ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Laplace

Μετασχηματισμός Laplace

•Αιτιατότητα Μη-Αιτιατότητα.

•Ευστάθεια.

•Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού Laplace των Ευσταθών & Αιτιατών Συστημάτων.

•Εκθετικά Σήματα.

•Πολυωνυμικά Εκθετικά Σήματα *n*-οστής τάξης.

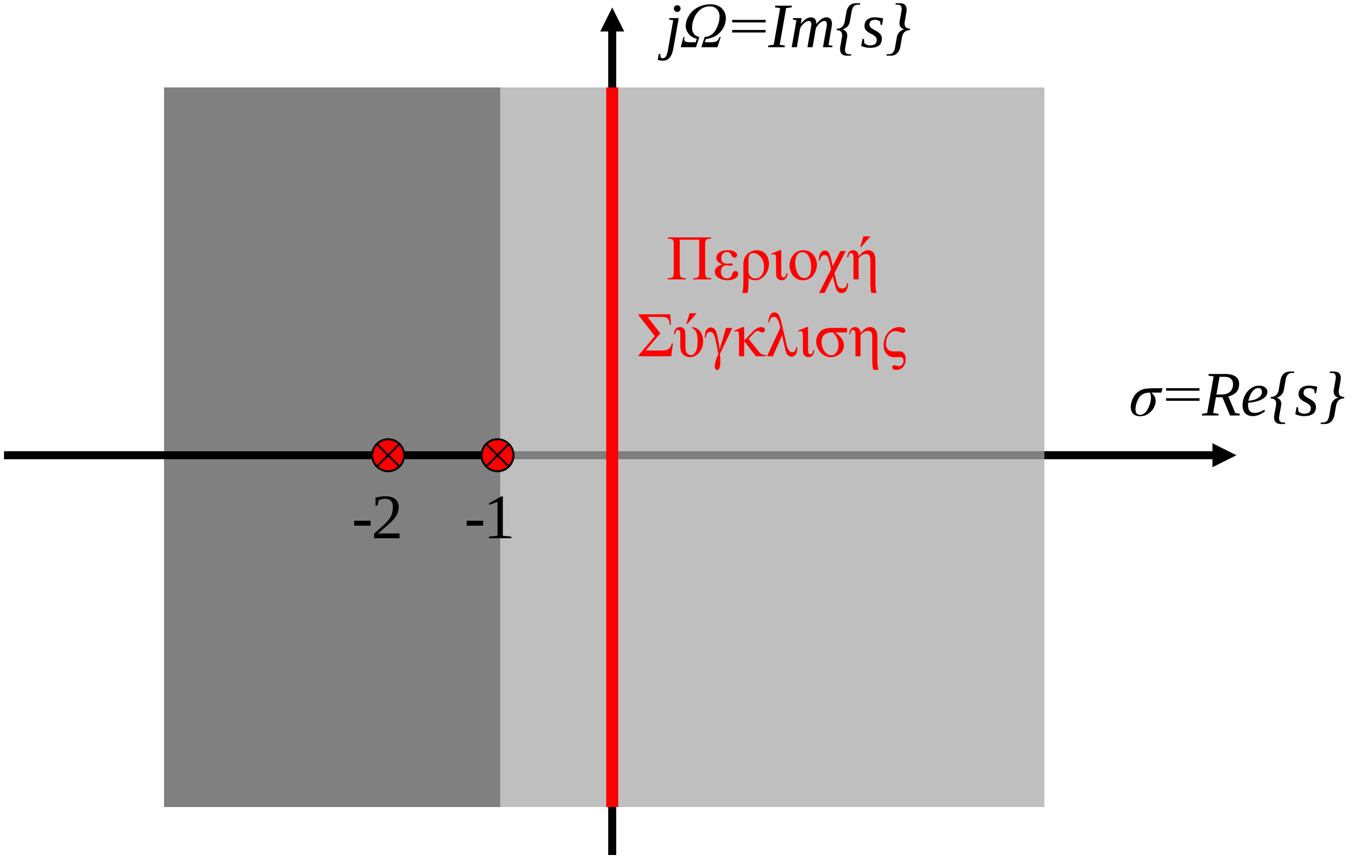
•Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace.

•Αυστηρά ρητός Μετασχηματισμός Laplace & Ανάλυση σε Απλά κλάσματα.

•Ρητός Μετασχηματισμός Laplace.

Μετασχηματισμός Laplace

Μιγαδικό Επίπεδο-s



Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού (*Αιτιατά & Μη-αιτιατά σήματα*)

$$x_1(t) = e^{-at}u(t) \quad \overset{L}{\longleftrightarrow} \quad X_1(s) = \frac{1}{s+a}, \mathrm{Re}\{s\} > -\alpha$$

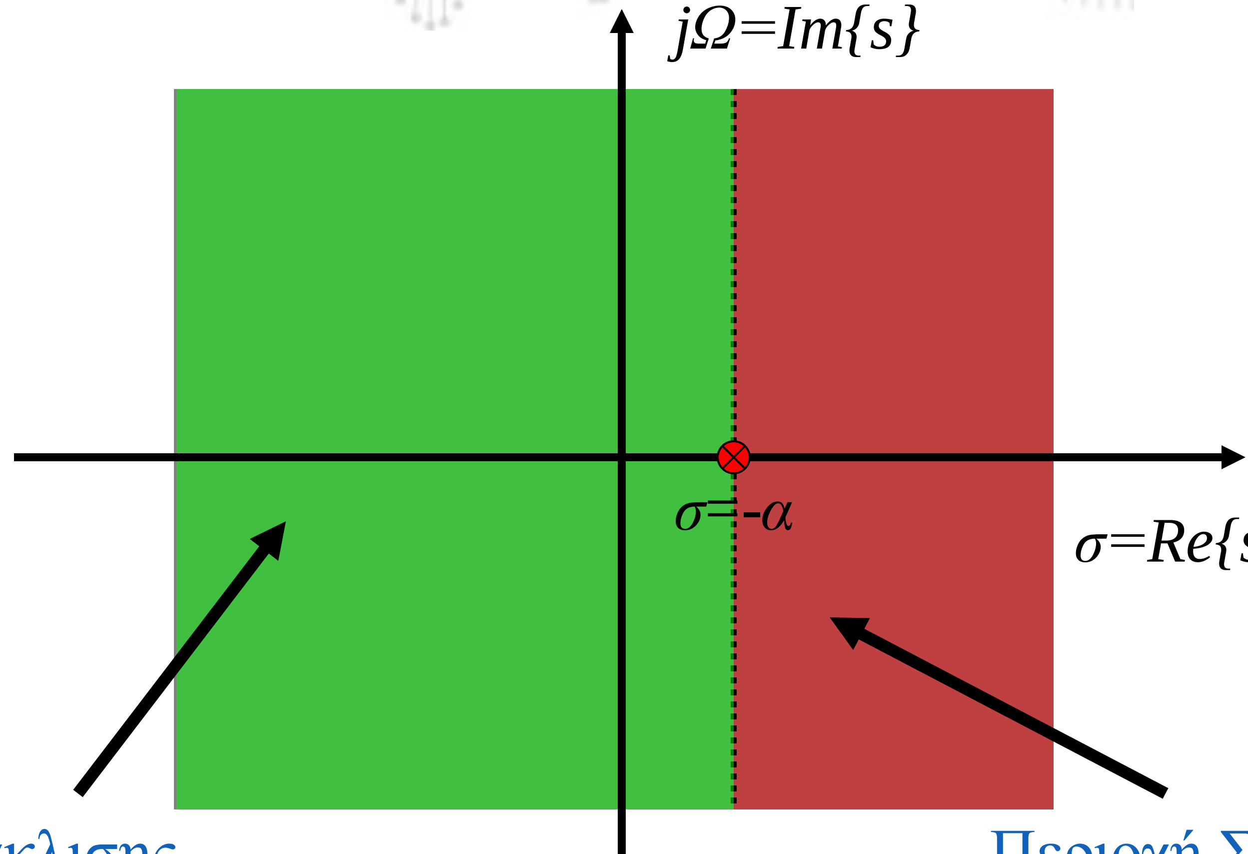
$$x_2(t) = -e^{-at}u(-t) \quad \overset{L}{\longleftrightarrow} \quad X_2(s) = \frac{1}{s+a}, \mathrm{Re}\{s\} < -\alpha$$

Μετασχηματισμός Laplace

$$x_2(t) = -e^{-at}u(-t)$$

Μιγαδικό Επίπεδο-s

$$x_1(t) = e^{-at}u(t)$$

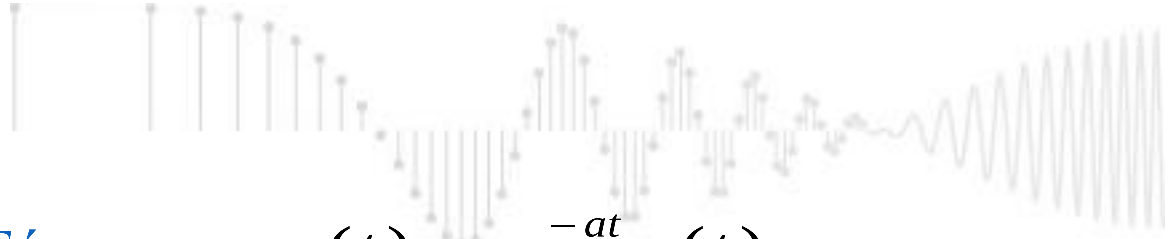


Πόλος

Περιοχή Σύγκλισης
$X_2(s)=L\{x_2(t)\}$
$\sigma=Re\{s\}<-\alpha$

Περιοχή Σύγκλισης
$X_1(s)=L\{x_1(t)\}$
$\sigma=Re\{s\}>-\alpha$

Μετασχηματισμός Laplace



Εκθετικά Σήματα: $x(t) = e^{-at}u(t)$

$$x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}\{s\} > -\alpha$$

Πολυωνυμικά Εκθετικά Σήματα n-*οστής τάξης*: $x(t) = \frac{t^n}{n!}e^{-at}u(t)$

$$x(t) = \frac{t^n}{n!}e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{(s+a)^{n+1}}, \operatorname{Re}\{s\} > -\alpha$$

Μετασχηματισμός Laplace

Μετασχηματισμός Laplace & Διαφορικές Εξισώσεις

Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα του οποίου η είσοδος και η έξοδος ικανοποιούν την ακόλουθη Δ.Ε.

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{M} \beta_n x^{(n)}(t)$$

Προσδιορίστε το Μετασχηματισμό *Laplace* της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.

Μετασχηματισμός Laplace

Ιδιότητα της Διαφόρισης στο πεδίο του χρόνου

- Αν $X(s)=L\{x(t)\}$, τότε: $$L\{x^{(1)}(t)\} = sX(s)$$

Γενίκευση της ιδιότητας: $$L\{x^{(n)}(t)\} = s^{n}X(s)$$

Μετασχηματισμός Laplace

Λύση ΔΕ με Χρήση Μετασχηματισμού Laplace-Συνάρτηση Μεταφοράς

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{M} \beta_n x^{(n)}(t)$$

Εφαρμόζοντας Μετασχηματισμό *Laplace* και στα δύο μέλη, έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n L\{y^{(n)}(t)\} = \sum_{n=0}^{M} \beta_n L\{x^{(n)}(t)\}$$

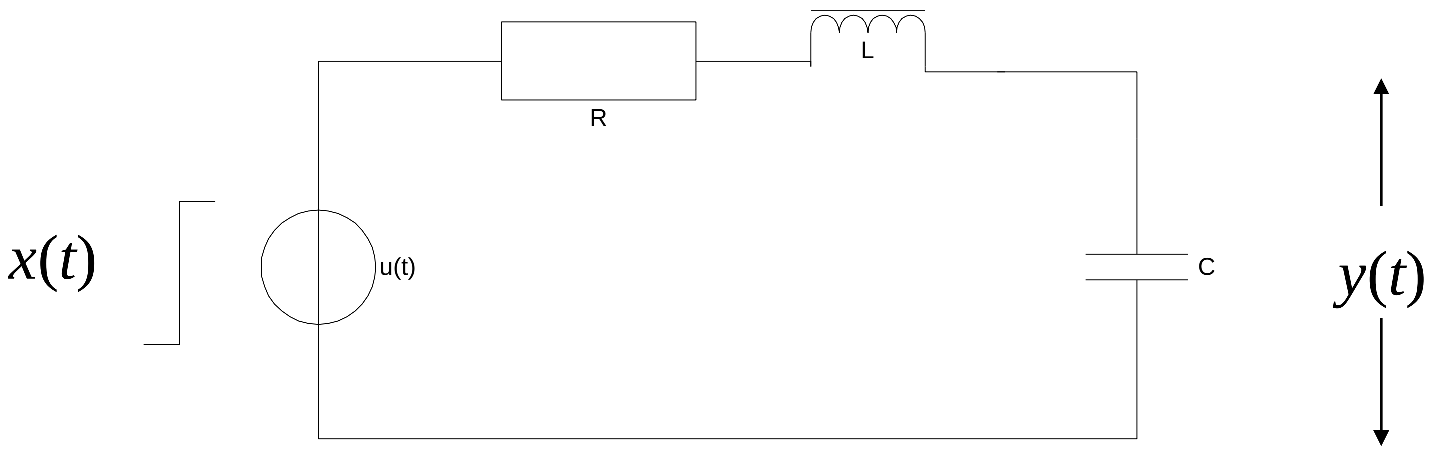
και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαφόρισης, βρίσκουμε:

$$H(s) = L\{h(t)\} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{n=0}^{M} \beta_n s^n}{\sum_{n=0}^{N} a_n s^n}$$ (Συνάρτηση Μεταφοράς)

Μετασχηματισμός Laplace

Μετασχηματισμός Laplace & ΔΕ-Συνάρτηση Μεταφοράς

Προσδιορίστε τη Συνάρτηση Μεταφοράς του παρακάτω συστήματος:



Μετασχηματισμός Laplace

Μετασχηματισμός Laplace & ΔΕ-Χαρακτηρισμός Συστήματος

Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα του οποίου η είσοδος και η έξοδος ικανοποιούν την ακόλουθη Δ.Ε.

$$y^{(1)}(t) + 3y(t) = x(t)$$

Προσδιορίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

Μετασχηματισμός Laplace

Μετασχηματισμός Laplace & ΔΕ-Ευστάθεια

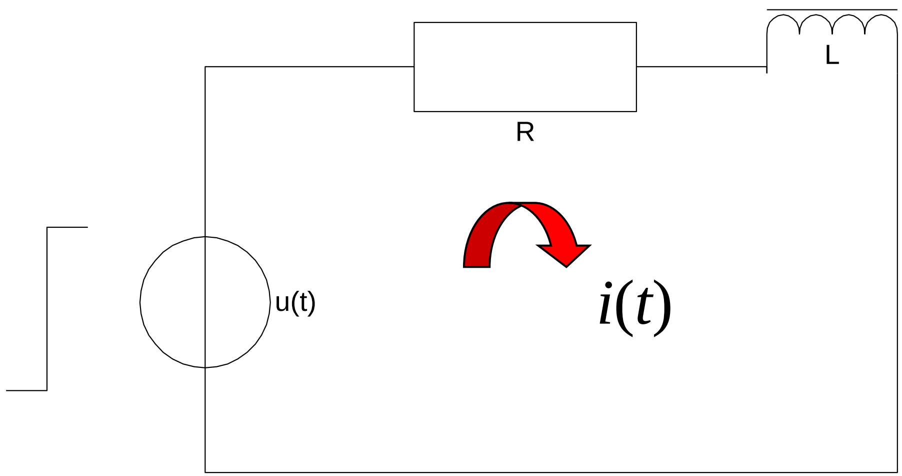
Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα για το οποίο γνωρίζουμε ότι αν εφαρμόσουμε στην είσοδό του το σήμα $x(t) = e^{-3t}u(t)$ η έξοδος του είναι $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$.

Χαρακτηρίστε το σύστημα ως προς την ευστάθειά του και προσδιορίστε τη Δ.Ε. που ικανοποιεί.

Μετασχηματισμός Laplace

Μετασχηματισμός Laplace & Διαφορικές Εξισώσεις

Προσδιορίστε το ρεύμα $i(t)$ που διαρρέει το παρακάτω κύκλωμα, αν γνωρίζουμε ότι $i(0+)=i_o$.



Μετασχηματισμός Laplace

Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Laplace

$$L_{0+}\{x(t)\} = X(s) = \int_{0+}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad s = \sigma + j\Omega$$

Υπολογίστε τον Αμφίπλευρο και το Μονόπλευρο Μετασχηματισμό του Σήματος $x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1)$

$$L\{x(t)\} = e^{s}\frac{1}{s+a}, \ \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$L_{0+}\{x(t)\} = e^{-a}\frac{1}{s+a}, \ \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

Μετασχηματισμός Laplace

Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Laplace

$$L\{x(t)\} = X(s) = \int_{a}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad s = \sigma + j\Omega$$

• *Ιδιότητα της Διαφόρισης στο πεδίο του χρόνου*

• Αν $X(s)=L\{x(t)\}$, τότε: $\quad L_a\{x^{(1)}(t)\} = sX(s) - x(a)$

Γενίκευση της ιδιότητας:

$$L_a\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} x^{(k-1)}(a)$$

Μετασχηματισμός Laplace

Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Laplace

Να λυθεί η Δ.Ε. $x^{(1)}(t) + 2x(t) = \delta(t), \quad x(0^-) = 1, \; t > 0^-$

- Κλασσικός Τρόπος Λύσης
- Χρησιμοποιώντας Μονόπλευρο Μετασχηματισμό Laplace (α=0+)
- Χρησιμοποιώντας Μονόπλευρο Μετασχηματισμό Laplace (α=0-)

Μετασχηματισμός Laplace

Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Laplace

- *Θεώρημα Αρχικής και Τελικής τιμής*

$$x(0^{+}) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

Μετασχηματισμός Laplace

•*Θεώρημα Αρχικής Τιμής* (*Ανεξάρτητα από το* **α** *που χρησιμοποιούμε*)

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

•*Απόδειξη για τα σήματα που ανήκουν στην κλάση* C_∞

$$\lim_{s \to \infty} L\{x^{(1)}(t)\} = 0$$

•*Απόδειξη για συνεχή σήματα και σήματα με ασυνέχεια στο* $t=0$

•*Γενίκευση του Θεωρήματος Αρχικής Τιμής για σήματα που περιέχουν και κρουστικές συναρτήσεις στο* $t=0$.

Μετασχηματισμός Laplace

•*Γενίκευση του Θεωρήματος Αρχικής Τιμής για σήματα που περιέχουν και κρουστικές συναρτήσεις στο* $t=0$.

•*Αν*

$$X(s) = \sum_{k=0}^{K} a_k s^k + X_o(s)$$

τότε

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} sX_o(s)$$

Μετασχηματισμός Laplace

Ιδιότητα της Ολοκλήρωσης στο πεδίο του χρόνου

• Αν $X(s)=L_\alpha\{x(t)\}$, και: $$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

τότε $$L_a\{y(t)\} = \frac{X(s)}{s} + \frac{y(a)}{s}$$

Παράδειγμα: Λύστε την παρακάτω εξίσωση

$$Li^{(1)}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = x(t),\quad v_c(0-)$$ γνωστή.

Μετασχηματισμός Laplace

Αιτιατά Περιοδικά Σήματα

Έστω
$$x(t) = \begin{cases} x(t+T), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

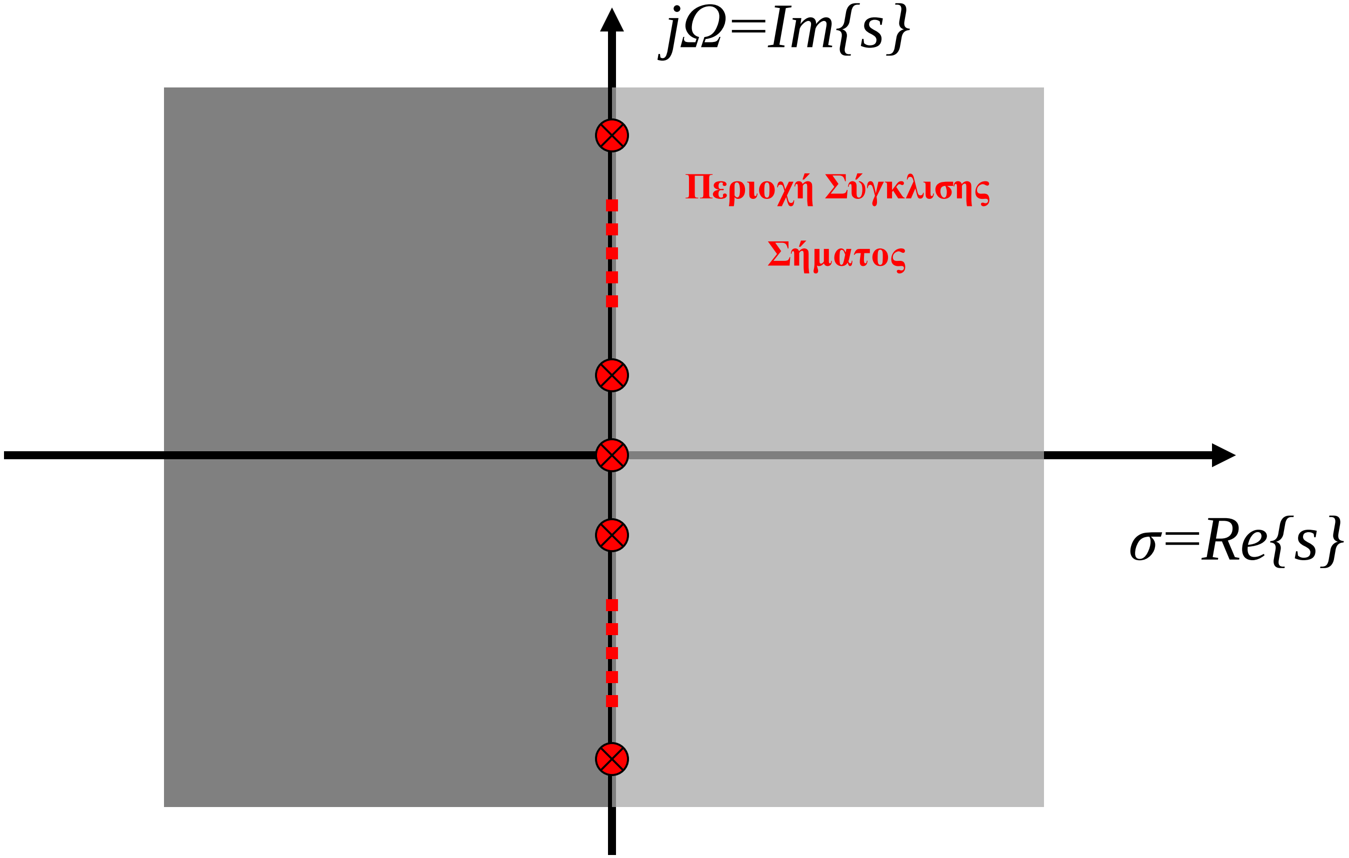
τότε
$$L\{x(t)\} = \frac{X_T(s)}{1 - e^{-sT}}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

όπου $X_T(s) = L(x_T(t)), \quad x_T(t) = x(t), \quad T > t \geq 0$

και μηδέν αλλού.

Μετασχηματισμός Laplace

Μιγαδικό Επίπεδο-s



Μετασχηματισμός Laplace

•Πόλοι στο Αριστερό Ημιεπίπεδο.

$$X(s)\Big|_{s=j\Omega} = F\{x(t)\} = X(j\Omega)$$

•Πόλοι Πάνω στον Φανταστικό άξονα (οριακή περίπτωση σ=0).

Τι γίνεται σ’ αυτή την περίπτωση;