ κυκλικά ολισθημένη κατά 2, δηλαδή η $x_{c,2}(n)$.

$$+ \sum_{n=m}^{N-1} x((n-m))_N e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Από τον ορισμό της modulo N πράξης, και δεδομένου ότι n, m είναι στο διάστημα $[0, N-1]$, έχουμε ότι

$$x((n-m))_N = \begin{cases} x(N+(n-m)), & n-m < 0 \\ x(n-m), & n-m \geq 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

Άρα, το παραπάνω άθροισμα γίνεται

$$\begin{aligned} X'(k) &= \sum_{n=0}^{m-1} x(N+n-m) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &\quad + \sum_{n=m}^{N-1} x(n-m) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \end{aligned}$$

Αλλάζοντας τις μεταβλητές στα δύο αθροίσματα σε $l = N+n-m$ και $l = n-m$ αντίστοιχα, παίρνουμε

$$X'(k) = \sum_{l=N-m}^{N-1} x(l) e^{-j\frac{2\pi}{N}k(l+m)}$$

$$+ \sum_{l=0}^{N-m-1} x(l) e^{-j \frac{2\pi}{N} k(l+m)}$$

Συνδυάζοντας τα δύο αθροίσματα έχουμε

$$X'(k) = e^{-j \frac{2\pi}{N} km} \sum_{l=0}^{N-1} x(l) e^{-j \frac{2\pi}{N} kl}$$

και τελικά καταλήγουμε στο ζητούμενο

$$x_{c,m}(n) \longleftrightarrow e^{-j \frac{2\pi}{N} km} X(k)$$

△

5. Κυκλική ολίσθηση στη συχνότητα

Ακολουθώντας ανάλογα βήματα όπως και στην προηγούμενη ιδιότητα ν' αποδείξετε ότι, εάν

$$x(n) \longleftrightarrow X(k),$$

τότε

$$x(n) e^{j \frac{2\pi}{N} nm} \longleftrightarrow X((k-m))_N \quad (6.20)$$

6. Μιγαδική συζυγής ιδιότητα

Εάν

$$x(n) \longleftrightarrow X(k),$$

τότε

$$x^*(n) \longleftrightarrow X^*((-k))_N = X^*(N-k) \quad (6.21)$$

Απόδειξη: Εάν $X'(k)$ συμβολίζει το DFT του συζυγούς σήματος, τότε από τον ορισμό έχουμε

$$X'(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Παίρνοντας τη συζυγή παράσταση έχουμε

$$\begin{aligned} X'^*(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} (N-k)n} = X(N-k) \end{aligned}$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι $((-k))_N = N - k$ καταλήγουμε στο ζητούμενο

$$X'(k) = X^*(N - k) = X^*((-k))_N$$

△

6.4 Κυκλική Συνέλιξη

Μια από τις πιο κομψές και χρήσιμες ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier (σημάτων συνεχούς και διακριτού χρόνου) είναι η ιδιότητα της συνέλιξης, που αντιστοιχεί το συνελικπικό ολοκλήρωμα/άθροισμα σε γινόμενο στο πεδίο της συχνότητας. Στο παρόν εδάφιο θα διερευνήσουμε εάν η ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζεται και το DFT.

Έστω $x_1(n)$, $x_2(n)$ δύο ακολουθίες σημάτων που ορίζονται στο διάστημα $0 \leq n \leq N - 1$, με μετασχηματισμούς DFT $X_1(k)$, $X_2(k)$, αντίστοιχα. Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε τον αντίστροφο DFT του γινομένου $X_1(k)X_2(k)$.

Εάν συμβολίσουμε με $z(n)$ τη ζητούμενη ακολουθία, δηλαδή

$$z(n) \longleftrightarrow X_1(k)X_2(k),$$

τότε από τους ορισμούς έχουμε

$$\begin{aligned} z(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1(k)X_2(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \right] \left[\sum_{l=0}^{N-1} x_2(l)e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} \right] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \sum_{l=0}^{N-1} x_2(l) \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m-l)} \right] \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι για το τελευταίο άθροισμα ισχύει

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m-l)} = \begin{cases} N, & n - m - l = rN \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

δηλαδή, είναι μη μηδενικό για $l = ((n - m))_N$, και τελικά παίρνουμε

$$\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n - m))_N \longleftrightarrow X_1(k)X_2(k) \quad (6.22)$$

Το τελευταίο άθροισμα στην (6.22), αν και μοιάζει με την ακολουθία συνέλιξης, δεν είναι η γνωστή μας συνέλιξη. Είναι μια νέα ακολουθία, που την ορίζουμε ως *κυκλική συνέλιξη* των ακολουθιών $x_1(n)$, $x_2(n)$ και τη συμβολίζουμε

$$x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N \quad (6.23)$$

Μια πρώτη ματιά στο παραπάνω αποτέλεσμα μας ξενίζει. Γνωρίζουμε ότι η συνέλιξη δυο ακολουθιών έχει μετασχηματισμό Fourier το γινόμενο των αντίστοιχων μετασχηματισμών Fourier ($X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$). Το αποτέλεσμα στο οποίο μόλις τώρα καταλήξαμε μας λέει ότι τα δείγματα του γινομένου αυτού (ο DFT είναι η δειγματοληψία του μετασχηματισμού Fourier) *δεν αντιστοιχούν στη συνέλιξη των ακολουθιών αλλά σε μια άλλη ακολουθία, την κυκλική συνέλιξη*. Τη φυσική ερμηνεία αυτού του αποτελέσματος θα τη δώσουμε σε λίγο.

Παράδειγμα 6.3: Να υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη, $z(n)$, των ακολουθιών

$$\begin{aligned} x(n) : & \quad 1.0, 0.0, 2.5, 1.5 \\ y(n) : & \quad 1.0, 1.0, 0.5, 2.0 \end{aligned}$$

Λύση: Όπως και στην περίπτωση της συνέλιξης, που είδαμε στα Κεφάλαια 1 και 5 για σήματα συνεχούς και διακριτού χρόνου, αντίστοιχα, θ' αναπτύξουμε μια γραφική μεθοδολογία υπολογισμού της κυκλικής συνέλιξης, που ταυτόχρονα θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε καλύτερα τη σημασία της. Από τον ορισμό έχουμε ότι

$$z(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y((n-m))_N$$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε τη $z(n)$ για κάθε τιμή του n . Για το σκοπό αυτόν θα πρέπει να υπολογίσουμε, για κάθε n , την αντίστοιχη ακολουθία $y((n-m))_N$, που υπεισέρχεται στο άθροισμα. Παρατηρούμε ότι αυτή είναι η ακολουθία $y((-m))_N$, ολισθημένη κάθε φορά κυκλικά κατά n . Σε αντίθεση, για την απλή συνέλιξη, στην οποία θ' αναφερόμαστε από δω και πέρα ως *γραμμική* συνέλιξη, θα έπρεπε να υπολογίσουμε την κατοπτρική $y(-m)$ και στη συνέχεια να την ολισθαίνουμε κάθε φορά κατά n . Κατ' αναλογία, θ' αποκαλούμε την $y((-m))_N$ *κυκλικά κατοπτρική* ακολουθία της $y(m)$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το $((-m))_N$ είναι $N-m$ για $m = 1, 2, 3$ και 0 για $m = 0$, η κυκλικά κατοπτρική ακολουθία $y_{(s)}(m) \equiv y((-m))_N$ είναι

$$y_{(s)}(0) = y((0))_4 = y(0) = 1.0,$$

$$\begin{aligned}
y_{(s)}(1) &= y((-1))_4 = y(3) = 2.0 \\
y_{(s)}(2) &= y((-2))_4 = y(2) = 0.5, \\
y_{(s)}(3) &= y((-3))_4 = y(1) = 1.0
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι ο υπολογισμός της κυκλικά κατοπτρικής ακολουθίας είναι πολύ εύκολος και μπορεί να γίνει γραφικά. Το πρώτο δείγμα ($m = 0$) είναι το ίδιο με το πρώτο δείγμα της $y(m)$ ($y_{(s)}(0) = y(0)$). Στη συνέχεια, αλλάζουμε τα δείγματα της $y(m)$ συμμετρικά, δηλαδή, το δεύτερο δείγμα με το τελευταίο ($y_{(s)}(1) = y(3)$), το τρίτο με το προτελευταίο ($y_{(s)}(2) = y(2)$), κ.ο.κ. Αν φανταστούμε τα δείγματα της $y(m)$ στην περιφέρεια ενός κύκλου, διαβάζοντας με φορά αντίθετη μ' αυτή της φοράς των δεικτών του ρολογιού (βλ. Σχήμα 6.4(β)), τότε η κυκλικά κατοπτρική της αποτελείται από τα ίδια δείγματα, αν τα διαβάσουμε με φορά τη φορά των δεικτών του ρολογιού και τα τοποθετήσουμε σ' ένα νέο κύκλο (Σχήμα 6.4(γ)).

Για τον υπολογισμό της κυκλικής συνέλιξης, για $n = 0$, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τα αντίστοιχα δείγματα των $x(m)$, $y_{(s)}(m)$:

$$z(0) = 1.0 \times 1.0 + 0.0 \times 2.0 + 2.5 \times 0.5 + 1.5 \times 1.0 = 3.75$$

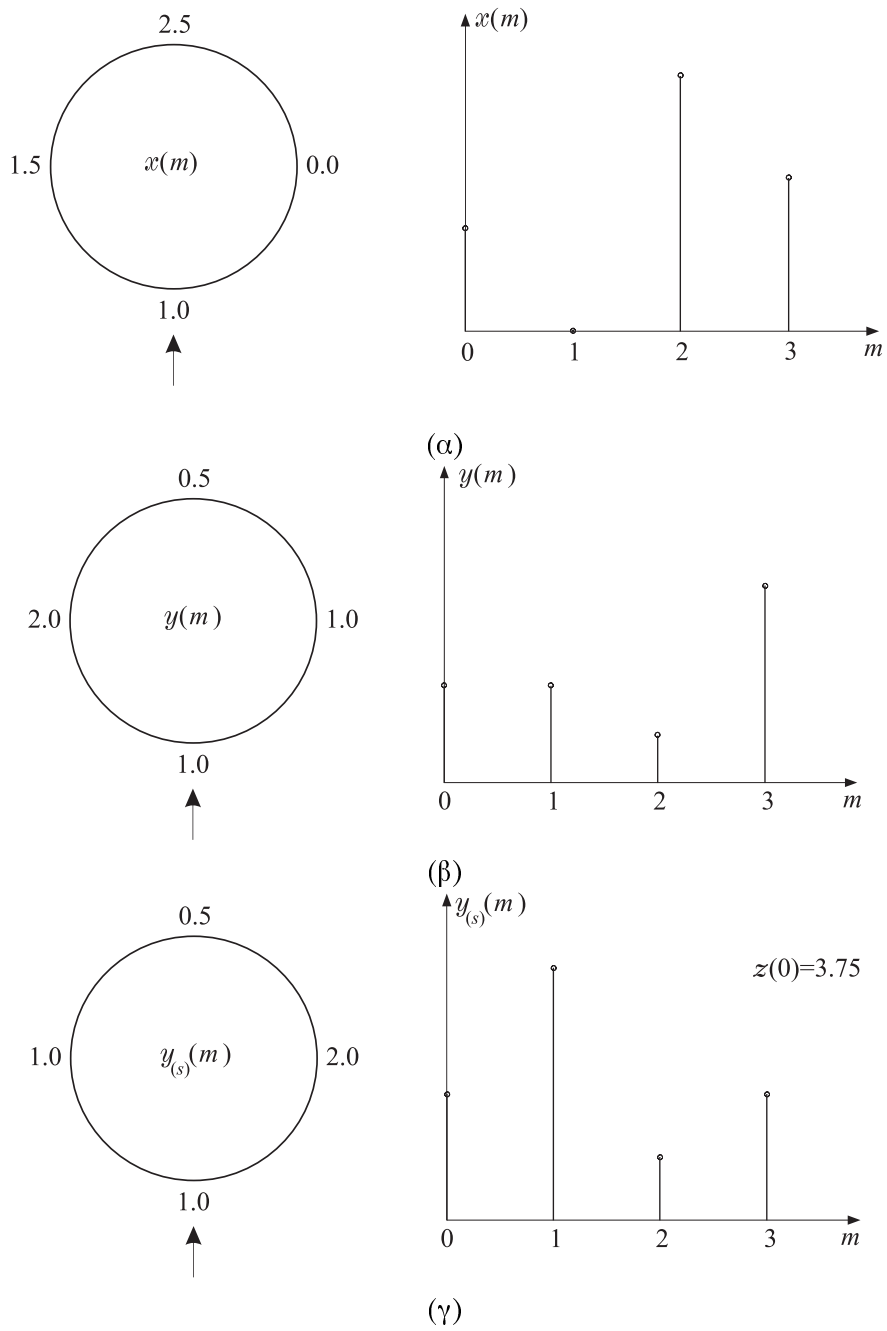
Για $n = 1$, ολισθαίνουμε κυκλικά την $y_{(s)}(m)$ κατά ένα δείγμα. Αυτό επιτυγχάνεται στρέφοντας τον κύκλο μία θέση με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού, όπως έχουμε ήδη εξηγήσει στο εδάφιο για την κυκλική ολίσθηση. Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα, εάν το πρώτο δείγμα το κάναμε δεύτερο, το δεύτερο τρίτο, το τρίτο τέταρτο, και το τελευταίο πρώτο (Σχήμα 6.4(δ)). Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε τα αντίστοιχα δείγματα των $x(n)$, $y_{(s)}((m-1))_4 = y((1-m))_4$:

$$z(1) = 1.0 \times 1.0 + 0.0 \times 1.0 + 2.5 \times 2.0 + 1.5 \times 0.5 = 6.75$$

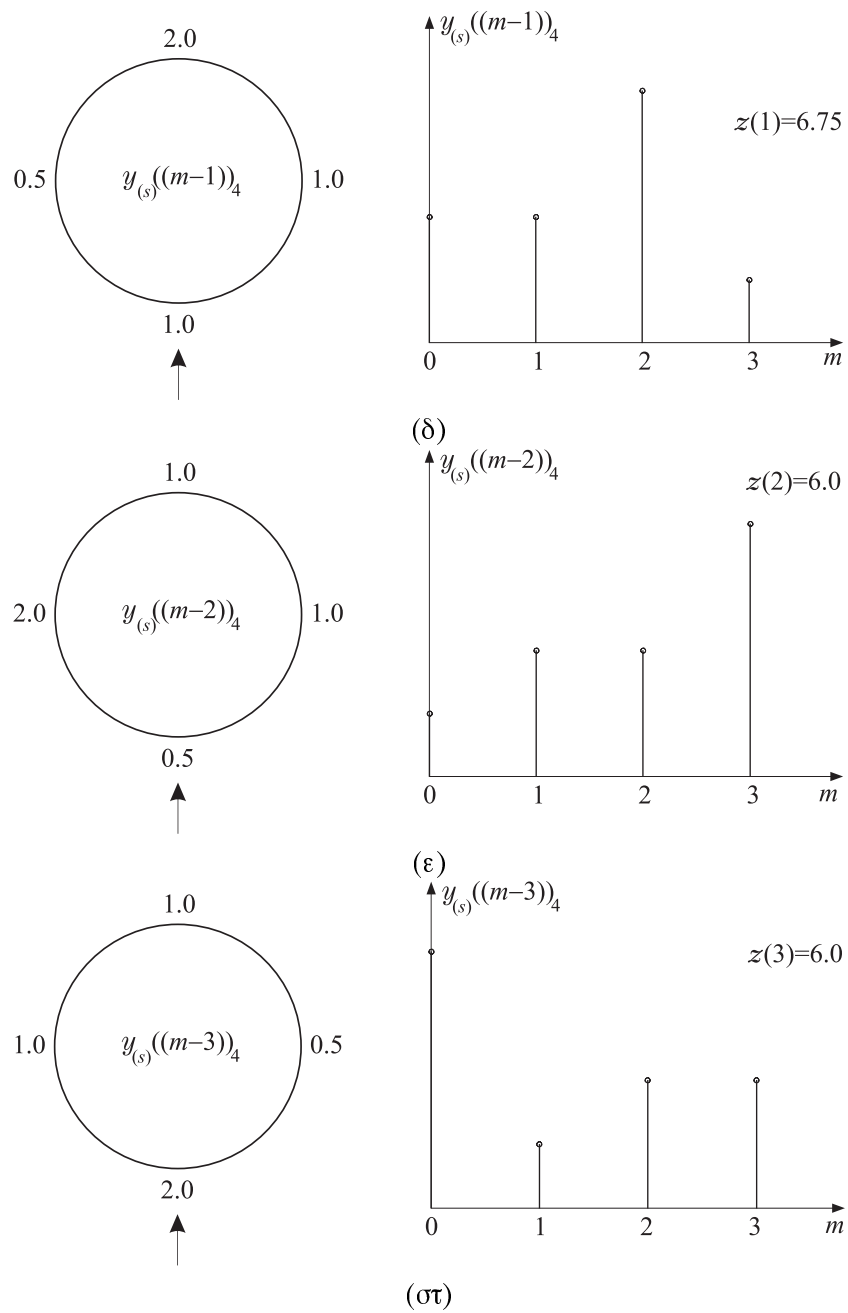
Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για $n = 2, 3$, όπως φαίνεται και στα Σχήματα 6.4(ε), (στ) και παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
z(2) &= 1.0 \times 0.5 + 0.0 \times 1.0 + 2.5 \times 1.0 + 1.5 \times 2.0 = 6.0 \\
z(3) &= 1.0 \times 2.0 + 0.0 \times 0.5 + 2.5 \times 1.0 + 1.5 \times 1.0 = 6.0
\end{aligned}$$

Η κυκλική συνέλιξη έχει τον ίδιο αριθμό δειγμάτων, N , με τις ακολουθίες $x(n)$, $y(n)$. Υπολογισμός για $n \geq N$ αναπαράγει περιοδικά τα δείγματα, όπως είναι αναμενόμενο λόγω της modulo N πράξης. \triangle



Σχήμα 6.4 Κυκλική συνέλιξη.



Σχήμα 6.4 (Συνεχ.)

6.5 Θεώρημα Parseval

Αυτό το θεώρημα το έχουμε συναντήσει σε διαφορετικά σημεία σε τούτο το βιβλίο με διαφορετικές μορφές, που όλες βέβαια μας επιβεβαιώνουν ότι ο υπολογισμός της ενέργειας (ή ισχύος) στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο του εκάστοτε μετασχηματισμού δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Στο παρόν εδάφιο θα εξετάσουμε εάν ο DFT διατηρεί αυτή τη σπουδαία ιδιότητα. Για το σκοπό αυτόν θ' αποδείξουμε πρώτα ότι εάν

$$x(n) \longleftrightarrow X(k)$$

και

$$y(n) \longleftrightarrow Y(k),$$

τότε

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k) \quad (6.24)$$

Απόδειξη: Από τους αντίστοιχους ορισμούς έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] \left[\sum_{l=0}^{N-1} y^*(l)e^{j\frac{2\pi}{N}kl} \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sum_{l=0}^{N-1} y^*(l) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-l)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) \end{aligned}$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι $\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-l)} = N$ για $l = n$ και μηδέν για όλους τους άλλους συνδυασμούς. \triangle

Θέτοντας τώρα $x(n) = y(n)$ στην (6.24), παίρνουμε την ακόλουθη μορφή του θεωρήματος Parseval:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (6.25)$$

Η ενέργεια, δηλαδή, του σήματος ισούται με την ενέργεια των δειγμάτων του μετασχηματισμού DFT διαιρεμένη με το N .

6.6 Σχέση Κυκλικής και Γραμμικής Συνέλιξης

Θεωρούμε δύο ακολουθίες $x(n)$, $y(n)$, για τις οποίες υποθέτουμε ότι είναι πεπερασμένου μήκους N . Γνωρίζουμε ότι για το MF ισχύει

$$x(n) * y(n) \longleftrightarrow X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$$

και για το DFT

$$x(n) \otimes y(n) \longleftrightarrow X(k)Y(k)$$

Τα N , δηλαδή, δείγματα του γινομένου $X(k)Y(k)$ δεν έχουν αντίστροφο DFT τη γραμμική συνέλιξη αλλά την κυκλική συνέλιξη. Ο λόγος είναι απλός και οφείλεται στο μήκος της γραμμικής συνέλιξης. Για κάθε μια από τις εμπλεκόμενες ακολουθίες, $x(n)$, $y(n)$, γνωρίζουμε ότι έχει μήκος N και αποδείξαμε ότι τα N δείγματα των αντίστοιχων DFT είναι αρκετά για ν' αναπαράγουν τους MF $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$, αντίστοιχα, και κατ' επέκταση τις αρχικές ακολουθίες. Ας εφαρμόσουμε λοιπόν το ίδιο σκεπτικό και στη συνέλιξή τους. Στο προηγούμενο κεφάλαιο (βλ. Λυμένο Πρόβλημα 4) είδαμε ότι όταν συνελίσσονται δύο ακολουθίες μήκους M και N , αντίστοιχα, τότε η συνέλιξή τους έχει μήκος $M + N - 1$. Στην προκειμένη, επομένως, περίπτωση, που έχουμε δύο ακολουθίες μήκους N , η συνέλιξή τους έχει μήκος $2N - 1$. Για να δειγματοληπτήσουμε επομένως το μετασχηματισμό Fourier της συνέλιξης, $X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$, έτσι ώστε να μη χάσουμε πληροφορία, θα πρέπει τα δείγματα ν' απέχουν μεταξύ τους το πολύ $\frac{2\pi}{2N-1}$. Τα N επομένως δείγματα $X(k)Y(k)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, που όπως γνωρίζουμε αντιστοιχούν σε περίοδο δειγματοληψίας στο πεδίο συχνοτήτων ίση με $\omega_s = \frac{2\pi}{N}$, υποδειγματοληπτούν τη συνάρτηση του γινομένου, με την έννοια ότι τα δείγματα έχουν μεταξύ τους απόσταση σχεδόν διπλάσια από τη μέγιστη που επιτρέπει το θεώρημα Nyquist, με αποτέλεσμα να χάνεται πληροφορία. Έτσι, ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνει όχι την αρχική ακολουθία της συνέλιξης, αλλά μια άλλη ακολουθία, δηλαδή, την κυκλική συνέλιξη. Ουσιαστικά, μπορεί ν' αποδειχτεί, κατ' αναλογία με την απόδειξη του θεωρήματος Nyquist στο προηγούμενο κεφάλαιο, ότι η κυκλική συνέλιξη είναι το αποτέλεσμα επικάλυψης περιοδικών επαναλήψεων (με περίοδο N), στο πεδίο του χρόνου αυτή τη φορά, της αρχικής ακολουθίας της (γραμμικής) συνέλιξης. Η ύπαρξη επικάλυψης οφείλεται στην κακή επιλογή περιόδου δειγματοληψίας, $\frac{2\pi}{N}$, μεγαλύτερης από αυτή που υπαγορεύεται από το εύρος του σήματος, δηλαδή $\frac{2\pi}{2N-1}$. Στο θέμα αυτό θα επανέλθουμε με μια πιο αυστηρή προσέγγιση στο Εδάφιο 6.9.

Έχοντας τώρα εντοπίσει το λόγο που κάνει τη γραμμική συνέλιξη διαφορετική από την κυκλική, μπορούμε να τον παρακάμψουμε, και μάλιστα με έναν κομψό τρόπο. Πριν από τον υπολογισμό των μετασχηματισμών Fourier των $x(n)$, $y(n)$,

διπλασιάζουμε το μήκος τους με την προσθήκη N μηδενικών,¹ με άλλα λόγια θεωρούμε αντί της $x(n)$ την ακολουθία

$$x_e(n) : x(0), x(1), \dots, x(N-1), \underbrace{0, 0, \dots, 0}_N$$

με συνολικό μήκος $2N$. Ανάλογα κατασκευάζεται και η $y_e(n)$, $n = 0, 1, \dots, 2N-1$. Η προσθήκη αυτή των μηδενικών δεν αλλάζει τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς Fourier. Πράγματι, μετά την επανάληψη με μηδενικά έχουμε

$$X_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{2N-1} x_e(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})$$

Έχοντας, όμως, θεωρήσει το μήκος των ακολουθιών ίσο με $2N$, οι αντίστοιχοι DFT θα είναι

$$X_e(k) = \sum_{n=0}^{2N-1} x_e(n) e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1 \quad (6.26)$$

$$Y_e(k) = \sum_{n=0}^{2N-1} y_e(n) e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1 \quad (6.27)$$

Με άλλα λόγια, η περίοδος δειγματοληψίας, στο πεδίο του ω , είναι τώρα $\frac{2\pi}{2N}$. Η πυκνότητα, επομένως, των δειγμάτων του γινομένου $X_e(k)Y_e(k)$, $k = 0, 1, \dots, 2N-1$, είναι σε πλήρη αρμονία με το κριτήριο Nyquist για μια ακολουθία που στο πεδίο του χρόνου έχει μήκος $2N-1$, όπως είναι η γραμμική συνέλιξη των $x(n)$, $y(n)$. Σ' αυτή την περίπτωση, η σωστή δειγματοληψία δεν δημιουργεί επικάλυψη και ισχύει

$$x(n) * y(n) = x_e(n) \otimes y_e(n) \longleftrightarrow X_e(k)Y_e(k)$$

όπου οι $X_e(k)$, $Y_e(k)$ δίνονται από τις (6.26) και (6.27), αντίστοιχα.

Παράδειγμα 6.4: Δίνονται οι ακολουθίες

$$x(n) = 1.0, \ 2.0, \ 2.0, \ 1.0$$

$$h(n) = 1.0, \ 0.0, \ 0.0, \ 0.5$$

¹Για την ακρίβεια, η προσθήκη $N-1$ μηδενικών επίσης θα αρκούσε. Εδώ θεωρούμε το διπλασιασμό του μήκους των ακολουθιών για απλότητα στην παρουσίαση.

Να υπολογιστούν:

- α) η κυκλική συνέλιξη μήκους 4 των $x(n)$, $y(n)$
- β) η κυκλική συνέλιξη μήκους 8 των επαυξημένων $x(n)$, $y(n)$
- γ) η γραμμική συνέλιξη των $x(n)$, $y(n)$

Λύση:

α) Ο υπολογισμός της κυκλικής συνέλιξης $z_c(n) = x(n) \otimes y(n)$ μήκους 4 γίνεται όπως στο Σχήμα 6.4 και δίνει

$$z_c(n) = 2.0, 3.0, 2.5, 1.5$$

β) Ο υπολογισμός της κυκλικής συνέλιξης μήκους 8 γίνεται με τον ίδιο τρόπο αφού πρώτα οι ακολουθίες $x(n)$, $y(n)$ επαυξηθούν με 4 μηδενικά η καθεμία για να δώσουν τις ακολουθίες $x_e(n)$, $y_e(n)$. Η κυκλική συνέλιξη $z_{c,e}(n) = x_e(n) \otimes y_e(n)$ υπολογίζεται σε

$$z_{c,e}(n) = 1.0, 2.0, 2.0, 1.5, 1.0, 1.0, 0.5, 0.0$$

γ) Ο υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης $z(n) = x(n) * y(n)$ γίνεται κατά τα γνωστά (βλ. Κεφάλαιο 5). Επαληθεύουμε ότι $z(n) = z_{c,e}(n)$, για $n = 0, 1, \dots, 7$. △

6.7 Διακριτή Σειρά Fourier

Στο Εδάφιο 6.2 ορίσαμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier μιας ακολουθίας πεπερασμένου μήκους. Στη διατύπωση του ορισμού περιορίσαμε τους δείκτες n , k των ακολουθιών $X(k)$, $x(n)$, στις σχέσεις (6.9) και (6.10), στο διάστημα 0 έως $N - 1$, που είναι και το διάστημα που μας ενδιαφέρει. Στο εδάφιο αυτό θα άρουμε αυτόν τον περιορισμό και θα θεωρήσουμε ότι τα n , k διατρέχουν όλο τον άξονα των ακεραίων. Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι τόσο η $X(k)$ όσο και η $x(n)$ γίνονται περιοδικές ακολουθίες με περίοδο N (λόγω της περιοδικότητας του $e^{\pm j \frac{2\pi}{N} kn}$). Για να δηλώσουμε την περιοδικότητα των ακολουθιών αυτών, θα τις συμβολίσουμε με $X_p(k)$ και $x_p(n)$, αντίστοιχα, και το ζεύγος των σχέσεων (6.9) και (6.10) γίνεται

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (6.28)$$

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (6.29)$$

Η (6.28) ορίζει τη *διακριτή σειρά Fourier (Discrete Fourier Series (DFS))* της περιοδικής ακολουθίας $x_p(n)$ και η (6.29) την αντίστροφη DFS της $X_p(k)$. Προφανώς, εάν περιορίσουμε τους δείκτες k, n στο διάστημα $[0, N - 1]$, το παραπάνω ζεύγος σχέσεων ταυτίζεται με το DFT. Από μια άλλη οπτική γωνία, η σχέση (6.29) θα μπορούσε να θεωρηθεί και ως το ανάπτυγμα του περιοδικού σήματος $x_p(n)$ σε μια εκθετική μιγαδική σειρά Fourier, με βασική συχνότητα $\frac{2\pi}{N}$. Το γεγονός ότι η σειρά είναι άθροισμα N αντί άπειρων όρων οφείλεται στο ότι έχουμε μόνον N ανεξάρτητες αρμονικές της βασικής συχνότητας (λόγω της περιοδικότητας των παραγόντων $e^{j\frac{2\pi}{N}k}$).

Στο Κεφάλαιο 2 είδαμε ότι ο MF ενός περιοδικού σήματος αποτελείται από διακριτές συχνότητες (σειρά Fourier). Το ίδιο ισχύει και για το πεδίο του χρόνου, όπου αποδείξαμε ότι ένα σήμα διακριτού χρόνου έχει περιοδικό μετασχηματισμό Fourier. Όταν ένα σήμα είναι ταυτόχρονα διακριτού χρόνου και περιοδικό τότε ο αντίστοιχος MF είναι, επίσης, διακριτός και ταυτόχρονα περιοδικός. Αυτό εκφράζεται από τις σχέσεις (6.28) και (6.29). Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο εδάφιο, είναι σκόπιμο να τονίσουμε ότι οι σχέσεις (6.9), (6.10) (για το DFT) και (6.28), (6.29) (για τη DFS) είναι ουσιαστικά ίδιες. Η διαφορά τους είναι ότι για τον DFT περιορίζομαστε στη βασική περίοδο $[0, N - 1]$ των περιοδικών ακολουθιών $X_p(k)$ και $x_p(n)$.

6.8 Περιοδική Συνέλιξη²

Θεωρούμε τις περιοδικές ακολουθίες $x_p(n)$, $y_p(n)$ με περίοδο N . Οι αντίστοιχες DFS δίνονται από τις σχέσεις

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) W_N^{kn} \quad (6.30)$$

$$Y_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_p(n) W_N^{kn} \quad (6.31)$$

όπου για ευκολία αντικαταστήσαμε

$$W_N \equiv e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (6.32)$$

Θ' αποδείξουμε ότι η DFS της ακολουθίας που ορίζεται ως

$$z_p(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_p(m) y_p(n - m) \quad (6.33)$$

²Αυτό το εδάφιο είναι προαιρετικό και μπορεί να παραλειφθεί σε μια πρώτη ανάγνωση.

είναι το γινόμενο $X_p(k)Y_p(k)$.

Πράγματι, αν $z'_p(n)$ είναι η αντίστροφη DFS του γινομένου $X_p(k)Y_p(k)$, αυτή θα δίνεται από την

$$\begin{aligned} z'_p(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k)Y_p(k)W_N^{-kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} x_p(m)y_p(r)W_N^{k(r+m)}W_N^{-kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} x_p(m)y_p(r) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m-r)} \right] \end{aligned}$$

Από το Παράδειγμα 6.2 καταλήγουμε τότε στο ζητούμενο:

$$z'_p(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_p(m)y_p(n-m) = z_p(n) \quad (6.34)$$

Όπως και στη γραμμική συνέλιξη, με μια απλή αλλαγή μεταβλητής μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι το παραπάνω γράφεται ισοδύναμα κι ως

$$z_p(n) = \sum_{m=0}^{N-1} y_p(m)x_p(n-m) \quad (6.35)$$

Η ακολουθία $z_p(n)$ καλείται *περιοδική συνέλιξη* των $x_p(n)$, $y_p(n)$. Ο αναγνώστης που έχει καταλάβει την κυκλική ολίσθηση δεν θα έχει πρόβλημα ν' αντιληφθεί ότι η βασική περίοδος της $z_p(n)$ ταυτίζεται με την κυκλική συνέλιξη $x(n) \otimes y(n)$. Θα πρέπει να τονιστεί εδώ ότι η περιοδική συνέλιξη (περιοδικών) ακολουθιών είναι επίσης περιοδική ακολουθία, με την ίδια περίοδο N . Επίσης, σ' αντίθεση με τη συνέλιξη μη περιοδικών ακολουθιών, η άθροιση γίνεται *πάνω σε μια περίοδο μόνο*.

Τέλος, με ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι, εάν

$$z_p(n) = x_p(n)y_p(n), \quad (6.36)$$

τότε

$$Z_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_p(n)Y_p(k-n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Y_p(n)X_p(k-n) \quad (6.37)$$

6.9 Δειγματοληψία του Μετασχηματισμού Z³

Στο προηγούμενο εδάφιο ορίσαμε τη διακριτή σειρά Fourier (DFS), $X_p(k)$, μιας περιοδικής ακολουθίας, $x_p(n)$, ως

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad (6.38)$$

Από την (6.38) και τον ορισμό του μετασχηματισμού Z είναι προφανές ότι

$$X_p(k) = X(z)|_{z=W_N^{-k}} \quad (6.39)$$

Οι τιμές $X_p(k)$ ορίζουν μονοσήμαντα τις τιμές $x_p(n)$ από τη σχέση

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) W_N^{-kn} \quad (6.40)$$

Στο εδάφιο αυτό θα εξετάσουμε το αντίστροφο πρόβλημα, θ' αναζητήσουμε, δηλαδή, τη σχέση που υπάρχει μεταξύ μιας ακολουθίας $x(n)$, με μετασχηματισμό $X(z)$ και μιας άλλης περιοδικής ακολουθίας $x_p(n)$ με DFS $X_p(k)$, όταν οι $X(z)$ και $X_p(k)$ σχετίζονται όπως στην (6.39).

Οι σχέσεις (6.38)-(6.40), σε συνδυασμό με τον ορισμό του μετασχηματισμού Z, μας δίνουν

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) W_N^{km} \right] W_N^{-kn} \quad (6.41)$$

ή

$$x_p(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(-m+n)} \right] \quad (6.42)$$

Αλλά

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(-m+n)} = \begin{cases} 1, & m = n + rN \\ 0, & m \neq n + rN \end{cases} \quad (6.43)$$

και τελικά

$$x_p(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN) \quad (6.44)$$

³Αυτό το εδάφιο είναι προαιρετικό και μπορεί να παραλειφθεί σε μια πρώτη ανάγνωση.

Άρα, αποδείχτηκε ότι η συγκεκριμένη περιοδική ακολουθία είναι άθροισμα από διαδοχικές επαναλήψεις της $x(n)$. Αυτό θυμίζει τη δειγματοληψία ενός αναλογικού σήματος, όπου η δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου επέβαλε περιοδικότητα στο πεδίο συχνοτήτων. Εδώ, αντίστροφα, η δειγματοληψία στο πεδίο Z έχει σαν αποτέλεσμα την περιοδικότητα στο πεδίο του χρόνου. *Δειγματοληψία, δηλαδή, στο ένα πεδίο έχει σαν αποτέλεσμα την περιοδικότητα στο άλλο πεδίο.*

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι το εάν, έχοντας στη διάθεσή μας τα δείγματα, $X_p(k)$, του μετασχηματισμού Z, μπορούμε ν' αναπαράγουμε το αρχικό μας σήμα. Στο Εδάφιο 5.11 είδαμε πως όταν η περίοδος δειγματοληψίας πληροί το κριτήριο Nyquist, δεν έχουμε επικάλυψη και τα δείγματα είναι ικανά ν' αναπαράγουν το αρχικό αναλογικό σήμα. Κάθε άλλο παρόλ' έκπληξη θα ήταν να πούμε ότι το ίδιο ισχύει κι εδώ. Από την (6.44) είναι εύκολο να δούμε πως όταν η ακολουθία $x(n)$ είναι πεπερασμένου μήκους το πολύ N , τότε μπορεί ν' αναπαραχθεί από τη $x_p(n)$ απομονώνοντας μια περίοδο. Θα δείξουμε ότι στην περίπτωση αυτή και ο μετασχηματισμός $X(z)$ αναπαράγεται από τα δείγματά του, $X_p(k)$.

Εφόσον $x(n) = 0$ για $n < 0$ και $n \geq N$, έχουμε

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \quad (6.45)$$

Αλλά $x(n) = x_p(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, επομένως

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) W_N^{-kn} \right] z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} (W_N^{-k} z^{-1})^n \right] \\ &= \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X_p(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \end{aligned} \quad (6.46)$$

Η σχέση (6.46) εκφράζει το μετασχηματισμό $X(z)$ ως συνάρτηση των δειγμάτων $X_p(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Η $X_p(k)$, βέβαια, ορίζεται πλήρως από τη βασική της περίοδο, που ταυτίζεται με το DFT $X(k)$ της $x(n)$, της βασικής, δηλαδή, περιόδου της $x_p(n)$. Με άλλα λόγια, εάν η $x(n)$ είναι περιορισμένη σε διάστημα μήκους N , τότε τα N δείγματα του DFT είναι αρκετά για να μας αναπαράγουν όχι μόνο τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Fourier αλλά και το μετασχηματισμό Z για κάθε z του μιγαδικού επιπέδου! Προφανώς, τότε, μπορούμε ν' ανακτήσουμε πλήρως τη $x(n)$ απομονώνοντας τη βασική περίοδο

της (6.44) (ισοδύναμα, βέβαια, μπορούμε να την ανακτήσουμε από τον αντίστροφο DFT).

Η σχέση (6.44) μας λέει όμως και κάτι περισσότερο. Εάν η $x(n)$ δεν είναι περιορισμένη στο διάστημα $[0, N-1]$, όπου N ο αριθμός των δειγμάτων του μετασχηματισμού Z (ή του MF), τότε απομονώνοντας τη βασική περίοδο της $x_p(n)$ δεν παίρνουμε την αρχική ακολουθία $x(n)$, αλλά μια αλλοιωμένη μορφή της, λόγω επικάλυψης περιοδικών επαναλήψεων. Είναι αυτός ακριβώς ο λόγος, για τον οποίο ο αντίστροφος DFT του γινομένου των DFT συντελεστών $X(k)Y(k)$ δύο ακολουθιών μήκους N δεν μας δίνει τη συνέλιξη $x(n) * y(n)$ αλλά την κυκλική συνέλιξη $x(n) \otimes y(n)$. Για να καταλήξουμε στη συνέλιξη απαιτήσαμε το διπλασιασμό των δειγμάτων πάνω στο μοναδιαίο κύκλο (των DFT, δηλαδή, συντελεστών), κάτι που εξασφαλίζει το απαραίτητο εύρος διαστήματος μέσα στο οποίο περιορίζεται η συνέλιξη $x(n) * y(n)$.

Παράδειγμα 6.5: Μέσω του παραδείγματος αυτού θα δώσουμε τη διαδικασία υπολογισμού του μετασχηματισμού Fourier ενός αναλογικού σήματος με τη βοήθεια του DFT.

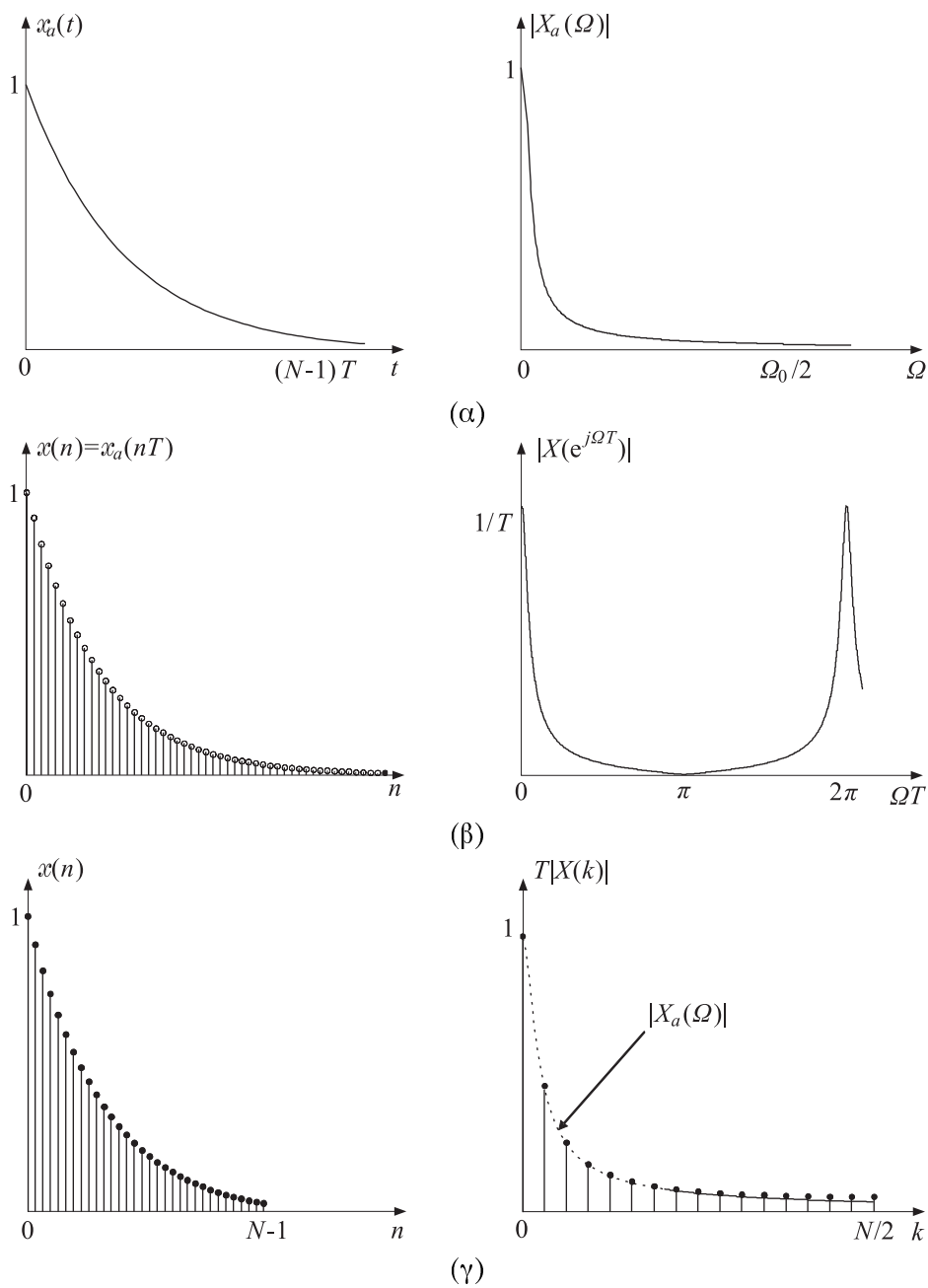
Έστω, για παράδειγμα, το αναλογικό σήμα $x_a(t) = e^{-t}u(t)$. Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτής υπολογίζεται εύκολα και είναι

$$X_a(\Omega) = \int_0^\infty e^{-t} e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{1 + j\Omega} \quad (6.47)$$

Το παραπάνω σήμα και το μέτρο του MF του φαίνονται στο Σχήμα 6.5(α). Επειδή το σήμα είναι πραγματικό, η συνάρτηση $|X_a(\Omega)|$ είναι άρτια κι έτσι παριστάνεται μόνο για $\Omega \geq 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι δύσκολο να υπολογιστεί αναλυτικά (όπως κάναμε παραπάνω) και πρέπει να υπολογιστεί αριθμητικά, με τη βοήθεια ενός υπολογιστή. Στην πορεία αυτή η αφετηρία μας θα είναι ο DFT. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η ακόλουθη:

1. Εκτιμούμε μια συχνότητα, $\frac{\Omega_0}{2}$, πέρα από την οποία ο $X_a(\Omega)$ μπορεί να θεωρηθεί κατά προσέγγιση μηδέν. Η εκτίμηση μιας τέτοιας συχνότητας $\frac{\Omega_0}{2}$ είναι συνήθως δυνατή, ανεξάρτητα από το εάν η συνάρτηση $X_a(\Omega)$ είναι γνωστή ή όχι.
2. Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Nyquist υπολογίζουμε την περίοδο δειγματοληψίας T , έτσι ώστε να ισχύει $T \leq \frac{2\pi}{\Omega_0}$. Στην πράξη το T λαμβάνεται κοντά στο φράγμα, αλλά όχι ίσο με το φράγμα. Ο λόγος είναι ότι πρέπει ν' αφήσουμε και κάποια περιθώρια για πιθανό σφάλμα στην εκτίμηση του



Σχήμα 6.5 Υπολογισμός MF σήματος συνεχούς χρόνου με τη βοήθεια του DFT.

Ω_0 . Αν και το T θα μπορούσε να ληφθεί πολύ μικρότερο από το $\frac{2\pi}{\Omega_0}$, αυτό δεν ενδείκνυται, διότι αυξάνει το ρυθμό δειγματοληψίας και ίσως οδηγήσει σε χρήση ακριβότερων συστημάτων A/D (αναλογικών/ψηφιακών μετατροπών), ενώ ταυτόχρονα αυξάνει τον αριθμό των λαμβανομένων δειγμάτων και δημιουργεί μεγαλύτερες απαιτήσεις σε μνήμη.

3. Λαμβάνουμε δείγματα $x(n) \equiv x(nT)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. Ο αριθμός δειγμάτων, N , εξαρτάται από το διαθέσιμο τμήμα της $x_a(t)$, που θα έχει προέλθει από κάποιες μετρήσεις, ή μπορεί να είναι και το αποτέλεσμα ενός κατ' εκτίμηση βέλτιστου συμβιβασμού μεταξύ ακρίβειας και χρόνου υπολογισμών, δεδομένου ότι όσο μεγαλύτερο είναι το N τόσο αυξάνει η απαιτούμενη μνήμη και ο χρόνος επεξεργασίας στον υπολογιστή. Όπως έχουμε αναφέρει και στην αρχή του κεφαλαίου, μια τέτοια προσέγγιση αντιστοιχεί σε παραθύρωση του αρχικού σήματος, που επιβάλλει με την σειρά της κάποιες αλλοιώσεις σε σχέση με τον πραγματικό MF.

4. Υπολογίζουμε το DFT της ακολουθίας $x(n)$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

με τη βοήθεια του αλγορίθμου FFT, που θα δούμε στο επόμενο εδάφιο.

Έχοντας επιλέξει λογικές τιμές για τα $\frac{\Omega_0}{2}$, N , ο MF του δειγματοληπτημένου σήματος θα διατηρεί με καλή προσέγγιση (μικρή επικάλυψη), στη βασική του περίοδο, τη μορφή του μετασχηματισμού Fourier $X_a(\Omega)$, κι επομένως τα δείγματα $X(k)$ θα είναι ικανά να μας τον αναπαράγουν.

Επιστρέφουμε τώρα στο παράδειγμα αναλογικού σήματος που παρουσιάσαμε παραπάνω και υποθέτουμε ότι $\Omega_0 = 20\pi$ rad/sec, άρα το άνω φράγμα για την περίοδο δειγματοληψίας είναι $\frac{2\pi}{20\pi} = 0.1$ sec. Ας επιλέξουμε $T = 0.1$ sec. Θέτουμε επίσης $N = 32$. Το Σχήμα 6.5(β) δείχνει το αποτέλεσμα της δειγματοληψίας και το μέτρο του αντίστοιχου MF διακριτού χρόνου. Υπενθυμίζουμε ότι ο $X(e^{j\Omega T})$ προκύπτει από το άθροισμα περιοδικών επαναλήψεων του $X_a(\Omega)$ πολλαπλασιασμένο με $\frac{1}{T}$.

Στο Σχήμα 6.5(γ) φαίνονται τα πρώτα 32 δείγματα του σήματος καθώς και το μέτρο του DFT τους, πολλαπλασιασμένο με T ώστε να είναι ευκολότερη η σύγκριση με το $|X_a(\Omega)|$. Στο ίδιο γράφημα με τα δείγματα $TX(k)$, $k = 0, 1, \dots, 15$ παριστάνεται και η συνάρτηση $|X_a(\Omega)|$.

Η ομοιότητα των δύο γραφημάτων είναι προφανής. Παρατηρούμε ότι τα δείγματα προσεγγίζουν καλύτερα το γράφημα της $|X_a(\Omega)|$ για μικρές τιμές της συχνότητας. Η απόκλιση είναι τόσο μεγαλύτερη όσο υψηλότερη είναι η συχνότητα, λόγω του φαινομένου της επικάλυψης. Η προσέγγιση του γραφήματος, μέσω των δειγμάτων, θα μπορούσε να βελτιωθεί αυξάνοντας το N ή/και μειώνοντας το T .

Τέλος, παρατηρούμε ότι μόνον εννέα από τα δεκαέξι δείγματα του DFT έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 6.5(γ). Τα υπόλοιπα δείγματα υπολογίζονται με βάση την ιδιότητα 2 του Εδαφίου 6.3. Έχουμε, δηλαδή, για $k > 8$, $X(k) = X^*(16 - k)$ ή $|X(k)| = |X(16 - k)|$. Στην ουσία, τα δείγματα για $k > 8$ αντιστοιχούν στο αρνητικό τμήμα του φάσματος $X_a(\Omega)$, δηλαδή για $\Omega < 0$. Αλλά, όπως αναφέρθηκε ήδη παραπάνω για πραγματικά σήματα, αυτό έχει το ίδιο μέτρο με το φάσμα για $\Omega > 0$ κι επομένως δεν είναι ανάγκη να σχεδιαστεί. \triangle

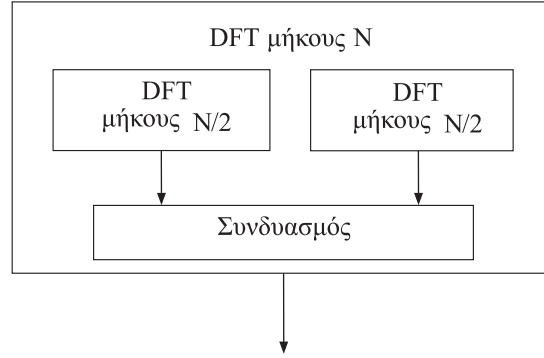
6.10 Υπολογισμός του DFT - Fast Fourier Transform (FFT)

Αναφερθήκαμε νωρίτερα στην ύπαρξη ενός πολύ αποδοτικού αλγορίθμου για τον υπολογισμό του DFT, γνωστού με το όνομα *ταχύς μετασχηματισμός Fourier* (*Fast Fourier Transform (FFT)*). Δεν θα ήταν υπερβολή αν λέγαμε ότι, γενικότερα, η ανάλυση Fourier είναι τόσο μεγάλης σπουδαιότητας στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος ακριβώς λόγω της ύπαρξης του FFT.

Σ' αυτό το εδάφιο θ' ασχοληθούμε με τον αλγόριθμο αυτό, δίνοντας την ιδέα στην οποία βασίζεται και τη λειτουργία του μέσα από ένα παράδειγμα. Ας επιστρέψουμε όμως πρώτα στο Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier (DFT) για να δούμε το λόγο για τον οποίο η άμεση χρήση του ορισμού του δεν είναι πρακτική και απαιτείται ειδικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό του. Ο DFT μιας ακολουθίας $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, ορίζεται ως η ακολουθία N όρων:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (6.48)$$

όπου $W_N \equiv e^{-j\frac{2\pi}{N}}$. Είναι φανερό από τον παραπάνω τύπο ότι, για ένα σήμα $x(n)$ μήκους N , απαιτούνται N πολλαπλασιασμοί και $N - 1$ προσθέσεις για τον υπολογισμό κάθε όρου της ακολουθίας DFT. Χρειάζονται επομένως N^2 πολλαπλασιασμοί και $N(N - 1)$ προσθέσεις προκειμένου να υπολογιστεί ολόκληρη η ακολουθία $X(k)$. Οι αριθμοί αυτοί μπορεί να είναι υπερβολικά μεγάλοι για τιμές του N που συναντώνται στην πράξη. Για παράδειγμα, ο υπολογισμός του DFT μιας ακολουθίας μήκους $N = 1024$ μέσω του ορισμού (6.48) θ' απαιτήσει $N^2 = 1048576$ πολλαπλασιασμούς και $N(N - 1) = 1047552$ προσθέσεις! Η



Σχήμα 6.6 Η ιδέα του FFT.

κατάσταση γίνεται ακόμη πιο απελπιστική αν λάβουμε υπόψη μας και το γεγονός ότι οι αριθμοί αυτοί αναφέρονται σε πράξεις που γίνονται μεταξύ μιγαδικών αριθμών, και θα ήταν τετραπλάσιοι αν ήταν να μετρήσουμε πράξεις με πραγματικούς.

Ο FFT μειώνει δραστικά το κόστος υπολογισμού της $X(k)$ βασιζόμενος στην ιδέα του “διαίρειν και βασίλευε” (divide and conquer). Με άλλα λόγια, διαιρεί το αρχικό πρόβλημα, μεγέθους N , σε άλλα μικρότερα, που είναι ευκολότερο να επιλυθούν. Έτσι, για άρτιο N , ο DFT μήκους N υπολογίζεται συνδυάζοντας κατάλληλα δύο ακολουθίες DFT μήκους $\frac{N}{2}$ (βλ. Σχήμα 6.6). Αν και ο $\frac{N}{2}$ είναι άρτιος, τότε το ίδιο μπορεί να γίνει για καθεμιά από τις δύο ακολουθίες, δηλαδή να υπολογιστούν συνδυάζοντας δύο DFT μήκους $\frac{N}{4}$, κ.ο.κ.

Για να μπορεί να συνεχιστεί αυτή η διαδικασία ωσότου φθάσουμε σε DFT μήκους 2, που είναι πολύ εύκολο να υπολογιστεί, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι ο N είναι δύναμη του 2,

$$N = 2^p$$

δηλαδή $p = \log_2 N$. Ένας τρόπος να διαιρέσουμε το αρχικό πρόβλημα σε δύο άλλα μισού μεγέθους είναι να χωρίσουμε τη δοσμένη ακολουθία $x(n)$ στις υπακολουθίες των όρων με άρτιο και περιττό δείκτη:

$$g(r) \equiv x(2r) \quad (6.49)$$

$$h(r) \equiv x(2r + 1), \quad (6.50)$$

όπου $r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$. Τότε η (6.48) γράφεται

$$X(k) = \sum_{n \text{ άρτιος}} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n \text{ περιττός}} x(n) W_N^{nk}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k} \\
&= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} g(r)(W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} h(r)(W_N^2)^{rk}
\end{aligned}$$

Αλλά $W_N^2 = e^{-2j\frac{2\pi}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$, συνεπώς η τελευταία σχέση μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$X(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} g(r)W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} h(r)W_{N/2}^{rk}$$

ή

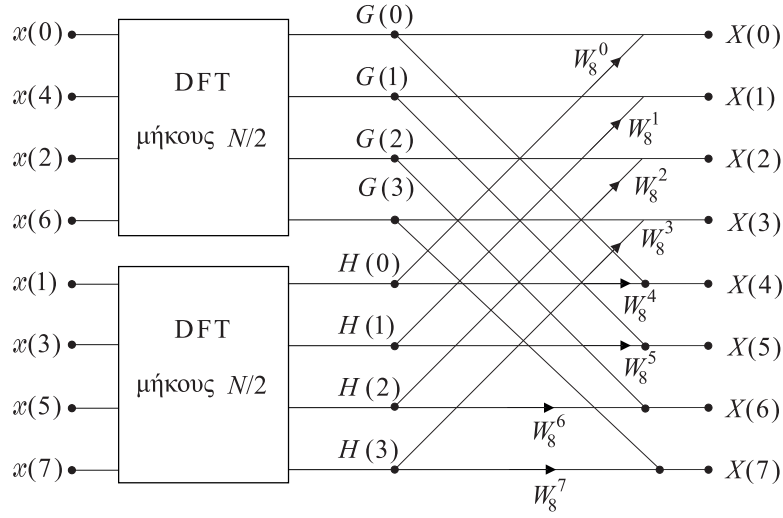
$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.51)$$

όπου $G(k), H(k)$ είναι οι ακολουθίες DFT των $g(r), h(r)$, αντίστοιχα. Πρέπει να τονιστεί ότι οι $G(k), H(k)$ χρειάζεται να υπολογιστούν μόνο για $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$, αφού, ως ακολουθίες DFT ακολουθιών μήκους $\frac{N}{2}$, είναι περιοδικές με περίοδο $\frac{N}{2}$. Έχοντας υπολογίσει τις $G(k), H(k)$, τις συνδυάζουμε σύμφωνα με την (6.51) για να πάρουμε το DFT της αρχικής ακολουθίας. Οι σχετικοί υπολογισμοί, για το παράδειγμα του $N = 2^3 = 8$, φαίνονται στο Σχήμα 6.7. Έτσι, το $X(0)$ υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας το $H(0)$ με W_N^0 και προσθέτοντας το γινόμενο στο $G(0)$. Για το $X(1)$ προσθέτουμε το γινόμενο του $H(1)$ με το W_N^1 στο $G(1)$, κ.ο.κ. Σύμφωνα με την (6.51), για τον υπολογισμό του $X(4)$ θα έπρεπε να βρούμε το $G(4) + W_N^4 H(4)$. Αλλά, όπως ήδη παρατηρήσαμε, οι $G(k), H(k)$ είναι περιοδικές με περίοδο $\frac{N}{2} = 4$, άρα $G(4) = G(0)$ και $H(4) = H(0)$. Συνεπώς το $X(4)$ υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας το $H(0)$ με W_N^4 και προσθέτοντας το αποτέλεσμα στο $G(0)$. Ανάλογα υπολογίζονται και τα $X(k)$, $k = 5, 6, 7$. Επιπλέον,

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{N}{2})} = e^{-j\pi} e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = -W_N^k, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (6.52)$$

που σημαίνει ότι δεν χρειάζεται να έχουμε υπολογίσει παρά μόνο τους μισούς από τους παράγοντες W_N^k , $k = 0, 1, \dots, N-1$. Έχουμε δηλαδή $W_8^4 = -W_8^0 = -1$, $W_8^5 = -W_8^1$, $W_8^6 = -W_8^2$, και $W_8^7 = -W_8^3$.

Το σημαντικό ερώτημα τώρα είναι αν η παραπάνω αναδιάρθρωση των υπολογισμών οδήγησε σε κάποια μείωση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας. Ας μετρήσουμε τους πολλαπλασιασμούς που απαιτούνται. Δεν θ' αναφερθούμε καθόλου στις προσθέσεις μια και το πλήθος τους είναι της ίδιας τάξης μ' αυτό των



Σχήμα 6.7 Υπολογισμός DFT μήκους N με τη βοήθεια δύο DFT μήκους $\frac{N}{2}$ ($N = 8$).

πολλαπλασιασμών. Για τον υπολογισμό καθενός από τους δύο DFT μήκους $\frac{N}{2}$ χρειάζονται $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ πολλαπλασιασμοί, ενώ απαιτούνται και N ακόμη πολλαπλασιασμοί για το συνδυασμό τους σύμφωνα με την (6.51). Ένα υπολογιστικό σχήμα όπως αυτό του Σχήματος 6.7 απαιτεί συνεπώς $N + 2 \left(\frac{N}{2}\right)^2 = N + \frac{N^2}{2}$ πολλαπλασιασμούς, που, για $N > 2$, είναι λιγότεροι από τους N^2 που χρειάζεται η άμεση εφαρμογή της (6.48).

Το πλήθος των απαιτούμενων πράξεων μπορεί να μειωθεί ακόμη αν στη συνέχεια εφαρμόσουμε την παραπάνω μεθοδολογία (βλ. Σχήμα 6.6) σε καθέναν από τους δύο DFT μήκους $\frac{N}{2}$. Χωρίζουμε, δηλαδή, καθεμιά από τις ακολουθίες $g(r), h(r)$ στις υπακολουθίες των όρων με άρτιο και περιττό r :

$$g'(l) \equiv g(2l) = x(4l) \quad (6.53)$$

$$h'(l) \equiv g(2l + 1) = x(4l + 2) \quad (6.54)$$

$$g''(l) \equiv h(2l) = x(4l + 1) \quad (6.55)$$

$$h''(l) \equiv h(2l + 1) = x(4l + 3) \quad (6.56)$$

Ο DFT της $g(r)$ γράφεται τότε ως

$$\begin{aligned}
 G(k) &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} g(r) W_{N/2}^{rk} \\
 &= \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g(2l) W_{N/2}^{2lk} + \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g(2l+1) W_{N/2}^{(2l+1)k} \\
 &= \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g'(l) (W_{N/2}^2)^{lk} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{(N/4)-1} h'(l) (W_{N/2}^2)^{lk}
 \end{aligned}$$

και επειδή $W_{N/2}^2 = W_{N/4}$ και $W_{N/2} = W_N^2$,

$$G(k) = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g'(l) W_{N/4}^{lk} + W_N^{2k} \sum_{l=0}^{(N/4)-1} h'(l) W_{N/4}^{lk}$$

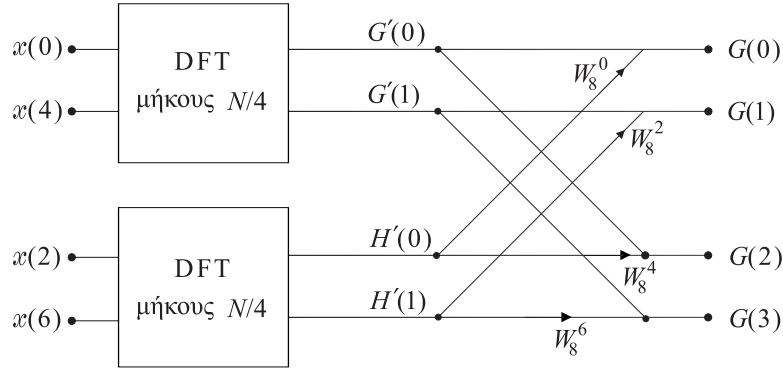
ή

$$G(k) = G'(k) + W_N^{2k} H'(k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.57)$$

όπου $G'(k)$, $H'(k)$ είναι οι DFT των μήκους $\frac{N}{4}$ ακολουθιών $g'(l)$, $h'(l)$, αντίστοιχα. Εντελώς ανάλογα βρίσκουμε την ακόλουθη σχέση για τον υπολογισμό του $H(k)$ από τους DFT των ακολουθιών $g''(l)$, $h''(l)$:

$$H(k) = G''(k) + W_N^{2k} H''(k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.58)$$

Όπως και πριν, οι ακολουθίες $G'(k)$, $H'(k)$, $G''(k)$, $H''(k)$ είναι περιοδικές με περίοδο $\frac{N}{4}$ κι επομένως χρειάζεται να υπολογιστούν μόνο για $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1$. Το Σχήμα 6.8 παριστάνει τους υπολογισμούς που υπαγορεύονται από την (6.57). Παρόμοια ισχύουν και για την (6.58). Επίσης, κατ' αναλογία με την (6.52) έχουμε $W_N^{2(k+\frac{N}{4})} = -W_N^{2k}$, $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1$. Αν αντικαταστήσουμε το Σχήμα 6.8 (και το ανάλογο σχήμα για την $H(k)$) στο Σχήμα 6.7, παίρνουμε το πιο λεπτομερές Σχήμα 6.9. Ας δούμε τώρα πόσο έχει μειωθεί το υπολογιστικό κόστος με τη νέα εφαρμογή της διαίρεσης της ακολουθίας στα δύο. Ο υπολογισμός καθεμιάς από τις $G(k)$, $H(k)$ απαιτεί $\frac{N}{2} + 2 \left(\frac{N}{4}\right)^2$ πολλαπλασιασμούς. Έτσι, ο συνολικός αριθμός των πολλαπλασιασμών που απαιτούνται για τον υπολογισμό του DFT μήκους N είναι τώρα $N + 2 \left[\frac{N}{2} + 2 \left(\frac{N}{4}\right)^2 \right] = 2N + \frac{N^2}{4}$.



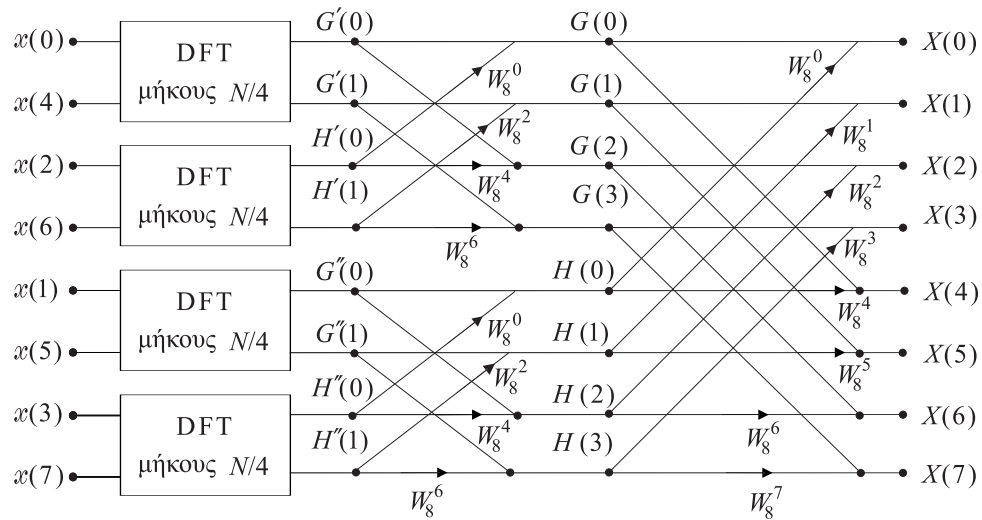
Σχήμα 6.8 Υπολογισμός DFT μήκους $\frac{N}{2}$ με τη βοήθεια δύο DFT μήκους $\frac{N}{4}$ ($N = 8$).

Αν διαιρέσουμε το πρόβλημα του υπολογισμού καθενός από τους DFT μήκους $\frac{N}{4}$ σε δύο προβλήματα μεγέθους $\frac{N}{8}$, ο αριθμός των πολλαπλασιασμών θα μειωθεί περαιτέρω σε $N + 2 \left\{ \frac{N}{2} + 2 \left[\frac{N}{4} + 2 \left(\frac{N}{8} \right)^2 \right] \right\} = 3N + \frac{N^2}{8}$. Αν εξακολουθήσουμε, θα καταλήξουμε σε DFT μήκους 2, των οποίων ο υπολογισμός δεν απαιτεί καθόλου πολλαπλασιασμούς, όπως μπορούμε να δούμε στο Σχήμα 6.10, όπου φαίνεται ο υπολογισμός του DFT των δύο δειγμάτων $x(0), x(4)$ για το παράδειγμα του Σχήματος 6.8. Εφόσον $N = 2^p$, η παραπάνω μεθοδολογία της διαίρεσης μπορεί να εφαρμοστεί $p = \log_2 N$ φορές, οδηγώντας σε μια μέθοδο υπολογισμού του DFT μήκους N που απαιτεί μόνο $N \log_2 N$ πολλαπλασιασμούς. Για $N = 1024$ αυτό σημαίνει μόνο 10240 πολλαπλασιασμούς, ένας αριθμός που θα πρέπει να συγκριθεί με το 1048576 που βρήκαμε για τον υπολογισμό με βάση τον ορισμό του DFT. Αντικαθιστώντας το Σχήμα 6.10 στο Σχήμα 6.9 παίρνουμε την τελική διαδικασία υπολογισμού που φαίνεται στο Σχήμα 6.11. Όπως φαίνεται και στο παράδειγμα του σχήματος, ο υπολογισμός εκτελείται σε στάδια, καθένα από τα οποία απαιτεί N πολλαπλασιασμούς. Υπάρχουν $\log_2 N$ στάδια, άρα έχουμε συνολικά $N \log_2 N$ πολλαπλασιασμούς.⁴

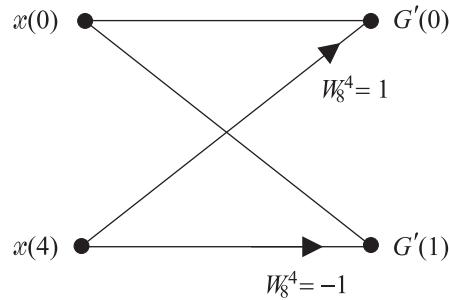
6.10.1 Θέματα Υλοποίησης του FFT

Μια περαιτέρω μείωση του πλήθους των απαιτούμενων πολλαπλασιασμών είναι δυνατή αν εκμεταλλευθούμε το γεγονός ότι οι υπολογισμοί σε κάθε στάδιο μπορούν να ομαδοποιηθούν σε ζεύγη της μορφής του Σχήματος 6.12(α). Λόγω της

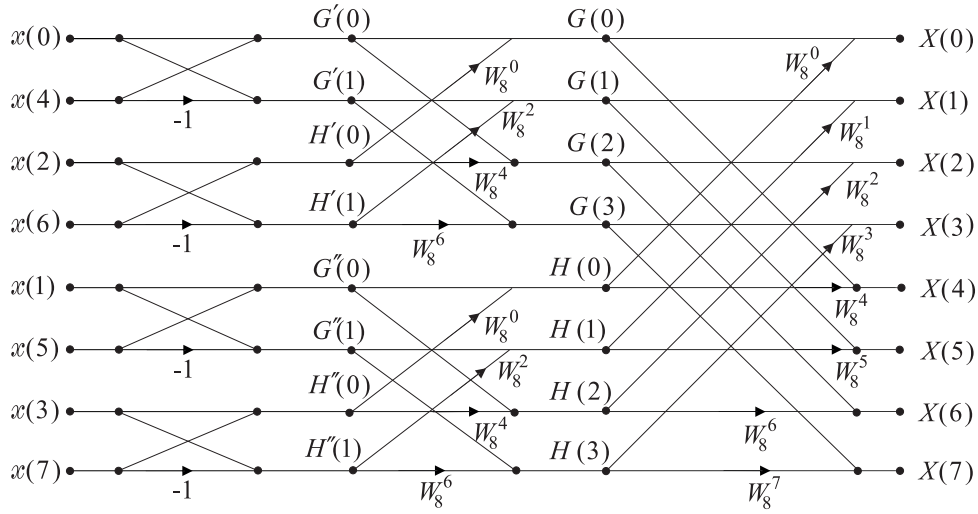
⁴Για την ακρίβεια, οι πολλαπλασιασμοί είναι $N \log_2 N - N$ αφού, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6.11, το πρώτο στάδιο δεν απαιτεί καθόλου πολλαπλασιασμούς. Αρκεί όμως να συγκρατήσουμε το ότι το υπολογιστικό κόστος του FFT είναι της τάξης του $N \log_2 N$.



Σχήμα 6.9 Το Σχήμα 6.7 με χρήση του Σχήματος 6.8 για τον υπολογισμό των DFT μήκους $\frac{N}{2}$.



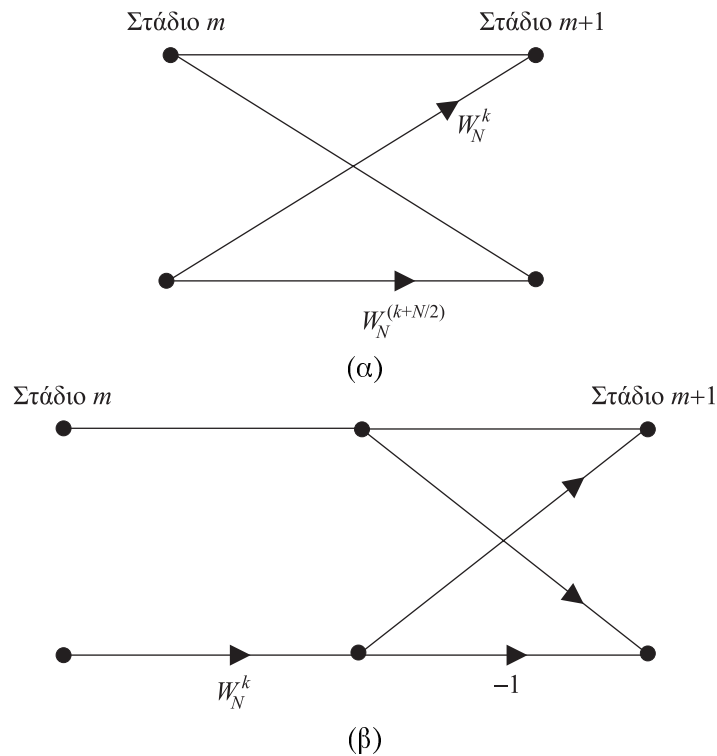
Σχήμα 6.10 DFT μήκους 2.



Σχήμα 6.11 Υπολογισμός DFT μήκους 8.

μορφής της, η υπολογιστική αυτή μονάδα είναι γνωστή και ως “πεταλούδα” (*butterfly*). Εκμεταλλευόμενοι την ταυτότητα $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$, $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$, που είδαμε στην (6.52), μπορούμε να υλοποιήσουμε την πεταλούδα του Σχήματος 6.12(α) ισοδύναμα όπως στο Σχήμα 6.12(β), όπου απαιτείται μόνο ένας πολλαπλασιασμός αντί για δύο. Στην πραγματικότητα αυτό που κάνει η υπολογιστική μονάδα του Σχήματος 6.12(β) είναι να υπολογίζει το DFT δύο ποσοτήτων αφού πρώτα πολλαπλασιάσει τη δεύτερη απ’ αυτές με W_N^k . Η συνέπεια της χρήσης της απλοποιημένης πεταλούδας είναι να μειωθεί το πλήθος των πολλαπλασιασμών στο μισό. Πράγματι, αφού υπάρχουν $\frac{N}{2}$ πεταλούδες σε καθένα από τα $\log_2 N$ στάδια και απαιτείται ένας πολλαπλασιασμός για την καθεμία τους, έχουμε συνολικά $\frac{N}{2} \log_2 N$ πολλαπλασιασμούς. Η υπολογιστική διαδικασία του Σχήματος 6.11 με πεταλούδες του τύπου του Σχήματος 6.12(β) δίνεται στο Σχήμα 6.13.

Παρατηρούμε στο τελευταίο σχήμα (καθώς και στα προηγούμενα) ότι οι N ποσότητες που υπολογίζονται σ’ ένα στάδιο εξαρτώνται απ’ αυτές του προηγούμενου σταδίου και μόνο. Αυτή η ιδιότητα του FFT έχει δύο πολύ σημαντικές συνέπειες στην υλοποίησή του. Πρώτον, οι πράξεις σε κάθε στάδιο μπορούν να γίνουν παράλληλα, αυξάνοντας έτσι σημαντικά την ταχύτητα του υπολογισμού σε παράλληλα υπολογιστικά περιβάλλοντα. Δεύτερον, μειώνονται αισθητά οι απαιτήσεις σε μνήμη. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 6.11, τα $G'(k), H'(k), G''(k), H''(k)$ μπορούν ν’ αποθηκευτούν στις θέσεις των $x(k)$ μια και τα τελευταία δεν χρειάζονται

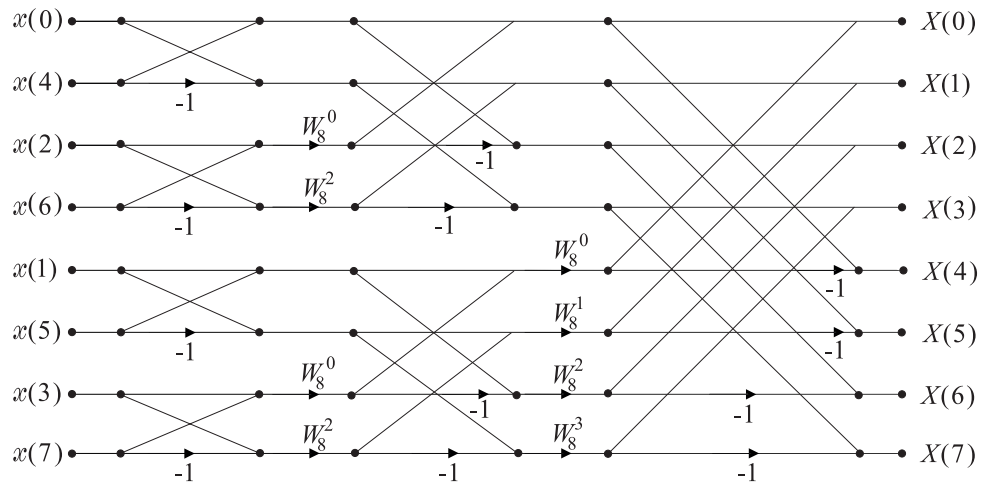


Σχήμα 6.12 (α) Βασική υπολογιστική μονάδα πεταλούδας. (β) Απλοποιημένος υπολογισμός πεταλούδας μ' έναν μόνο πολλαπλασιασμό.

πλέον. Χρειαζόμαστε επομένως συνολικά μόνο δύο σειρές των N θέσεων μνήμης η καθεμιά για ν' αποθηκεύουμε τις ποσότητες που εμφανίζονται στη διαδικασία υπολογισμού. Σε κάθε στάδιο, οι N αριθμοί που υπολογίζονται θα κρατούνται στη μία σειρά καταχωρητών ενώ τ' αποτελέσματα του προηγούμενου σταδίου αποθηκεύονται στην άλλη.

Βέβαια, για να είναι δυνατός ο υπολογισμός του DFT όπως περιγράφηκε παραπάνω, θα πρέπει οι όροι της ακολουθίας $x(n)$ ν' αποθηκευτούν με μια συγκεκριμένη σειρά. Η σειρά αυτή δεν είναι τίποτε άλλο από αυτή που αντιστοιχεί στην αντιστροφή της σειράς των δυαδικών ψηφίων (bits) στη δυαδική αναπαράσταση των δεικτών $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Για το παράδειγμα του $N = 8$ οι δείκτες της ακολουθίας έχουν την ακόλουθη αναπαράσταση στο δυαδικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x(0) &\equiv x(000) \\ x(1) &\equiv x(001) \end{aligned}$$



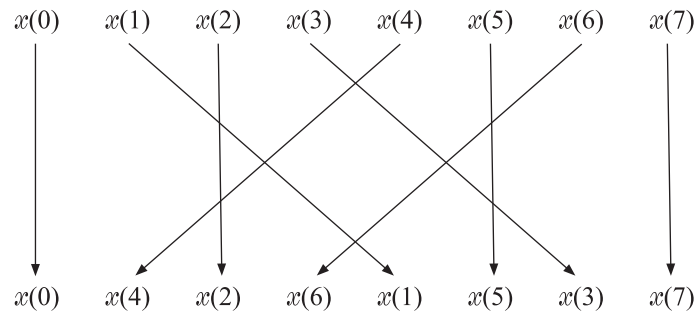
Σχήμα 6.13 Υπολογισμός DFT μήκους 8 χρησιμοποιώντας πεταλούδες όπως στο Σχήμα 6.12(β).

$$\begin{aligned}
 x(2) &\equiv x(010) \\
 x(3) &\equiv x(011) \\
 x(4) &\equiv x(100) \\
 x(5) &\equiv x(101) \\
 x(6) &\equiv x(110) \\
 x(7) &\equiv x(111)
 \end{aligned}$$

Αν αντιστρέψουμε τη σειρά των bits σε κάθε δείκτη (*bit reversal*), προκύπτει η διάταξη που χρησιμοποιείται στο Σχήμα 6.13:

$$\begin{aligned}
 x(000) &\equiv x(0) \\
 x(100) &\equiv x(4) \\
 x(010) &\equiv x(2) \\
 x(110) &\equiv x(6) \\
 x(001) &\equiv x(1) \\
 x(101) &\equiv x(5) \\
 x(011) &\equiv x(3) \\
 x(111) &\equiv x(7)
 \end{aligned}$$

Η παραπάνω μετάθεση των όρων της ακολουθίας φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα



Σχήμα 6.14 Μετάθεση που αντιστοιχεί σε bit reversal.

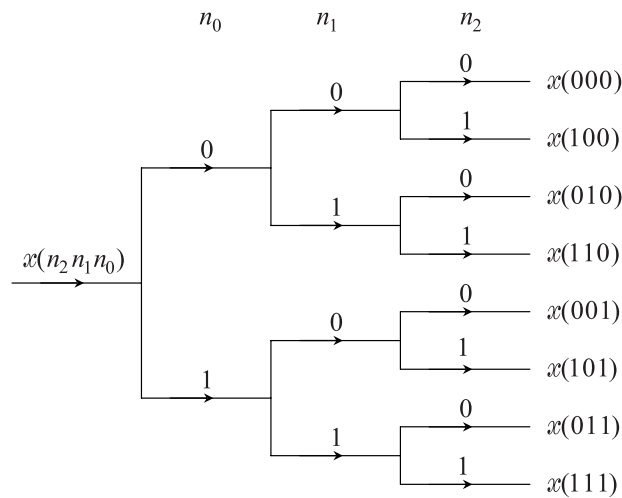
6.14. Γενικότερα, αν $N = 2^p$ και $(n_{p-1} \cdots n_1 n_0)$ είναι η δυαδική αναπαράσταση του δείκτη n , τότε ο όρος $x(n)$ αποθηκεύεται στη θέση $(n_0 n_1 \cdots n_{p-1})$.

Μπορούμε να εξηγήσουμε το γιατί υπάρχει αυτή η διάταξη στην ακολουθία $x(n)$ αν θυμηθούμε τα βήματα που μας οδήγησαν στο Σχήμα 6.13. Χωρίσαμε πρώτα τη $x(n)$ στους όρους με άρτιο και περιττό δείκτη, με τους πρώτους να εμφανίζονται στο πάνω μισό του Σχήματος 6.7 και τους δεύτερους στο κάτω μισό. Αλλά οι άρτιοι δείκτες είναι αυτοί των οποίων το λιγότερο σημαντικό bit, n_0 , είναι μηδέν και οι περιττοί αυτοί για τους οποίους $n_0 = 1$. Έτσι, αν το λιγότερο σημαντικό bit του n είναι μηδέν, ο δείκτης n είναι άρτιος και ο αντίστοιχος όρος, $x(n)$, θα εμφανιστεί στο πάνω μισό. Αν το λιγότερο σημαντικό bit είναι ένα, ο δείκτης n είναι περιττός και το $x(n)$ θα εμφανιστεί στο κάτω μισό. Αυτό φαίνεται και στο πρώτο επίπεδο του δενδρικού διαγράμματος του Σχήματος 6.15. Στο επόμενο βήμα (Σχήμα 6.9) οι υπακολουθίες των όρων με άρτιους και περιττούς δείκτες διαχωρίζονται με τη σειρά τους στα άρτια και περιττά μέρη τους, κι αυτό ισοδυναμεί με το να εξετάσουμε αν το δεύτερο λιγότερο σημαντικό bit, n_1 , του δείκτη τους είναι μηδέν ή ένα, αντίστοιχα, και να τοποθετήσουμε τον όρο στο πάνω ή στο κάτω μισό όπως και πριν (δεύτερο επίπεδο στο Σχήμα 6.15). Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται ώσπου να καταλήξουμε σε N υπακολουθίες μήκους 1. Η προκύπτουσα διάταξη φαίνεται στο Σχήμα 6.15.

Παρατηρήσεις:

α) Κεντρικό ρόλο στην ανάπτυξη του FFT έπαιξε η περιοδικότητα του W_N : $W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$.

β) Ο αλγόριθμος FFT που παρουσιάσαμε εδώ δεν είναι ο μοναδικός. Αποτελεί μέλος μιας μεγάλης οικογένειας αλγορίθμων υπολογισμού του DFT που βασίζονται στην ιδέα του “διαίρειν και βασίλευε” και συχνά αναφέρονται συλλογικά με



Σχήμα 6.15 Δενδρικό διάγραμμα για το bit reversal.

το όνομα FFT. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος ανήκει στην κατηγορία των FFT με *αποδεκάλιση στο χρόνο* (*decimation-in-time*), επειδή διαιρεί το αρχικό πρόβλημα σε άλλα μικρότερα χωρίζοντας το σήμα σε μικρότερα σήματα στο πεδίο του χρόνου. Οι FFT με *αποδεκάλιση στη συχνότητα* (*decimation-in-frequency*) βασίζονται στο χωρισμό του σήματος στις πρώτες $\frac{N}{2}$ και τις τελευταίες $\frac{N}{2}$ τιμές του, κάτι που οδηγεί σε bit-reversal στην ακολουθία DFT. Μια άλλη κατηγοριοποίηση των αλγορίθμων FFT προκύπτει από το αν ο N πρέπει να είναι δύναμη του 2, του 4, κ.λ.π., και τότε λέγονται βάσης 2 (radix-2), βάσης 4 (radix-4), ..., αντίστοιχα. Ο FFT που συζητήσαμε εδώ είναι βάσης 2. Υπάρχουν επίσης FFT που δεν υποθέτουν ότι το μήκος της ακολουθίας είναι δύναμη κάποιου αριθμού και βασίζονται απλά στην υπόθεση ότι ο N δεν είναι πρώτος. FFT που λαμβάνουν υπόψη τους τις ιδιότητες της ακολουθίας έχουν επίσης αναπτυχθεί. Για παράδειγμα, αν η ακολουθία είναι πραγματική, αυτό μπορεί να μας εξοικονομήσει επιπλέον πράξεις (βλ. Πρόβλημα 10).

Ο FFT αποτελεί ένα τόσο μεγάλο κεφάλαιο στο πεδίο των γρήγορων μετασχηματισμών που μια λεπτομερής παρουσίασή του ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτού του βιβλίου. Για περισσότερα σχετικά με τον FFT ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί πιο προχωρημένα κείμενα (π.χ., [Oppen75]) καθώς και βιβλία αφιερωμένα στο θέμα αυτό (π.χ., [Brig88]).

γ) Η πιο γνωστή μορφή του FFT, που είναι άλλωστε αυτή που παρουσιάσαμε εδώ, δημοσιεύτηκε από τους Cooley και Tuckey το 1965. Η ιστορία όμως τέ-

τοιων υπολογιστικών μεθόδων δεν ξεκίνησε τότε. Είναι πολύ παλιότερη και μας οδηγεί πίσω στον Gauss. Για μια ιστορική αναδρομή στην εξέλιξη μεθόδων FFT παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [HJB84].

6.11 Λυμένα Προβλήματα

1. Δίνεται η ακολουθία

$$x(n) : \{2, 1, 1, 0, 3, 2, 0, 3, 4, 6\}$$

Να υπολογιστούν απευθείας από τα δείγματα τα ακόλουθα

1. $X(0), X(5), \sum_{k=0}^9 X(k)$
2. $\sum_{k=0}^9 e^{-j(\frac{4\pi}{5}k)} X(k)$
3. $\sum_{k=0}^9 |X(k)|^2$

Λύση:

1.

$$\begin{aligned} X(0) &= \sum_{n=0}^9 x(n) e^{-j\frac{2\pi}{10}n0} = \sum_{n=0}^9 x(n) = 22 \\ X(5) &= \sum_{n=0}^9 x(n) e^{-j\frac{2\pi}{10}n5} = \sum_{n=0}^9 x(n) e^{-j\pi n} \\ &= \sum_{n=0}^9 (-1)^n x(n) = -2 \end{aligned}$$

Από τον τύπο του αντίστροφου DFT,

$$x(n) = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^9 X(k) e^{j\frac{2\pi}{10}kn}$$

άρα

$$\sum_{k=0}^9 X(k) = 10x(0) = 20$$

2. Γνωρίζουμε ότι εάν

$$x(n) \longleftrightarrow X(k),$$

τότε

$$x((n-m))_N \longleftrightarrow e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} X(k)$$

Άρα η ακολουθία

$$e^{-j\frac{4\pi}{5}k} X(k) = e^{-j\frac{2\pi}{10}4k} X(k) \equiv X'(k)$$

είναι ο DFT της $x'(n) \equiv x((n-4))_{10}$. Επομένως

$$\sum_{n=0}^9 X'(k) = 10x'(0) = 10x((0-4))_{10} = 10x(6) = 0$$

3. Από το θεώρημα του Parseval

$$\sum_{k=0}^9 |X(k)|^2 = 10 \sum_{n=0}^9 |x(n)|^2 = 800$$

△

2. Ν' αποδείξετε ότι εάν

$$z(n) = x(n) \otimes y(n),$$

τότε

$$\sum_{n=0}^{N-1} z(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) \right] \left[\sum_{l=0}^{N-1} y(l) \right]$$

Λύση: Από τον ορισμό της κυκλικής συνέλιξης έχουμε ότι

$$z(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y((n-m))_N$$

Άρα

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y((n-m))_N \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{n=0}^{N-1} y((n-m))_N \\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) \right] \left[\sum_{l=0}^{N-1} y(l) \right] \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα εάν θυμηθούμε ότι οι DFT των τριών ακολουθιών συνδέονται με τη σχέση

$$Z(k) = X(k)Y(k)$$

και θέσουμε σ' αυτή $k = 0$.

△

3. Οι όροι, $X(k)$, του DFT μιας ακολουθίας είναι όλοι πραγματικοί. Το μήκος της ακολουθίας, $x(n)$, είναι $N = 8$. Δίνονται τα πρώτα πέντε δείγματα $x(0) = 1.5$, $x(1) = 2.3 + j0.5$, $x(2) = 3.1 - j5.6$, $x(3) = 0.7 + j2.7$, $x(4) = 4.6$. Να υπολογιστούν τα υπόλοιπα δείγματα της $x(n)$.

Λύση: Ακολουθώντας πορεία ανάλυσης μ' αυτή που ακολουθήσαμε για ν' αποδείξουμε την ιδιότητα 2 του DFT, εύκολα αποδεικνύουμε ότι, εφόσον τα $X(k)$ είναι όλα πραγματικά, ισχύει

$$x(n) = x^*(N - n) = x^*((-n))_N, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1$$

Με βάση την παραπάνω ιδιότητα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x(5) &= x^*(8 - 5) = x^*(3) = 0.7 - j2.7 \\ x(6) &= x^*(8 - 6) = x^*(2) = 3.1 + j5.6 \\ x(7) &= x^*(8 - 7) = x^*(1) = 2.3 - j0.5 \end{aligned}$$

△

4. Έστω ότι διαθέτουμε έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό του DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (6.59)$$

Να δείξετε πώς αυτός ο αλγόριθμος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσει τον αντίστροφο DFT:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (6.60)$$

Λύση: Ας δηλώσουμε τη λειτουργία του αλγορίθμου μας ως $\text{DFT}(\cdot)$:

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)]$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις του ζεύγους DFT παρατηρούμε ότι η κύρια διαφορά τους είναι ότι στον αντίστροφο DFT χρησιμοποιείται ο μιγαδικός συζυγής του παράγοντα W_N^{nk} που υπεισέρχεται στον ευθύ DFT. Έτσι, αν πάρουμε το συζυγή των δύο μελών της (6.60), θα έχουμε:

$$x^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Από τη σχέση αυτή είναι φανερό ότι η συζυγής της ακολουθίας $x(n)$ μπορεί να υπολογιστεί ως

$$x^*(n) = \frac{1}{N} \text{DFT}[X^*(k)]$$

Τέλος, η $x(n)$ μπορεί να υπολογιστεί από την

$$x(n) = \frac{1}{N} \{\text{DFT}[X^*(k)]\}^*$$

Με άλλα λόγια, εφαρμόζουμε το δοσμένο αλγόριθμο πάνω στη συζυγή της $X(k)$, παίρνουμε το συζυγή του αποτελέσματος, και το πολλαπλασιάζουμε με $\frac{1}{N}$. \triangle

5. Έστω δύο πραγματικές ακολουθίες $x_1(n), x_2(n)$ ίδιου μήκους, N , και $X_1(k), X_2(k)$ οι DFT τους. Κατασκευάζουμε τη μιγαδική ακολουθία $g(n) = x_1(n) + jx_2(n)$ με DFT $G(k)$. Να εκφράσετε τους $X_1(k), X_2(k)$ συναρτήσει του $G(k)$.

Λύση: Από την ιδιότητα της γραμμικότητας του DFT έπεται ότι

$$G(k) = X_1(k) + jX_2(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.61)$$

Εφόσον οι $x_1(n), x_2(n)$ είναι πραγματικές, οι DFT τους θα έχουν μιγαδική συμμετρία, δηλαδή:

$$X_i^*(N-k) = X_i(k), \quad i = 1, 2 \quad (6.62)$$

Η (6.61) συνεπάγεται ότι το συζυγές συμμετρικό (conjugate symmetric) μέρος του $G(k)$,

$$G_{CS}(k) \equiv \frac{G(k) + G^*(N-k)}{2}, \quad (6.63)$$

ισούται με

$$G_{CS} = \frac{X_1(k) + X_1^*(N-k)}{2} + j \frac{X_2(k) - X_2^*(N-k)}{2}$$

ή χρησιμοποιώντας την (6.62),

$$G_{CS}(k) = X_1(k).$$

Παρόμοια βρίσκουμε ότι το συζυγές αντισυμμετρικό (conjugate antisymmetric) μέρος της $G(k)$,

$$G_{CA}(k) \equiv \frac{G(k) - G^*(N - k)}{2}, \quad (6.64)$$

ισούται με τη $X_2(k)$:

$$G_{CA}(k) = X_2(k).$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι μπορούμε να υπολογίσουμε ταυτόχρονα τους DFT δύο πραγματικών ακολουθιών εφαρμόζοντας μια μέθοδο FFT σε μία μιγαδική ακολουθία που περιέχει τις δύο δοσμένες ακολουθίες ως το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος. Δείτε και το Πρόβλημα 10. \triangle

6.12 Προβλήματα

1. Τα άρτια δείγματα του DFT μιας πραγματικής ακολουθίας, $x(n)$, μήκους $N = 9$ είναι $X(0) = 2.4$, $X(2) = 2.6 + j3.4$, $X(4) = 1.5 - j2.8$, $X(6) = 0.7 + j0.4$, $X(8) = 5.7$. Να υπολογιστούν τα υπόλοιπα δείγματα του DFT.

2. Μια ακολουθία $x(n)$ πραγματικών αριθμών, μήκους $N = 9$, έχει DFT του οποίου είναι γνωστά τα ακόλουθα δείγματα: $X(0) = 1.5$, $X(1) = 3.7 + j2.2$, $X(4) = 2.7 - j4.7$, $X(6) = 0.5 + j5.6$, $X(7) = 2.1 + j4.2$. Να υπολογιστούν τα υπόλοιπα δείγματα του DFT.

3. Δίνεται η ακολουθία

$$x(n) : \{2.1, 3.5 + j2.2, 0.6, 5.8 - j0.7, 4.8, 1.4, 3.5 + j7.2\}$$

Εάν $X(k)$ είναι ο DFT της παραπάνω ακολουθίας, να υπολογιστεί απευθείας η ακολουθία που έχει DFT τα δείγματα $e^{-j\frac{2\pi}{7}4k} X(k)$.

4. Δίνεται η ακολουθία $z(n) = x(n) + jy(n)$, μήκους $N = 8$. Τα δείγματα του DFT της ακολουθίας είναι

$$Z(0) = 2 + j3, \quad Z(1) = -3 - j4, \quad Z(2) = 4 + j3, \quad Z(3) = 4 + j0.5$$

$$Z(4) = 1.6 - j2.5, \quad Z(5) = 2.8 + j4.9, \quad Z(6) = 0.4 + j2.7, \quad Z(7) = 7.8$$

Να υπολογιστούν οι DFT των ακολουθιών $x(n)$, $y(n)$ απευθείας από τα παραπάνω δείγματα $Z(k)$.

5. Δίνονται οι ακολουθίες

$$\begin{aligned}x(n) &: \{0.0, 1.0, 2.0, 3.0\} \\y(n) &: \{1.0, 0.0, 0.0, 2.0, 1.0\}\end{aligned}$$

Να υπολογιστεί η γραμμική συνέλιξη των ακολουθιών με τη βοήθεια της κυκλικής συνέλιξης.

6. Δίνονται οι ακολουθίες

$$\begin{aligned}x(n) &: \{2, 1, 2, 1\} \\y(n) &: \{1, 2, 3, 4\}\end{aligned}$$

Να υπολογιστούν οι αντίστοιχοι DFT και στη συνέχεια με τη βοήθεια του αντίστροφου DFT η κυκλική συνέλιξη $x(n) \otimes y(n)$.

7. Εάν γνωρίζετε το DFT της ακολουθίας

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & 4 \leq n \leq 7 \end{cases},$$

να υπολογίσετε το DFT της

$$x_1(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & 1 \leq n \leq 4 \\ 1, & 5 \leq n \leq 7 \end{cases}$$

8. Δίνεται η ακολουθία $x(n) : \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Να υπολογιστεί η ακολουθία που έχει DFT $X(k)S(k)$, όπου $S(k) : \{1, 0, 0, 0, 0\}$.

9. Ν' αποδειχτεί ότι εάν $z(n)$ είναι η κυκλική συνέλιξη δύο ακολουθιών $x(n)$, $y(n)$ άρτιου μήκους N , τότε ισχύει

$$\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n z(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m x(m) \right] \left[\sum_{l=0}^{N-1} (-1)^l y(l) \right]$$

10. Προτείνετε έναν αποδοτικό τρόπο υπολογισμού του DFT μιας πραγματικής ακολουθίας $x(n)$ άρτιου μήκους N που να εκμεταλλεύεται τα αποτελέσματα του Λυμένου Προβλήματος 5. (Υπόδειξη: Θεωρήστε τις ακολουθίες $x_1(n)$, $x_2(n)$ των όρων της $x(n)$ με άρτιο και περιττό δείκτη, αντίστοιχα.)

Βιβλιογραφία

- [Kalou94] N. Καλουππίδης, *Σήματα, Συστήματα και Αλγόριθμοι*, Δίαυλος, Αθήνα, 1994.
- [Brig88] E. O. Brigham, *Fast Fourier Transform and Its Applications*, Prentice-Hall, 1988.
- [Chir175] P. M. Chirlian, *Signals, Systems, and the Computer*, Intext Educational Publishers, 1975.
- [HJB84] M. Heideman, D. Johnson, and C. Burrus, “Gauss and the history of the fast Fourier transform,” *IEEE Acoustics, Speech, and Signal Processing Magazine*, vol. 1, no. 4, pp. 14-21, Oct. 1984.
- [Hsu70] H. P. Hsu, *Fourier Analysis*, Simon & Schuster, 1970.
- [Hsu95] H. P. Hsu, *Signals and Systems*, McGraw-Hill, 1995.
- [Kailath80] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, 1980.
- [Kalou97] N. Kalouptsidis, *Signal Processing Systems: Theory and Design*, John Wiley & Sons, 1997.
- [Lathi01] B. P. Lathi, *Linear Systems and Signals*, Berkeley Cambridge Press, 2nd ed., 2001.
- [Oppen75] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1975.
- [Oppen96] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Signals and Systems*, 2nd ed., Prentice-Hall, 1996.
- [Oppen99] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, and J. R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*, 2nd ed., Prentice-Hall, 1999.

- [Papou62] A. Papoulis, *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw-Hill, 1962.
- [Papou77] A. Papoulis, *Signal Analysis*, McGraw-Hill, 1977.
- [Picin88] B. Picinbono, *Principles of Signals and Systems: Deterministic Signals*, Artech House, 1988.
- [Proakis92] J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*, 2nd ed., MacMillan, 1992.
- [Ziemer98] R. E. Ziemer, W. H. Tranter, and D. R. Fannin, *Signals and Systems: Continuous and Discrete*, 4th ed., Prentice-Hall, 1998.

Ευρετήριο

- aliasing, 284
- bit reversal, 346
- DFS, 330
- DFT, 309
- Fast Fourier Transform (FFT), 310, 337
- MF, 34, 253
- ML, 107
- MZ, 233
- ΓΔΕ, 141
- ΓΧΑ, 20
- Επεξεργασία Σημάτων, 3
- Ευκλείδειος χώρος, 77
- Θεωρία Συστημάτων, 3
- ΠΣ, 113, 234
- ΦΕΦΕ, 25, 261
- αιτιατά σήματα, 21, 234
- αιτιατά συστήματα, 15, 227
- αιτιατή συνάρτηση, 57, 135
- ακολουθία δεξιάς έκτασης, 292
- αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace, 108, 137
- αμφίπλευρος μετασχηματισμός Z, 233
- ανάγωγη μορφή, 181
- ανάδραση, 208
- ανάδραση κατάστασης, 209
- ανάκτηση σήματος από τα δείγματά του, 277
- ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων με χρήση ML, 143
- ανάπτυξη ρητής συνάρτησης σε απλά (μερικά) κλάσματα, 126, 249
- ανάπτυξη ρητής συνάρτησης σε δυναμοσειρά, 247
- αναδίπλωση, 273
- αναλογικά σήματα, 1
- αναλυτική συνάρτηση, 114
- αναπαράσταση φάσσορα, 71
- αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier, 310
- αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace, 125
- αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου, 41
- αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου, 254
- αντίστροφος μετασχηματισμός Z, 244
- αντιαιτιατά σήματα, 234
- αποδεκτικότητα στη συχνότητα, 348
- αποδεκτικότητα στο χρόνο, 348
- απόκριση μηδενικής εισόδου, 268
- απόκριση μηδενικής κατάστασης, 267
- απόκριση συχνοτήτων συστήματος, 68

- απόλυτα αθροίσιμη ακολουθία, 234
 αριστερή ολίσθηση, 264
 αρμονικές, 82
 ασυμπτωτική ευστάθεια, 206

 βηματική ακολουθία, 224
 βηματική απόκριση, 75
 βηματική συνάρτηση, 7

 γενικευμένες συναρτήσεις, 10
 γενικευμένοι γραμμικοί ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί (ΓΤΟΜ), 108
 γνήσια ρητή συνάρτηση, 181
 γραμμικά συστήματα, 16, 167, 227
 γραμμική συνέλιξη, 322
 γραμμικός συνδυαστής, 187

 δείγμα, 269
 δειγματοληψία, 269
 δειγματοληψία και συγκράτηση (sample-and-hold), 288
 δειγματοληψία του μετασχηματισμού Z, 332
 δεξιά ολίσθηση, 264
 διάνυσμα κατάστασης, 163
 διάσταση συστήματος, 166
 διαγωνιοποίηση μητρώου, 170, 175
 διακριτή σειρά Fourier (DFS), 330
 διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT), 309
 διαμόρφωση, 47
 δυναμικά συστήματα, 15
 δυναμικές εξισώσεις, 166, 268
 δυναμοσειρές τετραγωνικών μητρώων, 167

 εκθετική σειρά Fourier, 80
 εκθετική συνάρτηση μητρώων, 168

 ελάχιστη υλοποίηση, 204
 ελέγξιμη κατάσταση, 193
 ελέγξιμο σύστημα, 193, 202
 εξίσωση εξόδου, 166
 εξίσωση καταστατικής μετάβασης, 178
 επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με χρήση ML, 141
 επικάλυψη, 273
 επικρατούσα ιδιοτιμή, 213
 εσωτερικό γινόμενο, 77
 ευστάθεια συστήματος, 205
 ευστάθεια φραγμένης εισόδου φραγμένης εξόδου (ΦΕΦΕ), 25, 261
 εύρος ζώνης σήματος, 271

 ημιπεριοδική συνάρτηση, 134

 θεώρημα Nyquist, 273
 θεώρημα Parseval για DFT, 326
 θεώρημα Parseval για MF διακριτού χρόνου, 257
 θεώρημα Parseval για MF συνεχούς χρόνου, 60
 θεώρημα Parseval για σειρά Fourier, 87

 ιδανικό κατωπερατό φίλτρο, 73
 ιδιοσυναρτήσεις συστήματος, 176
 ιδιοσυχνότητες συστήματος, 176
 ιδιότητες του DFT, 311
 ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου, 256
 ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου, 44
 ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, 116
 ιδιότητες του μετασχηματισμού Z, 238
 ισοδύναμα συστήματα, 187

 κέρδος ανάδρασης, 210

- κατάσταση συστήματος, 163
- κατανομές, 10
- καταστατική εξίσωση, 166
- κρουστική ακολουθία, 224
- κρουστική απόκριση συστήματος, 20, 228, 269
- κρουστική συνάρτηση, 10
- κυκλικά κατοπτρική ακολουθία, 322
- κυκλική συνέλιξη, 322
- κυκλική συχνότητα, 4
- λύση δυναμικών εξισώσεων, 178
- μέση ισχύς, 88
- μεμονωμένο ανώμαλο σημείο, 114
- μεταβλητές κατάστασης, 163
- μετασχηματισμός Fourier (MF) διακριτού χρόνου, 253
- μετασχηματισμός Fourier (MF) συνεχούς χρόνου, 34
- μετασχηματισμός Laplace (ML), 107, 108
- μετασχηματισμός Laplace ημιπεριοδικής συνάρτησης, 134
- μετασχηματισμός Z (MZ), 233
- μετασχηματισμός ομοιότητας, 187
- μη συρρικνούμενη μορφή, 181
- μη συρρικνούμενη συνάρτηση μεταφοράς, 202
- μη-αιτιατά συστήματα, 16
- μη-γραμμικά συστήματα, 17
- μηδενική συνάρτηση, 125
- μηδενικό, 114
- μητρώο ελεγχιμότητας, 193
- μητρώο καταστατικής μετάβασης, 174, 269
- μητρώο παρατηρησιμότητας, 194
- μυγαδική εκθετική ακολουθία, 225
- μυγαδική συχνότητα, 109
- μυγαδικό πλάτος σήματος, 6
- μονάδα καθυστέρησης, 240
- μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace, 108
- μονόπλευρος μετασχηματισμός Z, 263
- μορφή Jordan, 172
- ολοκληρωτής, 188
- ολοκληρωτικό υπόλοιπο, 126, 245
- ομογενής καταστατική εξίσωση, 173
- ορθοκανονικές συναρτήσεις, 77
- παράγοντας Fejer, 64
- παραθύρωση, 63
- παραλλαγή (aliasing), 284
- παρατηρήσιμη κατάσταση, 193
- παρατηρήσιμο σύστημα, 193, 202
- παρεμβολή, 287
- περίοδος, 4
- περίοδος δειγματοληψίας, 269
- περιοδικά σήματα, 4, 225
- περιοδική συνέλιξη, 331
- περιοχή σύγκλισης (ΠΣ) μετασχηματισμού Laplace, 113
- περιοχή σύγκλισης (ΠΣ) μετασχηματισμού Z, 234
- πεταλούδα (butterfly), 344
- πυκνότητα φάσματος ενέργειας, 60
- πυρήνας, 108
- πόλος, 114
- ρητή συνάρτηση, 114
- σήμα, 1
- σήματα απλής συχνότητας, 7
- σήματα διακριτού χρόνου, 1, 223
- σήματα ενέργειας, 60, 88
- σήματα ισχύος, 88
- σήματα περιορισμένου εύρους ζώνης, 276

- σήματα συνεχούς χρόνου, 1
 σειρά Fourier, 76
 σημείο ανωμαλίας, 114
 σταθεροποίηση δυναμικών συστημάτων, 208
 στατικά συστήματα, 15
 συγκερασμός, 20
 συνάρτηση Dirac, 10
 συνάρτηση δέλτα, 10
 συνάρτηση δειγματοληψίας, 36
 συνάρτηση εκθετικής τάξης, 110
 συνάρτηση μεταφοράς συστήματος, 68, 143, 180, 259
 συνάρτηση προσήμου, 43
 συνάρτηση φάσης, 74
 συνάρτηση φραγμένης κύμανσης, 13
 συνέλιξη, 20, 52
 συναρτησιοειδή, 10
 συνθήκες Dirichlet για MF, 41
 συνθήκες Dirichlet για σειρά Fourier, 80
 συστήματα διακριτού χρόνου, 227
 συστήματα χωρίς μνήμη, 15
 συχνότητα (ή ρυθμός) δειγματοληψίας, 269
 συχνότητα αποκοπής, 73
 σχέση μετασχηματισμών Laplace και Fourier, 135
 σχήμα ελεγχιμότητας, 183, 185
 σχήμα παρατηρησιμότητας, 183, 186
 σύστημα, 2

 ταχύς μετασχηματισμός Fourier, 337
 τμηματικά ομαλή συνάρτηση, 41
 τμηματικά συνεχής συνάρτηση, 37
 τριγωνομετρική σειρά Fourier, 79

 υπέρθεση, 17, 227
 υπερύψωση, 61

 φάσμα γραμμών, 88
 φάσμα πυκνότητας ισχύος, 88
 φάσμα συχνοτήτων, 56
 φίλτρο, 73
 φίλτρο ισοστάθμισης (equalizer), 289
 φαινόμενο Gibbs, 62

 χρονικά αμετάβλητα συστήματα, 17, 227
 χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα, 17, 19
 χρόνος ανύψωσης, 76
 χώρος κατάστασης, 162

 ψευδωνυμία (aliasing), 284
 ψηφιακά σήματα, 2

 όριο κατανομής, 11

 ύπαρξη του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου, 41
 ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace, 110

Το βιβλίο αυτό πραγματεύεται τις βασικές έννοιες της θεωρίας σημάτων και συστημάτων και εισάγει τον αναγνώστη στους μετασχηματισμούς Fourier, Laplace, Z και DFT, καθώς επίσης και στην περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης, στη θεωρία δειγματοληψίας και σε υπολογιστικά θέματα της ανάλυσης Fourier. Χωρίς να θυσιάζεται η αυστηρότητα στα σημεία όπου αυτή είναι απαραίτητη, η προσπάθεια των συγγραφέων έχει εστιαστεί στην παρουσίαση όλων των θεματικών ενοτήτων με τρόπο απλό και κατανοητό, ενώ κάθε κεφάλαιο πλαισιώνεται από έναν αριθμό κατάλληλα επιλεγμένων λυμένων προβλημάτων.

Ο Σέργιος Θεοδωρίδης είναι Καθηγητής Επεξεργασίας Σήματος και Επικοινωνιών στο Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου Αθήνας. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα εστιάζονται στις περιοχές Επεξεργασίας Σήματος και Εικόνας, Επικοινωνιών, και Αναγνώρισης Προτύπων. Έχει δημοσιεύσει εκτεταμένα σε διεθνή περιοδικά και συνέδρια. Είναι συν-συγγραφέας του βιβλίου *Pattern Recognition*, 2nd edition, Academic Press, 2003, και συν-εκδότης του βιβλίου *Adaptive System Identification and Signal Processing Algorithms*, Prentice-Hall, 1993. Υπηρετεί ως Associate Editor στα περιοδικά *IEEE Transactions on Signal Processing*, *Signal Processing*, *EURASIP Journal on Applied Signal Processing* και *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*. Είναι πρόεδρος της *European Association for Signal, Speech, and Image Processing (EURASIP)*, Senior Member του *IEEE*, και Fellow του *IEE*.

Ο Κωνσταντίνος Μπερμπερίδης είναι Αναπληρωτής Καθηγητής στο Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών και Διευθυντής του Εργαστηρίου Επεξεργασίας Σημάτων και Τηλεπικοινωνιών. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα εστιάζονται στις περιοχές των Ψηφιακών Τηλεπικοινωνιών και της Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος και Εικόνας. Έχει περισσότερες από 50 εργασίες σε επιστημονικά περιοδικά και συνέδρια διεθνούς κύρους. Έχει επίσης 4 διεθνείς πατέντες σε θέματα Επεξεργασίας Τηλεπικοινωνιακών Σημάτων. Υπηρετεί ως Associate Editor στο διεθνές επιστημονικό περιοδικό *EURASIP Journal on Applied Signal Processing* και έχει διατελέσει μέλος οργανωτικών και επιστημονικών επιτροπών διεθνών συνεδρίων και συναντήσεων. Επίσης, έχει συνεισφέρει ως κριτής εργασιών σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά και συνέδρια. Είναι μέλος του Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδας και των επιστημονικών ενώσεων *EURASIP*, *IEEE Signal Processing Society* και *IEEE Communications Society*.

Ο Λευτέρης Κοφίδης είναι Λέκτορας Πληροφορικής στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιά. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα εστιάζονται στις περιοχές της Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος και Εικόνας και των Ψηφιακών Τηλεπικοινωνιών. Έχει συνεισφέρει ως κριτής εργασιών σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά και συνέδρια. Είναι μέλος του Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδας και των επιστημονικών ενώσεων *Signal Processing*, *Circuits and Systems*, *Communications*, και *Information Theory* του *IEEE*.

τυπωθήτω

ISBN 960-402-114-1



9789604021147