

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ



## ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ-Z

# Μετασχηματισμός - z

*Ιδιότητες Μετασχηματισμού-z*

- Γραμμικότητα
- Χρονική Ολίσθηση
- Κλιμάκωση στο Επίπεδο-z
- Παραγωγήιση
- Συνέλιξη στο Πεδίο του Χρόνου
- Κατοπτρισμός στο Πεδίο του Χρόνου
- Συσχέτιση
- Συζυγές Σήμα
- Συνέλιξη στο Μιγαδικό Επίπεδο

# Μετασχηματισμός - z



## *Ιδιότητες Μονόπλευρου Μετασχηματισμού-z*

- Αριστερή Ολίσθηση
- Δεξιά Ολίσθηση
- Θεώρημα Αρχικής Τιμής
- Θεώρημα Τελικής Τιμής
- Μετασχηματισμός-z Περιοδικών Σημάτων

# Μετασχηματισμός - $z$



Αναλυτικές Συναρτήσεις

- Συνθήκες Cauchy-Riemann
- Αρμονικές Συναρτήσεις

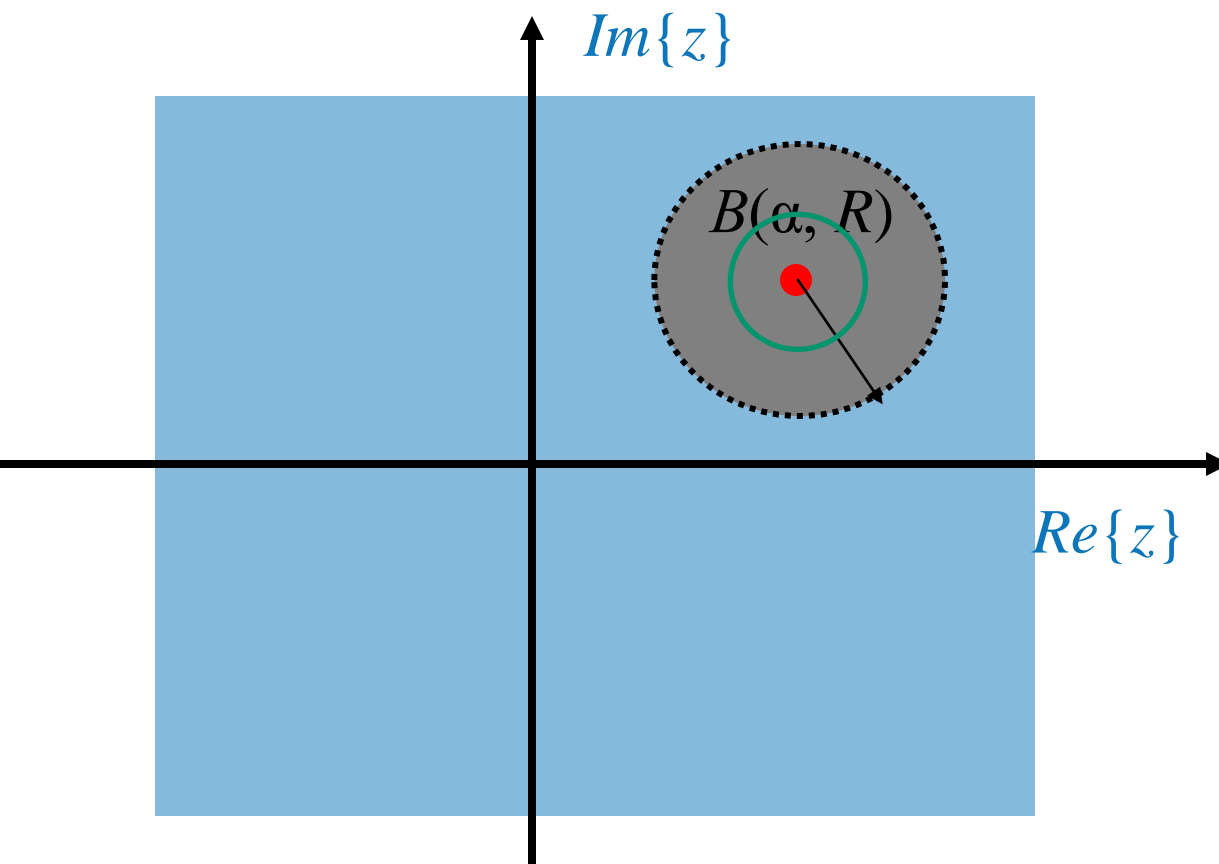
Αναλυτικές Συναρτήσεις και Δυναμοσειρές

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

# Μετασχηματισμός - $z$

*Αναλυτικές Συναρτήσεις-Θεώρημα του Cauchy*

Έστω  $f(z)$  μία αναλυτική συνάρτηση στο δίσκο  $B(\alpha, R)$  & έστω  $\gamma$  μία κλειστή καμπύλη που κείται εντός του δίσκου. Τότε:

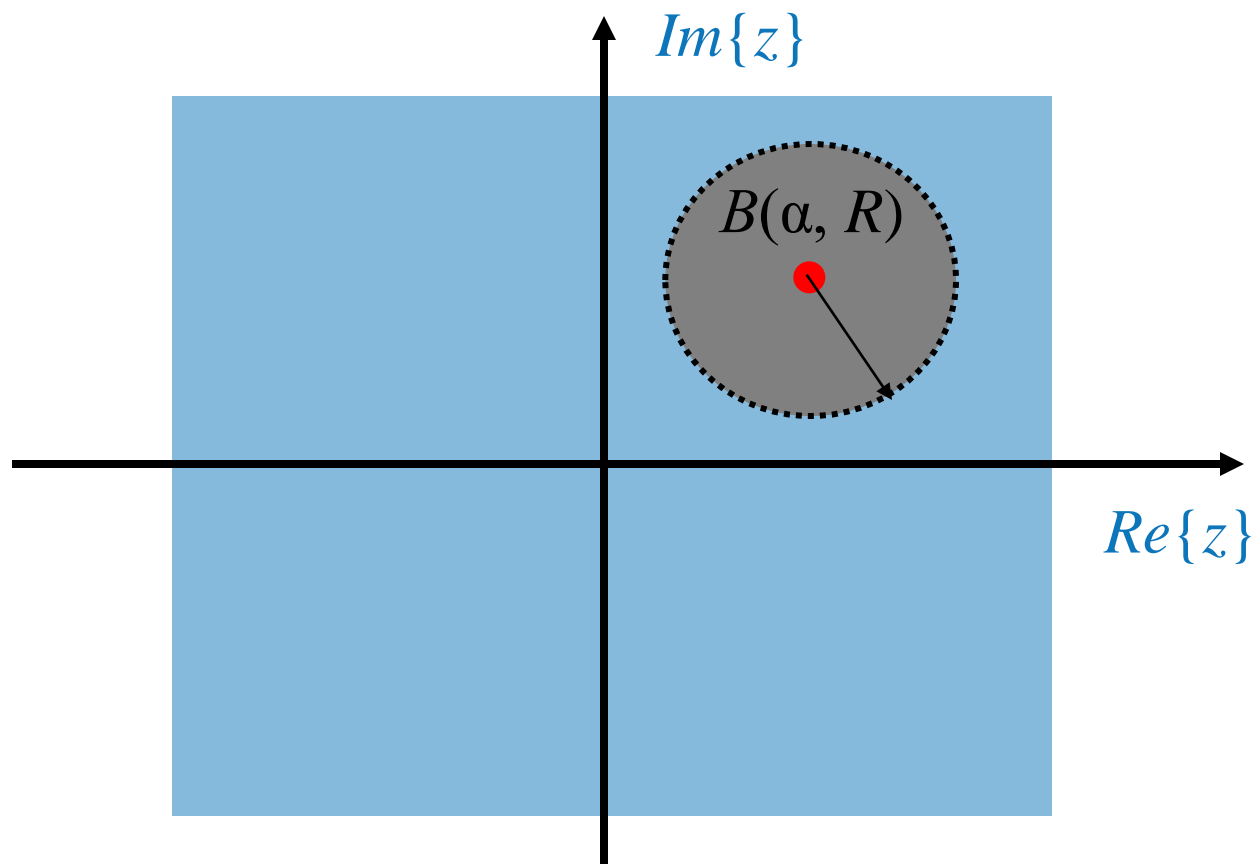


$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

# Μετασχηματισμός - $z$

## Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης

Μια Μιγαδική Συνάρτηση  $f(z)$  έχει μία απομονωμένη ανωμαλία στο σημείο  $z=a$  αν  $\exists R > 0$ : η  $f(z)$  να ορίζεται και να είναι αναλυτική στον κύκλο  $B(a, R) - \{a\}$  αλλά όχι στον  $B(a, R)$ .



## Παραδείγματα

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

$$f(z) = e^{z^{-1}}$$

# Μετασχηματισμός - $z$



## *Απαλειφόμενα Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης*

Αν η Μιγαδική Συνάρτηση  $f(z)$  έχει μία απομονωμένη ανωμαλία στο σημείο  $z=a$ , τότε το σημείο  $z=a$  είναι ένα απαλείψιμο σημείο ανωμαλίας **αν και μόνο αν:**

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z) = 0$$

# Μετασχηματισμός - $z$



## Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης- Πόλοι

Αν η Μιγαδική Συνάρτηση  $f(z)$  έχει μία απομονωμένη ανωμαλία στο σημείο  $z=a$ , τότε το σημείο  $z=a$  είναι ένας πόλος της  $f()$  αν :

1. 
$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$$

2. Αν η Μιγαδική Συνάρτηση  $f(z)$  έχει ένα πόλο στο σημείο  $z=a$  και  $m$  είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο το ακόλουθο όριο :

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z)$$

είναι πεπερασμένο, τότε θα λέμε ότι η  $f(z)$  έχει ένα πόλο τάξης  $m$  στο  $z=a$



# Μετασχηματισμός - z

*Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης- Πόλοι*

Η Μιγαδική Συνάρτηση  $f(z)$  μπορεί να γραφεί ως

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

όπου  $g(z)$  η ακόλουθη αναλυτική συνάρτηση:

$$g(z) = A_{-m} + A_{-(m-1)}(z-a) + A_{-(m-2)}(z-a)^2 + \dots \\ + A_{-1}(z-a)^{m-1} + (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

# Μετασχηματισμός - z

Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης- Πόλοι

Το τμήμα:

$$S_a(z) = A_{-m} + A_{-(m-1)}(z-a) + \dots + A_{-1}(z-a)^{m-1}$$

της  $g(z)$  ονομάζεται **ανώμαλο ή κύριο τμήμα** της  $f(z)$  στο  $z=a$ .

Υπολογισμός των  $A_{-(m-k)}$ ,  $k=0,1,\dots,m-1$

$$A_{-(m-k)} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} S_a(z) \Big|_{z=a} \equiv \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \{(z-a)^m f(z)\} \Big|_{z=a}$$

# Μετασχηματισμός - z

Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης - Δυναμοσειρές

Αν  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$  είδαμε ότι:

$$g(z) = A_{-m} + A_{-(m-1)}(z-a) + A_{-(m-2)}(z-a)^2 + \dots \\ + A_{-1}(z-a)^{m-1} + (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Άρα:

$$f(z) = \frac{A_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{A_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_{-1}}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

και:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi j n(C, a) A_{-1}$$

# Μετασχηματισμός - z

## Ολοκληρωτικό Υπόλοιπο Μιγαδικής Συνάρτησης

Στροφικός Αριθμός ή Δείκτης Καμπύλης ως προς σημείο

$$n(C, a) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{dz}{z - a} \quad \text{Ο } n(C, a) \text{ είναι ΑΚΕΡΑΙΟΣ!!}$$

Θεώρημα Cauchy

$$\oint_C \frac{dz}{(z - a)^k} = \begin{cases} 2\pi j, & k = 1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases}$$

# Μετασχηματισμός - $z$

## Ολοκληρωτικό Υπόλοιπο Μιγαδικής Συνάρτησης

Ας υποθέσουμε ότι η μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  έχει ένα πόλο, πολλαπλότητας  $m$ , στο σημείο  $a$ , μίας περιοχής του μιγαδικού επιπέδου- $z$  δηλαδή:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

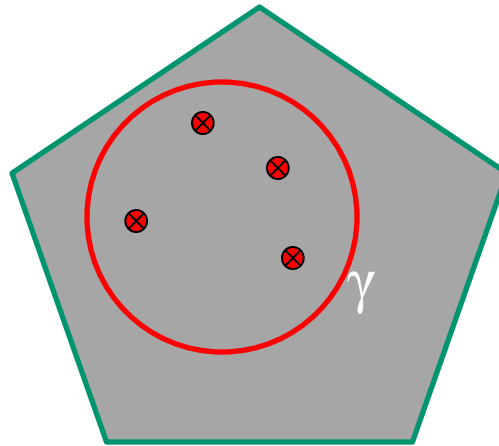
Τότε ορίζουμε σαν ολοκληρωτικό υπόλοιπο της  $f(z)$  στο σημείο  $a$  την παρακάτω ποσότητα:

$$\operatorname{Res}\{f(z), a\} = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} g(z) \right]_{z=a} = A_{-1}$$

# Μετασχηματισμός - $z$

## Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα Μιγαδικής Συνάρτησης

Ας υποθέσουμε ότι η μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  είναι αναλυτική συνάρτηση εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος μεμονωμένων ανώμαλων σημείων  $z_1, z_2, \dots, z_N$  και έστω καμπύλη  $\gamma$



$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{i=1}^N n(C, z_i) \text{Res}(f(z), z_i)$$

# Αντίστροφος Μετασχηματισμός - $z$

*Ανάπτυγμα σε Απλά Κλάσματα*

Αν  $R(z)$  είναι μια ρητή μιγαδική συνάρτηση με  $N$  πόλους στα σημεία  $\alpha_i, i=1,2,\dots,N$ , τότε:

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{i=1}^N S_i(z) + P(z)$$

Όπου  $S_i(z)$  το ανώμαλο τμήμα της ρητής μιγαδικής συνάρτησης  $R(z)$  στο  $z=\alpha_i$  και  $P(z)$  Πολυώνυμο.

# Αντίστροφος Μετασχηματισμός - $z$



## *Ουσιώδη Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης*

Αν μια απομονωμένη ανωμαλία δεν είναι ούτε απαλείψιμη ούτε πόλος, θα λέμε ότι είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της συνάρτησης.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$$



# Αντίστροφος Μετασχηματισμός - $z$

## Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης- Σύνοψη

Έστω  $z=a$  μία απομονωμένη ανωμαλία της μιγαδικής συνάρτησης  $f(z)$  και έστω

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

η σειρά *Laurent*. Τότε:

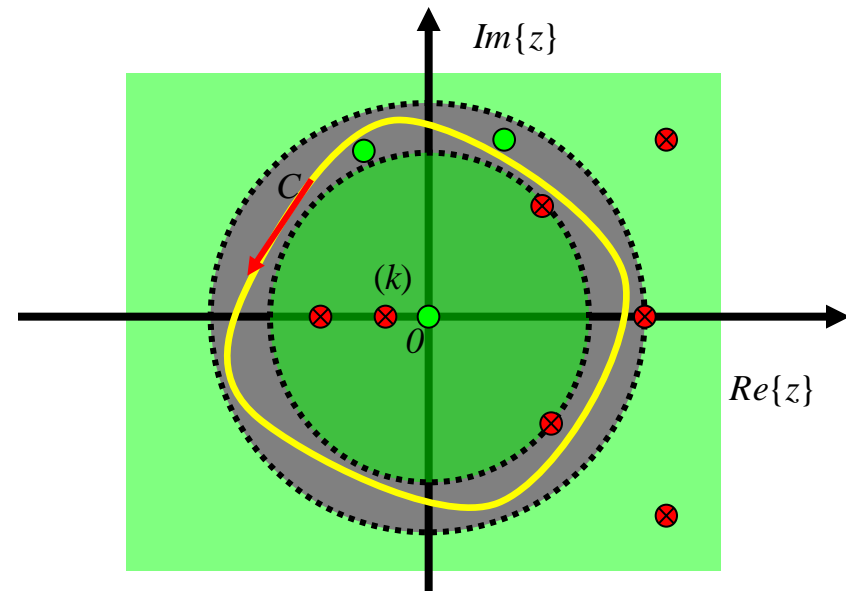
- το  $z=a$  είναι ένα απαλείψιμο ανώμαλο σημείο αν και μόνο αν  $a_n = 0, n \leq -1$
- το  $z=a$  είναι ένας πόλος τάξης  $m$  αν και μόνο αν  $a_{-m} \neq 0$  &  $a_n = 0, n \leq -(m+1)$
- το  $z=a$  είναι ένα ουσιώδες ανώμαλο σημείο αν  $a_n \neq 0$  για μια απειρία αρνητικών τιμών του  $n$ .

# Αντίστροφος Μετασχηματισμός - $z$



Έστω κλειστή καμπύλη  $C$  η οποία περικλείει  $N$  πόλους (στα σημεία  $z_i$ ,  $i=0,1,\dots,N-1$ ), της μιγαδικής ρητής συνάρτησης  $X(z)z^{n-1}$  και ανήκει εξ ολοκλήρου στην Περιοχή Σύγκλισης της μιγαδικής συνάρτησης, τότε:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$



# Αντίστροφος Μετασχηματισμός - $z$

*Ολοκληρωτικό Υπόλοιπο Μιγαδικής Συνάρτησης*

Ας υποθέσουμε ότι η μιγαδική ρητή συνάρτηση  $X(z)z^{n-1}$  έχει ένα πόλο, πολλαπλότητας  $m$ , στο σημείο  $a$ , δηλαδή:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

Τότε ορίζουμε σαν ολοκληρωτικό υπόλοιπο της  $X(z)z^{n-1}$  στο σημείο  $a$  την παρακάτω ποσότητα:

$$\text{Res}\{X(z)z^{n-1}, a\} = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} g(z) \right]_{z=a}$$

# Αντίστροφος Μετασχηματισμός - $z$



## Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Αν υποθέσουμε ότι μία κλειστή καμπύλη  $C$ , που ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του περικλείει  $N$  πόλους (στα σημεία  $z_i$ ,  $i=0,1,\dots,N-1$ ), της μιγαδικής ρητής συνάρτησης  $X(z)z^{n-1}$ , τότε:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz = \sum_{i=1}^N \operatorname{Res}\{X(z)z^{n-1}, z_i\}$$

# Αντίστροφος Μετασχηματισμός - $z$



## *Άλλες Μέθοδοι Υπολογισμού*

- Μέθοδος Αναπτύγματος σε Δυναμοσειρά

$$f(z) = \ln(1 + az^{-1}), \quad |z| > a$$

$$\ln(1 + az^{-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(az^{-1})^k}{k}$$