

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ



## ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ-Z

# Μετασχηματισμός - z



- *Συνεχούς Χρόνου Μετασχηματισμός Fourier*

$$F \{ x(t) \} = X ( j\Omega ) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

- *Διακριτού Χρόνου Μετασχηματισμός Fourier*

$$F \{ x[n] \} = X ( e^{j\omega} ) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega}$$

# Μετασχηματισμός - z



- *Απόκριση Συχνότητας Συστήματος Συνεχούς Χρόνου*

$$F \{ h(t) \} = H ( j\Omega ) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\Omega t} dt$$

- *Απόκριση Συχνότητας Συστήματος Διακριτού Χρόνου*

$$F \{ h[n] \} = H ( e^{j\omega} ) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jn\omega}$$

# Μετασχηματισμός - z

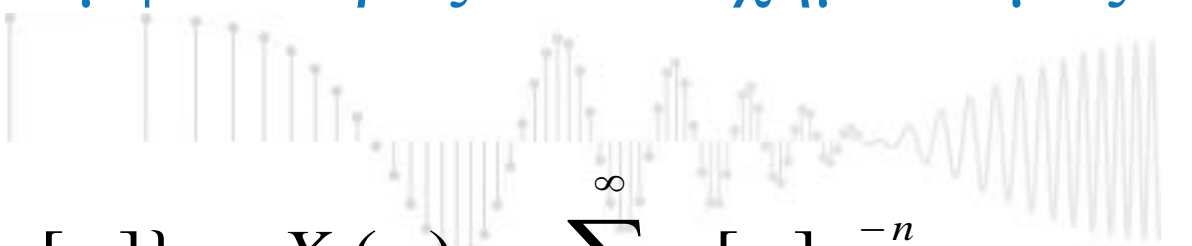


•Ορισμός:  $Z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=N_0}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z = re^{j\omega}$

•Αν  $N_0 = -\infty$ , τότε έχουμε τον Αμφίπλευρο Μετασχηματισμό-z

•Αν  $N_0 = 0$ , τότε έχουμε το Μονόπλευρο Μετασχηματισμό-z

# Αμφίπλευρος Μετασχηματισμός -z


$$Z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z = re^{j\omega}$$

• Σχέση Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier και Μετασχηματισμού-z

$$F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}$$

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = F\{x[n]\} = X(e^{j\omega})$$

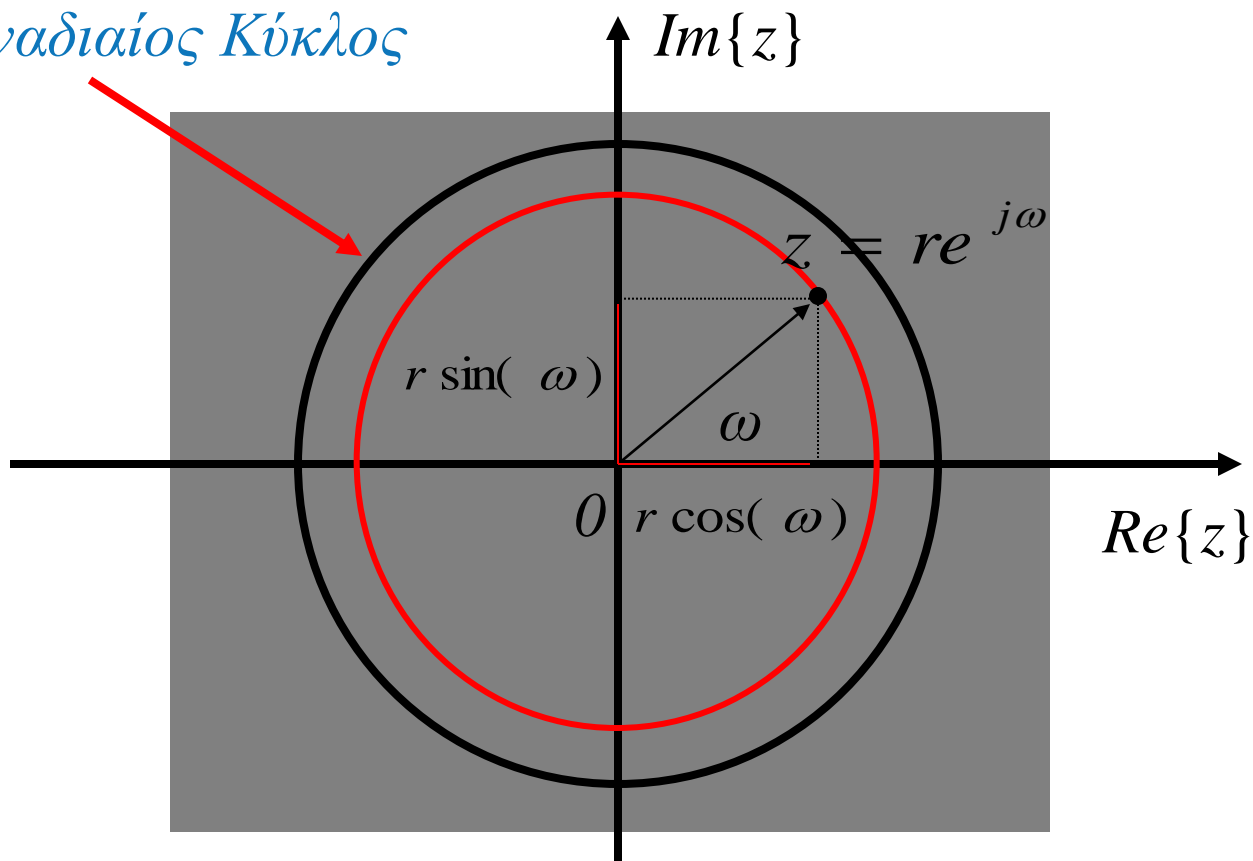
$$X(re^{j\omega}) = F\{x[n]r^{-n}\}$$

# Μετασχηματισμός - z



*Μιγαδικό Επίπεδο-z*

*Μοναδιαίος Κύκλος*



# Μετασχηματισμός - z



## Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού

$$x_1[n] = a^n u[n] \quad \longleftrightarrow \quad X_1(z) = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|$$

$$x_2[n] = -a^n u[-(n + 1)] \quad \longleftrightarrow \quad X_2(z) = \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a|$$

# Μετασχηματισμός - z

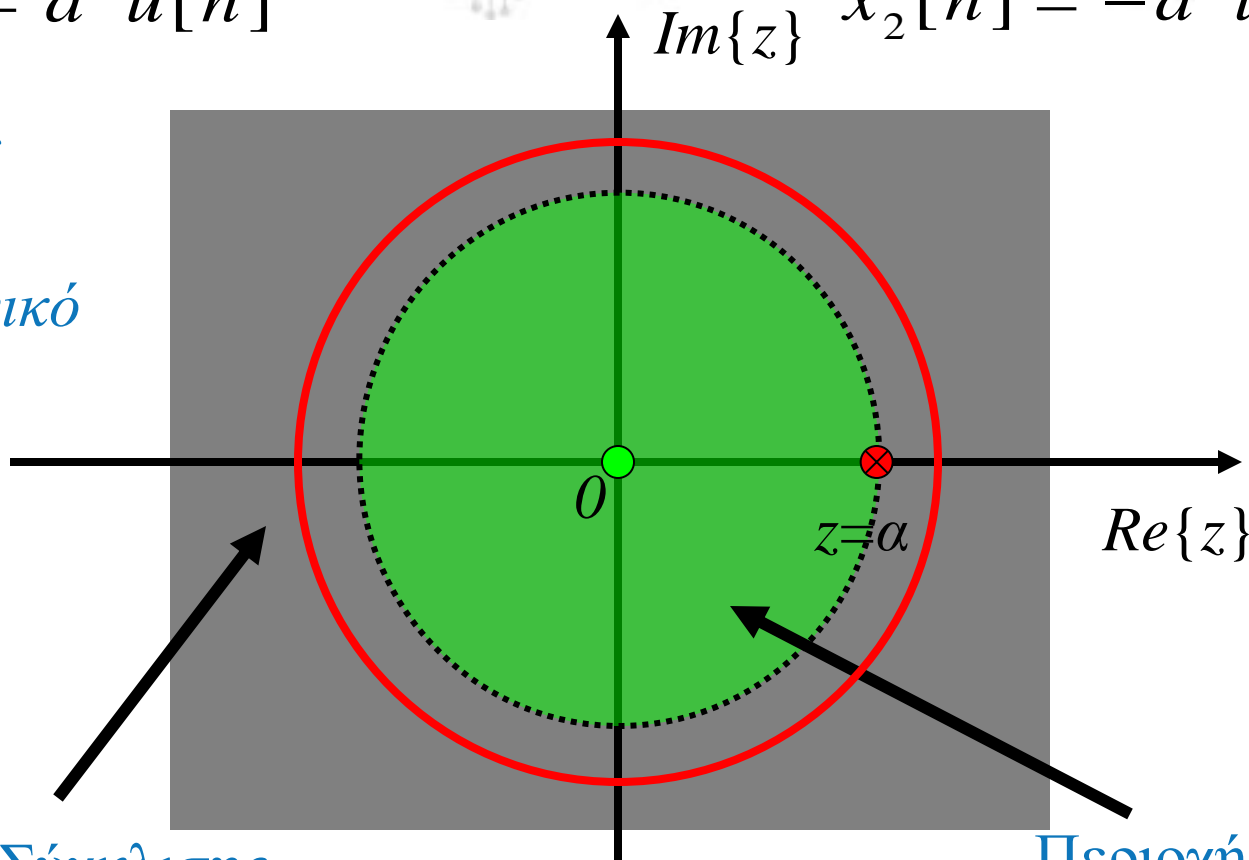
Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού

$$x_1[n] = a^n u[n]$$

$$x_2[n] = -a^n u[-(n+1)]$$

⊗ Πόλος

● Μηδενικό



Περιοχή Σύγκλισης  
 $X_1(z) = Z\{x_1[n]\}$   
 $|z| > |\alpha|$

Περιοχή Σύγκλισης  
 $X_2(z) = Z\{x_2[n]\}$   
 $|z| < |\alpha|$



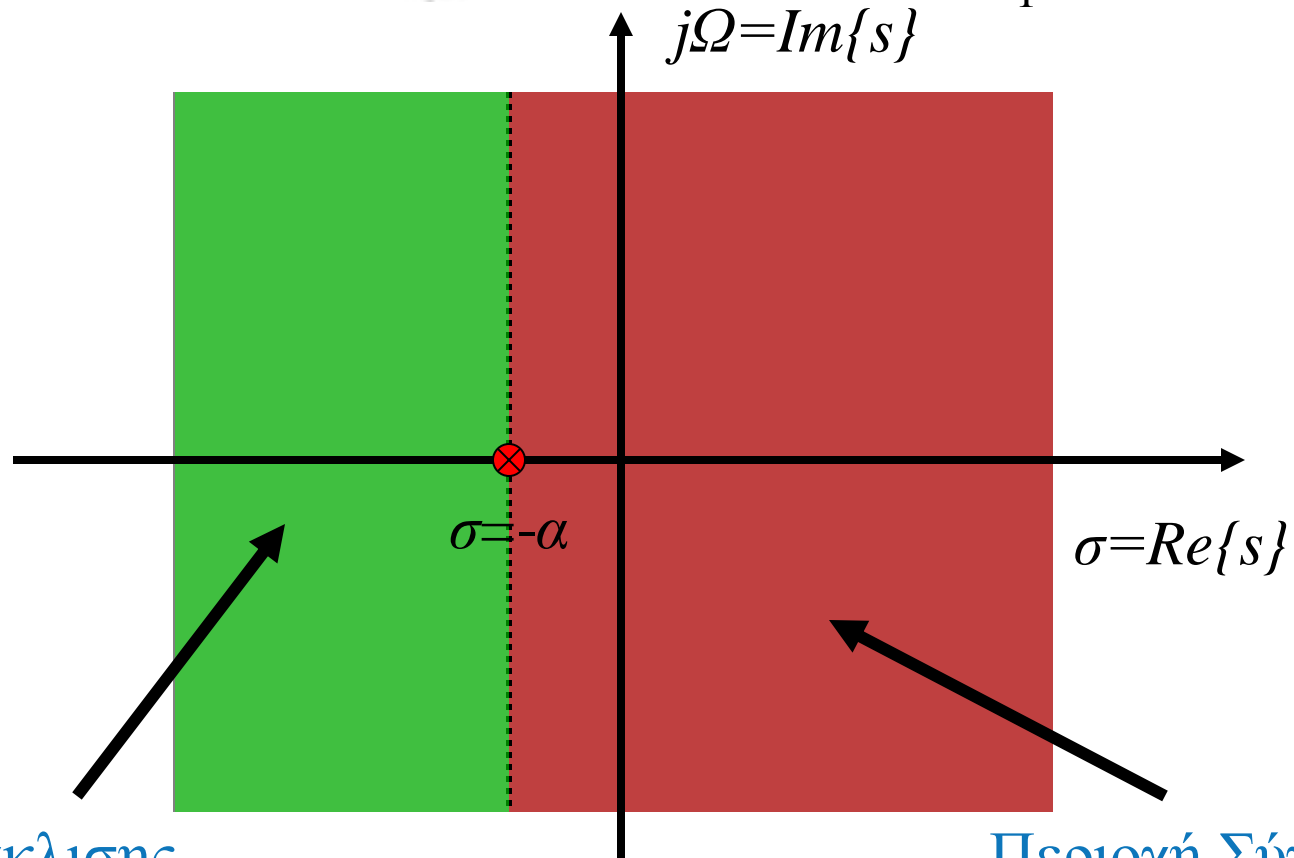
# Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού

$$x_2(t) = -e^{-at} u(-t)$$

$$x_1(t) = e^{-at} u(t)$$

⊗ Πόλος



Περιοχή Σύγκλισης  
 $X_2(s) = L\{x_2(t)\}$   
 $\sigma = \text{Re}\{s\} < -\alpha$

Περιοχή Σύγκλισης  
 $X_1(s) = L\{x_1(t)\}$   
 $\sigma = \text{Re}\{s\} > -\alpha$

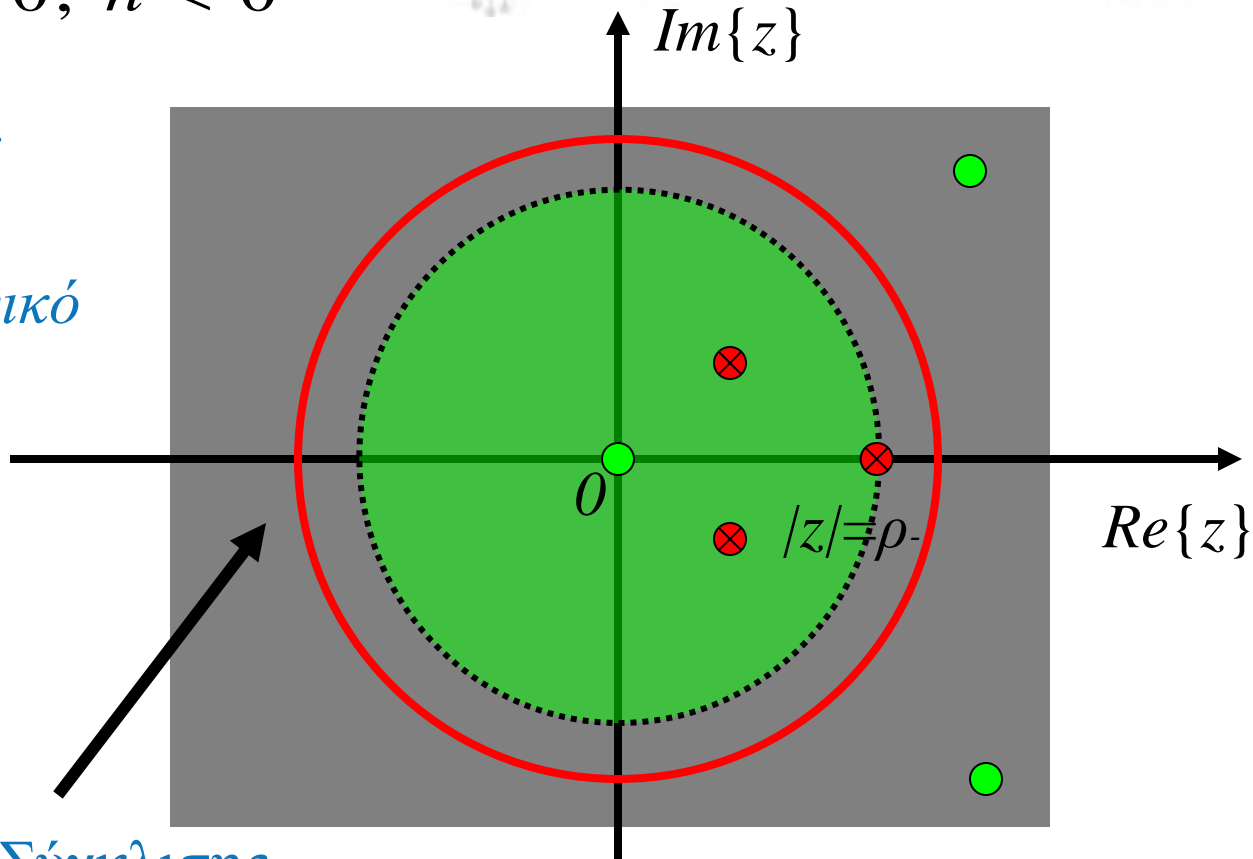
# Μετασχηματισμός - z

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού-z Αιτιατών Σημάτων

$$x[n] = 0, n < 0$$

⊗ Πόλος

● Μηδενικό



Περιοχή Σύγκλισης

$$X(z) = Z\{x[n]\}$$

$$|z| > \rho$$

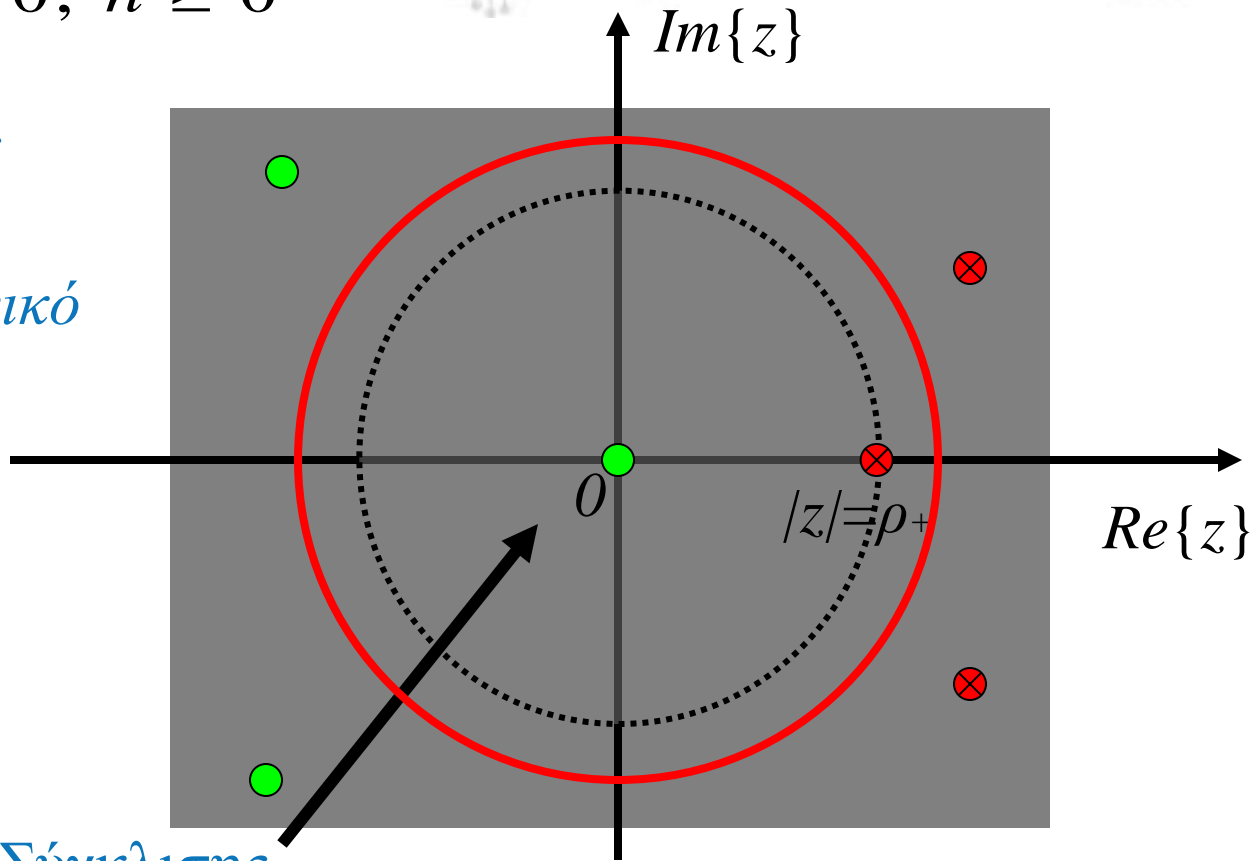
# Μετασχηματισμός - z

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού-z Μη-Αιτιατών Σημάτων

$$x[n] = 0, n \geq 0$$

⊗ Πόλος

● Μηδενικό



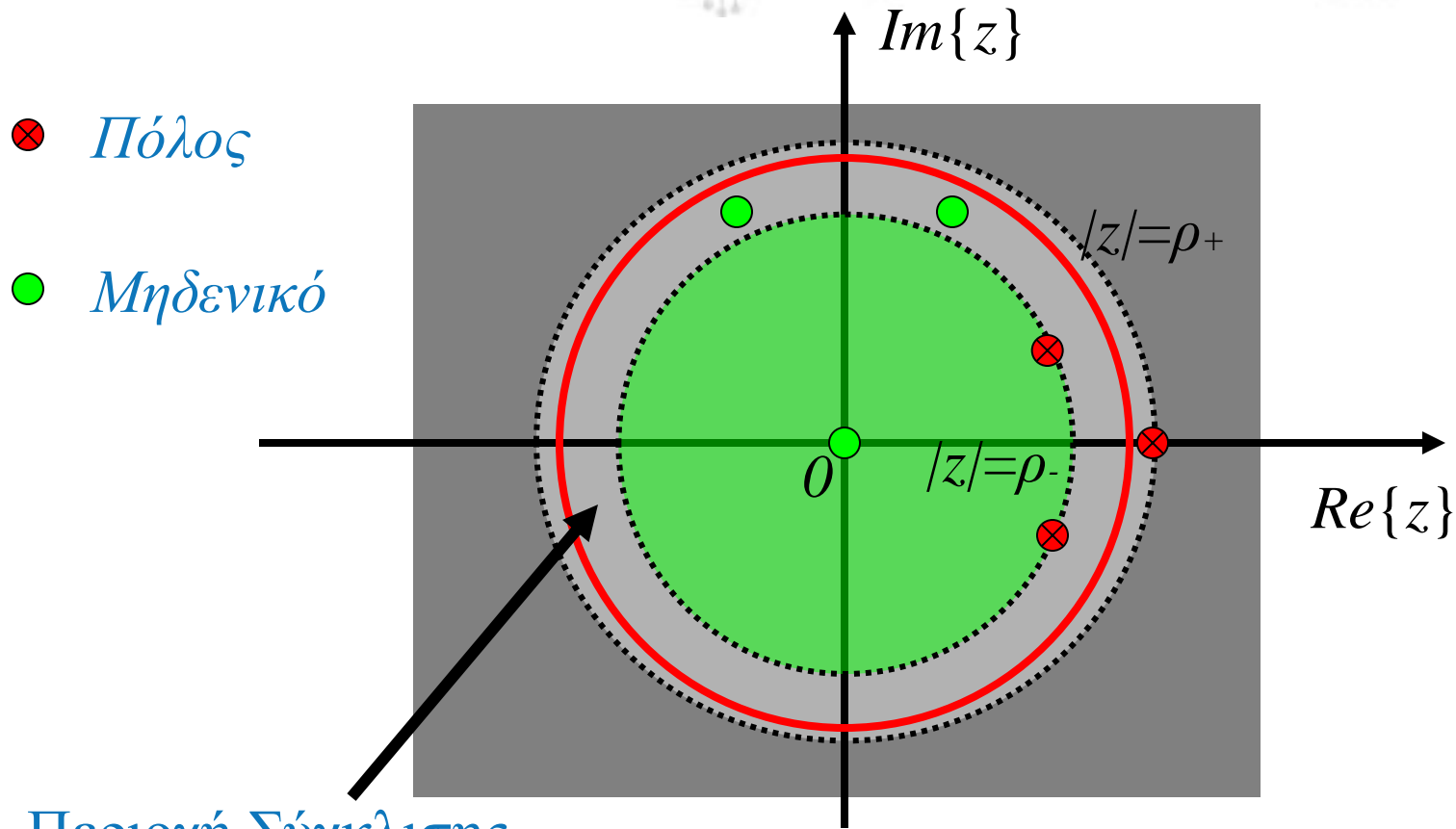
Περιοχή Σύγκλισης

$$X(z) = Z\{x[n]\}$$

$$|z| < \rho_+$$

# Μετασχηματισμός - z

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού-z Αμφίπλευρων Σημάτων



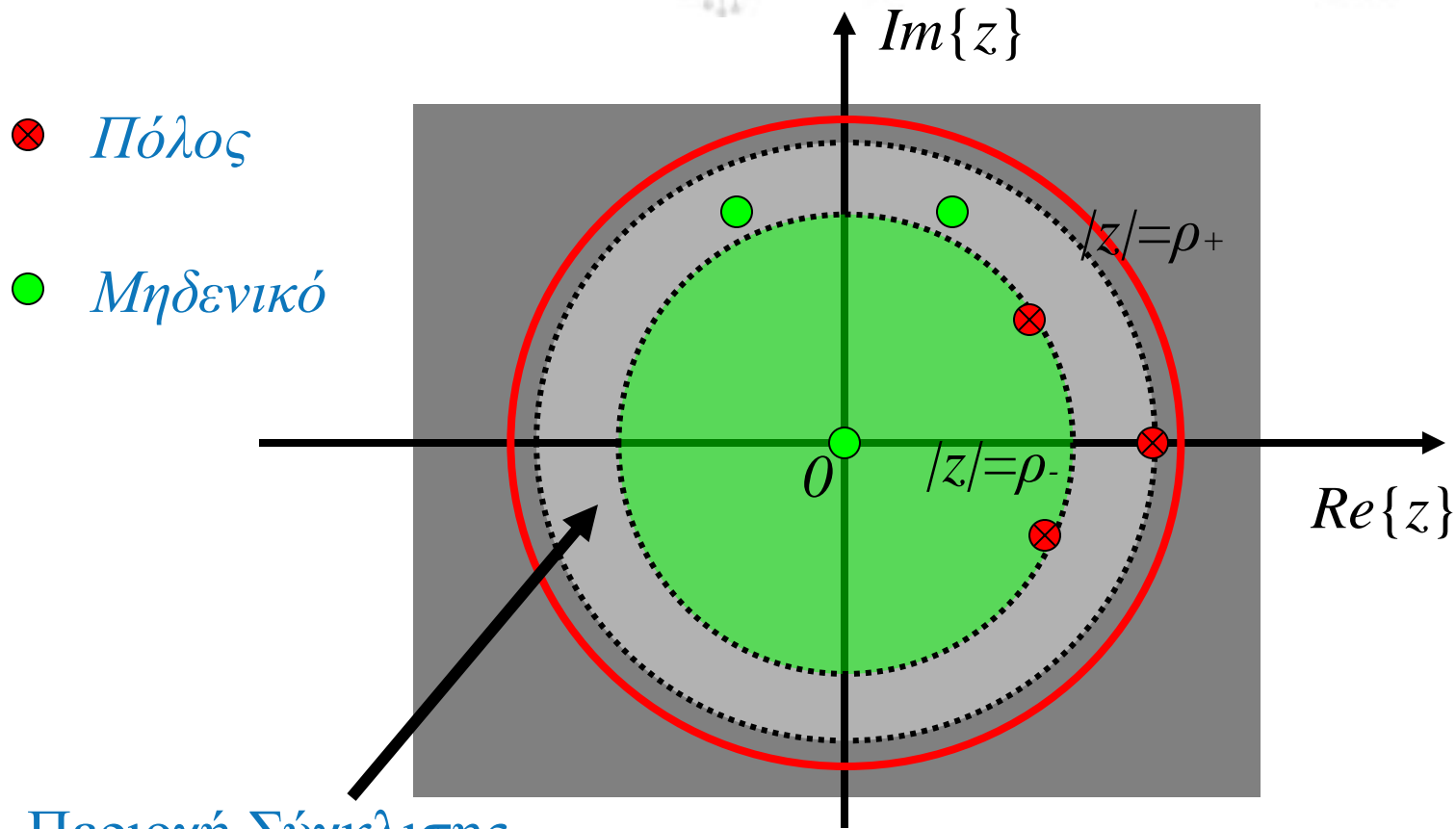
Περιοχή Σύγκλισης

$$X(z)=Z\{x[n]\}$$

$$\rho_+ > |z| > \rho_-$$

# Μετασχηματισμός - z

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού-z & Ευστάθεια



Περιοχή Σύγκλισης

$$X(z)=Z\{x[n]\}$$

$$\rho_+ > |z| > \rho_-$$

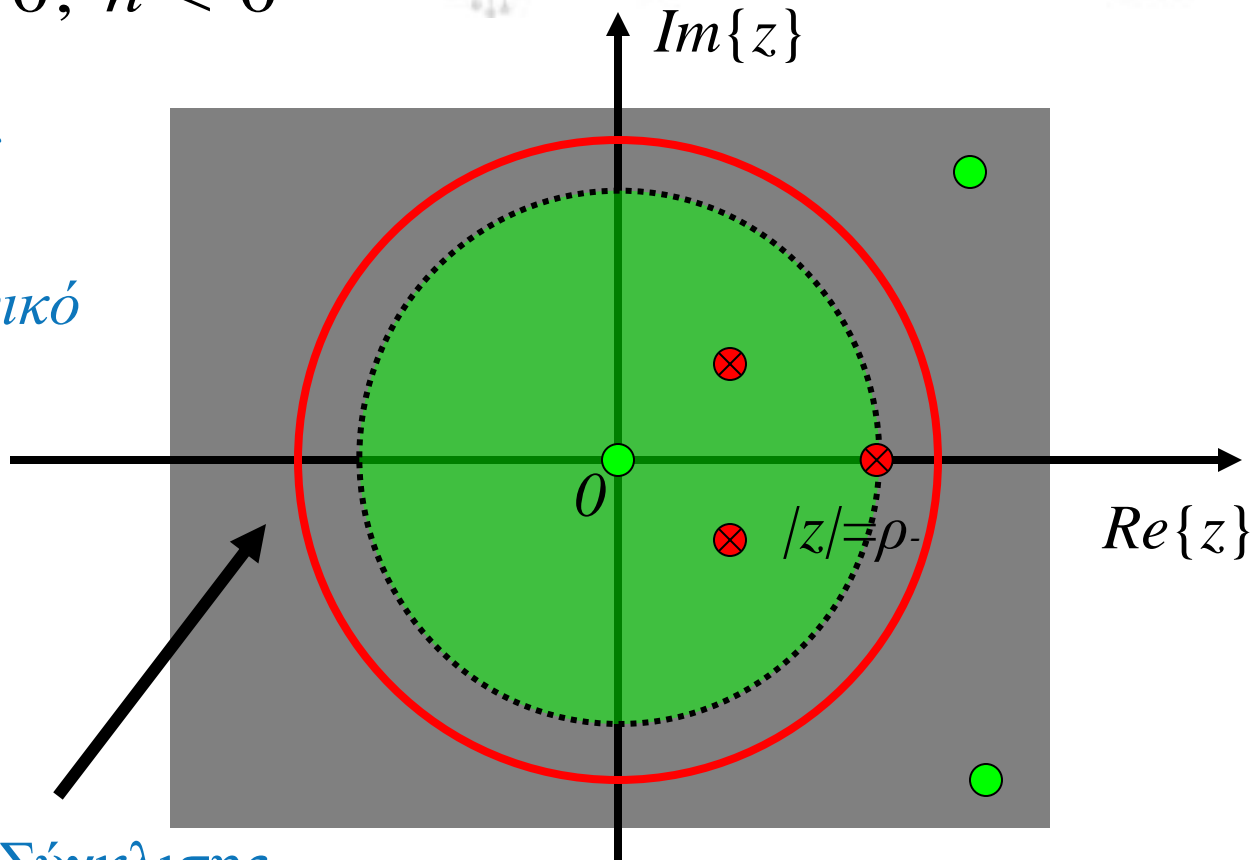
# Μετασχηματισμός - z

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού-z Αιτιατότητα & Ευστάθεια

$$x[n] = 0, n < 0$$

⊗ Πόλος

● Μηδενικό



Περιοχή Σύγκλισης

$$X(z) = Z\{x[n]\}$$

$$|z| > \rho$$

# Μετασχηματισμός - z

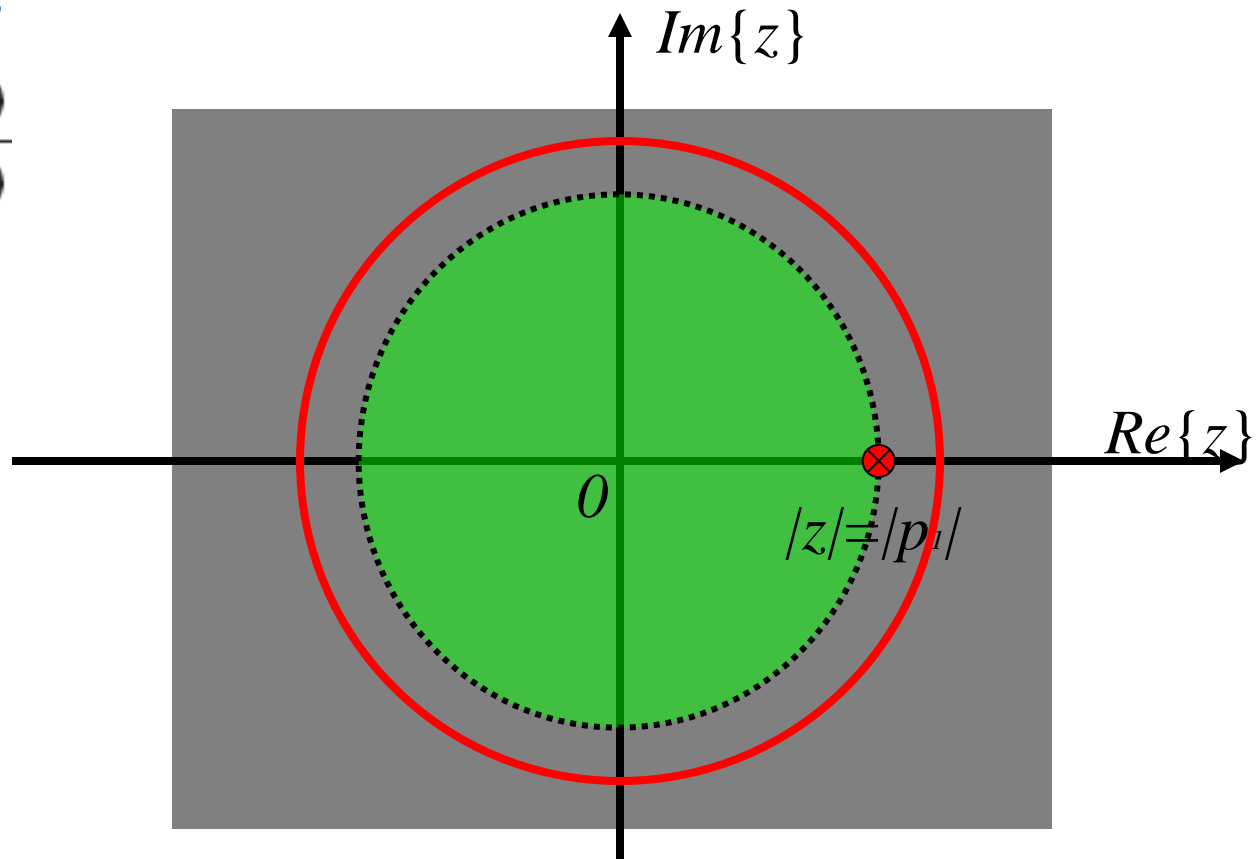
Μετασχηματισμός-z Αιτιατών & Ευσταθών Συστημάτων Πρώτης τάξης

Συνάρτηση Μεταφοράς

$$H(z) = G \frac{(z - z_1)}{(z - p_1)}$$

⊗ Πόλος

● Μηδενικό



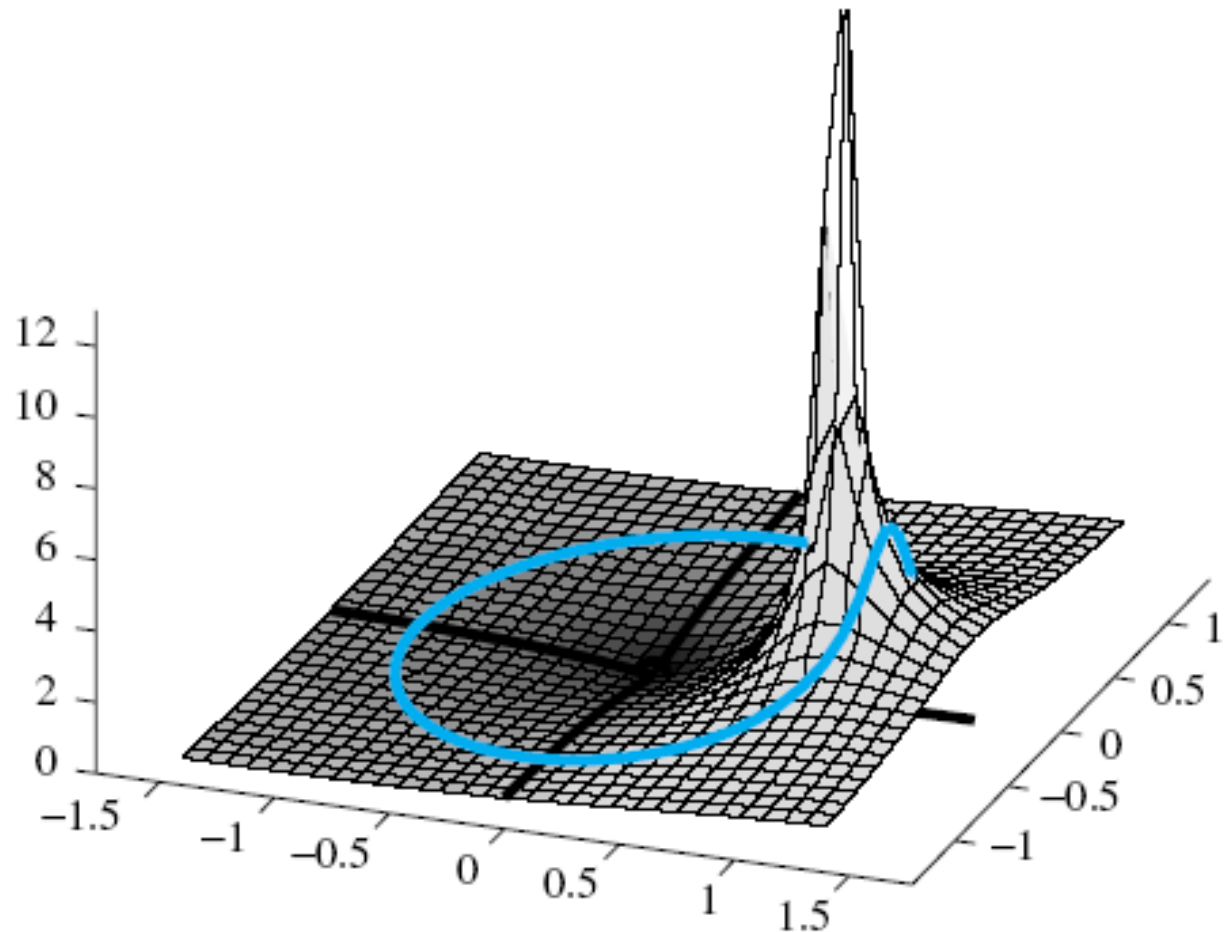
# Μετασχηματισμός - z

Μετασχηματισμός-z Αιτιατών & Ευσταθών Συστημάτων Πρώτης τάξης

Μέτρο Μετασχηματισμού-z & Απόκριση Συχνότητας

Παράδειγμα

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}}$$





# Μετασχηματισμός - z

Μετασχηματισμός-z Αιτιατών & Ευσταθών Συστημάτων Δεύτερης τάξης

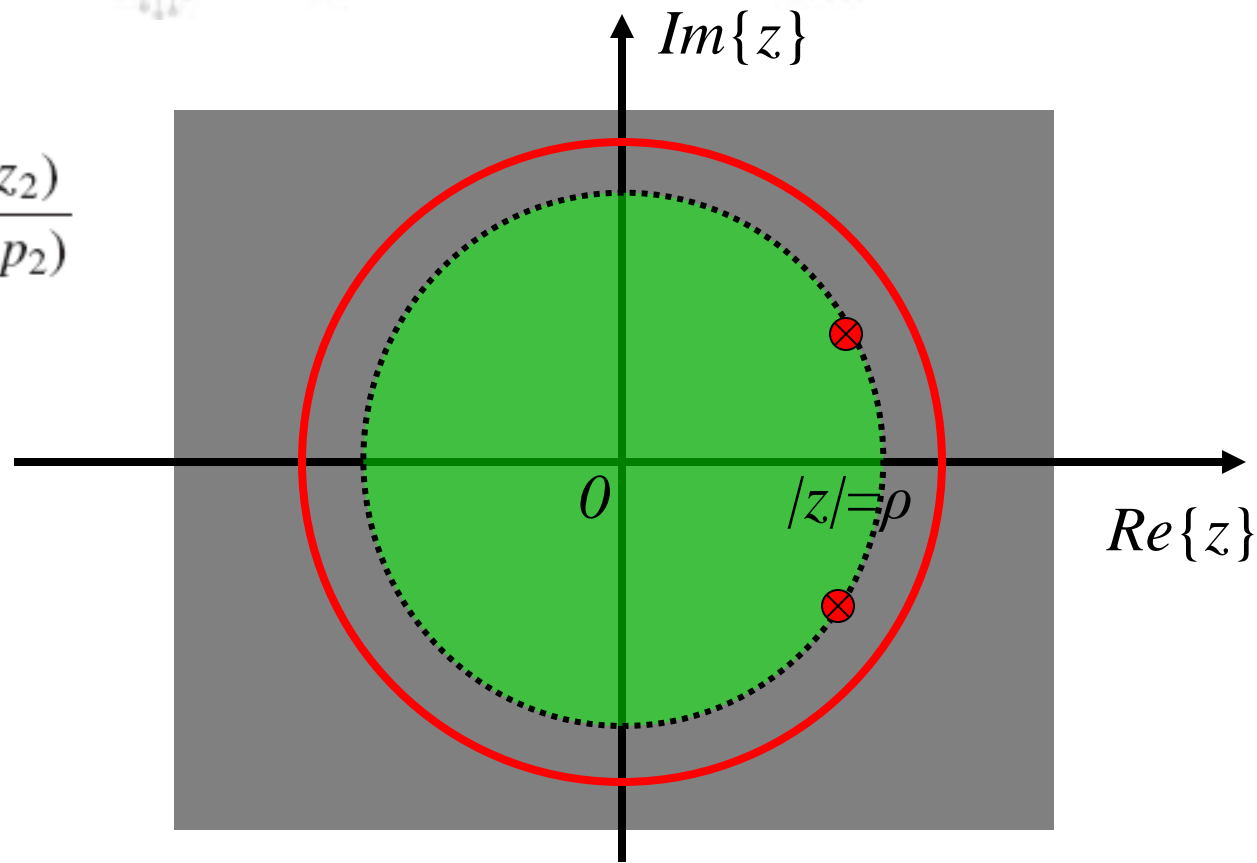
Συνάρτηση Μεταφοράς

$$H(z) = G \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

$$\rho = \max\{|p_1|, |p_2|\}$$

⊗ Πόλος

● Μηδενικό



# Μετασχηματισμός - z

*Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού-z Αιτιατότητα & Ευστάθεια*

Παράδειγμα 
$$H(z) = G \frac{(z-1)(z+1)}{(z - .85 e^{-j\frac{\pi}{2}})(z - .85 e^{j\frac{\pi}{2}})}$$

*Μέτρο Μετασχηματισμού-z & Απόκριση Συχνότητας*

