ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Laplace

Μετασχηματισμός Laplace

- Διευρύνει τη κλάση των σημάτων για τα οποία μπορεί να επιτευχθεί η μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας.
- Παρέχει τη δυνατότητα μελέτης συστημάτων που δεν βρίσκονται σε αρχική κατάσταση ηρεμίας.
- Μας δίνει τη δυνατότητα εναλλακτικών τρόπων παράστασης των συστημάτων.
- Μετατροπή των Δ.Ε. σε αλγεβρικές εξισώσεις.

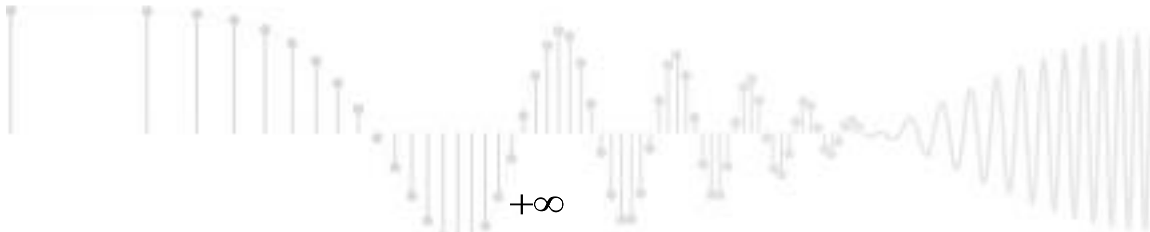
Μετασχηματισμός Laplace

•Ορισμός: $$L_a\{x(t)\} = X(s) = \int_a^{+\infty} x(t)e^{-st}dt, \ \ s = \sigma + j\Omega$$

•Αν α=-∞, τότε έχουμε τον Αμφίπλευρο Μετασχηματισμό Laplace

•Αν α=±0, τότε έχουμε το Μονόπλευρο Μετασχηματισμό Laplace

Αμφίπλευρος Μετασχηματισμός Laplace



$$L\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad s = \sigma + j\Omega$$

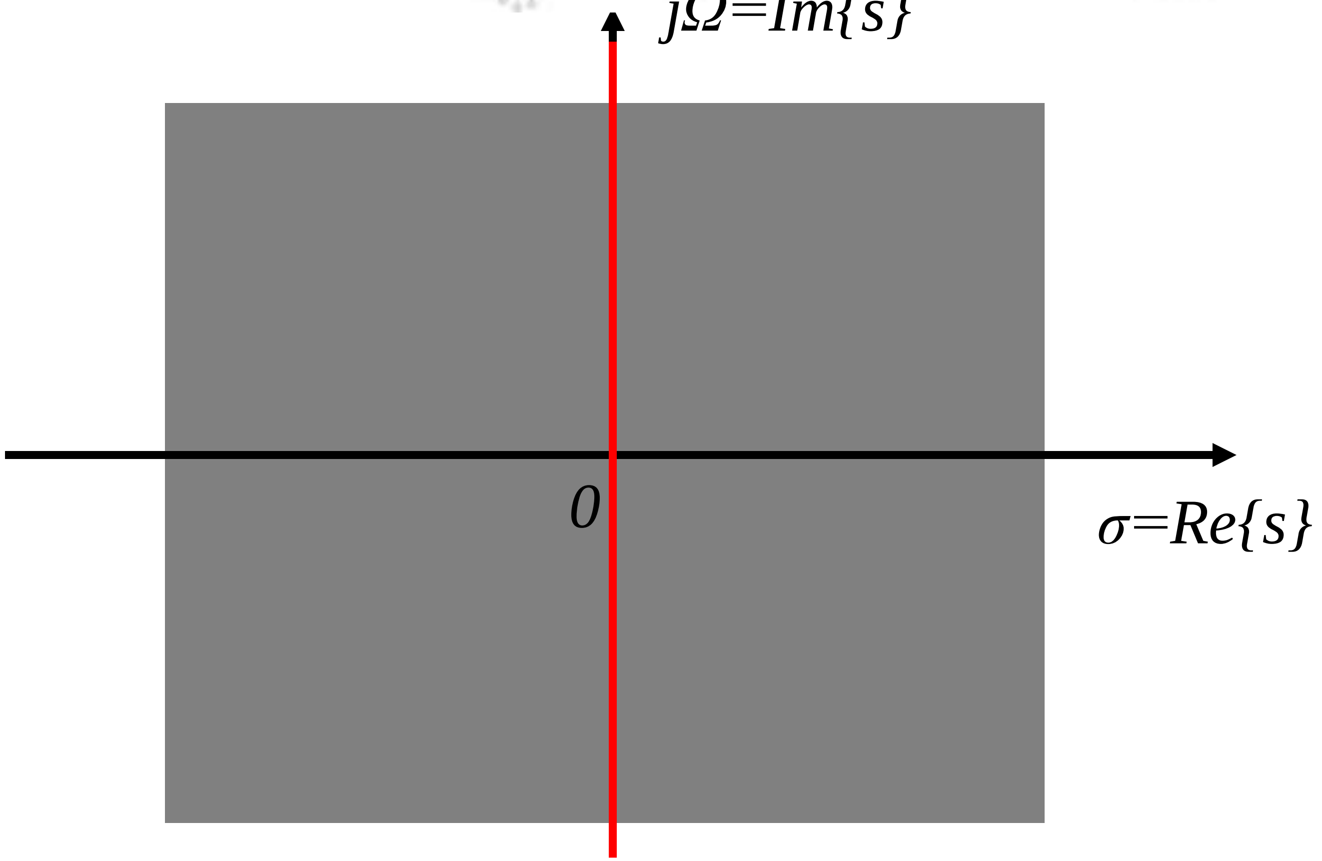
- Σχέση Μετασχηματισμών Fourier και Laplace

$$X(s)\Big|_{s=j\Omega} = F\{x(t)\} = X(j\Omega)$$

$$X(s) = F\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

Μετασχηματισμός Laplace

Μιγαδικό Επίπεδο-s



Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού:

$$x_1(t) = e^{-at}u(t) \quad \overset{L}{\longleftrightarrow} \quad X_1(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$x_2(t) = -e^{-at}u(-t) \quad \overset{L}{\longleftrightarrow} \quad X_2(s) = \frac{1}{s+a}$$

Τι συμβαίνει; …. Υπάρχει Λάθος;

Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού:

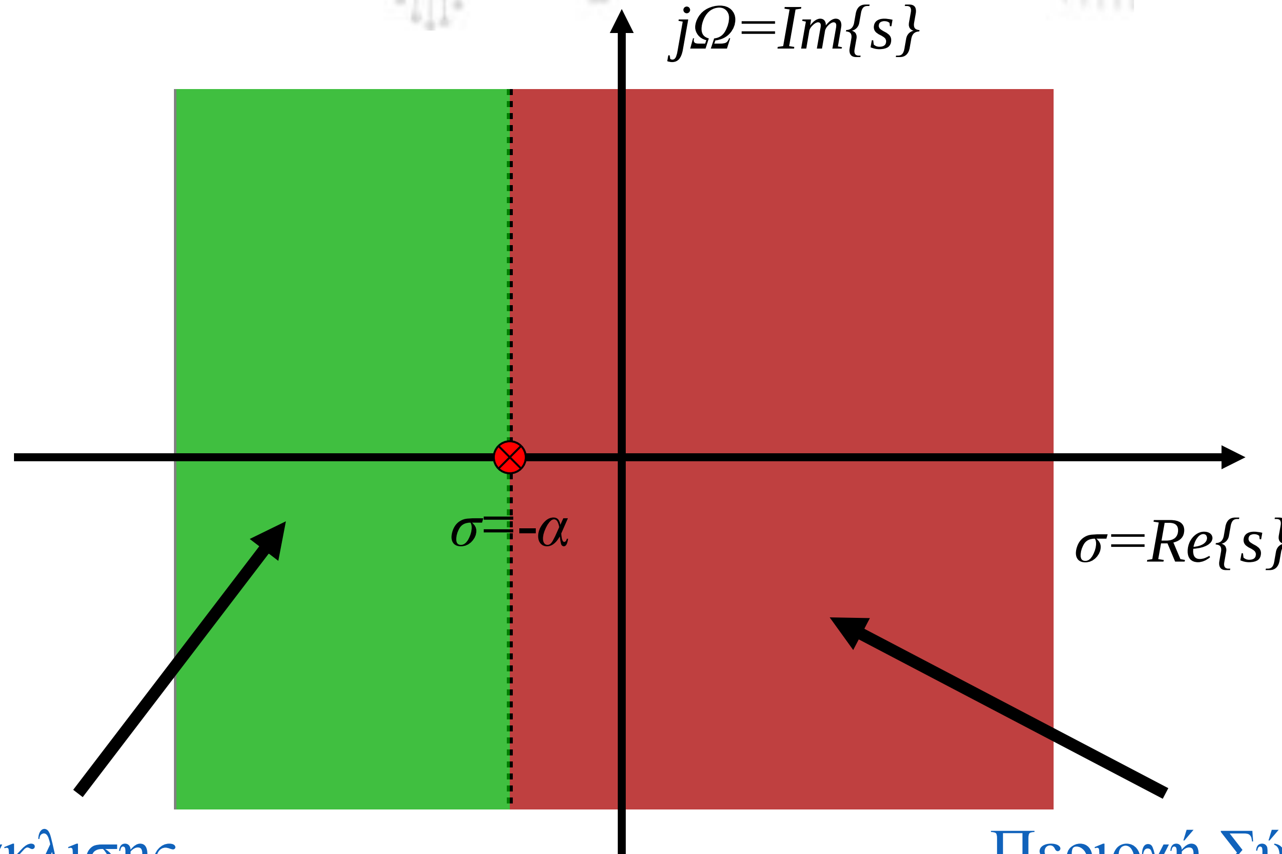
$$x_1(t) = e^{-at}u(t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad X_1(s) = \frac{1}{s+a}, \mathrm{Re}\{s\} > -\alpha$$

$$x_2(t) = -e^{-at}u(-t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad X_2(s) = \frac{1}{s+a}, \mathrm{Re}\{s\} < -\alpha$$

Μετασχηματισμός Laplace

$x_2(t) = -e^{-at}u(-t)$ *Μιγαδικό Επίπεδο-s* $x_1(t) = e^{-at}u(t)$

Πόλος



Περιοχή Σύγκλισης
$X_2(s)=L\{x_2(t)\}$
$\sigma=Re\{s\}<-\alpha$

Περιοχή Σύγκλισης
$X_1(s)=L\{x_1(t)\}$
$\sigma=Re\{s\}>-\alpha$

Μετασχηματισμός Laplace

Πραγματικά Εκθετικά Σήματα: $x(t) = (3e^{-2t} - 2e^{-t})u(t)$

$$x(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t)$$

όπου: $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$ και $x_2(t) = e^{-t}u(t)$

Όμως:

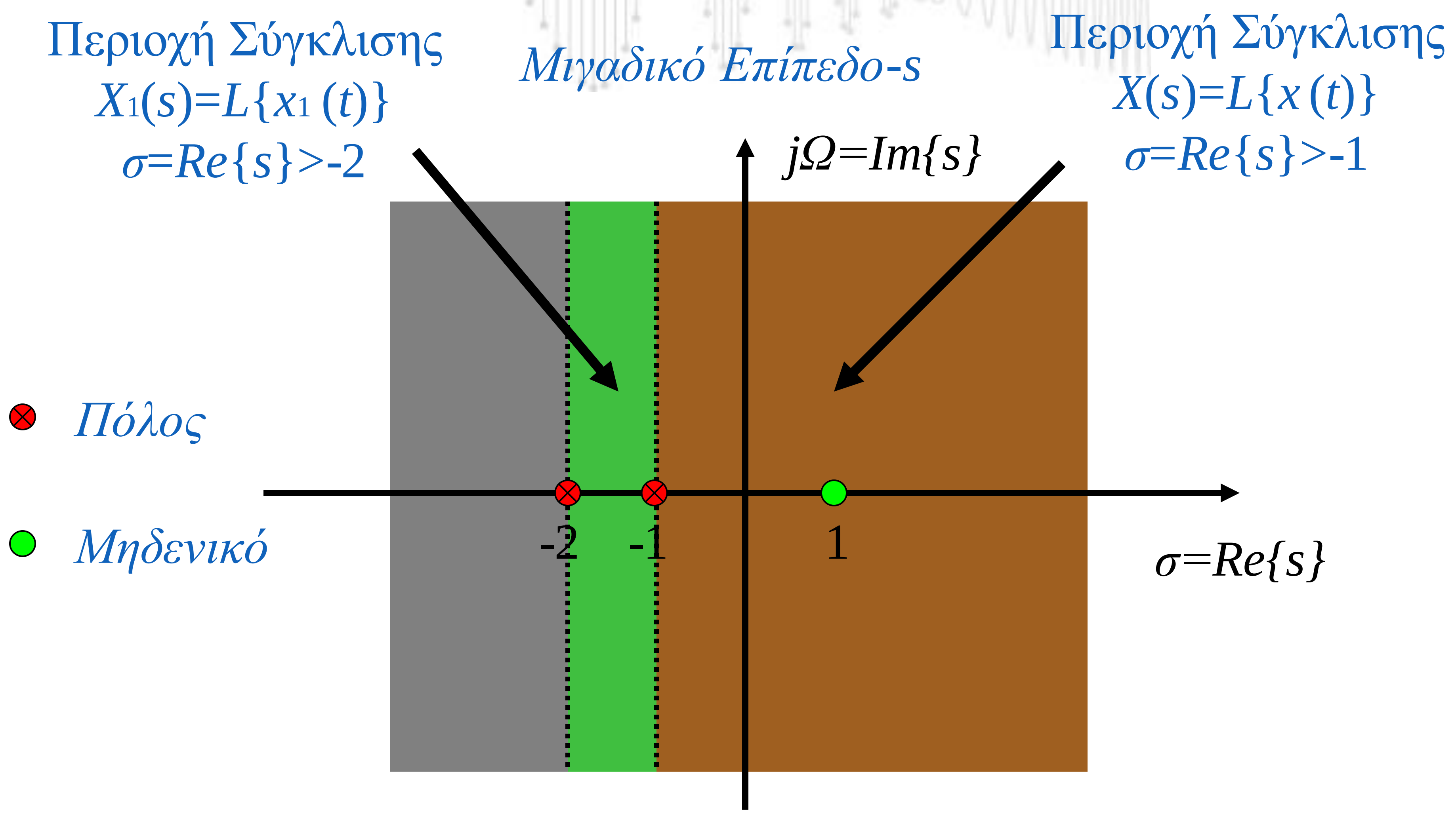
$$X_1(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -2$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

και επομένως, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της Γραμμικότητας:

$$X(s) = 3X_1(s) - 2X_1(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+1)}, \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

Μετασχηματισμός Laplace



Μετασχηματισμός Laplace

Πραγματικά & Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα:

$$x(t) = (3e^{-2t} - \cos(3t)e^{-t})u(t)$$

$$x(t) = x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) + \frac{1}{2}x_3(t)$$

όπου:

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$x_2(t) = e^{-(1-3j)t}u(t)$$

$$x_3(t) = e^{-(1+3j)t}u(t)$$

Μετασχηματισμός Laplace

Πραγματικά & Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα: *(Συνέχεια)*

Όμως:

$$X_1(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -2$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+(1-3j)}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

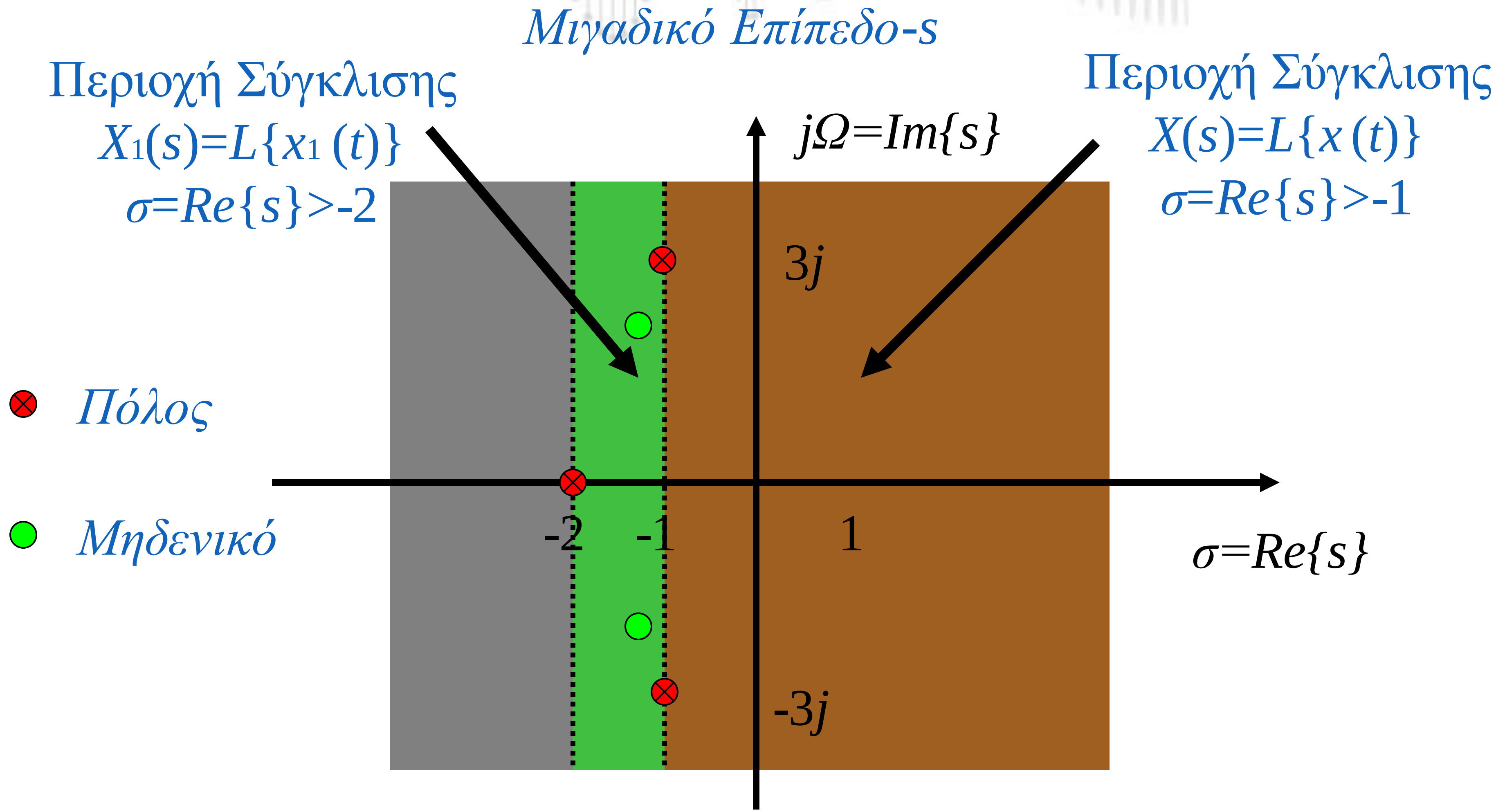
$$X_3(s) = \frac{1}{s+(1+3j)}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

και επομένως, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της Γραμμικότητας:

$$X(s) = X_1(s) + \frac{1}{2}X_2(s) + \frac{1}{2}X_3(s)$$

$$= \frac{2s^2+5s+12}{(s+2)(s^2+2s+10)}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

Μετασχηματισμός Laplace



Μετασχηματισμός Laplace

Κρουστικά Σήματα:
$$x(t) = \delta(t) + (\frac{1}{3}e^{2t} - \frac{4}{3}e^{-t})u(t)$$

$$x(t) = x_1(t) - \frac{4}{3}x_2(t) + \frac{1}{3}x_3(t)$$

όπου:

$$x_1(t) = \delta(t)$$

$$x_2(t) = e^{-t}u(t)$$

$$x_3(t) = e^{2t}u(t)$$

Μετασχηματισμός Laplace

Κρουστικά Σήματα: *(Συνέχεια)*

Όμως: $$X_1(s) = 1, \quad \forall\ s$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

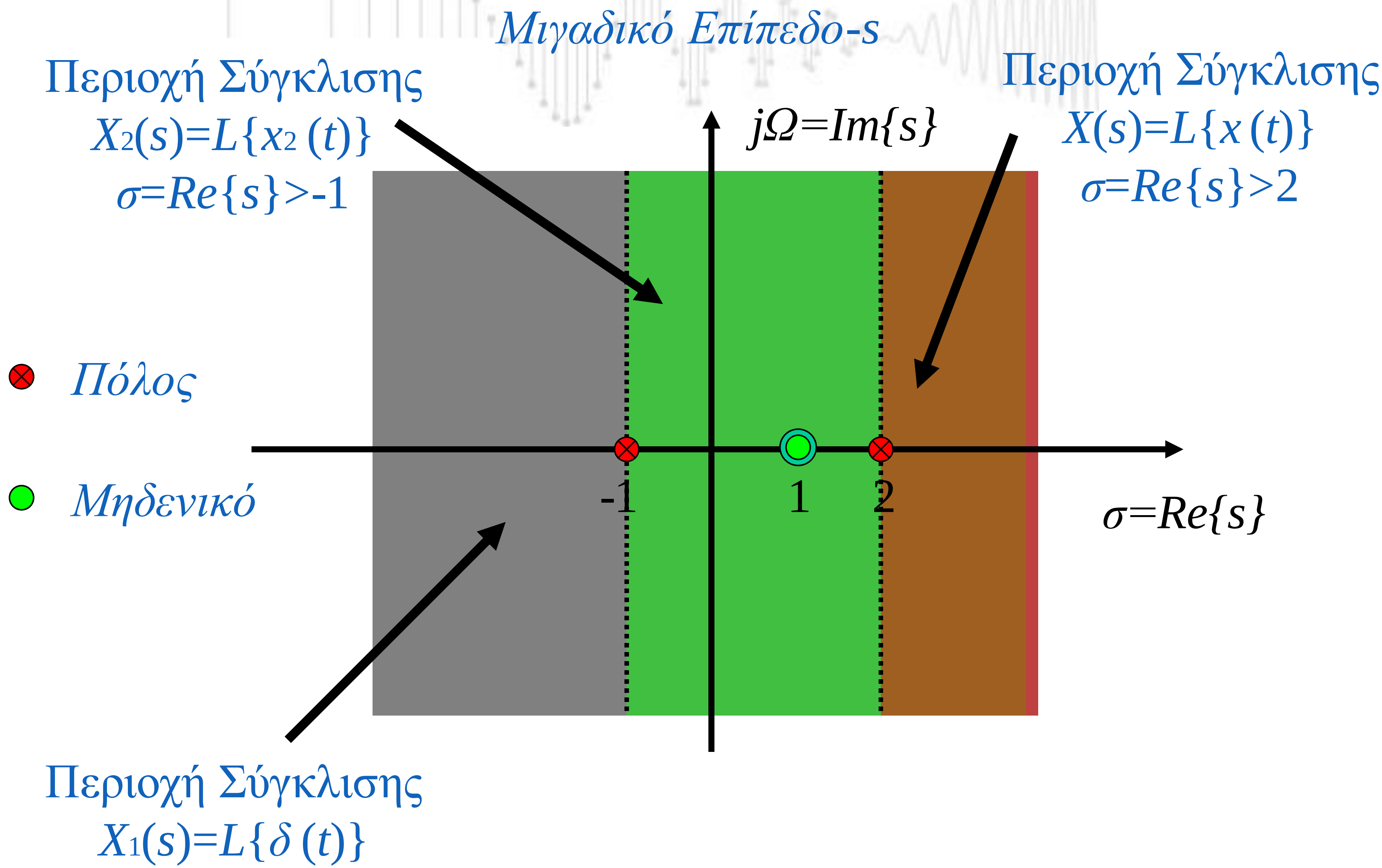
$$X_3(s) = \frac{1}{s-2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 2$$

και επομένως, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της Γραμμικότητας:

$$X(s) = X_1(s) - \frac{4}{3} X_2(s) + \frac{1}{3} X_3(s)$$

$$= \frac{(s-1)^2}{(s-2)(s+1)}, \ \mathrm{Re}\{s\} > 2$$

Μετασχηματισμός Laplace



Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού: Μερικές Ιδιότητες

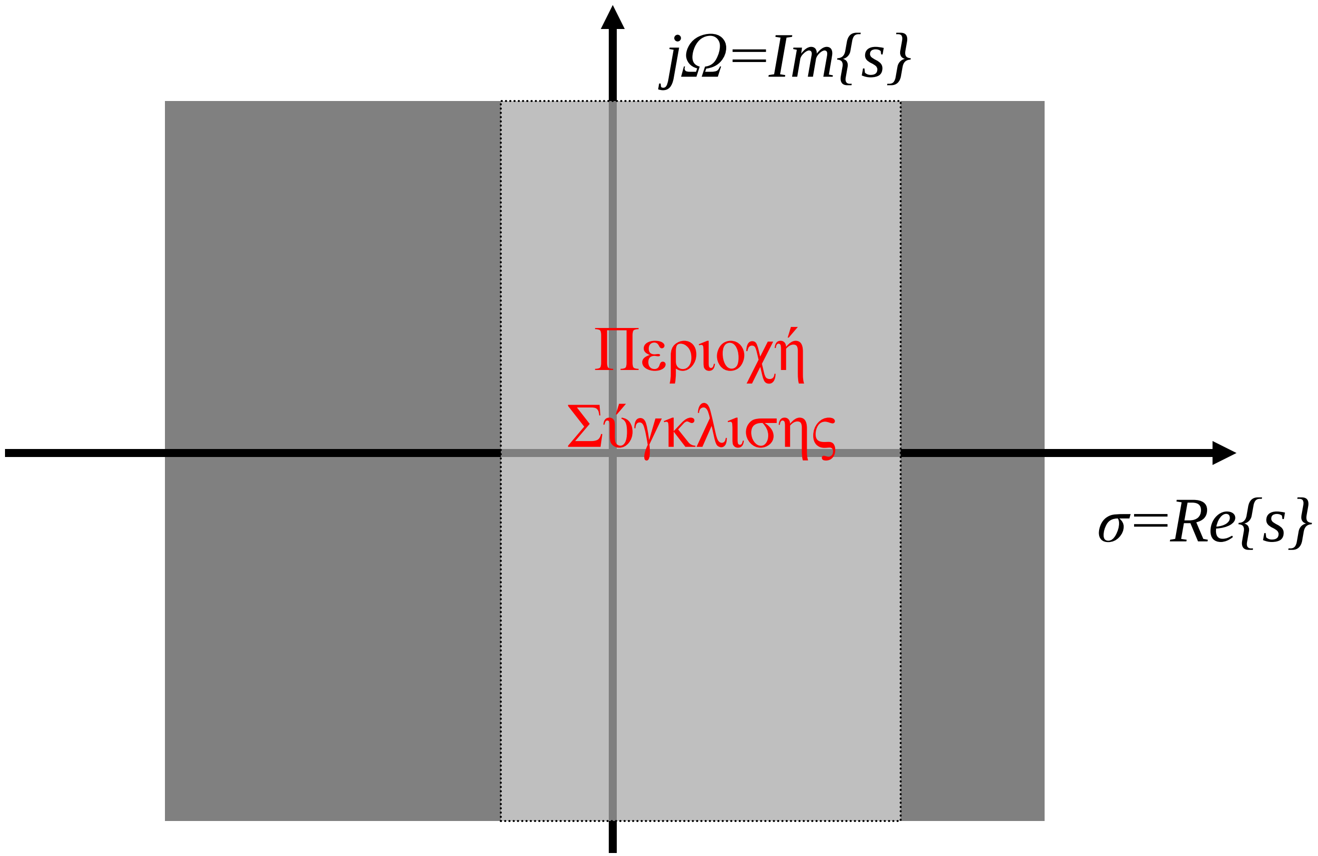
Ιδιότητα 1: Η ΠΣ του $X(s)$ συντίθεται από λωρίδες παράλληλες στον άξονα $-j\Omega$.

- Μια συνάρτηση $x(t)$ είναι εκθετικής τάξης λ αν:

$$\exists\, M > 0, \lambda, t_0 : |e^{-\lambda t} x(t)| < M, \forall\, t \geq t_0$$

Μετασχηματισμός Laplace

Μιγαδικό Επίπεδο-s



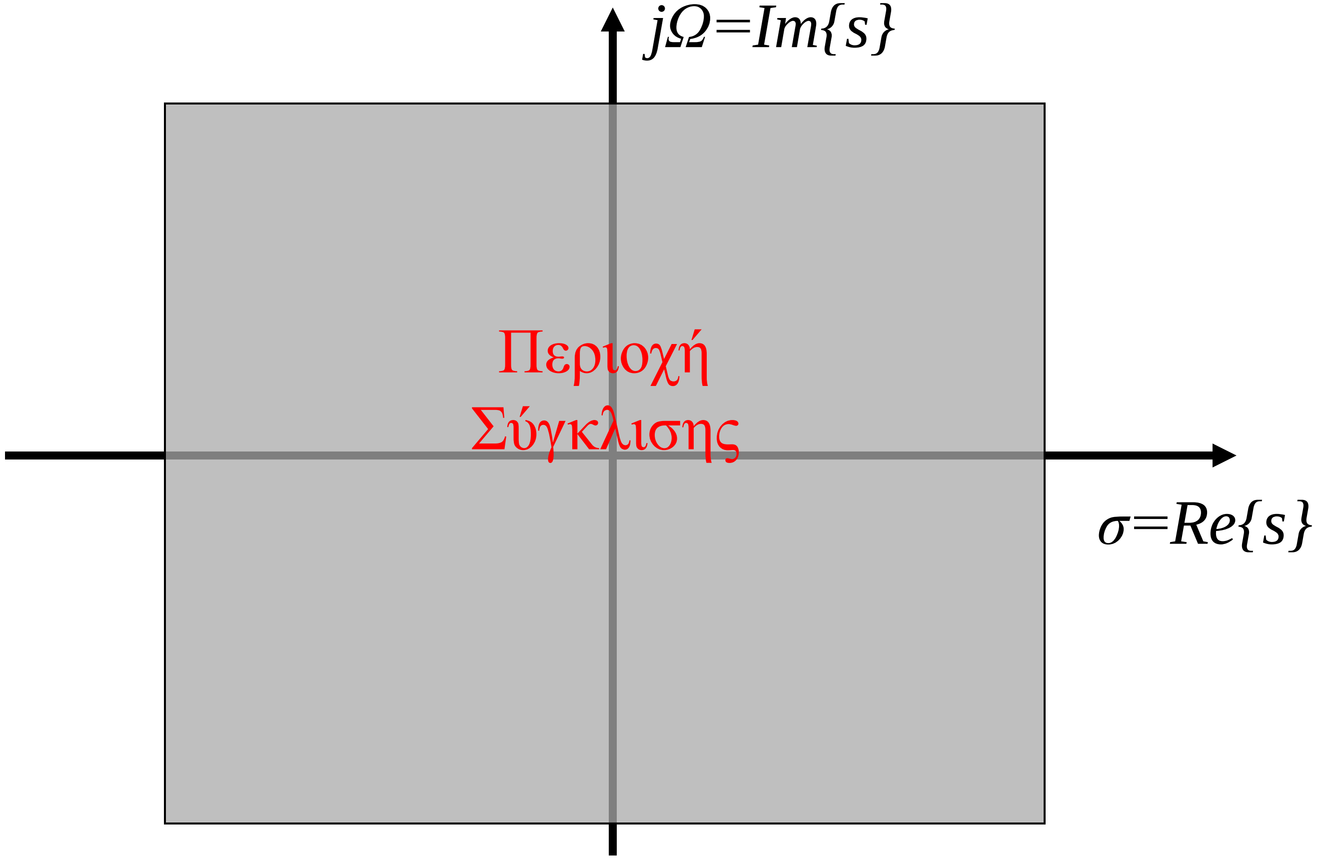
Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού: Μερικές Ιδιότητες

Ιδιότητα 2: Αν το $x(t)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας και ολοκληρώσιμο (κατ' απόλυτη τιμή), η ΠΣ του $X(s)$ είναι ολόκληρο το επίπεδο-s.

Μετασχηματισμός Laplace

Μιγαδικό Επίπεδο-s



Μετασχηματισμός Laplace

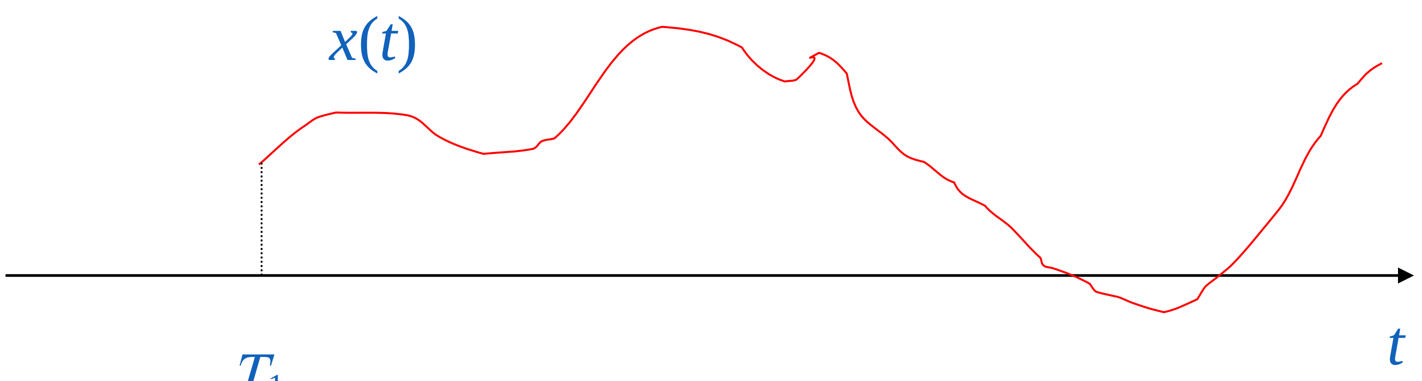
Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού: Μερικές Ιδιότητες

Ιδιότητα 3: Αν το $x(t)$ είναι ένα σήμα δεξιάς επέκτασης και η ευθεία

$$\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$$

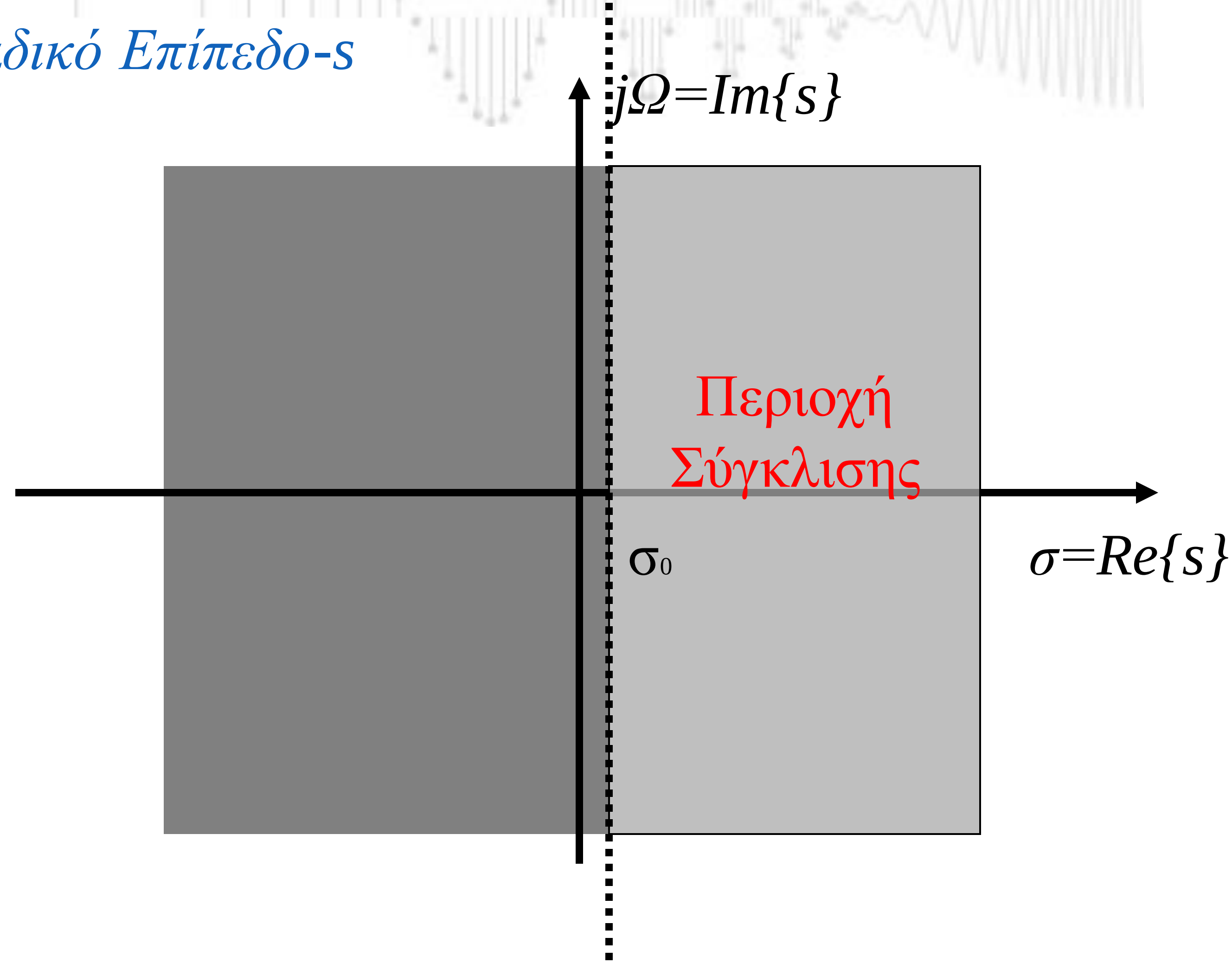
ανήκει στη ΠΣ του $X(s)$, τότε:

κάθε s: $\mathrm{Re}\{s\}>\sigma_0$ θα ανήκει στην ΠΣ του.



Μετασχηματισμός Laplace

Μιγαδικό Επίπεδο-s



ευθεία $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma_0$

Μετασχηματισμός Laplace

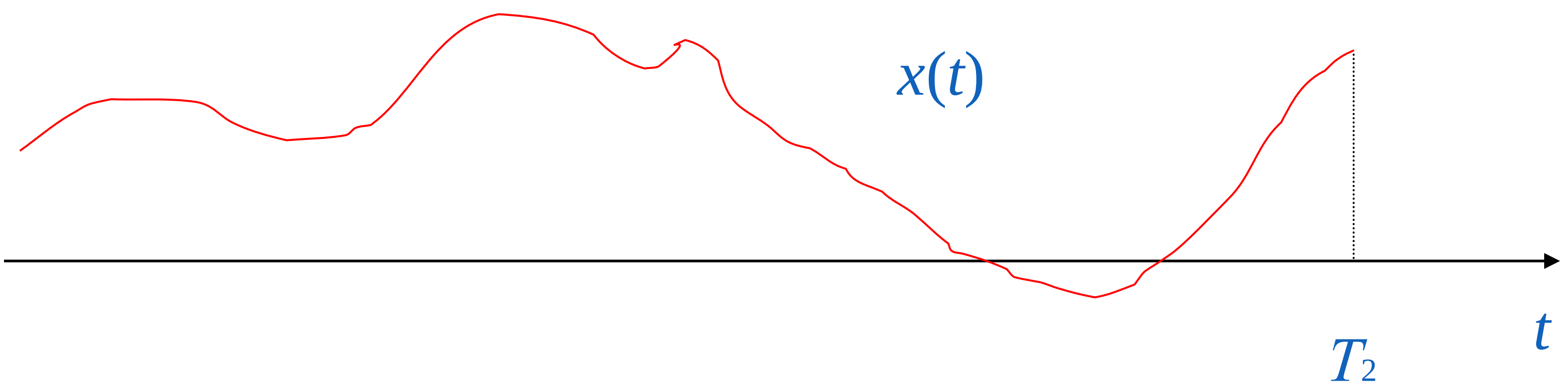
Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού: Μερικές Ιδιότητες

Ιδιότητα 4: Αν το $x(t)$ είναι ένα σήμα αριστερής επέκτασης και η ευθεία:

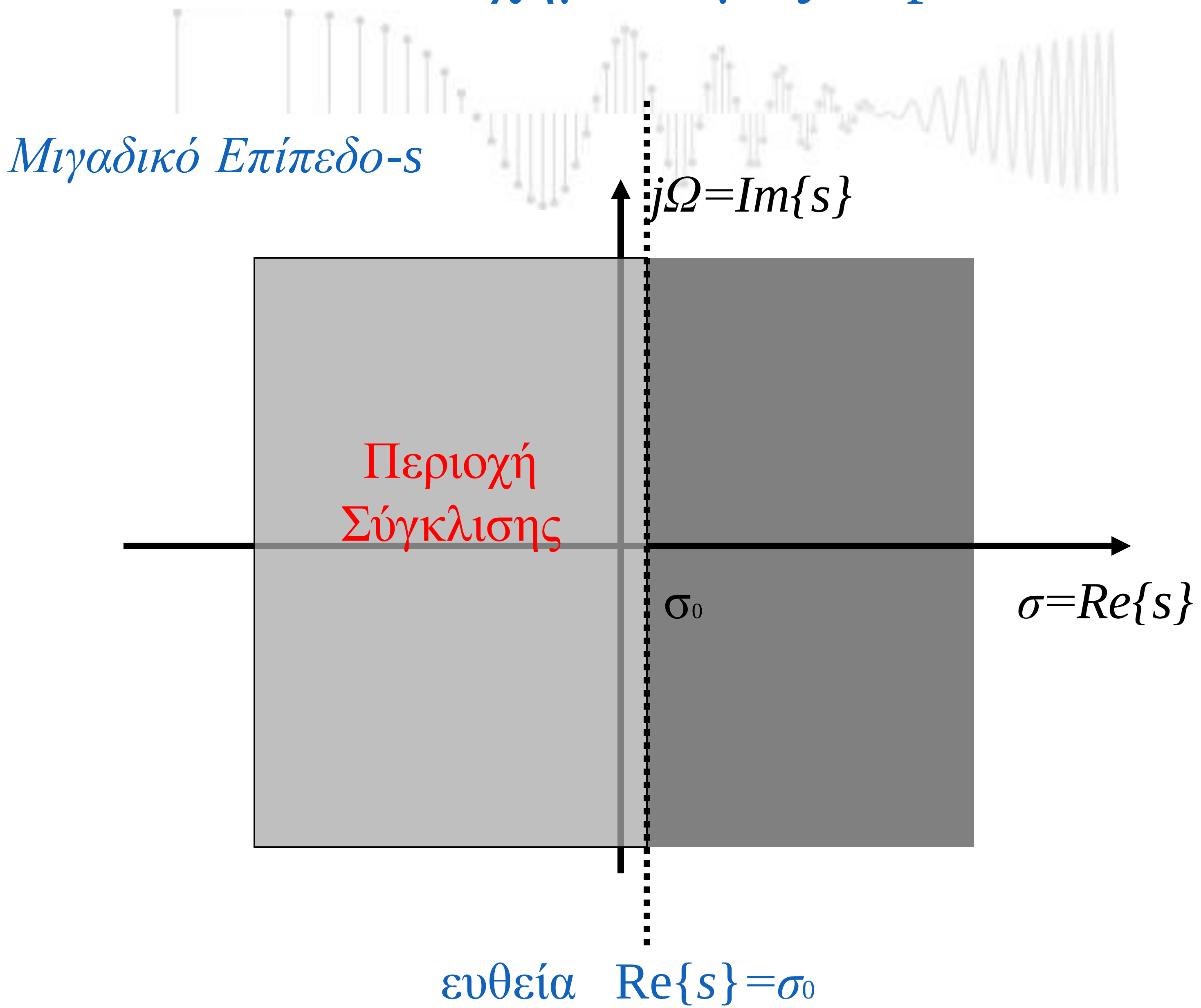
$$\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$$

ανήκει στη ΠΣ του $X(s)$, τότε:

κάθε s: $\mathrm{Re}\{s\}<\sigma_0$ θα ανήκει στην ΠΣ του.



Μετασχηματισμός Laplace



Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού: Μερικές Ιδιότητες

Ιδιότητα 5: Αν το $x(t)$ είναι ένα σήμα αμφίπλευρης επέκτασης και η ευθεία:

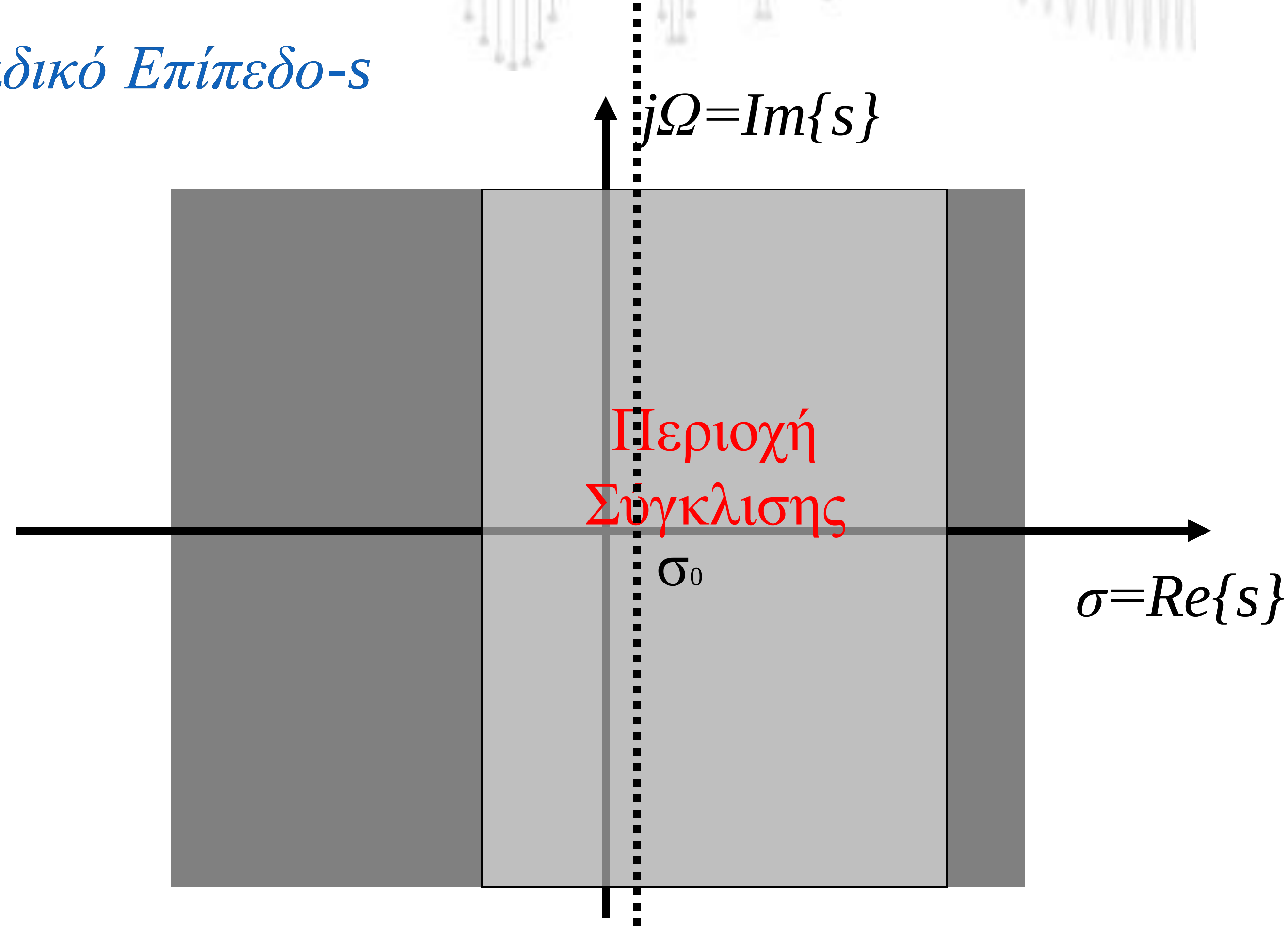
$$\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$$

ανήκει στη ΠΣ του $X(s)$, τότε:

Η ΠΣ θα είναι μια λωρίδα στο επίπεδο- s που θα περιλαμβάνει την ευθεία $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$.

Μετασχηματισμός Laplace

Μιγαδικό Επίπεδο-s



ευθεία $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$

Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού: Μερικές Ιδιότητες

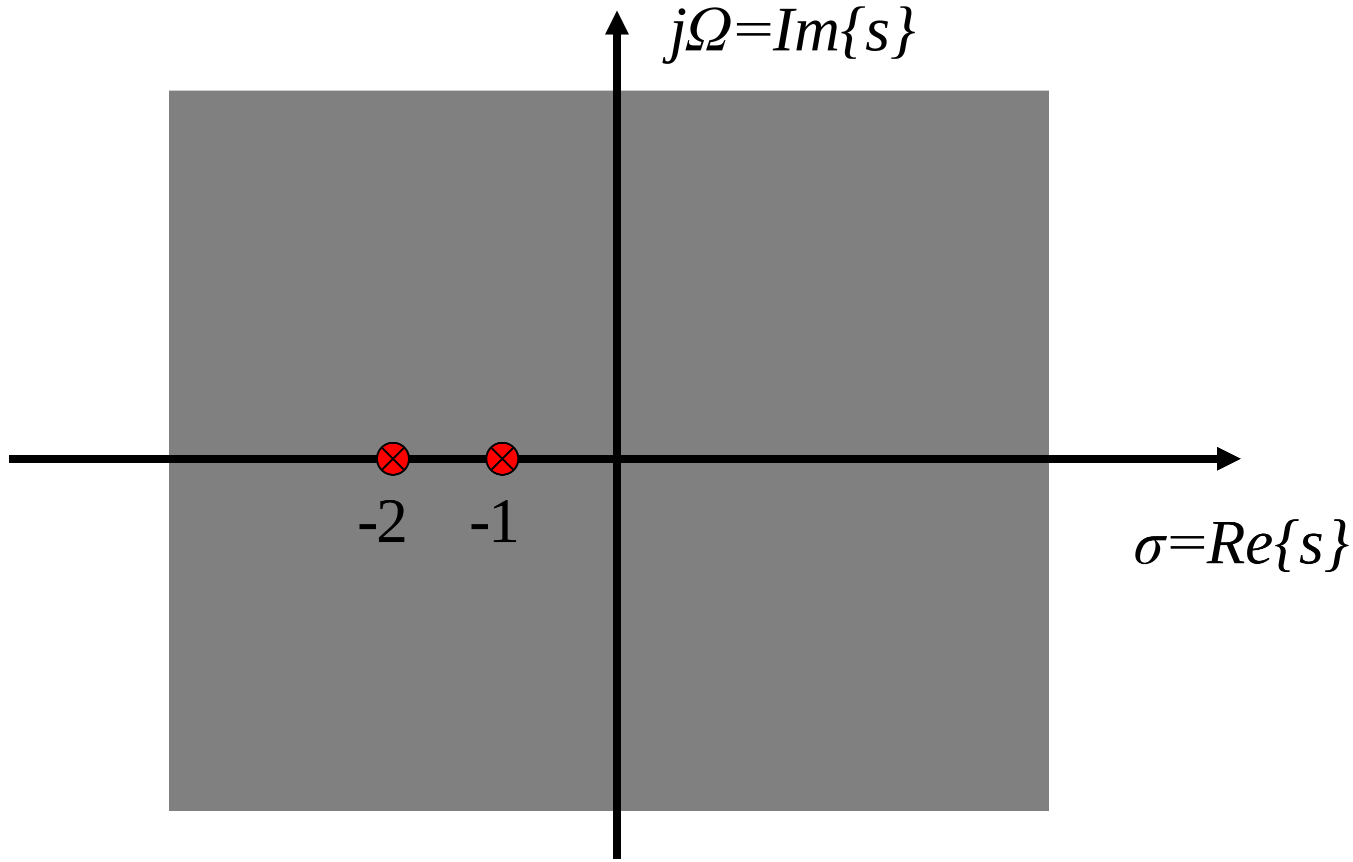
Ιδιότητα 6: Η ΠΣ μιας ρητής $X(s)$ δεν περιέχει πόλους.

Ιδιότητα 7: Η ΠΣ μιας ρητής $X(s)$ ή εκτείνεται ως το άπειρο ή περιορίζεται από τους πόλους της.

Μετασχηματισμός Laplace

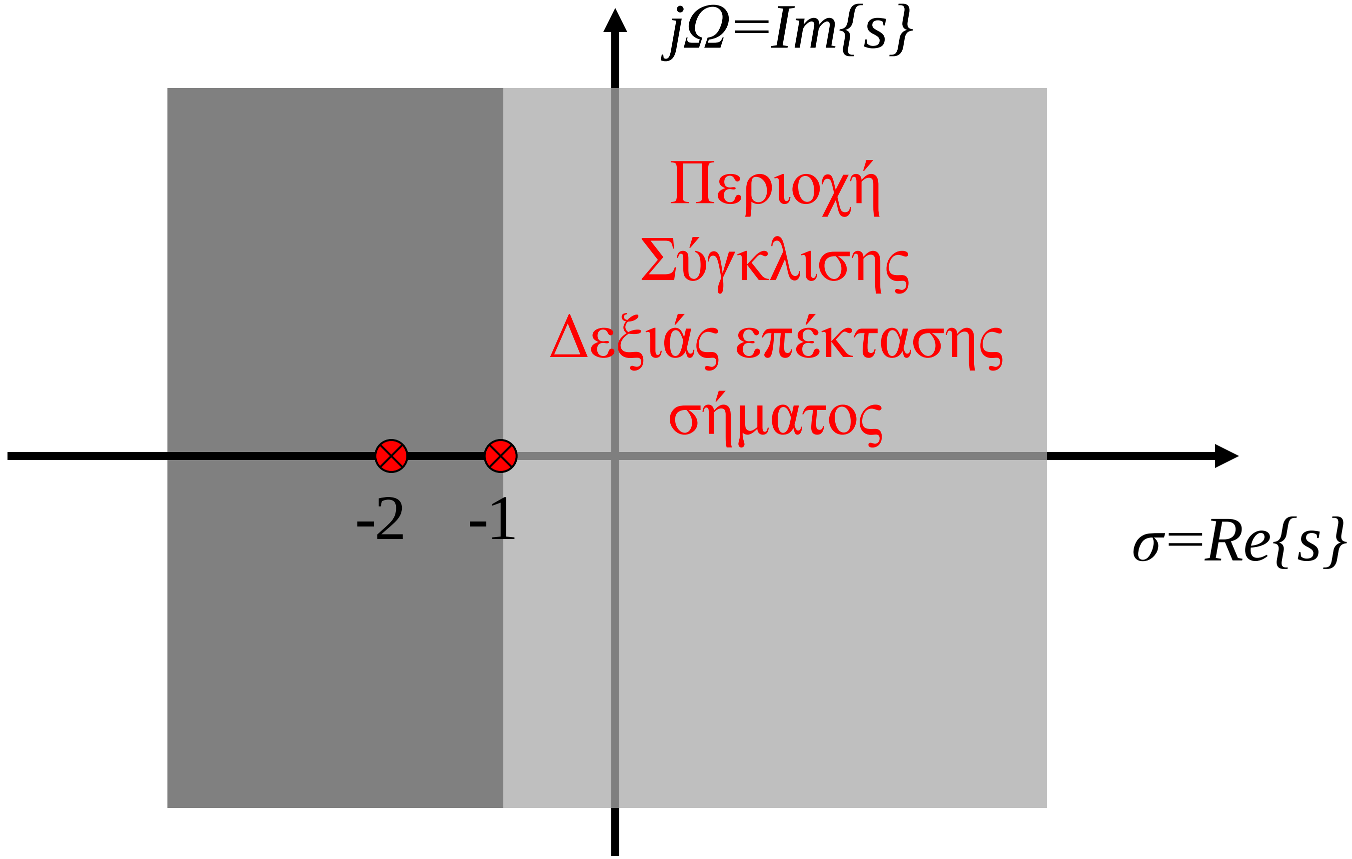
Δίνεται ο Μετασχηματισμός Laplace: $X(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s+1)}$

Μιγαδικό Επίπεδο-s



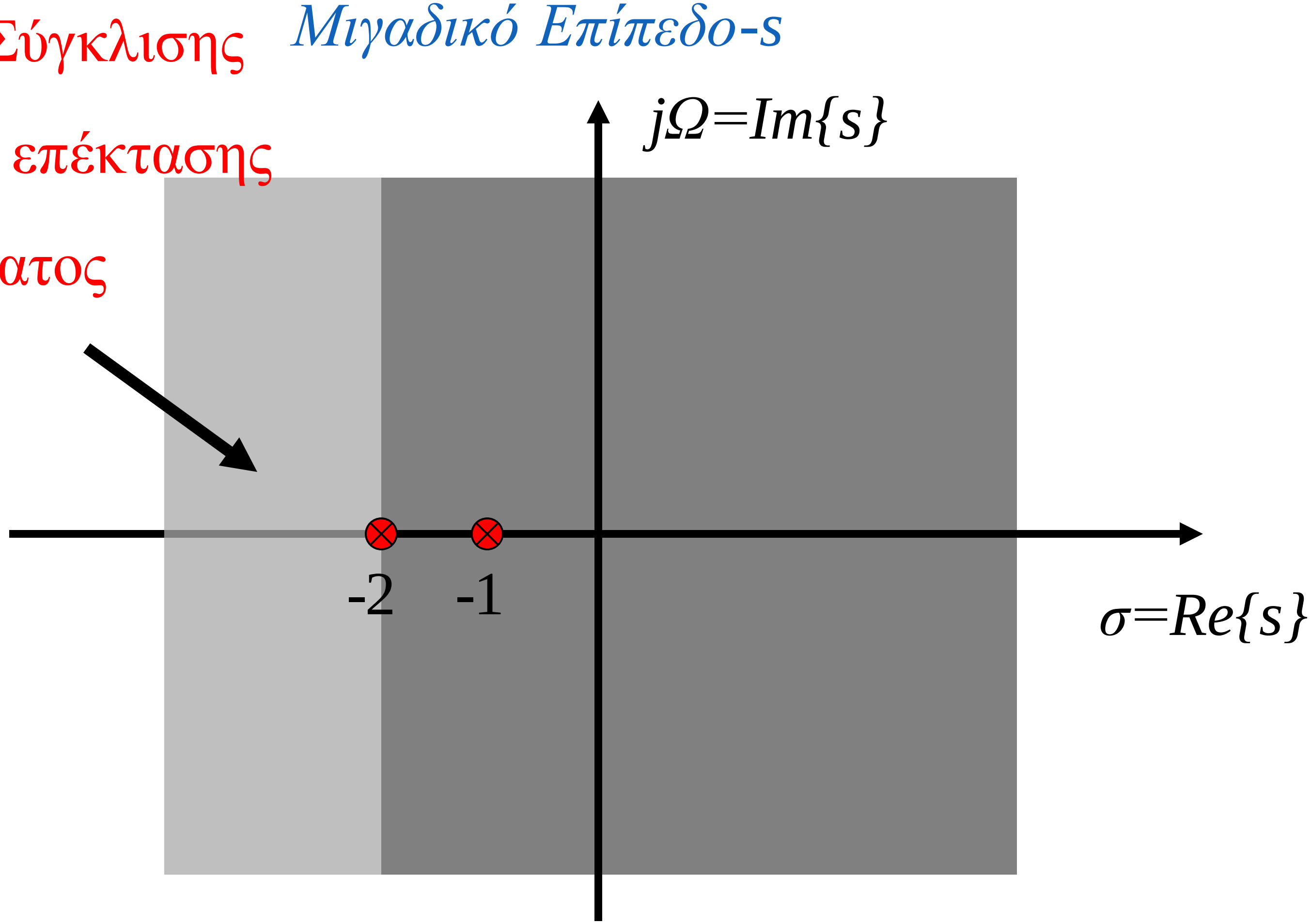
Μετασχηματισμός Laplace

Μιγαδικό Επίπεδο-s



Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης Αριστερής επέκτασης σήματος



Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης

Μιγαδικό Επίπεδο-s

Αμφίπλευρης
επέκτασης

σήματος