ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

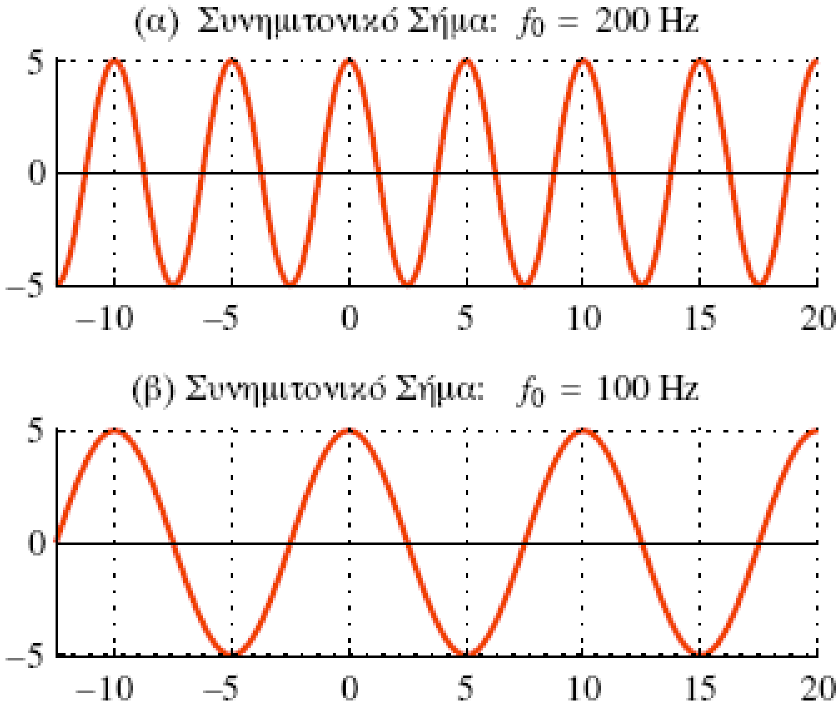
- **Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων**

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

- Ημιτονοειδή Σήματα
- Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα
- Φάσορες

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

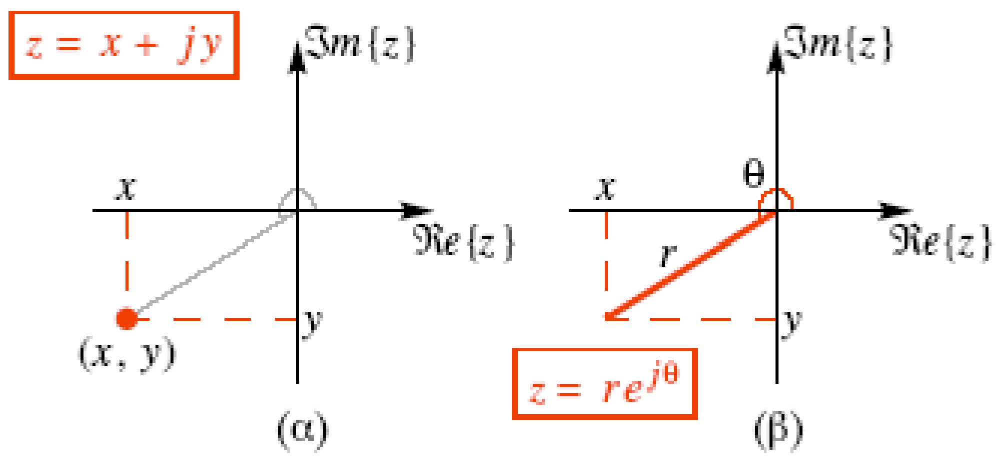
Ημιτονοειδή σήματα: $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα: $z(t) = A\, e^{j(\omega_0 t + \phi)}$

Καρτεσιανή και πολική αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα: $z(t) = A\,e^{j(\omega_0 t+\phi)}$

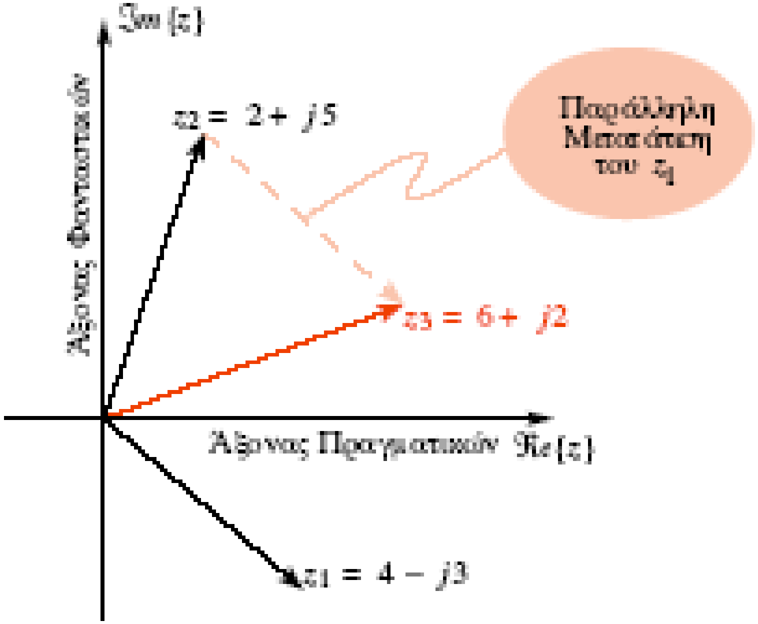
Σχέση Euler: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

Αντίστροφες σχέσεις Euler: $$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

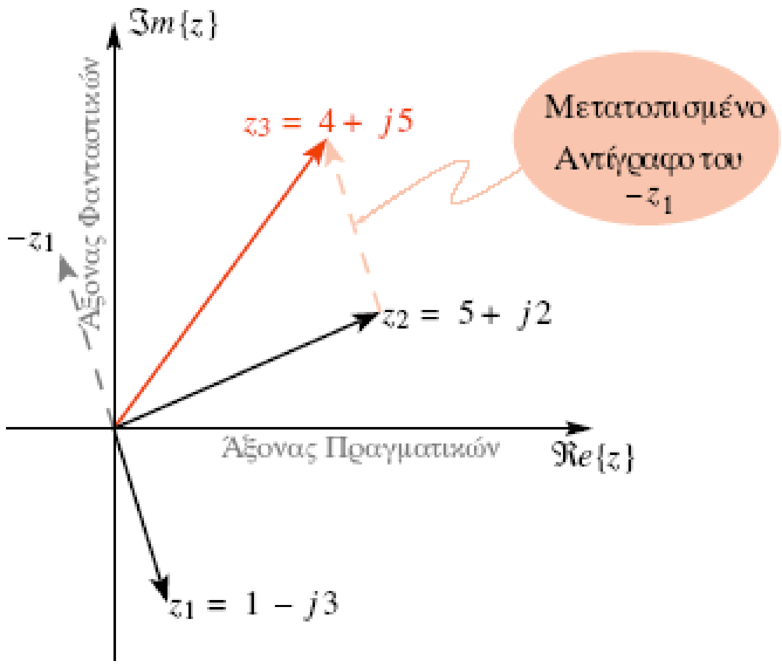
Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Πρόσθεση Μιγαδικών Αριθμών



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Αφαίρεση Μιγαδικών Αριθμών



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα:

$$z(t) = A\,e^{j(\omega_0 t + \phi)}$$
$$= A\cos(\omega_0 t + \phi) + jA\sin(\omega_0 t + \phi)$$

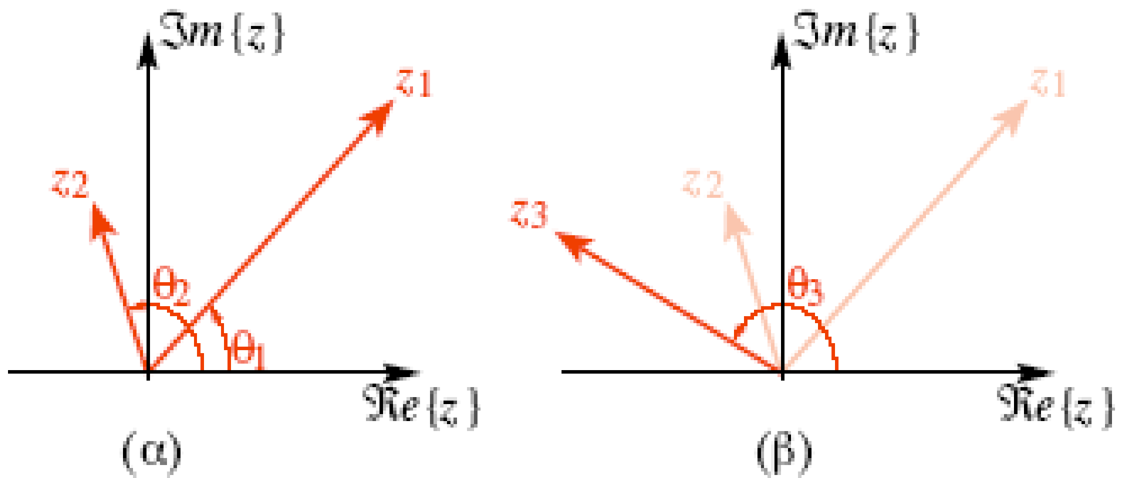
$$z(t) = X\,e^{j\omega_0 t} = Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t} = Ae^{j\theta(t)}$$

$$\theta(t) = \omega_0 t + \phi$$

Φάσορας

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Πολλαπλασιασμός Μιγαδικών Αριθμών



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα: $z(t) = A\, e^{j(\omega_0 t + \phi)}$

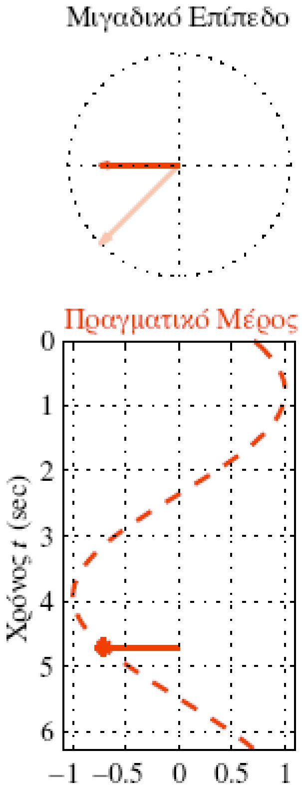
$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\begin{aligned} A\cos(\omega_0 t + \phi) &= A\left(\frac{e^{j(\omega_0 t+\phi)} + e^{-j(\omega_0 t+\phi)}}{2}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} X e^{j\omega_0 t} + \tfrac{1}{2} X^* e^{-j\omega_0 t} \\ &= \tfrac{1}{2} z(t) + \tfrac{1}{2} z^*(t) \\ &= \Re e\{z(t)\} \end{aligned}$$

Φάσορας

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα: $z(t) = A\, e^{j(\omega_0 t + \phi)}$



(α)

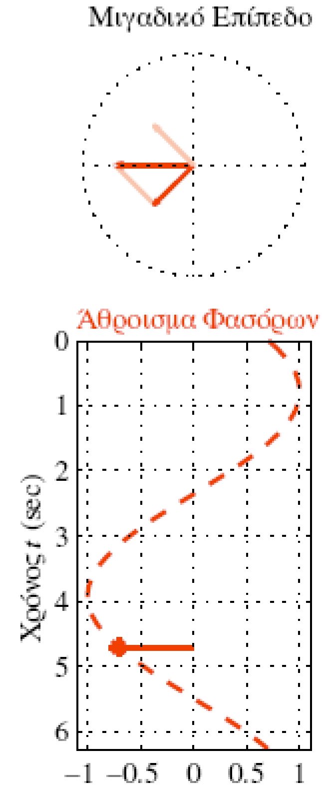
Οι δύο όψεις

•

•

•

του ίδιου νομίσματος



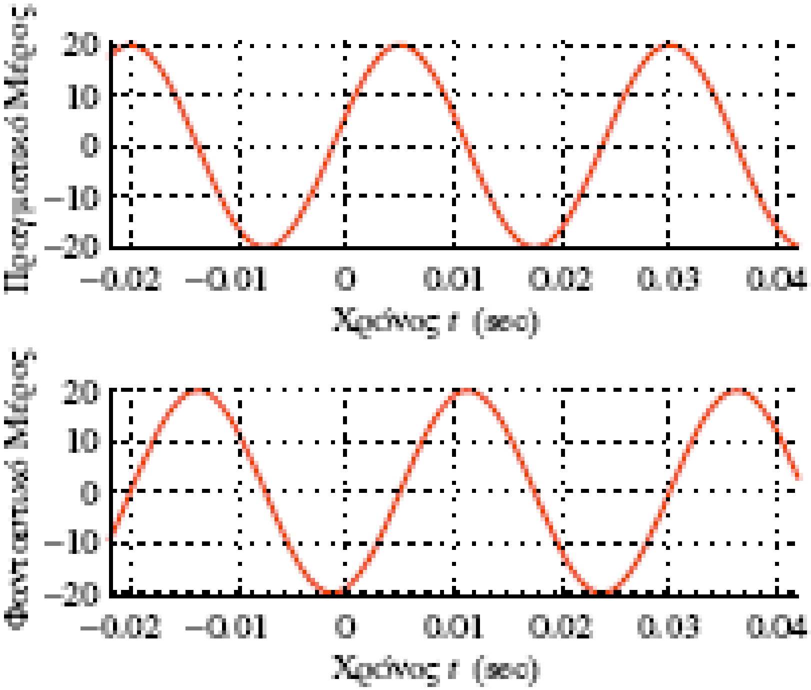
(β)

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα:

$$z(t) = A\,e^{j(\omega_0 t+\phi)}$$

$$z(t) = 20e^{j(2\pi(40)t-0.4\pi)}$$



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Πρόσθεση Ημιτονοειδών σημάτων ίδιας συχνότητας

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_0 t + \phi_k)$$

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Πρόσθεση Ημιτονοειδών σημάτων ίδιας συχνότητας με φάσορες

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_0 t + \phi_k) &= \sum_{k=1}^{N} \Re e\left\{A_k e^{j(\omega_0 t + \phi_k)}\right\} \\
&= \Re e\left\{\sum_{k=1}^{N} A_k e^{j\phi_k} e^{j\omega_0 t}\right\} \\
&= \Re e\left\{\left(\sum_{k=1}^{N} A_k e^{j\phi_k}\right) e^{j\omega_0 t}\right\} \\
&= \Re e\left\{\left(A e^{j\phi}\right) e^{j\omega_0 t}\right\} \\
&= \Re e\left\{A e^{j(\omega_0 t + \phi)}\right\} \\
&= A \cos(\omega_0 t + \phi)
\end{aligned}
$$

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Πρόσθεση Ημιτονοειδών σημάτων ίδιας συχνότητας με Φάσορες

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_0 t + \phi_k) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

(i) Εύρεση της αναπαράστασης φάσορα $X_k = A_k e^{j\phi_k}$ καθενός σήματος.

(ii) Πρόσθεση των φασόρων για να βρούμε το $X = X_1 + X_2 + \cdots = Ae^{j\phi}$. Η υλοποίηση του βήματος αυτού, προϋποθέτει τη μετατροπή από πολική σε Καρτεσιανή και από Καρτεσιανή σε πολική αναπαράσταση.

(iii) Πολλαπλασιασμός του X με $e^{j\omega_0 t}$ για να πάρουμε το $z(t) = Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t}$.

(iv) Απομόνωση του πραγματικού μέρους για να πάρουμε $x(t) = \Re e\{Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t}\} = A\cos(\omega_0 t + \phi) = x_1(t) + x_2(t) + \ldots$.

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Περιγραφή Σημάτων στο Χώρο της Συχνότητας-Φάσμα Σήματος

Φάσμα Γραμμικού Συνδυασμού Ημιτονοειδών Σημάτων:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k)$$

Χρησιμοποιώντας την αντίστροφη σχέση του Euler για το συνημίτονο έχουμε:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{N} \left\{ \frac{X_k}{2} e^{j2\pi f_k t} + \frac{X_k^*}{2} e^{-j2\pi f_k t} \right\}$$

Ονομάζουμε Φάσμα δίπλευρης επέκτασης το ακόλουθο σύνολο ζευγών:

$$\left\{ (0, X_0)\,,\ \left(f_1, \tfrac{1}{2}X_1\right),\ \left(-f_1, \tfrac{1}{2}X_1^*\right), \ldots\ \left(f_k, \tfrac{1}{2}X_k\right),\ \left(-f_k, \tfrac{1}{2}X_k^*\right), \ldots \right\}$$

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Περιγραφή Σημάτων στο Χώρο της Συχνότητας-Φάσμα Σήματος

Φάσμα Γραμμικού Συνδυασμού Ημιτονοειδών Σημάτων:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως:

$$x(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j2\pi f_k t}$$

όπου

$$a_k = \begin{cases} A_0 & \text{για } k = 0 \\ \frac{1}{2} A_k e^{j\phi_k} & \text{για } k \neq 0 \end{cases}$$

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Περιγραφή Σημάτων στο Χώρο της Συχνότητας-Φάσμα Σήματος

Παράδειγμα: $x(t) = 10 + 14\cos(200\pi t - \pi/3) + 8\cos(500\pi t + \pi/2)$

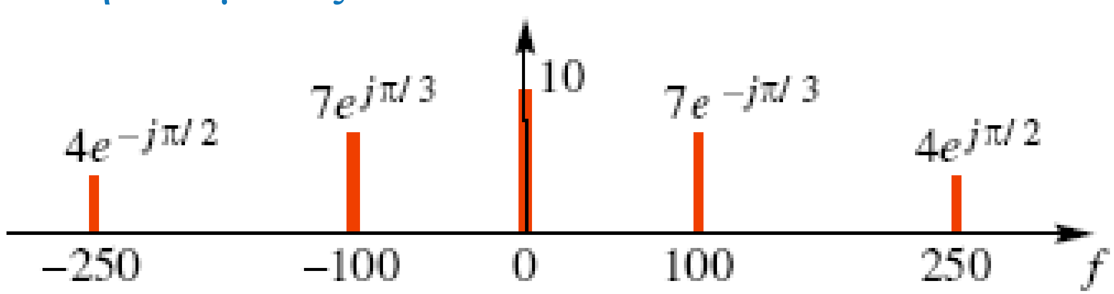
Φασματικές γραμμές:

$$\{\,(0, X_0)\,,\ (f_1, \tfrac{1}{2}X_1)\,,\ (-f_1, \tfrac{1}{2}X_1^*)\,, \ldots \ \ (f_k, \tfrac{1}{2}X_k)\,,\ (-f_k, \tfrac{1}{2}X_k^*)\,, \ldots\,\}$$

Άρα:

$$\{(0,\,10),\,(100,\,7e^{-j\pi/3}),\ (-100,\,7e^{j\pi/3}),\,(250,\,4e^{j\pi/2}),\ (-250,\,4e^{-j\pi/2})\}$$

Γραφική παράσταση Φάσματος



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Περιγραφή Σημάτων στο Χώρο της Συχνότητας-Φάσμα Σήματος

Περιοδικά Σήματα: $x(t+T_0) = x(t)$, για κάθε t

Αν: $f_k = k f_0$ (αρμονικές συχνότητες)

Τότε το: $$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k)$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

είναι ένα περιοδικό σήμα με θεμελιώδη συχνότητα f_0.

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Περιγραφή Σημάτων στο Χώρο της Συχνότητας-Φάσμα Σήματος

Περιοδικά Σήματα: Θεμελιώδης Συχνότητα (Περίοδος).

Η θεμελιώδης συχνότητα είναι η *μεγαλύτερη* f_0 για την οποία ισχύει $f_k = k f_0$. Αυτό σημαίνει ότι η f_0 είναι ο *Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης*(ΜΚΔ) των f_k οπότε μπορούμε να πούμε:

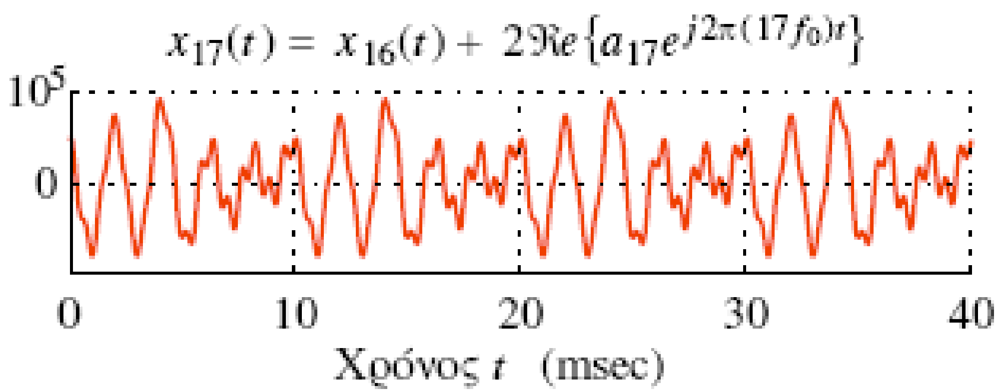
$$f_0 = MK\Delta\{f_k\}$$

Παράδειγμα: Ποια είναι η θεμελιώδης συχνότητα ενός σήματος που συντίθεται από ημιτονοειδή σήματα συχνότητας 1.2, 2 και 6 Hz;

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Περιγραφή Σημάτων στο Χώρο της Συχνότητας-Φάσμα Σήματος

Παράδειγμα: Συνθετικό φωνήεν.



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Περιγραφή Σημάτων στο Χώρο της Συχνότητας-Φάσμα Σήματος

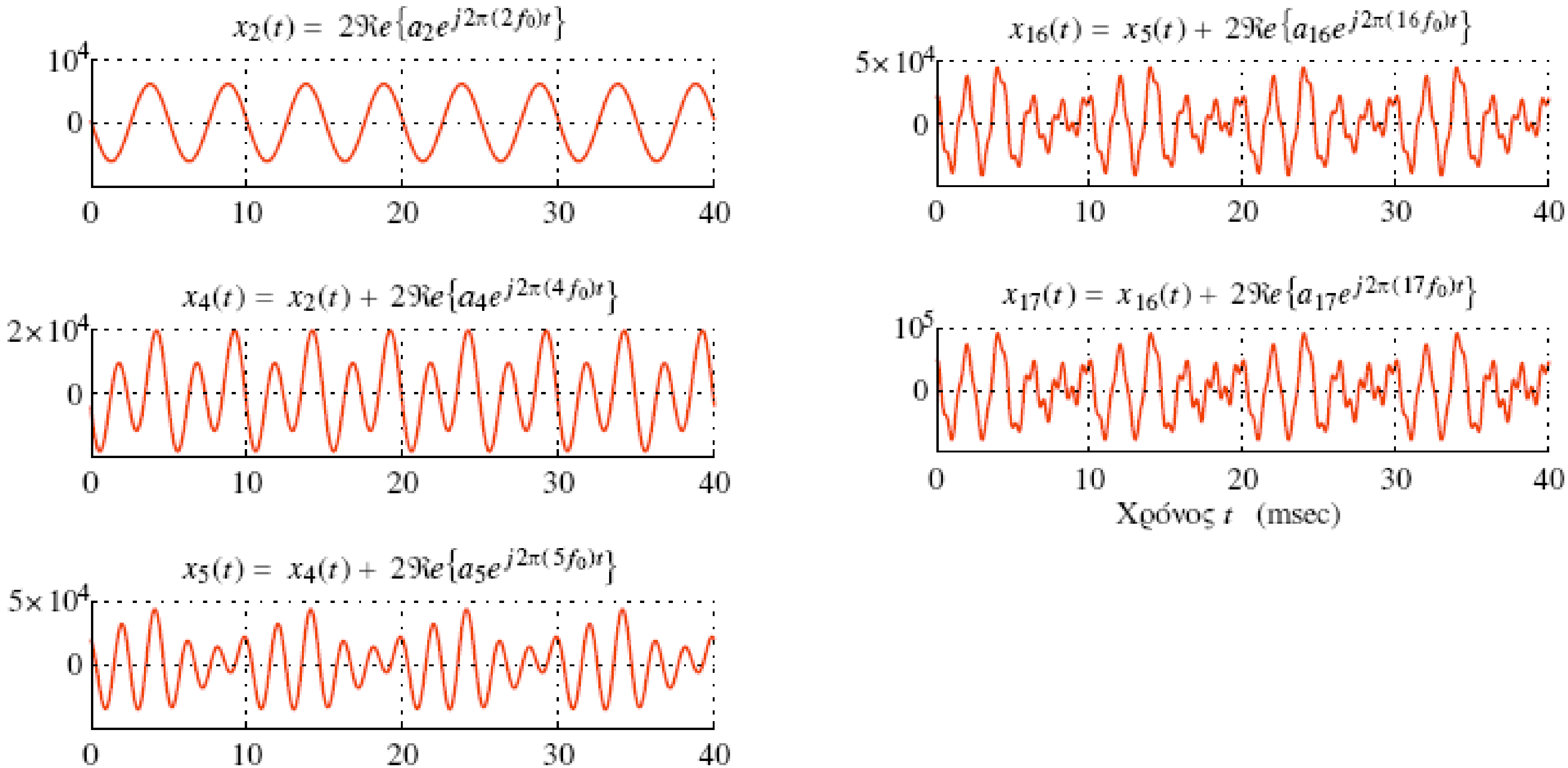
Παράδειγμα: Συνθετικό φωνήεν.

k	f_k (Hz)	a_k	Μέτρο	Φάση
1	100	0	0	0
2	200	$386 + j6101$	6 113	1.508
3	300	0	0	0
4	400	$-4433 + j14024$	14 708	1.877
5	500	$24000 - j4498$	24 418	−0.185
6	600	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
15	1500	0	0	0
16	1600	$828 - j6760$	6 811	−1.449
17	1700	$2362 + j0$	2 362	0

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Περιγραφή Σημάτων στο Χώρο της Συχνότητας-Φάσμα Σήματος

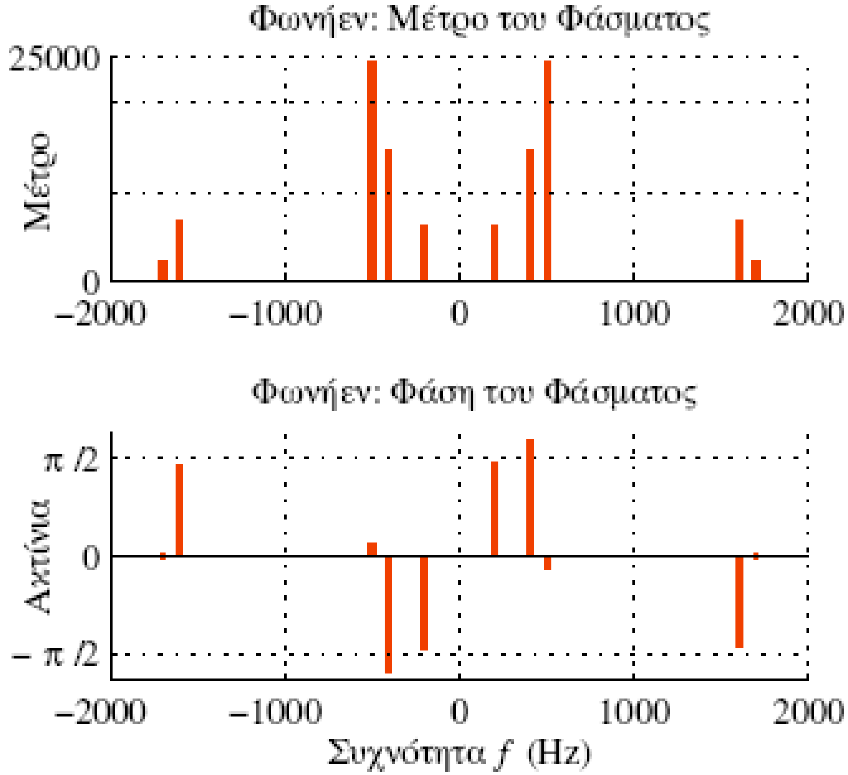
Παράδειγμα: Συνθετικό φωνήεν-γραφικές παραστάσεις μερικών αθροισμάτων



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Περιγραφή Σημάτων στο Χώρο της Συχνότητας-Φάσμα Σήματος

Παράδειγμα: Συνθετικό φωνήεν-Γραφική παράσταση φάσματος



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

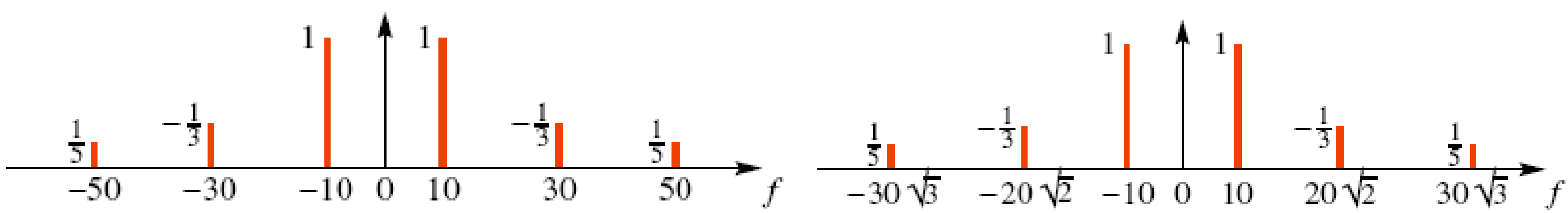
Περιγραφή Σημάτων στο Χώρο της Συχνότητας-Φάσμα Σήματος

Παράδειγμα:

$$x_h(t) = 2\cos(20\pi t) - \tfrac{2}{3}\cos(20\pi(3)t) + \tfrac{2}{5}\cos(20\pi(5)t)$$

$$x_2(t) = 2\cos(20\pi t) - \tfrac{2}{3}\cos(20\pi\sqrt{8}t) + \tfrac{2}{5}\cos(20\pi\sqrt{27}t)$$

Ισχύει ότι: $20\sqrt{2} = 28.28\cdots \approx 30$ και $30\sqrt{3} = 51.96\cdots \approx 50$

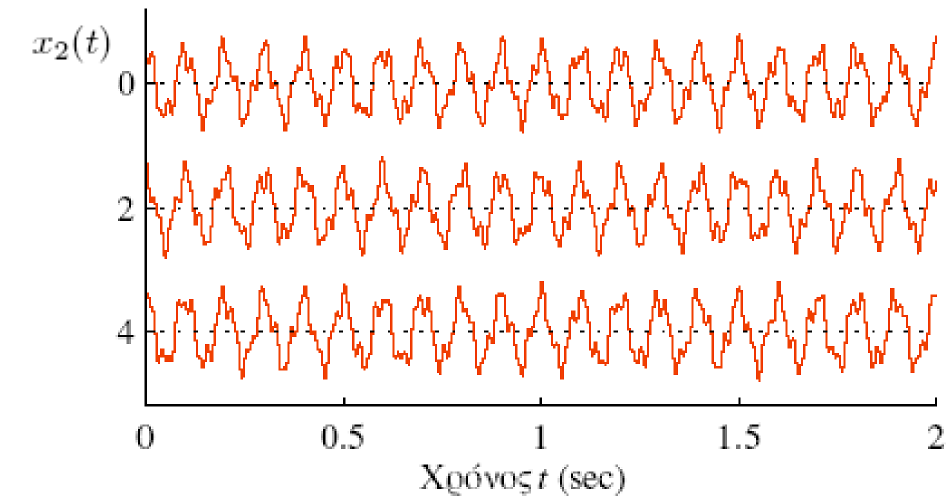


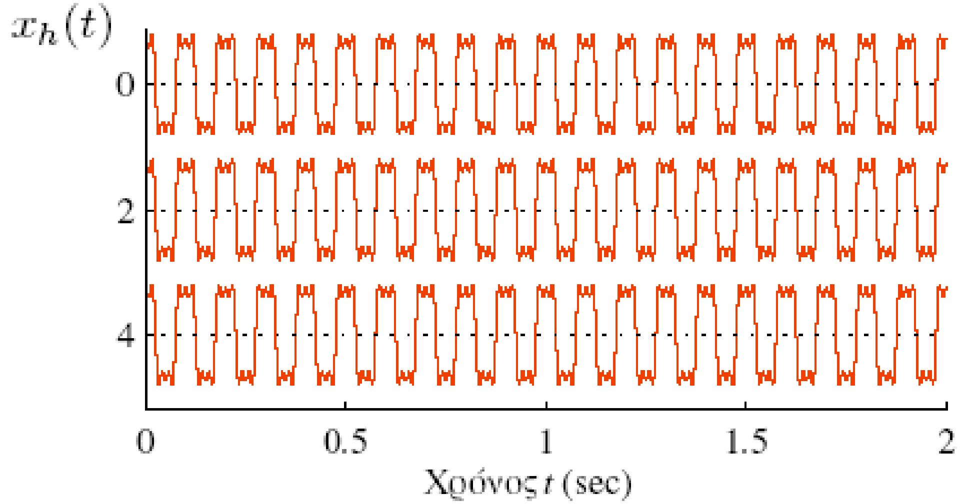
(α) (β)

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Περιγραφή Σημάτων στο Χώρο της Συχνότητας-Φάσμα Σήματος

Παράδειγμα: Περιοδικά και μη περιοδικά σήματα





Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Περιγραφή Σημάτων στο Χώρο της Συχνότητας-Φάσμα Σήματος

Περιοδικά σήματα και ΣΕΙΡΕΣ Fourier.

Κάθε περιοδικό σήμα με θεμελιώδη περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως ακολούθως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{j(2\pi/T_0)kt}$$

Το γεγονός ότι μια ασυνεχής τετραγωνική κυματομορφή μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα άπειρο αριθμό ημιτονοειδών κυμάτων ήταν ένας από τους εκπληκτικούς ισχυρισμούς στην περίφημη εργασία του Fourier το 1807. Πήρε πολλά χρόνια πριν οι μαθηματικοί καταφέρουν να βρουν μια αυστηρά τεκμηριωμένη απόδειξη που να πιστοποιεί τον ισχυρισμό του Fourier.