ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

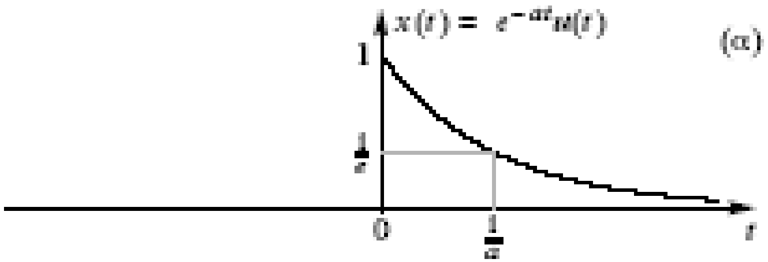
Μετασχηματισμός Fourier

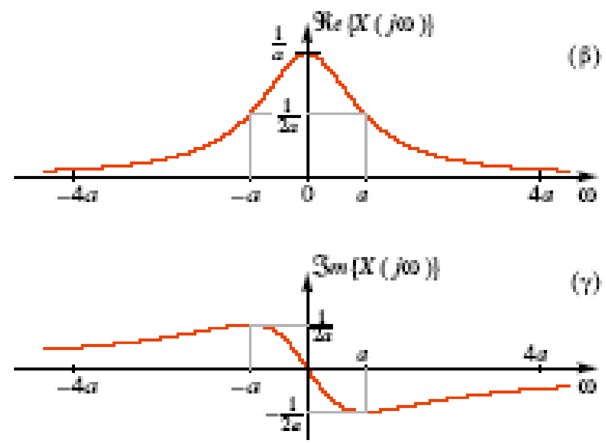
Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier:

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$$





Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier:

Πεδίο-Χρόνου		*Πεδίο-Συχνότητας*
$x(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$	$X(j\omega)$

Ευθύς
Μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Αντίστροφος
Μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου

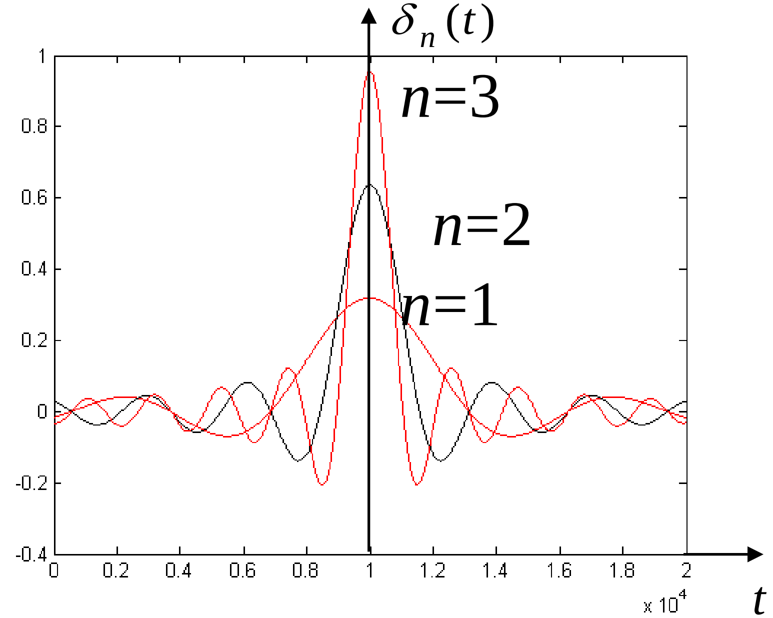
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Η «Συνάρτηση» δέλτα ως όριο ακολουθίας συναρτήσεων:

$$\delta_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\pi t}, n = 1, 2, \cdots$$

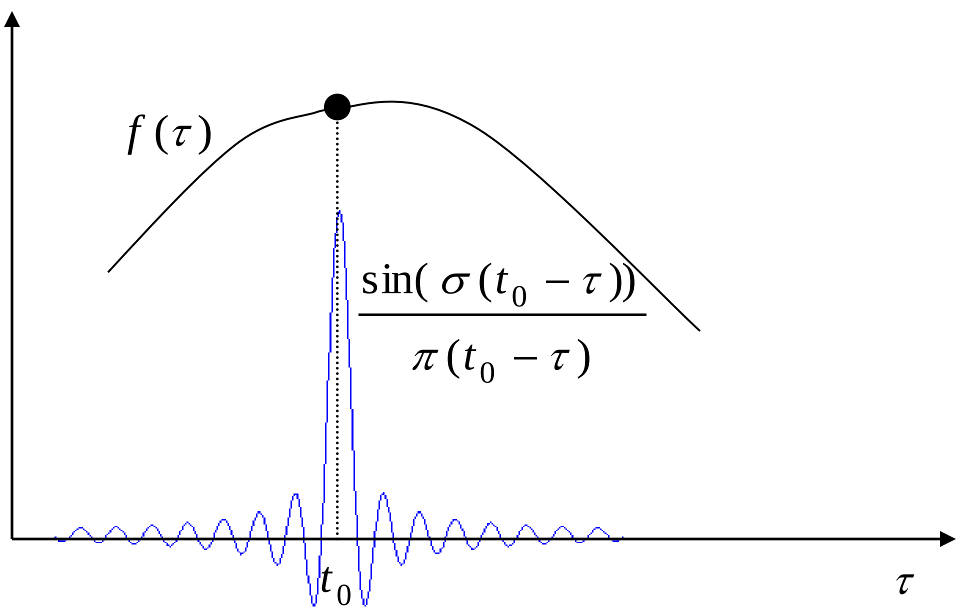
$\forall$ n ισχύει: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(\tau) d\tau = 1$



Μπορούμε να ορίσουμε την «Συνάρτηση» δέλτα ως ακολούθως: $\delta(t) = \lim_{n \to \infty} \delta_n(t)$

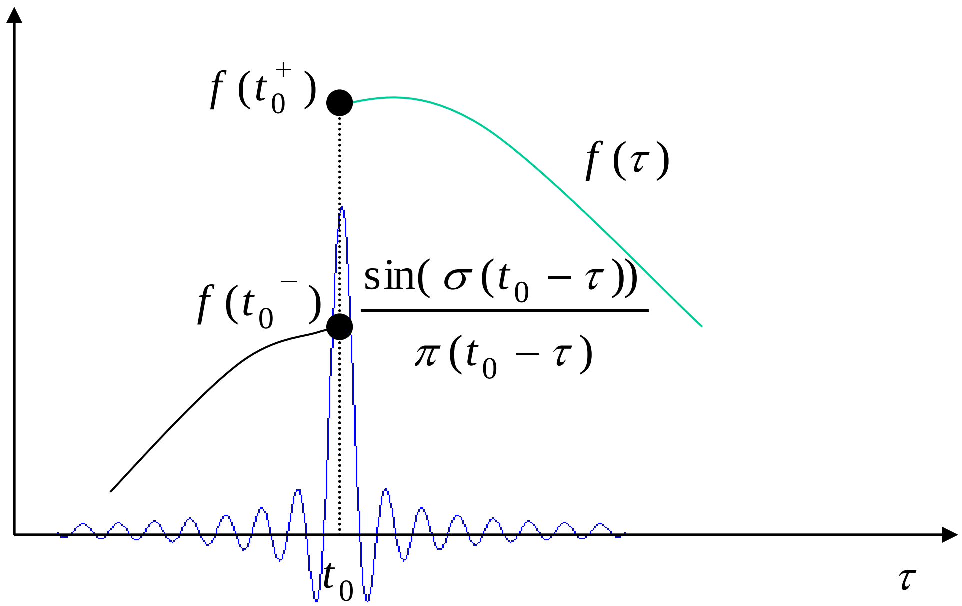
Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier-Συνεχής περίπτωση



Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

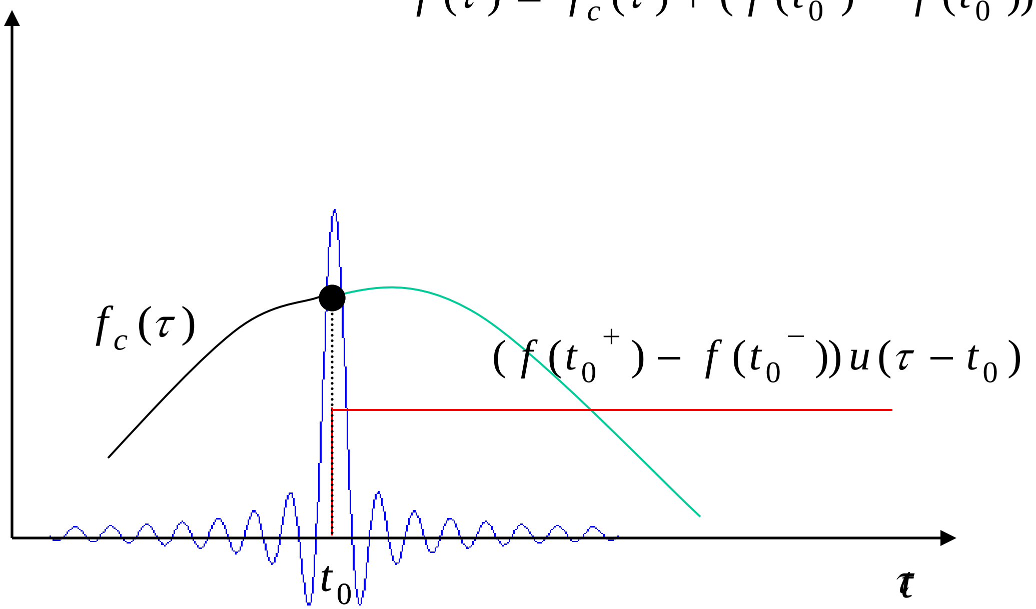
Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier-Ασυνεχής περίπτωση



Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier-Ασυνεχής περίπτωση

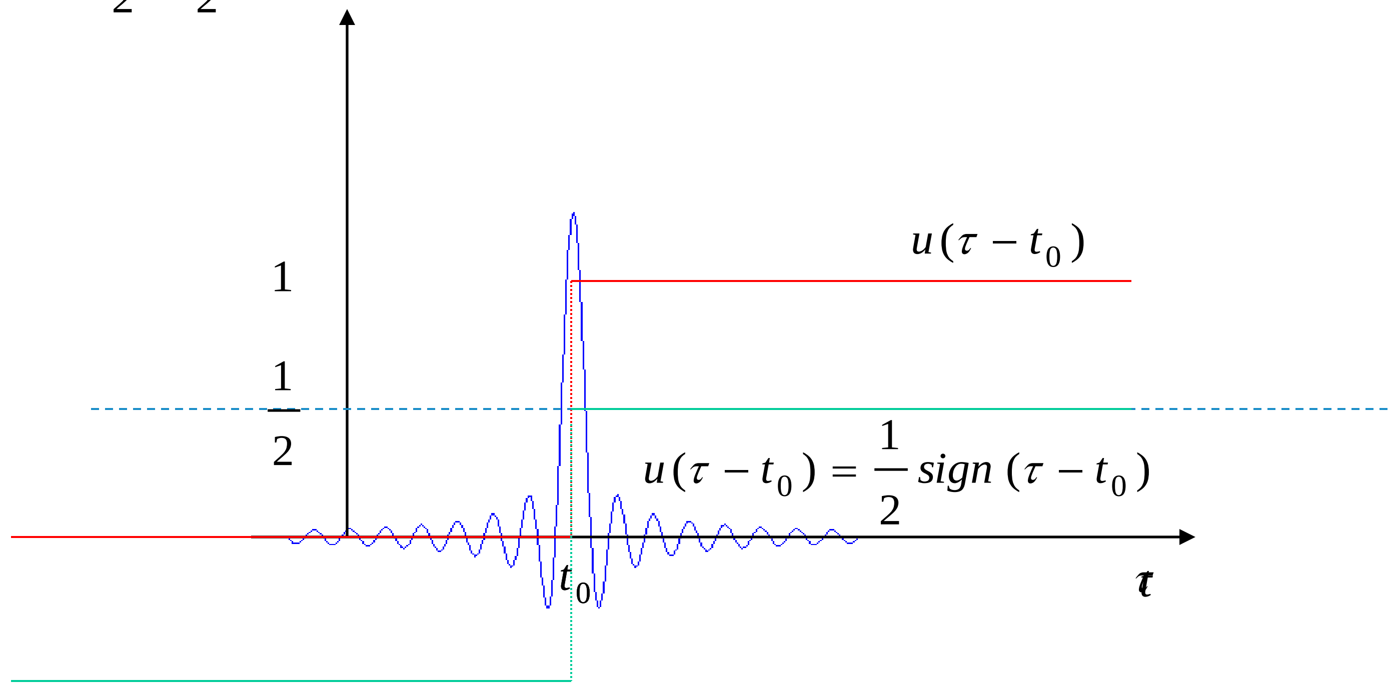
$$f(\tau) = f_c(\tau) + (f(t_0^+) - f(t_0^-))u(\tau - t_0)$$



Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier-Ασυνεχής περίπτωση

$$u(\tau - t_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sign\,(\tau - t_0)$$



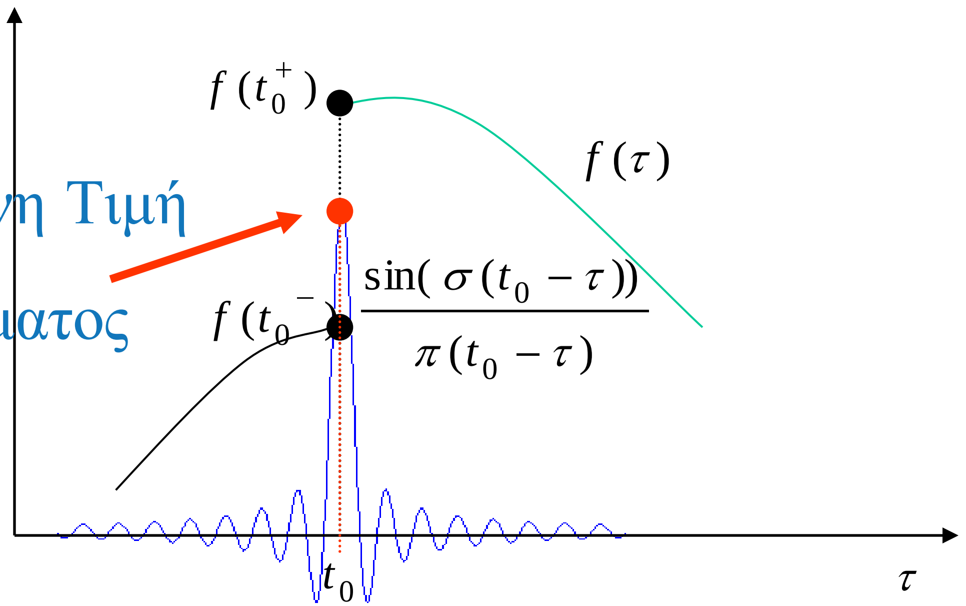
Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier-Ασυνεχής περίπτωση

Ανακατασκευασμένη Τιμή

του ασυνεχούς σήματος

$$\frac{(f(t_0^{+}) + f(t_0^{-}))}{2}$$



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

- Συνέλιξη και Συνεχούς Χρόνου Μετασχηματισμός Fourier

Συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε γινόμενο στο πεδίο της συχνότητας.

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$y(t) = x(t) * h(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

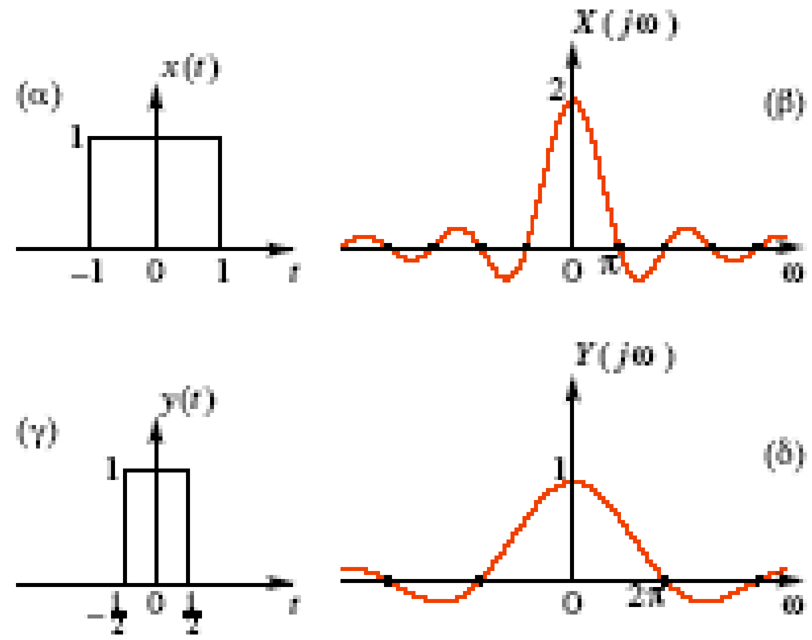
• Ιδιότητα κλιμάκωσης Μετασχηματισμού

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$y(t) = x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) = \frac{1}{|a|} X(j\omega / a)$$

Το χρονικό άπλωμα ενός σήματος θα συμπιέσει το μετασχηματισμό Fourier του.

Η χρονική συμπίεση ενός σήματος θα απλώσει το μετασχηματισμό Fourier του.



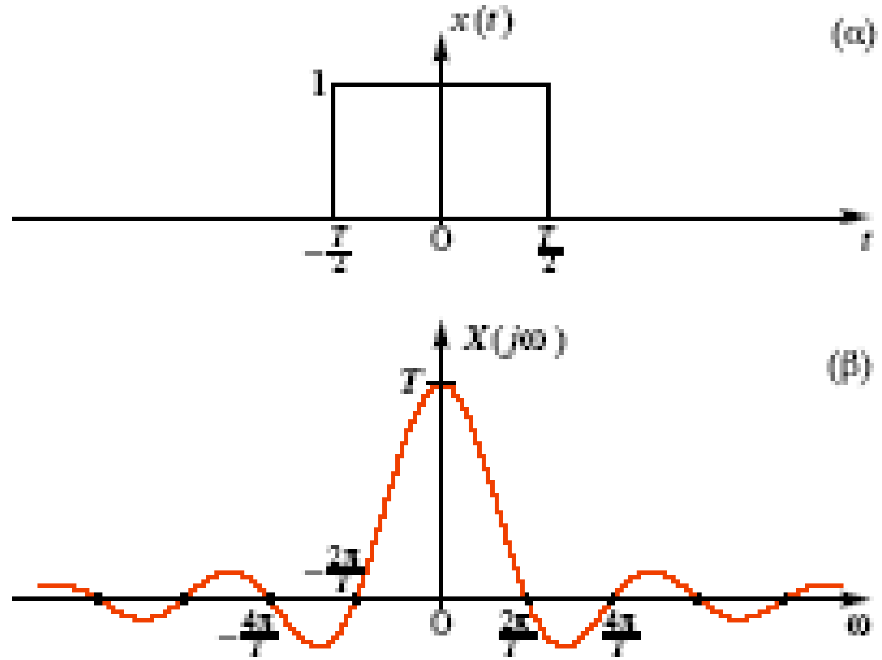
Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

• Σήματα Περιορισμένης Χρονικής Διάρκειας:

• Τετραγωνικός Παλμός:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2}T \leq t < \frac{1}{2}T \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

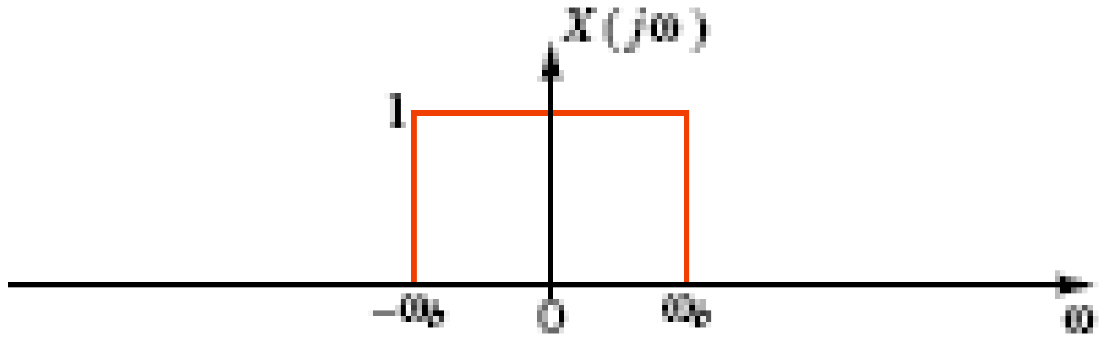
$$X(j\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}$$



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

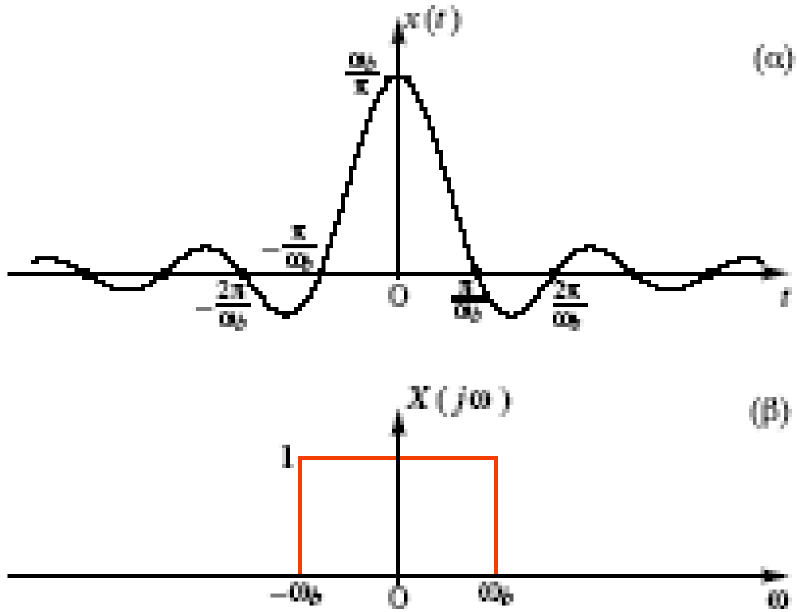
•Σήματα Περιορισμένου Εύρους Ζώνης:

•Συνθήκη: $X(j\omega) = 0$ για $|\omega| > \omega_b$ με $\omega_b < \infty$.



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

•Σήματα Περιορισμένου Εύρους Ζώνης:



Μαθηματική Περιγραφή Συστημάτων

- Συνέλιξη και Συνεχούς Χρόνου Μετασχηματισμός Fourier

Ο πολλαπλασιασμός συναρτήσεων στο
πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί
σε συνέλιξη των μετασχηματισμών Fourier.

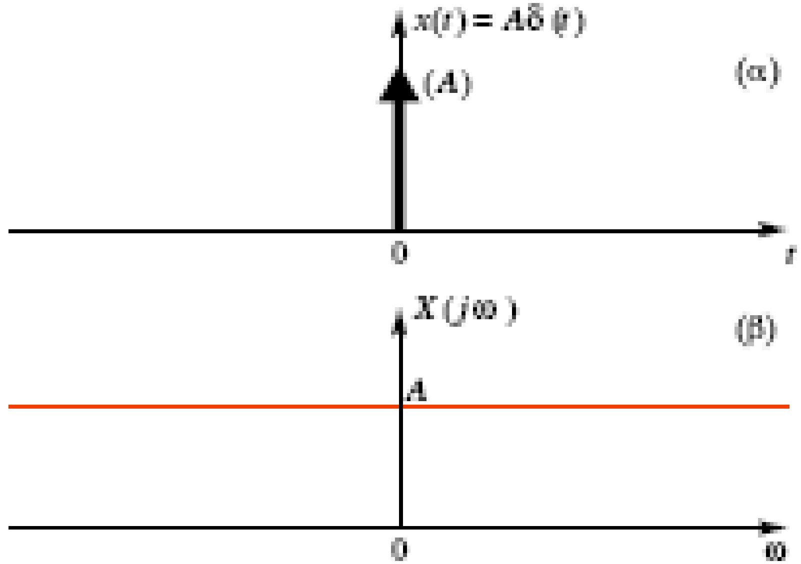
Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$y(t) = p(t)x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

•Μετασχηματισμός Κρουστικών Σημάτων

Πεδίο-Χρόνου		*Πεδίο-Συχνότητας*
1	$\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$	$2\pi\delta(\omega)$



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

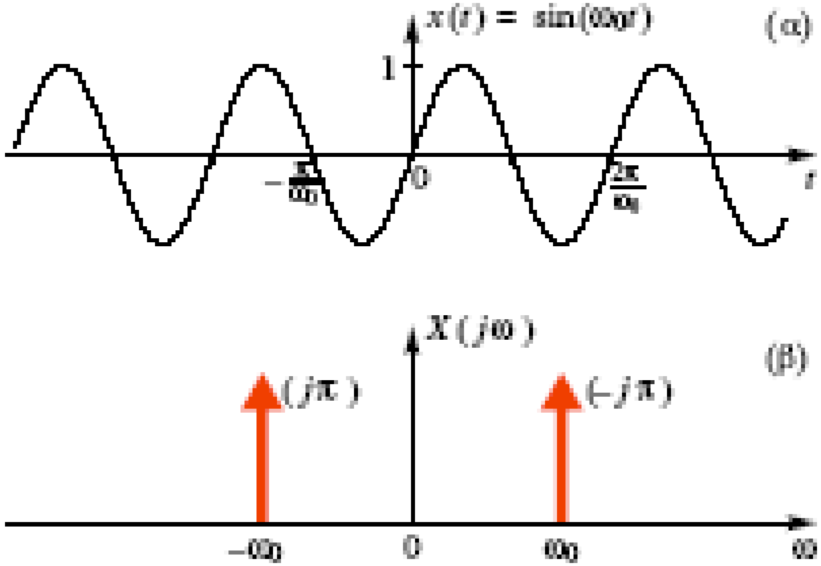
- Μετασχηματισμός Μιγαδικών Εκθετικών Σημάτων

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$e^{j\omega_0 t} \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

•Μετασχηματισμός Ημιτονικών Σημάτων



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

- Μετασχηματισμός Ημιτονικών Σημάτων

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$A\cos(\omega_0 t + \phi) \xleftrightarrow{\mathcal{F}}$$

$$\pi A e^{j\phi}\delta(\omega - \omega_0) + \pi A e^{-j\phi}\delta(\omega + \omega_0)$$

Μαθηματική Περιγραφή Συστημάτων

- Ιδιότητα Χρονικής Αναστροφής: $F\{x(-t)\} = ;$

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(-j\omega)$$

Μαθηματική Περιγραφή Συστημάτων

- Ιδιότητα Διαφόρισης: Αν $y(t) = \dfrac{d^k x(t)}{dt^k}$ $\quad F\{y(t)\} =;$

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} (j\omega)^k X(j\omega)$$

- Λύση Σ. Δ. Ε.: $\dfrac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

Μαθηματική Περιγραφή Συστημάτων

•Συμμετρίες Σημάτων Μετασχηματισμών τους

$x(t)$	$X(j\omega)$
Πραγματική, Άρτια	Πραγματική, Άρτια
Πραγματική, Περιττή	Φανταστική, Περιττή
Φανταστική, Άρτια	Φανταστική, Άρτια
Φανταστική, Περιττή	Πραγματική, Περιττή