ΣΗΜΑΤΑ Ι

Κεφ. 1

Κεφ. 1

- **Τύπος Euler** $e^{jx} = \cos x + j\sin x$

  $e^{-jx} = \cos x - j\sin x$

- **Θεμελιώδης Συχνότητα** Αν κάποιο σήμα αποτελείται από σήματα συχνοτήτων $f_1, .., f_N$ τότε $f_0 = \text{ΜΚΔ}\{f_i\}$

- **Περιοδική Συνάρτηση**

Κατηγορίες Συστημάτων

Στατικό — Η $y(t)$ εξαρτάται μόνο από την $x(t)$ **(vs)** **Δυναμικό** — η έξοδος εξαρτάται από την είσοδο σε διάφορες χρονικές στιγμές

Αιτιατό — Η $y(t)$ εξαρτάται από την $x(t)$, $t \in [-\infty, t]$ **(vs)** **Μη Αιτιατό** — Η $y(t)$ εξαρτάται από $x(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$

Γραμμικότητα

$$F\{\alpha x_1(t) + b x_2(t)\} = \alpha F\{x_1(t)\} + b F\{x_2(t)\}$$

Χρ. Αμετάβλητο

Αν $y(t) = F\{x(t)\}$ τότε $F\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0)$, $\forall t_0 \in$

- **Kronecker Delta**

  Discrete: $\delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$, $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta[n-m]$

  Analog $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(t)dt = \phi(0)$, $x(t) = \int_{+\infty}^{-\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$

  ή $\delta(t) = 0$, $t \neq 0$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$

- **Κρουστική Απόκριση ΓΧΑΣ**

  Αν έχω σύστημα f, τότε η κρουστική απόκριση $h(t)$ δίνεται απο εφαρμογή της $\delta(t)$ ως είσοδο, δηλαδή $h(t) = f\{\delta(t)\}$

  Για τα ΓΧΑΣ, με κρ. αποκρ $h(t)$ ισχύει

  $$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- **Ιδιότητες Συνέλιξης σε ΓΧΑΣ**
  - $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
  - $[h_1(t) * h_2(t)] * h_3(t) = h_1(t) * [h_2(t) * h_3(t)]$
  - $[h_1(t) + h_2(t)] * x(t) = h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t)$
  - $h(t) * \delta(t) = h(t)$
  - $h_1^{(1)}(t) * x(t) = h_1(t) * x_1^{(1)}(t) = y^{(1)}(t)$

    ΓΕΝΙΚΑ $y^{(m+n)}(t) = x^{(m)}(t) * h^{(n)}(t)$
  - $\int_{-\infty}^{t} y(t)dt = y^{(-1)}(t) = x^{(-1)}(t) * h(t) = x(t) * h^{(-1)}(t)$

ΓΧΑΣ δεν επηρρεάζει την συχνότητα του σήματος εισόδου

$\sum_{i=1}^{N} x(t-t_i) = \sum_{i=1}^{N} x(t)\delta(t-t_i) = x(t)\sum_{i=1}^{N}\delta(t-t_i)$

- **Αιτιατότητα σε ΓΧΑΣ**

  πρέπει $h(t) = 0$, $t < 0$

- **Χώροι κ' Νόρμες**
  - $\|x\|_1 = \sum |x_i| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$ $\quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2} = \sqrt{\int |x(t)|^2 dt}$ $\quad \|x\|_\infty = \max\{x_i\} = \max\{x(t)\}$
  - ℓ_1 = χώρος με τα σήματα που η $\|\ \|_1$ τους υπάρχει $(< +\infty)$ δηλαδή απολύτως αθροίσιμα

    L_1 = αντίστοιχα, απολύτως ολοκληρώσιμα

    $\ell_\infty = L_\infty$ = ο χώρος φραγμένων σημάτων
  - **Ιδιότητες** a) Αν $x_1 \in \ell_1$, τότε $x_1 \in \ell_p$, $1 \le p \le +\infty$

    b) Αν $x_1 \in \ell_1$ και $x_2 \in \ell_p$, τότε $x_1 * x_2 \in \ell_p$

- **Γενικευμένες Συναρτήσεις** απείρως παραγωγίσιμη κ' $\phi(-\infty) = \phi(+\infty) = 0$

  Η τ είναι Γ.Σ. αν για $\phi(t)$ test function, $\tau(\phi(t)) = \langle\tau, \phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(t)\phi(t)dt < a$

- **Κατανομές**

  συνεχείς, γραμμικές Γ.Σ. Ισχύουν οι ιδιότητες:
  - $\tau_1 \equiv \tau_2 \Rightarrow \langle\tau_1, \phi\rangle = \langle\tau_2, \phi\rangle$
  - $\langle\tau\alpha, \phi\rangle = \langle\tau, \alpha\phi\rangle$
  - $\langle\tau(t-t_0), \phi\rangle = \langle\tau, \phi(t-t_0)\rangle$
  - $\langle\tau^{(1)}, \phi\rangle = -\langle\tau, \phi^{(1)}\rangle$
  - $\langle\tau(at), \phi\rangle = \frac{1}{|a|}\langle\tau, \phi(\frac{t}{a})\rangle$

- **Η $\delta(t)$ ως κατανομή** $\langle\delta, \phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0)$
  - $\langle\delta(t-t_0), \phi\rangle = \langle\delta, \phi(t-t_0)\rangle = \phi(t_0)$
  - $\langle\delta, \alpha\phi\rangle = \alpha(0)\phi(0)$
  - $\langle\delta^{(n)}, \phi\rangle = (-1)^n \phi^{(n)}(0)$
  - $\delta(t) = u^{(1)}(t)$ ασθενώς

- **Ασθενής Ισότητα** οι κατανομές f, g είναι ασθενώς ίσες αν $\langle f, \phi\rangle = \langle g, \phi\rangle$. Αυτό εφαρμόζεται στις δ, δηλ δ

$f^2 = f^{1}$

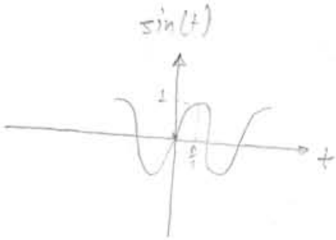
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

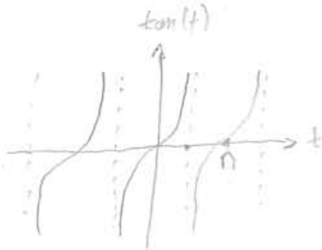
1.1 Εισαγωγικές Έννοιες

① **Περιοδικό Σήμα**: κάθε σήμα όπου $x(t) = x(t + k\underbrace{T}_{\text{βασική περίοδος}})$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

② **Ημιτονοειδές Σήμα**: $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$, $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$
ϕ η φάση
A το πλάτος

③ **Τριγωνομετρία**





	sin	cos	tan
Περιοδικότητα	$\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$	$\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$	$\tan(x+k\pi) = \tan(x)$
Συμμετρία	$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\tan(-t) = -\tan(t)$
Σημεία	$\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ $\sin(\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{3\pi}{2}) = 1$	$\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$ $\cos(0) = 1 \quad \cos(\pi) = -1$	$\tan(0) = \tan(\pi) = 0$ $\tan(\frac{\pi}{2}) = +\infty \quad \tan(\frac{3\pi}{2}) = -\infty$

Άλλες Σχέσεις
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(x) \pm \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \pm \sin(x)\sin(y)$

1.2 Μιγαδικοί Αριθμοί

① **Ορισμοί**: Έστω ο μιγαδικός $z = \alpha + bi$
Έχω: $Re\{z\} = \alpha \quad Im\{z\} = b$
$|z| = \sqrt{\alpha^2 + b^2} \quad \bar{z} = \alpha - bi$

② **Ιδιότητες**
$$Re\{z\} = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$
$$Im\{z\} = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

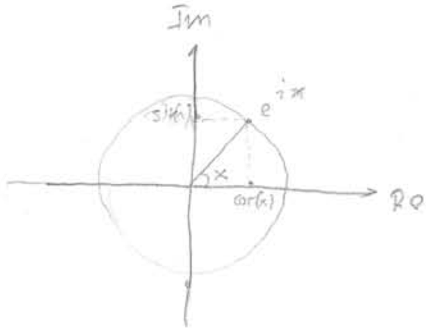
③ **Πολική Αναπαράσταση**: Μπορώ να γράψω
$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = \underbrace{|z|\cos(\theta)}_{Re\{z\}} + \underbrace{|z|\sin(\theta)}_{Im\{z\}} i$$

⊕ Ευκολότερος πολλαπλασιασμός, διαίρεση, exponentiation

Αν $z_i = r_i(\cos\phi_i + i\sin\phi_i)$ τότε

$$z_i z_j = r_i r_j(\cos(\phi_i + \phi_j) + i\sin(\phi_i + \phi_j))$$
$$z_i / z_j = r_i / r_j(\cos(\phi_i - \phi_j) + i\sin(\phi_i - \phi_j))$$
$$z_i^n = r_i^n(\cos(n\phi_i) + \sin(n\phi_i))$$

1.3 Μιγαδικά Σήματα



① Τύπος Euler Είναι $e^{ix} = \cos(x) + j\sin(x)$

Επίσης: · $Re\{e^{ix}\} = \cos(x)$ · $|e^{ix}| = 1$

· $Im\{e^{ix}\} = \sin(x)$

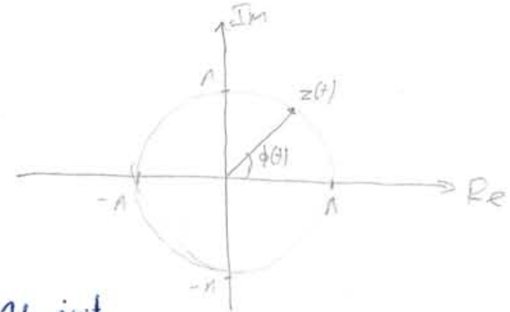
· $e^{-ix} = \cos(-x) + j\sin(-x) = \cos(x) - j\sin(x)$

· $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$ $\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$

② Μιγαδικό Εκθετικό Σήμα

Της μορφής $x(t) = A e^{j(\omega t + \phi)}$

$= \underbrace{A\cos(\omega t + \phi)}_{Re\{z\}} + j\underbrace{A\sin(\omega t + \phi)}_{Im\{z\}}$



Για το x(t) ισχύουν:

$|z(t)| = A$, $\phi(t) = \omega t + \phi$

Αν $\omega > 0$, τότε ↺ περιστροφή
$\omega < 0$, τότε ↻ περιστροφή

③ Φάσορες Γράφω $x(t) = Ae^{i(\omega t + \phi)} = \underbrace{Ae^{i\phi}}_{σταθ.} e^{i\omega t} = \underbrace{Y}_{φάσορας} e^{i\omega t}$

Η σταθερά Y (φάσορας/μιγαδικό πλάτος) αναπαριστά ένα σταθερό σημείο στο complex plane. Έτσι μπορώ εύκολα να προσθέσω σήματα ίδιας συχνότητας

④ Θεμελιώδης Συχνότητα

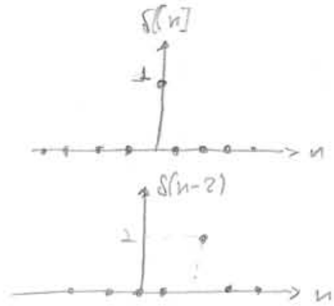
Έστω σήμα που συντίθεται από k ημιτονοειδή σήματα συχνοτήτων $f_1, f_2, \dots, f_k$

Τότε ονομάζω θεμελιώδη συχνότητα την $f_0 = ΜΚΔ\{f_i\}$

Αντίστοιχα ορίζω ως θεμελιώδη περίοδο την $T_0 = \frac{1}{f_0}$

! Για να είναι το άθροισμα περιοδικών συναρτήσεων περιοδική συνάρτηση πρέπει ο λόγος των 2 περιόδων να είναι λόγος ακεραίων → ρητός

1.4 Θεωρία Συστημάτων



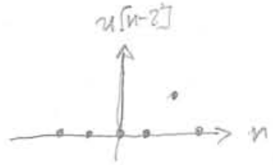
① Κρουστική Ακολουθία (Kronecker Delta)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

· Μπορώ τώρα να γράψω $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,\delta[n-m]$

② Βηματική Ακολουθία

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



· Μπορώ να χρησιμοποιήσω αυτήν την συνάρτηση ως "ψαλίδι". Για παράδειγμα αν έχω το διακριτό σήμα $x[n]$ και θέλω να κρατήσω το κομμάτι του από το $0,..,9$, δημιουργώ το σήμα $x[n]\left(u[n] - u[n-10]\right)$

③ Κατηγορίες Συστημάτων

Στατικό: η έξοδος $y(t)$ εξαρτάται μόνο από το $x(t)$ την ίδια χρονική στιγμή	**Δυναμικό**: η έξοδος $y(t)$ εξαρτάται από την είσοδο $x(t)$ σε διάφορες χρονικές στιγμές, ΕΧΕΙ ΜΝΗΜΗ
Αιτιατό: η έξοδος $y(t)$ εξαρτάται από χρονικές στιγμές της εισόδου $x(t)$ στο $(-\infty, t]$.	**Μη-Αιτιατό**: η έξοδος $y(t)$ εξαρτάται και από μελλοντικές στιγμές της εισόδου $x(t)$
Γραμμικό: για εισόδους $x_1(t)$, $x_2(t)$ ισχύει: $\forall a,b \; F\{a x_1(t) + b x_2(t)\} = aF\{x_1(t)\} + bF\{x_2(t)\}$ (αρχή της υπέρθεσης)	**Μη-Γραμμικό**: Αν δεν υπακούει στην αρχή της υπέρθεσης
Χρονικά Αμετάβλητο: χρονικές ολισθήσεις στην είσοδο μεταφράζονται σε χρονικές ολισθήσεις στην έξοδο: $y(t)=F\{x(t)\} \Rightarrow y(t-t_0) = F\{x(t-t_0)\}$, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$	**Χρ. Μεταβαλλόμενο**: χρονική ολίσθηση στην είσοδο μπορεί να οδηγήσει σε εντελώς διαφορετικές εξόδους

④ Κρουστική Απόκριση ΓΧΑΣ

Έστω ΓΧΑΣ S. Εφαρμόζω είσοδο $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\,\delta(n-m)$. Έχω:

$$y(n) = S\{x(n)\} = S\Big\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)\Big\} \underset{\text{γραμμικό}}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\, S\{\delta(n-m)\}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\, \underbrace{h(n,m)}_{\text{2-d ακολουθία}} \underset{\text{Χ.Α.}}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) h(n-m) = \underbrace{x(n) * h(n)}_{\text{ΣΥΝΕΛΙΞΗ}}$$

(5) Ιδιότητες Συνέλιξης σε ΓΧΑΣ

(α) Αντιμεταθετική $h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$

(β) Προσεταιριστική $[h_1(t) * h_2(t)] * h_3(t) = h_1(t) * [h_2(t) * h_3(t)]$

(c) Επιμεριστική $[h_1(t) + h_2(t)] * x(t) = h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t)$

(d) Ταυτοτική $h(t) * \delta(t) = h(t)$

(e) Διαφόριση $h^{(1)}(t) * x(t) = h(t) * x^{(1)}(t) = y^{(1)}(t)$

- Διαφόριση της εισόδου ή της κρουστικής απόκρισης διαφορίζει την έξοδο

Γενίκευση: $y^{(m+n)}(t) = x^{(m)}(t) * h^{(n)}(t)$

(f) Ολοκλήρωση $\int_{-\infty}^{t} y(t)\,d(t) = y^{(-1)}(t) = x(t) * h^{(-1)}(t) = x^{(-1)}(t) * h(t)$

- Ολοκλήρωση της εισόδου ή της κρουστικής απόκρισης ολοκληρώνει την έξοδο

(6) Κρουστική Απόκριση ΓΧΑΣ (p+2)

ΓΧΑ, άρα $y(t) = x(t) * h(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(t-m)$

Αφού το σύστημα είναι αιτιατό, πρέπει $y(t) = \sum_{m=-\infty}^{t} x(m)h(t-m)$

Άρα ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα ΓΧΑΣ αιτιατό, είναι η $h(t) = 0,\ \forall t < 0$

(7) Μιγαδικές Εκθετικές Ακολουθίες σε ΓΧΑ

Έχω ΓΧΑ, άρα $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)x(n-m)$. Έστω είσοδος $x(n) = e^{j\omega_0 n}$

Τότε έχω: $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)e^{j\omega_0(n-m)} = e^{j\omega_0 n}\underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)e^{-j\omega_0 m}}_{C\text{: μιγαδική σταθερά, DTFT}} = C\,x(n)$

μορφή ιδιοακολουθίας, $Ax = \lambda x$

Για την μιγαδική σταθερά έχω την μορφή $C = r \cdot e^{j\theta}$, όπου:

$$r = \left[\left(\sum_m h(m)\cos(m\omega_0)\right)^2 + \left(\sum_m h(m)\sin(m\omega_0)\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sum_m h(m)\cos(m\omega_0)}{\sum_m h(m)\sin(m\omega_0)}\right)$$

Άρα $y(n) = r e^{j(n\omega_0 + \theta)}$

↪ Αν βγάλει αρμονικές, δεν είναι ΓΧΑ

! Ένα ΓΧΑΣ επηρεάζει πλάτος κ' φάση, ΟΧΙ συχνότητα

⑧ Ευστάθεια Συστήματος → * Αν $x(t) \in \ell_\infty$ τότε αρκεί $h(t) \in \ell_1$ ώστε $y(t) \in \ell_\infty$

Ένα σύστημα είναι ΦΕΦΕ-ευσταθές αν για φραγμένη είσοδο έχω φραγμένη έξοδο.

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα ΓΧΑΣ ΦΕΦΕ-ευσταθές είναι:

$$\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < +\infty} \quad \left(\text{αντίστοιχα } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty\right)$$

$\hookrightarrow h(n) \in \ell_1$

1.5 Χώροι Σημάτων

① Εισαγωγή

Αν δούμε τα ~~σήματα~~ σήματα διακριτού χρόνου ως διανύσματα, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έννοιες γραμμικής άλγεβρας για την ανάλυση τους. Έτσι έχουμε:

- Μετρικός Χώρος (metric space) → ρόλος απόστασης σημείων

  Ορίζεται από ένα σύνολο M, και ένα μέτρο/συνάρτηση απόστασης (→ ποσότητα) $d : M \times M \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\forall x, y \in M$ να ισχύουν

  (a) $d(x) \geq 0$ (b) $d(x) = 0 \iff x = 0$ (c) $d(x,y) = d(y,x)$ (d) $d(cx) = |c|\, d(x)$ (e) $d(x+y) \leq d(x) + d(y)$

- Νόρμες (Norms)

  Νόρμα είναι μια συνάρτηση η οποία απεικονίζει κάθε διάνυσμα σε έναν διανυσματικό χώρο σε έναν θετικό αριθμό. Η νόρμα p αυτής ορίζεται ως:

  - p-norm $\quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$
  - 1-norm $\quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ Λέγεται και Manhattan Distance
  - 2-norm $\quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ Λέγεται και Euclidian Distance
  - ∞-norm $\quad \|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \{|x_i|\}$ το μέγιστο κατ' απόλυτη τιμή στοιχείο του διανύσματος

  Δύο χρήσιμες σχέσεις για πράξεις με νόρμες είναι οι εξής

  - Σχέση Holder $\quad \|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad , \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
  - Σχέση Minkowski $\quad \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

- Ακολουθίες Cauchy

  Μία ακολουθία $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots\} \in \mathbb{R}$ είναι ακολουθία Cauchy αν $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+$ τ.ω $\forall m, n > n_0$ ισχύει $|x_m - x_n| < \epsilon$

  Η ακολουθία $x_N(n) \to x(n)$ αν $\lim_{N \to \infty} \|x_N - x\|_p = 0$

- Πλήρης Μετρικός Χώρος

  Ένας μετρικός χώρος X ονομάζεται πλήρης, αν κάθε Cauchy ακολουθία σημείων του X έχει όριο (συγκλίνει) σε σημείο του X

② Χώροι

- Χώροι Εσωτερικού Γινομένου (inner product space)

πραγματικοί μιγαδικοί $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$

Είναι διανυσματικοί χώροι εφοδιασμένοι με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \rightarrow F$

Ικανούν τα εξής:

	στο $\mathbb{R}$	στο $\mathbb{C}$
	(a) $\langle x,x \rangle \geq 0$, $\forall x(n) \in \mathbb{R}$	(a) ομοίως , $\forall x(n) \in \mathbb{C}$
$\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	(b) $\langle x,x \rangle = 0$ ανν $x(n) = 0$	(b) ''
	(c) $\langle cx,y \rangle = c\langle x,y \rangle$, $\forall c \in \mathbb{R}$	(c) ''
$\langle f,g \rangle = \int f(t) g^{*}(t)\, dt$	(d) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$	(d) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle^{*}$
	(e) $\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$	(e) ομοίως

Από το εσωτερικό γινόμενο ορίζω:

$$\langle x,x \rangle = \sum_{n=1}^{N} x(n)\, x^{*}(n) = \sum |x(n)|^2 = \left(\|x\|_2\right)^2$$

$$\text{Άρα} \quad \left(\langle x,x \rangle\right)^{1/2} = \|x\|_2$$

! πρέπει το άθροισμα να μην απειρίζεται για να το χρησιμοποιήσουμε ως στάθμη
↳ $x \in \ell_2$

- Χώροι Banach

είναι ~~...~~ πλήρεις χώροι που έχουν κάποια στάθμη (metric)

- Χώροι Hilbert

είναι πλήρεις χώροι στους οποίους ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο, το οποίο είναι η στάθμη του χώρου.

- Χώροι Σειρών (Sequence Spaces)

Διανυσματικοί χώροι των οποίων στοιχεία είναι άπειρες σειρές πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών

③ ℓ^p - χώροι

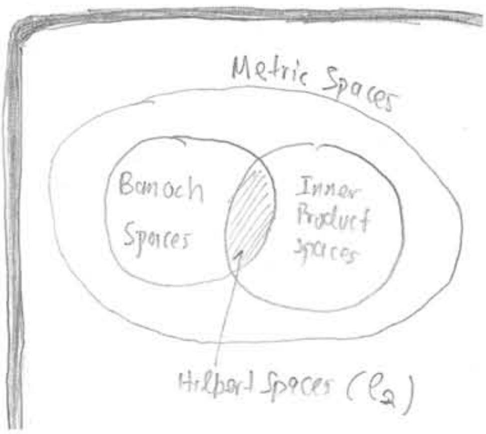
Από τον ορισμό της p-νόρμας, έχω $\ell_p = \{ x(n) : \|x\|_p < \infty \}$ για $1 \leq p \leq \infty$

Άρα για παράδειγμα

ℓ_1 : ο χώρος των σημάτων που συγκλίνουν απόλυτα (ως άθροισμα), αφού $\|x\|_1 = \sum_n |x(n)| < +\infty$

ℓ_2 : ο χώρος των τετραγωνικά αθροίσιμων σημάτων (square summable), ο οποίος όπως είδαμε πιο πάνω είναι Hilbert space

ℓ_∞ : ο χώρος των φραγμένων σημάτων, δηλαδή $\forall n$, $x(n) \leq M < +\infty$



④ $\mathcal{L}^p$ - χωροι

Οι χωροι ℓ^p αφορουν ακολουθίες, δηλαδή σήματα διακριτου χρονου. Για τα σήματα συνεχούς χρόνου ορίζουμε τα ακολουθα:

Για συνάρτηση $x(t)$, $\|x\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^p dt\right)^{1/p}$, $1 \le p \le \infty$

Για συναρτησεις f, g, $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g^*(t) dt$

Ετσι ορίζω $\mathcal{L}^p = \{ x(t) : \|x\|_p < \infty \}$

⑤ Εφαρμογες

- Αν $x(n) \in \ell_1$ τοτε $x(n) \in \ell_p$ για $1 \le p \le \infty$

Απ: $x(n) \in \ell_1$ αρα $\|x\|_1 = \sum_n |x(n)| < \infty$

Αρα $\|x\|_1 \le M$

Εχω $(\|x\|_p)^p = \sum_n |x(n)|^p = \sum_n |x(n)|^{p-1} |x(n)| \le M \sum |x(n)|^{p-1} = M(\|x\|_{p-1})$

Άρα $(\|x\|_2)^2 \le M \|x\|_1 \Rightarrow \|x\|_2 \le (M \|x\|_1)^{1/2} < \infty \Rightarrow x(n) \in \ell_2$

Αναδρομικά, $x(n) \in \ell_p$

- Αν $x_1(n) \in \ell_1$ και $x_2(n) \in \ell_p$ τοτε $x_1(n) * x_2(n) = y(n) \in \ell_p$

Απ: Είναι $y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) x_2(n-m)$

Εχω $|y(n)| \le \sum_m |x_1(m)| |x_2(n-m)| \overset{1/q + 1/p = 1}{=} \sum_m \underbrace{|x_1(m)|^{1/q}}_{y_1} \underbrace{|x_1(m)|^{1/p} |x_2(n-m)|}_{y_2}$ (1)

Απο την σχεση Holder έχω πως $\|y_1 y_2\|_1 \le \|y_1\|_p \|y_2\|_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Αρα (1) $\Rightarrow$ $|y(n)| \le \left(\sum_m |y_1(m)|^q\right)^{1/q} \cdot \left(\sum_m |y_2(m)|^p\right)^{1/p}$

$\Leftrightarrow |y(n)|^p \le \left(\sum_m |x_1(m)|\right)^{p/q} \left(\sum_m |x_1(m)| |x_2(n-m)|^p\right)$

$\Leftrightarrow \sum_n |y(n)|^p \le \left(\sum_m |x_1(m)|\right)^{p/q} \sum_n \left(\sum_m |x_1(m)| |x_2(n-m)|^p\right)$

$\Leftrightarrow (\|y\|_p)^p \le \sum |x_1(m)|^{\overset{1=1}{p/q+1}} \sum_n |x_2(n-m)|^p$

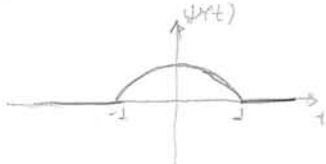
$\Leftrightarrow (\|y\|_p)^p \le (\|x_1\|_1)^p (\|x_2\|_p)^p \Leftrightarrow \|y\|_p \le \overset{<\infty}{\|x_1\|_1} \overset{<\infty}{\|x_2\|_p} < \infty$

1.6 Γενικευμένες Συναρτήσεις / Κατανομές

① Εισαγωγή

- **Δοκιμαστική Συνάρτηση (test function)**

Η κλάση των συναρτήσεων δοκιμών, $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ περιέχει συναρτήσεις $\phi(t)$, $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες πληρούν τις εξής ιδιότητες: (α) είναι απείρως παραγωγίσιμες (smooth), $\phi\in C^{\infty}$
(β) η ϕ έχει compact support, δηλ είναι μηδενική εκτός κάποιου διαστήματος



- **Γενικευμένη Συνάρτηση (generalized function)**

Έστω δοκιμαστική συνάρτηση $\phi(t)$.
Η $\tau(t)$ είναι μία γενικευμένη συνάρτηση αν $\tau(\phi)=\langle\tau,\phi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\tau(t)\phi(t)\,dt<\infty$

? ή $\tau(\phi(t))$

- **Κατανομές (Distributions)**

Έστω $\tau(t)$ γενικευμένη συνάρτηση. Τότε αν ισχύουν:

(α) τ συνεχής: Έστω συνάρτηση δοκιμών $\phi(t)$. Δημιουργώ την ακολουθία $\phi_k(t)=\phi(t-\frac{1}{k})-\phi(t)$. Ισχύει $\lim_{k\to\infty}\phi_k(t)=0$

Τότε η τ είναι συνεχής αν $\lim_{k\to\infty}\tau(\phi_k)=\lim_{k\to\infty}\langle\tau,\phi_k\rangle=0$

(β) τ γραμμική δηλαδή $\langle\tau,a_1\phi_1+a_2\phi_2\rangle=a_1\langle\tau,\phi_1\rangle+a_2\langle\tau,\phi_2\rangle$

τότε η τ είναι κατανομή

② Ιδιότητες Κατανομών

ασθενής ισοδυναμία, στην ορθ.

(α) Ισοδυναμία: Οι κατανομές τ_1,τ_2 λέγονται ισοδύναμες, αν $\forall\phi\in\mathcal{D}$ ισχύει $\langle\tau_1,\phi\rangle=\langle\tau_2,\phi\rangle$ και θα γράφουμε $\tau_1\equiv\tau_2$

(β) Ολίσθηση: Έστω κατανομή τ και test function ϕ.
Αν $\langle\tau,\phi\rangle=\tau(\phi(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}\tau(t)\phi(t)\,dt$

τότε αν $\tau_{t_0}=\tau(t-t_0)$, $\langle\tau_{t_0},\phi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\tau(t-t_0)\phi(t)\,dt$ ∈ D ως ολίσθηση test function

$$\overset{\hat{t}=t-t_0}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau(\hat{t})\phi(\hat{t}+t_0)\,d\hat{t}=\tau(\phi(t+t_0))$$

- Άρα ολίσθηση κατανομής $\Rightarrow$ ολίσθηση test function (γ) Αλλαγή κλίμακας

Όπως πριν, αν $<\tau,\phi> = \tau(\phi(t))$ τότε για $\hat{\tau}(t) = \tau(\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

έχω: $<\hat{\tau},\phi> = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(\alpha t)\phi(t)\,dt = \frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau(t)\phi(\frac{t}{\alpha})\,dt = \frac{1}{|\alpha|}\tau(\phi(\frac{t}{\alpha}))$

◦ Άρα κλιμάκωση κατανομής ⟹ κλιμάκωση test function

(δ) Πολλαπλασιασμός Αν τ κατανομή, $\phi \in D$ και α μία συνάρτηση, τότε:

$$<\tau\alpha,\phi> = \int_{-\infty}^{+\infty}\tau(t)\alpha(t)\phi(t)\,dt = <\tau, \alpha\phi>$$

◦ Άρα πολ/μος κατανομής ⟹ πολ/μος test function

(ε) Παραγώγιση

Έχω $<\tau^{(1)},\phi> = \int_{-\infty}^{+\infty}\tau^{(1)}(t)\phi(t)\,dt = \underbrace{\tau(t)\phi(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{+\infty}\tau(t)\phi^{(1)}(t)\,dt = -<\tau,\phi^{(1)}>$

υποσυνεχόμενο της $\phi \in D$, $\phi(t)=0$, $\forall t > |t_0|$

Γενικεύοντας: $<\tau^{(n)},\phi> = (-1)^n <\tau,\phi^{(n)}>$

υπάρχει αφού $\phi \in C^{\infty}$

◦ Παράγωγος κατανομής είναι νέα κατανομή

(ζ) Συνέλιξη

Έστω τ_1, τ_2 κατανομές και $\phi \in D$. Έχω:

$$<\tau_1 * \tau_2, \phi> = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\tau_1(\hat{t})\tau_2(\hat{t}-t)\,d\hat{t}\right]\phi(t)\,dt$$

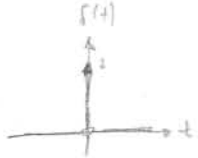
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\tau_1(\hat{t})\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\tau_2(\hat{t}-t)\phi(t)\,d(t)\right]d\hat{t} = <\tau_1, <\tau_2,\hat{\phi}>>$$

διαθέσιμη από $\hat{\phi}$

◦ Συνέλιξη κατανομών είναι κατανομή

③ Dirac Distributions

- ~~Συνάρτηση~~ Κατανομή δ(t)



έχει την εξής βασική ιδιότητα: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\phi(t)\,dt = \phi(0)$

Ως κατανομή, η δ(t) έχει ιδιότητες που είδαμε πριν:

(α) ολίσθηση $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,\phi(t)\,dt = \phi(t_0)$

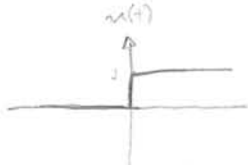
(b) πολ/σμός $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\underbrace{\alpha(t)\phi(t)}_{y(t)\in D}\,dt = \alpha(0)\,\phi(0)$

(c) παράγωγος $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t)\,\phi(t)\,dt = (-1)^n\,\phi^{(n)}(0)$

(d) $\delta(t) = \delta(-t)$, δηλαδή είναι άρτια

- Συνάρτηση u(t)

Μπορώ να την ορίσω ως $u(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$



- Σχέση δ(t) και u(t)

Μπορώ να γράψω $\boxed{\delta(t) = u^{(1)}(t)}$, ασθενώς

Απ: $\int_{-\infty}^{+\infty} u^{(1)}(t)\,\phi(t)\,dt = u(t)\,\phi(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,\phi^{(1)}(t)\,dt$

$= -\int_{0}^{+\infty} \phi^{(1)}(t) = -[\phi(t)]_0^{+\infty}$

$= -\phi(\infty) + \phi(0) = \phi(0)$

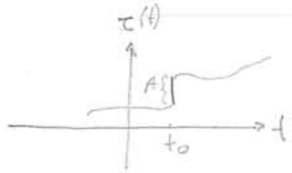
$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\phi(t)\,dt$

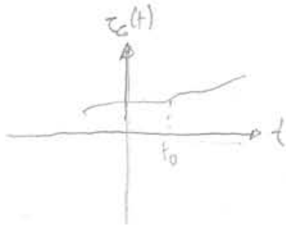
Άρα ισχύει $\int_{-\infty}^{+\infty} u^{(1)}(t)\,\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\phi(t)\,dt$

Από αυτό επάγεται η ασθενής ~~σχέση~~ ισότητα $u^{(1)}(t) = \delta(t)$

○ Εφαρμογή: Σημεία Ασυνέχειας

Έστω η συνάρτηση τ, η οποία έχει ένα σημείο ασυνέχειας στο $t = t_0$
↳ πεπερασμένο





Τότε με την βοήθεια της $u(t)$ μπορώ να γράψω την $\tau(t) = \underbrace{\tau_c(t)}_{\text{συνεχής}} + A u(t)$

Άρα τώρα μπορώ να υπολογίσω την

$$\tau^{(1)}(t) = \tau_c^{(1)}(t) + A u^{(1)}(t) = \tau_c^{(1)}(t) + A\delta(t)$$

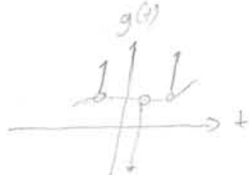
4 Ασθενής Ισότητα Κατανομών

Θα λέμε πως οι κατανομές f, g είναι ασθενώς ίσες, αν $\forall \phi \in D$ ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\phi(t)\,dt$$

○ Δύο συναρτήσεις που διαφέρουν σε ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων, στα οποία η διαφορά τους είναι πεπερασμένη, είναι ασθενώς ίσες.

π.χ



Κεφ. 2

- **Fourier** $F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$

  $F^{-1}\{X(j\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

- **Σύγκλιση** Πρέπει $x(t) \in L_1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt < \infty$

  Ικανή, όχι αναγκαία

- **Ιδιότητες**
  - → Γραμμ.: $\alpha x_1(t)+bx_2(t) \xleftrightarrow{F} \alpha X_1(j\omega)+bX_2(j\omega)$
  - → Time Shift: $x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
  - → Phase Shift: $e^{j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega-\omega_0)$
  - → cos: $\cos(\omega_0 t)x(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)\right]$
  - → Χρ. κλιμακ.: $x(\alpha t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|\alpha|}X(\omega/\alpha)$
  - → Συχν. κλιμ.: $\frac{1}{|\alpha|}x(t/\alpha) \xleftrightarrow{F} X(\alpha\omega)$
  - → Duality: $X(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(\omega)$
  - → Παράγωγος: $x^{(n)}(t) \xleftrightarrow{F} (j\omega)^n X(\omega)$

    $(-jt)^n x(t) \xleftrightarrow{F} X^{(n)}(\omega)$
  - → Συνέλιξη: $x(t)*h(t) \longleftrightarrow X(\omega)H(\omega)$

    $x(t)h(t) \longrightarrow \frac{1}{2\pi}X(\omega)*H(\omega)$

- **Χρήσιμα Ζεύγη**

  $\delta(t) \longleftrightarrow 1$

  $1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

  $u(t) \longleftrightarrow 1/j\omega + \pi\delta(\omega)$

  $\delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}$

  $e^{-\alpha t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega+\alpha}$ } Super Σος

  $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t) \longleftrightarrow \left(\frac{1}{j\omega+\alpha}\right)^n$

  $\delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}$

  $\begin{cases} 1, & |t|<T/2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \longleftrightarrow T\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}$

  $\frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t} \longrightarrow \begin{cases} 1, & |\omega|<\omega_0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

- **Parseval** $\langle x_1,x_2\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle X_1,X_2\rangle$

  $\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$

  $x_1=x_2 \Rightarrow (\|x_1\|_2)^2 = \frac{1}{2\pi}(\|X_1\|_2)^2$

  !!! Χρησιμοποιείται για εύρεση FT π.χ. sos

  $= \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt$ και εκφράζει τη συνολική ενέργεια του σήματος

  η $|X(\omega)|^2$ εκφράζει κατανομή ενέργειας/μονάδα συχνότητας

Για περιοδικές
Μέση ενέργεια ανά μονάδα χρόνου

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2$$

- **Σειρές Fourier**

  Αν $x(t)$ περιοδική στο $[t_0, t_0+T]$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ τότε

  Τρ. ΣF $x(t) \sim \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t)$

  όπου $\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)dt$

  $\alpha_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\cos(n\omega_0 t)dt$

  $b_n = \frac{2}{T}$ ---- $\sin(n\omega_0 t)dt$

  Εκθετική ΣF $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{-jn\omega_0 t}$

  όπου $c_n = \int_{t_0}^{t_0+T}x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$

  Σχέσεις ΣF
  $\alpha_0 = c_0$
  $\alpha_n = c_n + c_{-n}$
  $b_n = j(c_n - c_{-n})$
  $c_n = \frac{1}{2}(\alpha_n - jb_n)$

  ΣF & Συμμετρία: Αν $x(t)$ άρτια, $b_n = 0$, $c_n = c_{-n}$

  Αν $x(t)$ περιττή, $\alpha_n = \alpha_0 = 0$, $c_n = -c_{-n}$

  ΣF παραγώγου $c_n^{(1)} = jn\omega_0 c_n$

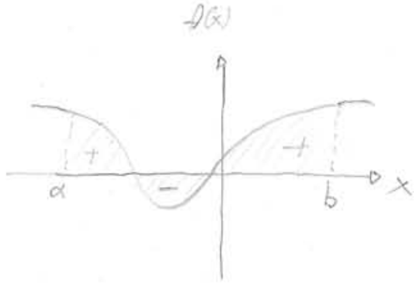
  $c_n^{(m)} = (jn\omega_0)^n c_n$

! $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\omega t)}{\omega}d\omega = \operatorname{sgn}(t)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ②

2.1 Εισαγωγικές Έννοιες

① Ολοκληρώματα



- **Ορισμός** Δοθείσας συνάρτησης f πραγματικής μεταβλητής x και διαστήματος $[\alpha, b]$ της ευθείας των πραγματικών, ορίζω ως ολοκλήρωμα $\int_\alpha^b f(x)$ το σκιαγραφημένο εμβαδόν

- **Ιδιότητες**
  - α) Βασικό Θεώρημα $\int_\alpha^b f(x) = F\Big|_\alpha^b = F(b) - F(\alpha)$
  - b) Γραμμικότητα $\int_\alpha^b \alpha x_1(t) + b\, x_2(t) dt = \alpha \int_\alpha^b x_1(t) dt + b \int_\alpha^b x_2(t) dt$
  - c) Αναστροφή Όρων $\int_\alpha^b f(x) dx = -\int_b^\alpha f(x) dx$
  - d) Κατά Παράγοντες $\int_\alpha^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x)\Big|_\alpha^b - \int_\alpha^b f'(x) g(x) dx$
  - e) Παραγώγιση Αθροίσματος $\big(f(x) g(x)\big)' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$

② Παράγωγος

- **Ορισμός**

  Συνεχής $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

  Διακριτός $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$

- **Ιδιότητες**
  - α) Για $f(x) = c$, $f'(x) = 0$
  - β) Linear $(\alpha F + b G)' = \alpha F' + b G'$ α, b scalars $\in \mathbb{R}$, F, G functions
  - c) Product $(FG)' = F'G + FG'$
  - d) Κλάσμα $(f/g)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
  - e) Chain $\big(h(g(x))\big)' = h'(g(x))\, g'(x)$

- **Χρήσιμες Παράγωγοι**

$$(x^r)' = r x^{r-1}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$\alpha^x = \ln(\alpha)\, \alpha^x$$
$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$
$$(\log_\alpha x)' = \frac{1}{x \ln(\alpha)}$$

2.2 Μετασχηματισμός Fourier

° Μετασχηματισμός $\mathcal{F}$ $\quad \mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$

Για να ορίζεται, πρέπει $\begin{cases} x(t) \text{ συνεχής, ή ε ασυνεχείς} \\ x(t) \text{ φραγμένης κύμανσης,} \\ x(t) \in \mathcal{L}_1, \text{ δηλαδή } \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty \end{cases}$ ικανές, όχι απαραίτητες

° Ιδιότητες

α) Γραμμικότητα $\quad \alpha x_1(t) + b x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X_1(j\Omega) + b X_2(j\Omega)$

β) Χρ. Ολίσθηση $\quad x(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\Omega t_0} X(j\Omega)$

c) Συχν. Ολίσθηση $\quad e^{j\Omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega - \Omega_0)$

d) $\cdot \cos x$ $\quad \cos(\Omega_0 t)\, x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\left[X(\Omega - \Omega_0) + X(\Omega + \Omega_0) \right]$

e) Χρ. Κλιμάκωση $\quad x(\alpha t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|\alpha|} X\left(j\frac{\Omega}{\alpha}\right)$

f) Συχν. Κλιμάκωση $\quad \frac{1}{|\alpha|} x(t/\alpha) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\alpha\Omega)$

g) Δυικότητα $\quad X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\, x(-\Omega)$

h) Παραγώγιση $\quad \frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j\Omega)^n X(j\Omega)$

$\quad (-jt)^n x(t) \longleftrightarrow \frac{d^n X(\Omega)}{d\Omega^n}$

i) Συνέλιξη $\quad x(t) * h(t) \longleftrightarrow X(j\Omega) H(j\Omega)$

$\quad x(t)\, h(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(j\Omega) * H(j\Omega)$

° Μετασχηματισμός $\mathcal{F}^{-1}$ $\quad \mathcal{F}^{-1}\{X(j\Omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$

° Misc Ιδιότητες

→ Για $|\Omega| \to \infty$, $\quad |X(j\Omega)| \to 0$

→ Αν $x(t) \in \mathcal{L}_1$ τότε $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\Omega) \in \mathcal{L}_\infty$

Απ: $|X(j\Omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, |e^{-j\Omega t}|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty$,

αφού $x(t) \in \mathcal{L}_1$

2.3 Απλές εφαρμογές

① Υπολογισμός Ροπών

Απο την ιδιοτητα h) έχω: $(-jt)^n x(t) \rightarrow X^{(n)}(\omega) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t^n x(t) e^{-j\omega t} dt = (-j)^{-n} X^{(n)}(\omega)$

$$\overset{\omega=0}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n x(t)\, dt = (-j)^{-n} X^{(n)}(\omega) \Big|_{\omega=0}$$

Ξέρω όμως πως οι ροπές ορίζονται ως $m_n = E[x^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx$

Άρα αυτή η ιδιότητα βοηθάει τον ευκολο υπολογισμο ροπων μέσω Fourier

② ΓΧΑΣ, Διαφορικές κ' ΜF

Κάθε ΓΧΑΣ εκφράζεται με διαφορικές της μορφής:

$$\alpha_0 y(t) + \alpha_1 y^{(1)}(t) + \dots + \alpha_N y^{(N)}(t) = b_0 x(t) + b_1 x^{(1)}(t) + \dots + b_M x^{(M)}(t)$$

Παιρνοντας Fourier και στα δύο μέλη έχω:

$$\alpha_0 Y(\omega) + \alpha_1 j\omega Y(\omega) + \dots + \alpha_N (j\omega)^N Y(\omega) = b_0 X(\omega) + b_1 j\omega X(\omega) + \dots + b_M (j\omega)^M X(\omega)$$

$$\Leftrightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{i=0}^{N} \alpha_i (j\omega)^i}$$

Άρα τώρα μπορώ να βρω $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$
και να γράψω την λυση της διαφορικής ως $y(t) = h(t) * x(t)$

Στην χρήση ΜF για επίλυση Δ.Ε. υπονοούμε πως το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία την χρονική στιγμή $t = -\infty$, και έτσι έχουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες. Αν ήθελα να έχω αρχικές συνθήκες θα κατέφευγα σε τους μετασχηματισμούς Laplace και Z αντίστοιχα.

2.4 Υπολογισμός μετασχηματισμών Fourier

① Ισομετρία χώρων Χρόνου και Συχνοτήτων / Θεώρημα Parseval

Για $x_1, x_2 \in L_1$ ή $L_2 \cap L_1$ ή L_2 ισχύει πάντα πως:

$$\mathcal{F}\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}\left[X_1(j\Omega) * X_2(j\Omega)\right]$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(t)e^{-j\Omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(j\theta)\,X_2(j(\Omega-\theta))\,d\theta$$

$$\overset{\Omega=0}{\Longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\,x_2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(j\theta)X_2(-j\theta)d\theta$$

$$\overset{\theta\to\Omega}{\Longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(j\Omega)X_2(-j\Omega)d\Omega$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2^*(t) = \frac{1}{2\pi}\int X_1(j\Omega)X_2^*(j\Omega)d\Omega \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \langle x_1, x_2\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle X_1, X_2\rangle \quad (2) \quad \xrightarrow{x_1=x_2} \quad \left(\|x_1\|_2\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\left(\|X_1\|_2\right)^2 \quad (3)$$

Οι 3 αυτές σχέσεις είναι το γενικευμένο θεώρημα Parseval, το οποίο αποδεικνύει πως οι χώροι του χρόνου και της συχνότητας είναι ισομετρικοί.

② Μετασχηματισμοί Fourier

- $x(t) = 1$ Από το θεώρημα του Parseval έχω $\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2^*(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(j\Omega)X_2^*(j\Omega)d\Omega$

Βάζοντας στην παραπάνω σχέση όπου $x_2(t) = 1$, έχω προφανώς $x_2^*(t) = 1$ και προκύπτει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(j\Omega)X_2^*(j\Omega)d\Omega \Leftrightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\,e^{-j0t}dt}_{\mathcal{F}\{x_1(t)\}|_{\Omega=0}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(j\Omega)X_2^*(j\Omega)d\Omega$$

$$\Leftrightarrow X_1(j0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(j\Omega)X_2^*(j\Omega)d\Omega$$

Άρα πρέπει $X_2^*(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega)$

Αφού όμως $X_2^*(j\Omega) \in \mathbb{R}$ τότε $X_2(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega)$. Άρα $1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$

- $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$ Παιρνω πάλι την σχεση του Parseval και θετω $x_2(t) = e^{j\Omega_0 t}$. Ετσι εχω:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\, \overbrace{e^{-j\Omega_0 t}}^{(e^{j\Omega_0 t})^* = e^{-j\Omega_0 t}}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int X_1(j\Omega) X_2^*(j\Omega)\, d\Omega \iff X_1(j\Omega)\Big|_{\Omega=+\Omega_0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(j\Omega) X_2^*(j\Omega)\, d\Omega$$

$$\iff X_2^*(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) = X_2(j\Omega)$$

- $x(t) = \text{sign}(t)$

Αρχικά, ξέρω πως ισχυει η ασθενής ισοτητα κατανομων $\text{sign}^{(1)}(t) = 2\delta(t)$

Αρα $\mathcal{F}\{x_2^{(1)}(t)\} = 2\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 2$ (1)

Επισης ξερω πως $\mathcal{F}\{x_2^{(1)}(t)\} = j\Omega X_2(j\Omega)$ (2)

$(1),(2) \Rightarrow 2 = j\Omega X_2(j\Omega) \iff X_2(j\Omega) = \frac{2}{j\Omega}$

Ομως αφου ειπαμε πως ισχυει ασθενής ισότητα μεταξύ των κατανομών, η σχεση στην οποία τελικά καταλήγουμε είναι $X_2(j\Omega) = \frac{2}{j\Omega} + A\delta(\Omega)$

Αρα τωρα πρεπει να προσδιορίσω το A.

Εχω $\mathcal{F}\{\text{sign}(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sign}(t)\, e^{-j\Omega t} dt \overset{\text{euler}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sign}(t)\cos(\Omega t)\, dt + j\int \text{sign}(t)\sin(\Omega t)\, dt$

Ομως η $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sign}(t)\cdot\cos(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{άρτια}\cdot\text{περιττή} = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{περιττή} = 0$

Αρα αυτο προκύπτει πως $\text{Re}\{\mathcal{F}\{\text{sign}(t)\}\} = 0$

$$\iff \text{Re}\left\{\frac{2}{j\Omega} + A\delta(\Omega)\right\} = 0$$

$$\iff A = 0$$

- $x(t) = u(t)$

Γραφω $u(t) = \frac{1}{2}\text{sign}(t) + \frac{1}{2}$ και αρα $\mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$

! Αν χρησιμοποιουσαμε τον προηγουμενο τροπο θα ειχαμε

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{F}\{u^{(1)}(t)\} = j\Omega\,\mathcal{F}\{u(t)\} \\ &u^{(1)}(t) = \delta(t) \to \mathcal{F}\{u^{(1)}(t)\} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j\Omega} + A\delta(\Omega)$$

Εδω ομως ο υπολογισμος του A είναι δύσκολος

2.5 Σειρές Fourier

① Ορθοκανονικές Συναρτήσεις Βάσης

Έστω διάστημα $[t_0, t_0+T]$ και σύνολο συναρτήσεων $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots$

Οι $\{\phi_i(t)\}$ είναι ορθοκανονικές αν είναι τμηματικά συνεχείς στο $[t_0, t_0+T]$ και ισχύει:
$$\int_{t_0}^{t_0+T} \phi_i(t)\, \phi_j^*(t)\, dt = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

- Οι $\phi_n = e^{jn\Omega_0 t}$, $n\in(-\infty,+\infty)$ είναι ορθοκανονικές στο $[t_0, t_0+T]$ $\quad \frac{1}{T}$

είναι ορθογώνιες, αλλά θα μπορούσαμε να πάρουμε τις $\frac{1}{\sqrt{T}} e^{jn\Omega_0 t}$ που είναι ορθοκανονικές

Απ: Έστω $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} e^{jn\Omega_0 t} e^{-jm\Omega_0 t} \left(= \langle \phi_n, \phi_m \rangle\right) = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(n-m)\Omega_0 t} dt = \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} 1\, dt = T \\ \displaystyle\frac{1}{j(n-m)\Omega_0} e^{j(n-m)\Omega_0 t}\Big|_{-T/2}^{T/2} = 0 \end{cases}$

- Οι $\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(n\Omega_0 t), \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(n\Omega_0 t)$, $n\in(-\infty,+\infty)$ είναι ορθοκανονικές στο $[t_0, t_0+T]$

② Τριγωνομετρική κ Εκθετική Σειρά Fourier

Έστω $x(t)$ μια συνάρτηση στο $[t_0, t_0+T]$. Τότε μπορώ να γράψω:

- Εκθετική Σ.F $\quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t}$, όπου $c_n = \frac{1}{T}\langle x, \phi_n\rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt$

- Τριγωνομετρική Σ.F $\quad x(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\alpha_n \cos(n\Omega_0 t) + b_n \sin(n\Omega_0 t)\right)$,

  όπου $\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,dt \quad \alpha_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cos(n\Omega_0 t)\,dt$, $\quad b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\sin(n\Omega_0 t)\,dt$

③ Σειρές Fourier για Περιοδικές Συναρτήσεις

Εδώ, λόγω της περιοδικότητας της $x(t)$ και των αντίστοιχων ϕ_n (τριγωνομετρικών ή εκθετικών) η ΣF ισχύει στην $x(t)$ όχι μόνο σε διάστημα μίας περιόδου $[t_0, t_0+T]$ αλλά σε όλο το $(-\infty, +\infty)$

! Στην γενική περίπτωση, δεν υπάρχει ο Fourier περιοδικής, αλλά η ΣF υπάρχει.

④ Σειρές Fourier και ~~Συμμετρία~~

Αν η $x(t)$ είναι άρτια, τότε $b_n = 0$ και $c_n = c_{-n}$

Αν η $x(t)$ είναι περιττή, τότε $\alpha_0 = \alpha_n = 0$ και $c_n = -c_{-n}$

⑤ Σειρά Fourier Παραγώγου Συνάρτησης

Αν $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t}$ τότε $\xrightarrow{0'} x^{(1)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, jn\Omega_0\, e^{jn\Omega_0 t}$, άρα $c_n^{(1)} = jn\Omega_0\, c_n$

και $x^{(n)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (jn\Omega_0)^n e^{jn\Omega_0 t}$, άρα $c_n^{(n)} = (jn\Omega_0)^n c_n$

Κεφ. 3

"Yo' mama is so fat, her Laplace Transform diverges"

○ **Ορισμός**

$$\mathcal{L}_\alpha\{x(t)\} = \int_\alpha^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt \quad , s=\sigma+j\Omega$$

$\sigma=0$, $\mathcal{L}\{x(t)\}=\mathcal{F}\{x(t)\}$

○ **Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί**

$x(t)$	$\xleftrightarrow{L}$ $X(s)$	RoC
$\delta(t)$	1	$>-\infty$
$u(t)$	$1/s$	>0
$\delta^{(n)}(t)$	s^n	$>-\infty$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$>-\alpha$
$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$<-\alpha$
$\cos(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\Omega_0^2}$	>0
$\sin(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}$	>0
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	>0
$e^{-\alpha t}t^n u(t)$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$>-\alpha$

○ **Ιδιότητες**

1) Γραμ.

6) * $x_1(t)*x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s)X_2(s)$

$x_2(t)x_1(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{2\pi j}X_1(t)*X_2(t)$

2) Time Shift $x(t-t_0)u(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0}X(s)$

για $t_0>0$, $Re\{s\}>$ οπισπρω

3) Phase Shift $x(t)e^{-s_0t} \xleftrightarrow{L} X(s-s_0)$

4) Κλιμάκωση $x(bt) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{b}X(s/b)$

5) Παράγωγος $(-t)^n x(t) \xleftrightarrow{L} X^{(n)}(s)$

$x^{(1)}(t) \xrightarrow{L_\infty} sX(s)$

$x^{(1)}(t) \xrightarrow{L_{0^\pm}} sX(s)-x(0^\pm)$

$x^{(n)}(t) \xrightarrow{L_{0^\pm}} s^nX(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}x^{(k-1)}(0^\pm)$

○ **Θ. Αρχικής κ Τελικής Τιμής**

Απόδειξη από το $sX(s)-x(0)=\int_0^{+\infty}x^{(1)}(t)e^{-st}dt$ παίρνοντας όρια:

$$\lim_{s\to+\infty} sX(s) = x(0^+)$$

$$\lim_{s\to+\infty} s^2X(s)-sx(0^-)=x'(0^+)$$

$$\lim_{s\to0} sX(s) = x(\infty)$$

○ **Ημιπεριοδικές Συναρτήσεις**

Αν $x(t)$ αιτιατή, "μονόπλευρα περιοδική" $x(t)=\begin{cases}x(t+T), & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

άρα αν $x_0(t)=\begin{cases}x(t), & 0\leq t\leq T\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$ τότε $x(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}x_0(t-kT)$

Τότε $X(s)=X_0(s)\left(\frac{1}{1-e^{-sT}}\right)$

○ **Transfer Function και BIBO-stability**

Αν $\mathcal{L}\{h(t)\}=H(s)$

τότε Sys ευσταθές → $h(t)\in L_1$ → υπάρχει $\mathcal{F}\{h(t)\}$

Η περιοχή σύγκλισης της $\mathcal{L}\{h(t)\}$ πρέπει να περιέχει τον άξονα Im

Άρα αν sys αιτιατό → όλοι οι πόλοι πρέπει να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος

○ **Transfer Function**

Για κάθε ΓΧΑΣ, $H(s)=\frac{B_M(s)}{A_N(s)}$

• Αν $M\geq N$ τότε $H(s)=\sum_{m=0}^{k}x_n s^n + \frac{B_{M'}(s)}{A_N(s)}$, έτσι ώστε $M'<N$

Όμως $\delta^{(n)}(t) \xleftrightarrow{L} s^n$ άρα η $h(t)$ περιέχει κρουστικές συναρτήσεις → όχι BIBO-ευστάθεια

• Αν $M<N$

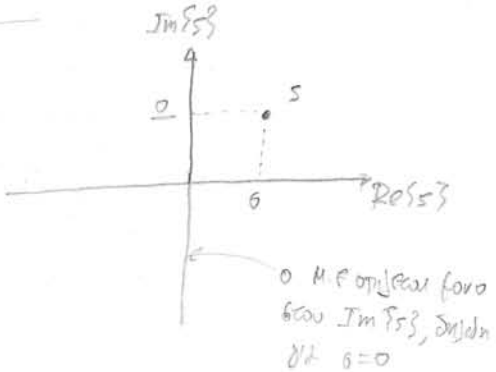
○ Σήματος απόλυτα: $e^{-b|t|}=\begin{cases}e^{-bt}, & t\geq 0\\ e^{bt}, & t<0\end{cases} = e^{-bt}u(t)+e^{bt}u(-t)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 Ο Μετασχηματισμός Laplace

◦ Ορισμός

$$\mathcal{L}_\alpha\{x(t)\} = \int_{\alpha}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = X(s)$$



για κάποιο $\alpha \in (-\infty, 0]$

$$s = \sigma + j\Omega$$

Για $\alpha=0$ θα έχω τον μονόπλευρο Μ.L. $\mathcal{L}_0\{\}$

$\alpha=-\infty$ θα έχω τον αμφίπλευρο Μ.L. $\mathcal{L}_{-\infty}\{\} = \mathcal{L}\{\}$

◦ Σχέση ΜL − ΜF

Μπορώ εύκολα να δω πως

$$F\{x(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\}\Big|_{s=j\Omega \Leftrightarrow \sigma=0}$$

Επίσης έχω:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x(t)e^{-\sigma t}\right) e^{-j\Omega t} dt = F\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

Άρα και να μην υπάρχει ο $F\{x(t)\}$ μπορούμε να ορίσουμε τον σταθμισμένο εκθετικά του σήματος εισόδου $x_\sigma(t) = x(t)e^{-\sigma t}$, του οποίου ο ΜF θα υπάρχει

◦ Αντίστροφος ΜL

Είναι $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\sigma_0 - j\Omega}^{\sigma_0 + j\Omega} X(s) e^{st} ds \quad , \forall \sigma_0 \in RoC$

⊖ Επίπονη διαδικασία, θα δω άλλο τρόπο!

3.2 Περιοχή Σύγκλισης Μ.Λ (RoC)

① Συναρτήσεις με ίδιο ΜΛ

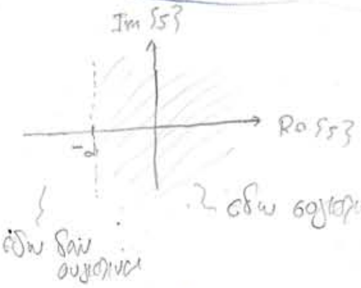
· Έστω η $x_1(t) = e^{-\alpha t}u(t)$. Έχω:

$$\mathcal{L}\{x_1(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+s)t}dt = \frac{-1}{s+\alpha} e^{-(\alpha+s)t}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{s+\alpha}\left(\lim_{t\to+\infty} e^{-(\alpha+s)t} - e^{0}\right) =$$

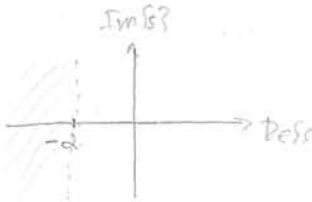
$$\lim_{t\to+\infty}\left|e^{-(\alpha+s)t}\right| = \lim_{t\to\infty}\left|e^{-(\sigma+\alpha)t}\right|\overbrace{\left|e^{-j\Omega t}\right|}^{1} = \begin{cases} 0, & \text{αν } -(\sigma+\alpha)<0 \iff \sigma>-\alpha \\ \infty & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{s+\alpha}, \text{ αν } Re\{s\} > -\alpha$$



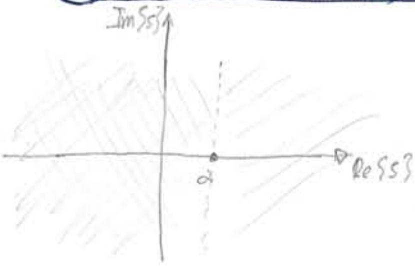
· Κάνοντας τώρα την αντίστοιχη διαδικασία για την $x_2(t) = -e^{\alpha t}u(-t)$

Θα βρω πως $\mathcal{L}\{x_2(t)\} = \frac{1}{s+\alpha}$, $Re\{s\} < -\alpha$



Παρατηρώ δηλαδή πως παρόλο που οι 2 συναρτήσεις έχουν το ίδιο ΜΛ έχουν διαφορετικό RoC.

② Πόλοι, Μηδενικά, Αιτιατότητα



· Το σήμα με RoC λέγεται δεξιάς επεκτάσεως κ είναι αιτιατό
Το σήμα με RoC λέγεται αριστεράς επεκτάσεως κ είναι αντι-αιτιατό.

· Το α αντιστοιχεί σε μηδενισμό του <u>παρονομαστή</u> του ΜΛ και ονομάζεται **πόλος**
Αν κάποιο σημείο μηδενίζει τον <u>αριθμητή</u> του ΜΛ ονομάζεται **μηδενικό**

! Η ευθεία που περιλαμβάνει τον πόλο <u>δεν</u> περιλαμβάνεται στην RoC

! Η RoC μιας ρητής $X(s)$ εκτείνεται μέχρι το άπειρο ή περιορίζεται από τους πόλους της

○ Σημασία Πόλων

πόλοι στο αριστερό ημιεπίπεδο: → σήματα ανάλογα με $e^{-\alpha t}$, $\alpha>0$
" " δεξί " → " " " $e^{\alpha t}$, $\alpha>0$

Μιγαδικοί (πάντα συζυγείς) πόλοι → συναρτήσεις που βρίσκονται ταλαντώσεις

3.3 Ιδιότητες κ' Στοιχειώδεις Συναρτήσεις

① Στοιχειώδεις Συναρτήσεις

- $u(t)$ $\quad \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s}$, $Re\{s\} > 0$

- $\begin{cases} t, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$ $\quad \mathcal{L}\{t\} = \int_0^{+\infty} t e^{-st}dt = \ldots$ ολοκλήρωση κατά παράγοντες $\ldots = \frac{1}{s^2}$, $Re\{s\} > 0$

- $\delta(t)$ $\quad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st}dt = 1$, $Re\{s\} > -\infty$

- $\delta^{(n)}(t)$ $\quad \mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t) e^{-st}dt \overset{\text{κατευθείας}}{=} -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n-1)}(t)\left(e^{-st}\right)^{(1)}dt = s\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n-1)}(t) e^{-st}dt$

$$= \ldots = s^n \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st}dt = s^n \quad , \quad Re\{s\} > -\infty$$

- $t^n u(t)$ $\quad \mathcal{L}\{t^n u(t)\} = \int_0^{+\infty} t^n e^{-st} \underset{\text{κατά παράγοντες}}{=} \frac{1}{-s} \left. t^n \overset{\to 0}{e^{-st}} \right|_0^{+\infty} - \frac{n}{-s}\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-st}dt = \ldots = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $Re\{s\} > 0$

- $e^{-at}t^n u(t)$ $\quad$ αντίστοιχα, $\mathcal{L}\{e^{-at}t^n u(t)\} = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$, $Re\{s\} > -a$

② Απλές Ιδιότητες

i) Γραμμικότητα

Αν $x_1(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s)$, $Re\{s\} > \sigma_1$, $x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_2(s)$, $Re\{s\} > \sigma_2$ τότε $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$, $Re\{s\} > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$

ii) Χρονική Ολίσθηση

Αν $x(t)u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} X(s)$, $Re\{s\} > \sigma_0$, τότε $x(t-t_0)u(t-t_0) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} e^{-st_0}X(s)$, $Re\{s\} > \sigma_0$

iii) Συχνοτική Ολίσθηση

$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$, $Re\{s\} > \sigma_0$ τότε $x(t)e^{s_0 t} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s-s_0)$, $Re\{s\} > \sigma_0 + Re\{s_0\}$

μιγαδική σταθερά

iv) Κλιμάκωση

Αν $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$, $Re\{s\} > \sigma_0$ τότε $\begin{cases} x(bt) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{b}X\left(\frac{s}{b}\right) , & Re\{s\} > b\sigma_0 \\ \frac{1}{a}x(t/a) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(as) , & Re\{s\} > \frac{\sigma_0}{a} \end{cases}$

v) Συνέλιξη

$$x_1(t) * x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s)X_2(s) \quad , \quad Re\{s\} > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$$

$$x_1(t)\, x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi i}X_1(s)X_2(s) \quad , \quad Re\{s\} > \sigma_1 + \sigma_2$$

vi) Παραγώγιση στην Μιγαδική Συχνότητα

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ τότε $(-t)^n x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{d^n X(s)}{d(s)}$, $Re\{s\} > \sigma_0$

$Re\{s\} > \sigma_0$

③ Laplace Παραγώγου

α) Αμφίπλευρος Μ. Laplace

Έχω πως αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$, $Re\{s\} > \sigma_0$ τότε:

$$\mathcal{L}\{x^{(1)}(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{(1)}(t) e^{-st} dt = \left[x(t)e^{-st}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left(e^{-st}\right)^{(1)} dt$$

0, αφού $s \to +\infty$, $e^{-st} \to 0$
$s \to -\infty$, $x(t) = 0$ (ηρεμία)

$$= s \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$= s\,X(s) \quad , Re\{s\} > \sigma_0$$

Άρα $x^{(1)}(t) \xleftrightarrow{L} s\,X(s)$
$x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n X(s)$ με ίδια ROC

β) Μονόπλευρος

Εδώ με τον ίδιο τρόπο; για $\alpha \in \{0^+, 0^-\}$

$$\mathcal{L}_\alpha\{x^{(1)}(t)\} = \left[x(t)e^{-st}\right]_{\alpha}^{+\infty} + s\int_{\alpha}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}_\alpha\{x^{(1)}(t)\} = s\,X(s) + \lim_{t\to+\infty} x(t)e^{-st} - \lim_{t\to\alpha} x(t)\,e^{-st}$$

0

για $\alpha = 0^+$ ή $\alpha = 0^-$, $e^{-st} \to 1$

$$= s\,X(s) - x(0^{\pm})$$

Άρα $x^{(1)}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_{0^\pm}} s\,X(s) - x(0^{\pm})$

και $x^{(n)}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_{0^\pm}} s^n X(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} x^{(k-1)}(0^{\pm})$

3.4 Θεωρήματα

① Θεώρημα Αρχικής Τιμής

$$\lim_{s\to+\infty} sX(s) = x(0^+) \quad , \text{όπου } X(s) = \mathcal{L}_{0^+}\{x(t)\}$$

∘ Αν η $x(t)$ είναι συνεχής στο 0

~~$x(0^+) = x(0)$~~ έχω:

$$\text{Έχω } \mathcal{L}_0\{x^{(1)}(t)\} = \int_0^{+\infty} x^{(1)}(t)e^{-st}dt = \left[x(t)e^{-st}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x(t)(e^{-st})^{(1)}dt = sX(s) - x(0)$$

Τώρα για $s\to+\infty$ από την παραπάνω έχω:

$$\lim_{s\to+\infty}\left[sX(s)-x(0)\right] = \lim_{s\to+\infty}\int_0^{+\infty} x^{(1)}(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{s\to+\infty} sX(s) = x(0)$$

! Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να βρούμε τις αρχικές τιμές παραγώγων,

$$\text{π.χ. } \lim_{s\to+\infty} s^2X(s) = x^{(1)}(0)$$

② Θεώρημα Τελικής Τιμής

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

Απ: Έχω $\mathcal{L}_0\{x^{(1)}(t)\} = \int_0^{+\infty} x^{(1)}(t)e^{-st}dt = \left[x(t)e^{-st}\right]_0^{+\infty} - \int x^{(0)}(t)(e^{-st})^{(1)}dt = sX(s)-x(0)$

Για $s\to 0$ έχω $\lim_{s\to 0}\left[sX(s)-x(0)\right] = \lim_{s\to 0}\int_0^{+\infty} x^{(1)}(t)e^{-st}dt$

$$\Rightarrow \lim_{s\to 0}\left[sX(s)\right] - x(0) = \int_0^{+\infty} x^{(1)}(t)dt = x(\infty) - x(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to 0} sX(s) = x(\infty)$$

3.5 Εφαρμογές

① Ανάκτηση Αρχικού σήματος

- Αν $X(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$ τότε ποια είναι τα πιθανά σήματα $x(t)$;

Απ: $X(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} = \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s+1}$

- Παρατηρώ τους πόλους $s=-2$, $s=-1$

Ξέρω πως $\frac{1}{s+\alpha} = \begin{cases} \mathcal{L}\{e^{-\alpha t}u(t)\}, & Re\{s\} > -2 \\ \mathcal{L}\{-e^{-\alpha t}u(-t)\}, & Re\{s\} < -2 \end{cases}$

Άρα $e^{-2t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+2}$, $Re\{s\} > -2$ ή $-e^{-2t}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+2}$, $Re\{s\} < -2$

και

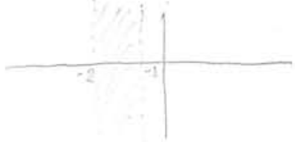
$e^{-t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1}$, $Re\{s\} > -1$ ή $-e^{-t}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1}$, $Re\{s\} < -1$

Άρα έχω τις εξής περιπτώσεις:

α) $x(t) = -(-e^{-2t}u(-t)) - e^{-t}u(-t)$, $t \in (-\infty, -2)$

β) $x(t) = -e^{-2t}u(t) + e^{-t}u(t)$, $t \in (-1, +\infty)$

c) $x(t) = -e^{-2t}u(t) - e^{-t}u(-t)$



! Αν η εκφώνηση προσδιόριζε να βρεθεί το αιτιατό σήμα $x(t)$, θα δίναμε μόνο την περίπτωση (β). Αντίστοιχα για το αντιαιτιατό, μόνο την (α)

② Διαφορικές Εξισώσεις

Γενική ιδιότητα $\mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s)$

Έτσι όταν μας δοθεί η Δ.Ε. $\sum_{n=0}^{N} \alpha_n y^{(n)}(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m x^{(m)}(t)$

παίρνουμε Laplace και στα δύο μέλη και έχουμε:

$$Y(s)\sum_{n=0}^{N} \alpha_n s^n = X(s)\sum_{m=0}^{M} b_m s^m$$

$$\Leftrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^m}{\sum_{n=0}^{N} \alpha_n s^n}$$

◦ Παράδειγμα 1 ΔΕ: $y^{(1)}(t) + 3y(t) = x(t)$. $h(t) = ;$

Απ: $\mathcal{L}\{\Delta E\} \rightarrow sY(s) + 3Y(s) = X(s) \Leftrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+3}$

Άρα $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = \begin{cases} e^{-3t}u(t), & Re\{s\} > -3 \\ -e^{-3t}u(-t), & Re\{s\} < -3 \end{cases}$

◦ Παράδειγμα 2 Να λυθεί η Δ.Ε. $x^{(1)}(t) + 2x(t) = \delta(t)$, με $x(0^-) = 1$, $t > 0$

Απ:

α) Ομογενής Λύση από μαθηματικά 2 ....

$x(t) = c_1 e^{-2t}$

και στο σημείο ασυνέχειας βρίσκω χρησιμοποιώντας το $x(t) = x_c(t) + (x(0^+) - x(0^-))u(t)$ για να προσδιορίσω το $c_1 = 2$

β) Μονοπλευρος -0^+

$\mathcal{L}_{0^+}\{\Delta.E\} \rightarrow sX(s) - x(0^+) + 2X(s) = \mathcal{L}_{0^+}\{\delta(t)\}$

0, αφού $\delta(t) = 0$ για $t \in [0^+, +\infty$

$\Leftrightarrow X(s) = \frac{x(0^+)}{s+2} \Leftrightarrow x(t) = x(0^+)e^{-2t}u(t)$

1, αφού πλέον περιλαμβάνεται και η $t = 0$

c) Μονοπλευρος -0^-

$\mathcal{L}_{0^-}\{\Delta.E\} \rightarrow sX(s) - x(0^-) + 2X(s) = \mathcal{L}_{0^-}\{\delta(t)\}$

$\Leftrightarrow X(s) = \frac{1 + x(0^-)}{s+2} = 2\frac{1}{s+2} \Leftrightarrow x(t) = 2e^{-2t}u(t)$

(3) Ημιπεριοδικές Συναρτήσεις

Έστω αιτιατή συνάρτηση περιοδικής επέκτασης $x(t) = \begin{cases} x(t+T), & t \geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$

Αν το σχήμα της $x_0(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t<0 \text{ ή } t>T \end{cases}$ τότε μπορώ να γράψω:

$$x(t) = x_0(t) + x_0(t-T) + x_0(t-2T) + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} x_0(t-kT)$$

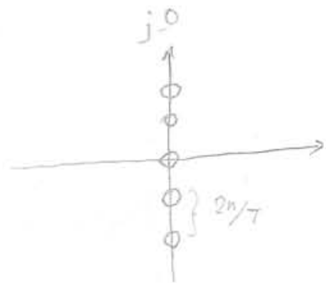
$$\Leftrightarrow x(t) = x_0(t) * \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t-kT)}_{\text{χτένα Poisson}} \xLeftrightarrow{\mathcal{L}\{\}} \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{x_0(t)\} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{L}\{\delta(t-kT)\}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = X_0(s) \underbrace{\left(1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots\right)}_{\substack{\text{γεωμετρική πρόοδος με} \\ \lambda = e^{-sT}}} \Leftrightarrow X(s) = \frac{X_0(s)}{1-e^{-sT}}, \quad Re\{sT\} > c$$

Για να βρούμε τους πόλους, υπολογίζουμε πού ισχύει

$$1 - e^{-st} = 0 \Rightarrow e^{-st} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-\sigma T} = 1 \Rightarrow \sigma = 0 \\ e^{-j\Omega T} = 1 \Rightarrow \cos(\Omega T) - j\sin(\Omega T) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \Omega = \frac{2k\pi}{T}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$



(4) Υπολογισμός Ροπών

Από τις ιδιότητες: $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ τότε $(t)^n x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n X^{(n)}(s)$

Έχω: $$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n x(t) e^{-st}\, dt = (-1)^n X^{(n)}(s)$$

$$\xLeftrightarrow{s=0} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n x(t)\, dt = (-1)^n X^{(n)}(s) \Big|_{s=0}$$

Όμως $m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n x(t)\, dt$, αν t είναι η τυχαία μεταβλητή, $x(t)$ είναι η pdf

! Όμως θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και Μετασχηματισμό Fourier για τον υπολογισμό της ροπής m_n. Γιατί χρησιμοποιήσαμε τ' Laplace;

→ αν η pdf είναι αιτιατή, Laplace
→ " " " " γενικευμένη, Fourier

3.6 Συναρτήσεις Μεταφοράς / Συστήματα

① Ευστάθεια

Έστω $\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s)$

Για ΦΕΦΕ-ευστάθεια θέλω $h(t) \in L_1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < +\infty$

Όμως αν ισχύει το παραπάνω, θα υπάρχει ο $\mathcal{F}\{h(t)\}$

Άρα αρκεί ο $\mathcal{L}\{h(t)\}$ να περιέχει τον φανταστικό άξονα στην RoC του.

- Αυτό για αιτιατό σύστημα μεταφράζεται ως όλοι οι πόλοι p_i να έχουν $\mathrm{Re}\{p_i\} < 0$

② Συνάρτηση Μεταφοράς

Έστω πως η συνάρτηση μεταφοράς είναι ανάλογα της μορφής $H(s) = \dfrac{B_M(s)}{A_N(s)}$

όπου M ο βαθμός του αριθμητή, N ο βαθμός του παρονομαστή

! Κάθε ΓΧΑ σύστημα που είναι πρακτικά υλοποιήσιμο έχει για $H(s)$ μια ρητή συνάρτηση

- Αν $M > N$ Τότε μπορώ να γράψω $H(s) = \underbrace{\sum_{m=0}^{k} x_n s^n} + \dfrac{B_{M'}(s)}{A_N(s)}$, με $M' < N$

  Οι όροι όμως $x_n s^n$ χαλάνε την ΦΕΦΕ ευστάθεια, καθώς δίνουν κρουστικές συναρτήσεις, αφού ξέρω $\delta^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n$

- Αν $M \leq N$

  Τότε έχω αυστηρά ρητή συνάρτηση μεταφοράς, που είναι προαπαιτούμενο για ευστάθεια.

  α) Αν έχω πραγματικές, διακριτές ρίζες

  του $A_N(s)$, έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$. Άρα $A_N(s) = (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_N)$

  τότε γράφω $H(s) = \dfrac{c_1}{s-\lambda_1} + \dfrac{c_2}{s-\lambda_2} + \ldots + \dfrac{c_N}{s-\lambda_N}$

  και $h(t) = \left[c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots\right] u(t)$, αφού $e^{-\alpha t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s+\alpha}$

b) <u>Πολλαπλές πραγματικές ρίζες</u>

Έστω πως ο πόλος λ_1 εμφανίζεται με πολλαπλότητα r

Τότε $H(s) = \frac{c_1}{s-\lambda_1} + \frac{c_2}{(s-\lambda_1)^2} + \dots + \frac{c_r}{(s-\lambda_1)^r} + \underbrace{\dots\dots}_{N-r \text{ όροι}}$

και $A_N(s) = (s-\lambda_1)^r \prod_{i=r+1}^{N} (s-\lambda_i)$

! Για να προσδιορίσω τα $c_1, \dots, c_r$, δουλεύω ως $c_i = \lim_{s\to\lambda_1} \left\{ \frac{1}{(r-i)!} \left[(s-\lambda_1)^r X(s) \right]^{(r-1)} \right\}$ ως προς s

και έτσι $x(t) = \left[c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + \dots + c_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{\lambda_1 t} + c_{r+1} e^{\lambda_{r+1} t} + \dots \right] u(t)$

c) <u>Μιγαδικές Συζυγείς Ρίζες</u>

Οι μιγαδικές ρίζες θα εμφανίζονται σε ζεύγη μιγαδικών, αφού υποθέσαμε $A_N(s) \in \mathbb{R}$

Εδώ ισχύει ό,τι και στην περίπτωση a), και οι μιγαδικές ρίζες θα έχουν συντελεστές $c_1, c_1^* = c_2$

π.χ. $X(s) = \frac{s-5}{s^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} = \frac{-1}{s} + \frac{5}{s^2}$

$A = \left[s^2 X(s) \right]^{(1)} \Big|_{s=0} = (s-5)' = -1$

$B = s^2 X(s) \Big|_{s=0} = s-5 \Big|_{s=0} = 5$

Κεφ. 4

- Σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1$$

- Ορισμός

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}, \quad z = re^{j\omega}$$

- Ιδιότητες

Επιθυμητή μετατόπιση $x(n-m) \overset{Z}{\longleftrightarrow} z^{-m} X(z)$

Κλιμάκωση $\alpha^{-n} x(n) \longleftrightarrow X(\alpha z)$

Παράγωγος $n x(n) \longleftrightarrow -z X^{(1)}(z)$

Κατοπτρισμός $x(-n) \longleftrightarrow X(z^{-1})$

Συζυγής $x^*(n) \longleftrightarrow X^*(z^*)$

- Ιδιότητες Μονόπλευρου Z

$$x(n-m) \longleftrightarrow z^{-m} \sum_{n=-m}^{-1} x(n) z^{-n} + z^{-m} X(z)$$

∇ ενσωμάτωση πληροφορίας

$$x(n+m) \longleftrightarrow z^{m} X(z) - z^{m} \sum_{n=0}^{m-1} x(n) z^{-n}$$

∇ Απώλεια πληροφορίας

- Αρχική/Τελική Τιμή

Αρχική $\lim_{z \to +\infty} X(z) = x(0)$

Τελική $\lim_{z \to 1} (z-1) X(z) = x(\infty)$

- Περιοδικές Συναρτήσεις

Αν $\tilde{x}(n)$, με $\tilde{x}(n+N) = \tilde{x}(n)$ και $x_N(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

τότε $\tilde{X}(z) = \dfrac{X_N(z)}{1-z^{-N}}$.

- Χρήσιμα Ζεύγη

$x(n)$	$X(z)$	RoC
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\|>1$
$n u(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	>1
$\alpha^n u(n)$	$\frac{z}{z-\alpha}$	$>\|\alpha\|$
$n\alpha^n u(n)$	$\frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}$	$>\|\alpha\|$
$-\alpha^n u(-n-1)$	$\frac{z}{z-\alpha}$	$<\|\alpha\|$

- Υπολογισμός Αντιστρόφου Z

Α' τρόπος: Σπάω σε κλάσματα όπως στον ΜΛ.
Έπειτα χρησιμοποιώ τις: $\alpha^n u(n) = \frac{z}{z-\alpha}$
και το time shift: πχ $\frac{1}{z-1} = \frac{z}{z-1} z^{-1} = u(n-1)$

Β' τρόπος: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΑ ΧΡΟΝΟΙ ΠΗ

ΑΠΛΟΙ ΠΟΛΟΙ

Για κάθε πόλο z_i,
$\operatorname{Res}\{X(z) z^{n-1} \text{ στο } z = z_i\} = X(z) z^{n-1} (z - z_i) \big|_{z=z_i}$

ΠΟΛΛΑΠΛΟΙ πολλαπλότητα r:

$$\frac{1}{(r-1)!} \left[X(z) z^{n-1} (z-p_i)^r \right]^{(r-1)} \Big|_{z=z_0}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.1 Μαθηματικά

1) Σειρά Taylor/Mclaurin

Αν η f είναι αναλυτική στο α, τότε το ανάπτυγμα της f ως σειρά Taylor είναι:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f^{(1)}(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

Στην περίπτωση που $\alpha=0$ παίρνουμε την υποπερίπτωση της σειράς Taylor που ονομάζεται σειρά Mclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

2) Χρήσιμες Σειρές

- $$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- finite γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{m} x^n = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$$

- infinite γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1$$

4.2 Ο Μετασχηματισμός Ζ

① Discrete Time Fourier Transform

Για $x[n]$ σήμα διακριτού χρόνου έχουμε $F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jn\omega}$

- είναι πάντα περιοδική συνάρτηση με περίοδο $2\pi = N$
- για να υπάρχει, πρέπει $x[n] \in \ell_1$

② Ορισμός Ζ{}

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=N_0}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}, \qquad z = r \cdot e^{j\omega}$$

μπορεί να είναι → μονόπλευρος, για $N_0 = 0$
→ δίπλευρος, για $N_0 = -\infty$

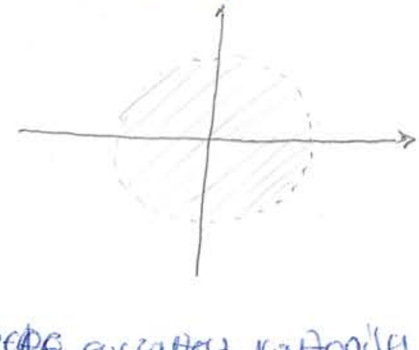
- Αφορά σήματα διακριτού χρόνου. → το $0^+, 0^-$ δεν έχει νόημα
- Είναι μιγαδικής μεταβλητής z, οπότε θα μελετήσουμε τις ιδιότητές του στο μιγαδικό επίπεδο

③ RoC και Ευστάθεια

∘ RoC Εδώ έχουμε μιγαδική μεταβλητή $z = re^{j\omega}$ που παριστάνει έναν κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο με ακτίνα r

Για να υπάρχει ο $X(z)$ πρέπει $|X(z)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|\,|z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|\, r^{-n} < \infty$

- Αν $x(n)$ αιτιατό, δηλαδή $x(n) = 0,\ \forall n < 0$
- Αν $x(n)$ αντιαιτιατό, $x(n) = 0,\ \forall n \geq 0$
- Αν $x(n)$ σήμα αμφί πλευρης επεκτασης

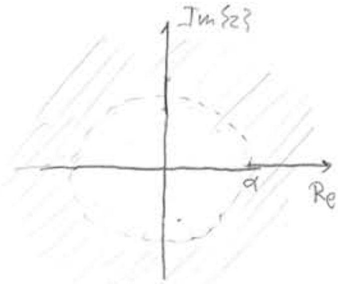


∘ ΦΕΦΕ-ευστάθεια. Και εδώ την ΦΕΦΕ ευστάθεια καθορίζει ο μοναδιαίος κύκλος, $r=1$
Αν η RoC συμπεριλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο, τότε το σύστημα θα είναι ΦΕΦΕ-ευσταθές

4.3 Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί Z

- $x(n) = a^n u(n)$ $\quad X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n u(n) z^{-n}$

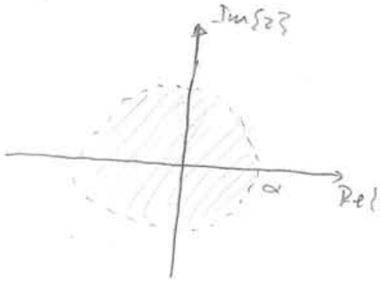
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^n = \begin{cases} +\infty, & |\alpha| \geq |z| \\ \frac{1}{1-\frac{\alpha}{z}} = \frac{z}{z-\alpha}, & |\alpha|<|z| \end{cases}$$



- $x(n) = -\alpha^n u(-n-1)$ $\quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n z^{-n}$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^{-n} z^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^n$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^n = 1 - \frac{1}{1-\frac{z}{\alpha}} = \frac{z}{z-\alpha}, \quad |\alpha|>|z|$$

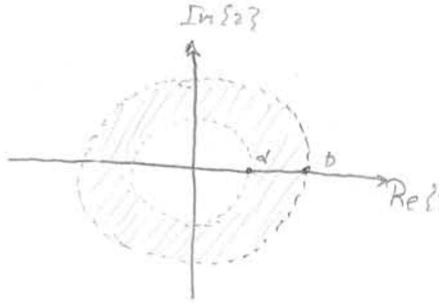


- $x(n) = \begin{cases} \alpha^n, & n \geq 0 \\ -b^n, & n<0 \end{cases}$ $\quad$ Μπορώ να γράψω $x(n) = \alpha^n u(n) - b^n u(-n-1)$

Δουλεύοντας όπως πριν, $X(z) = \frac{z}{z-\alpha} + \frac{z}{z-b}$, $\quad |\alpha|<|z|$ και $|z|<|b|$

Αν $|\alpha| > |b|$ τότε ο $X(z)$ δεν υπάρχει.

Αν $|\alpha| < |b|$, τότε η RoC φαίνεται στο σχήμα:



4.4 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z

- Γραμμικότητα $\quad Z\{\alpha x_1(n) + b x_2(n)\} = \alpha Z\{x_1(n)\} + b Z\{x_2(n)\}$

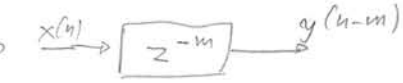
! Γενικά η RoC είναι τουλάχιστον η τομή των RoC των επιμέρους Μ.Z.
μπορεί να είναι και μεγαλύτερη αν απαλείφονται πόλοι.
π.χ. $X_1(z) = \frac{z}{z-1}$, $|z|>1$, $X_2(z) = \frac{1}{z-1}$, $|z|>1$, $X_1 - X_2(z) = 1$, $|z|>-\infty$

- Χρονική Ολίσθηση $\quad$ Αν $x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$ τότε $x(n-m) \xleftrightarrow{z} z^{-m} X(z)$

Απ. $Z\{x(n-m)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-m) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-m) z^{-n+m-m} = z^{-m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-m) z^{-n+m}$

$$= z^{-m} X(z)$$

Για αυτό



ο καθυστερητής m χρονικών μονάδων

- Κλιμάκωση στο επίπεδο -z

Αν $x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$ τότε $\alpha^{-n} x(n) \xleftrightarrow{z} X(\alpha z)$

Απ: $X(\alpha z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) (\alpha z^{-n}) = \alpha^{-n} X(z)$

- Όμως τώρα η περιοχή σύγκλισης του z συρρικνώνεται διαιρούμενη κατά $1/|\alpha|$

- Παραγώγιση

Αν $x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$ τότε $n\, x(n) \xleftrightarrow{z} -z\, X^{(1)}(z)$

Απ: $-z X^{(1)}(z) = -z \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \right)^{(1)} = -z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)(-n) z^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, n\, z^{-n} = Z\{n x(n)\}$

Παράδειγμα $Z\{n u(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n u(n) z^{-n} \ldots$ αδιέξοδο!

Όμως από ιδιότητα παραγώγισης ξέρω πως

αν $u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z-1}$ τότε $n u(n) \xleftrightarrow{z} -z \left(\frac{z}{z-1}\right)^{(1)}$

$\xleftrightarrow{z} \frac{z}{(z-1)^2}$, $|z|>1$

- Κατοπτρισμός στο Χρόνο

Αν $x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$ τότε $x(-n) \xleftrightarrow{z} X(z^{-1})$

Απ: $Z\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) (z^{-1})^{-n} = X(z^{-1})$

- Συζυγής Ακολουθία

Αν $x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$ τότε $x^*(n) \xleftrightarrow{z} X^*(z^*)$

Απ: $Z\{x^*(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n) z^{-n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) (z^*)^{-n} \right)^* = X^*(z^*)$

- Συνέλιξη

Αν $x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$, $y(n) \xleftrightarrow{z} Y(z)$ τότε $w(n) = x(n) * y(n) \xleftrightarrow{z} X(z) Y(z)$

4.5 Εφαρμογές Μετασχηματισμού Z

- Ολίσθηση στο Μονόπλευρο Z

Αν $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z)$ τότε

$$\bullet\ Z\{x(n-m)\} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n-m) z^{-n} = \sum_{n=0}^{m-1} x(n-m) z^{-n} + \sum_{n=m}^{+\infty} x(n-m) z^{-n}$$

$$= z^{-m}\sum_{n=-m}^{-1} x(n) z^{-n} + z^{-m}\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

$$= z^{-m}\left(\sum_{n=-m}^{-1} x(n) z^{-n} + X(z)\right)$$

! Τώρα ενσωματώνουμε αρχικές συνθήκες στον Z{ }, περισσότερη πληροφορία από πριν

$$\bullet\ Z\{x(n+m)\} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n+m) z^{-n} = \sum_{n=m}^{+\infty} x(n) z^{-n+m}$$

$$= z^{m}\sum_{n=m}^{+\infty} x(n) z^{-n} + \underbrace{z^{m}\sum_{n=0}^{m-1} x(n) z^{-n} - z^{m}\sum_{n=0}^{m-1} x(n) z^{-n}}_{\text{προσθαφαιρώ}}$$

$$= z^{m} X(z) - z^{m}\sum_{n=0}^{m-1} x(n) z^{-n}$$

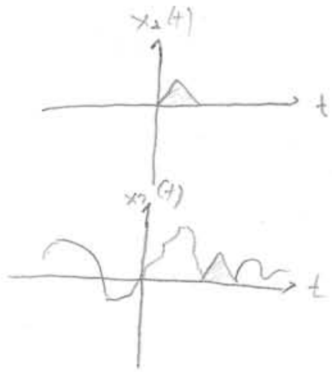
$$= z^{m}\left(X(z) - \sum_{n=0}^{m-1} x(n) z^{-n}\right)$$

! Τώρα αφαιρούμε πληροφορία, δηλαδή τα πρώτα $m-1$ δείγματα από τον Z{ }

- Συσχέτιση Σημάτων (corelation)

Έστω τα x_1, x_2. Θέλω να εξακριβώσω αν το x_1 περιέχεται στο x_2. Αυτό το κάνω μέσω της ακολουθίας συσχέτισης. Η ακολουθία συσχέτισης ορίζεται ως $r_{x_1,x_2}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) y(k-n)$

$$= x(n) * y(-n)$$



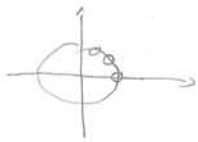
Μπορώ επομένως να υπολογίσω τον

$$Z\{r_{x_1,x_2}(n)\} = X(z)\, Y(z^{-1})$$

∘ Περιοδικά Σήματα   Έστω $\tilde{x}(n)$, με $\tilde{x}(n+N)=\tilde{x}(n)$

Τότε:
$$Z\{\tilde{x}(n)\} = \sum_{n=0}^{+\infty}\tilde{x}(n)z^{-n}$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)z^{-n} + \sum_{n=N}^{2N-1}\tilde{x}(n)z^{-n} + \sum_{n=2N}^{3N-1}\tilde{x}(n)z^{-n} + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)z^{-n} + \sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}(m+N)z^{-m-N} + \dots \qquad (m=n-N)$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)z^{-n} + z^{-N}\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}(m)z^{-m} + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)z^{-n}\cdot\left(1+z^{-N}+z^{-2N}+\dots\right) = \frac{X_N(z)}{1-z^{-N}}$$

Έχουμε πόλους για $z^{-N}=1 \Leftrightarrow r^N e^{j\omega N}=1 \quad \begin{cases} r=1 \\ e^{j\omega N}=1 \Leftrightarrow \omega_k=\frac{2k\pi}{N}, \; k=0,\dots,2N-1 \end{cases}$



4.6 Θεωρήματα Αρχικής/Τελικής Τιμής για τον Μετασχηματισμό Z

∘ Αρχικής Τιμής   Αν $x(n) \xleftrightarrow{Z_u} X(z)$ τότε $x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$

Απ: $\lim_{z\to+\infty} X(z) = \lim_{z\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-n} = \lim_{z\to+\infty}\left(x(0)+\cancelto{0}{\frac{x(1)}{z}}+\cancelto{0}{\frac{x(2)}{z^2}}+\dots\right) = x(0)$

∘ Τελικής Τιμής   Αν $x(n) \xleftrightarrow{Z_u} X(z)$ τότε $\lim_{n\to+\infty} x(n) = x(\infty) = \lim_{z\to1}(z-1)X(z)$

Απ: • Έχω: $Z\{x(n+1)-x(n)\} = \sum_{n=0}^{+\infty}x(n+1)z^{-n} - \sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-n}$ το οποίο γίνεται:

$$\lim_{z\to1} Z\{x(n+1)-x(n)\} = \begin{matrix}\cancel{x(1)}+\cancel{x(2)}+\dots+x(\infty) \\ -x(0)-\cancel{x(1)}-\cancel{x(2)}-\dots\end{matrix} = x(\infty)-x(0) \qquad (1)$$

• Από ιδιότητες ξέρω: $Z\{x(n+1)-x(n)\} = zX(z)-zx(0)-X(z) = (z-1)X(z)-zx(0)$

το οποίο γίνεται $\lim_{z\to1}\{Z\{x(n+1)-x(n)\}\} = \lim_{z\to1}(z-1)X(z) - \overbrace{\lim_{z\to1} zx(0)}^{x(0)} \qquad (2)$

Από τις (1), (2): $\lim_{z\to1}(z-1)X(z) = x(\infty)$

4.7 Υπολογισμός Z^{-1}

① Με Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα

Έστω $X(z)z^{n-1}$ ρητή συνάρτηση με πόλο πολλαπλότητας r στο z_0,

δηλαδή $$X(z)z^{n-1} = \frac{F(z)}{(z-z_0)^r}$$

Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $X(z)z^{n-1}$ στο z_0 ορίζεται ως:

$$\text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ στο } z=z_0\} = \frac{1}{(r-1)!} F^{(r-1)}(z)\Big|_{z=z_0}$$

Αν ο πόλος είναι απλός, τότε:

$$\text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ στο } z=z_0\} = F(z)\Big|_{z=z_0}$$

Το Θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων μας λέει πως:

$$Z^{-1}\{X(z)\} = x(n) = \sum_{i=1}^{N} \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ στο } z=z_i\}$$

όπου $z_1, \dots, z_N$ πόλοι

! Η ΠΣ πρέπει να είναι εξωτερική  ή 

! Παράδειγμα 5.6., βιβλίο σελ. 247

Κεφ. 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5.1 Γιατί χώρος κατάστασης;

• Μέχρι τώρα περιγράψαμε τα συστήματα μέσω
— σχέση εισόδου - εξόδου
— $h(t)$, $H(j\Omega)$, $H(s)$

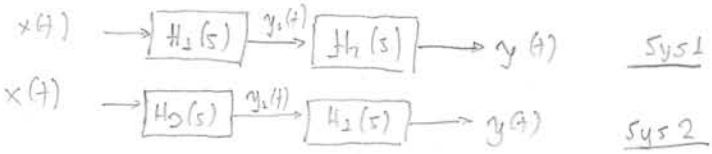
Η περιγραφή αυτή είναι εύκολη, αλλά αντιμετωπίζει το σύστημα ως black box, δεν μας δίνει δηλαδή καμία πληροφορία για την εσωτερική του δομή.
Αυτή η αντιμετώπιση μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα:

• Παράδειγμα: Έστω συστήματα ΓΧΑ H_1, H_2 που περιγράφονται από τις διαφορικές εξισώσεις

$$y^{(1)}(t) + y(t) = x^{(1)}(t) - x(t) \xleftrightarrow{ΛΣ} H_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s-1}{s+1}$$

$$y^{(1)}(t) - y(t) = x(t) \xleftrightarrow{ΛΣ} H_2(s) = \frac{1}{s-1}$$

Έστω λοιπόν οι δύο εν σειρά συνδέσεις των παραπάνω:



Και για τα δύο συστήματα ισχύει $H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{1}{s+1}$

! Απαλείφθηκε ο πόλος της H_2 στο $s=1$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος έχει λοιπόν πόλο στο $s=-1$, για αυτό περιμένουμε να είναι τα συστήματα και οι 2 συνδέσεις ΦΕΦΕ-ευσταθή

Ας εξετάσουμε καλύτερα τα συστήματα:

sys 1: Ισχύει $y_1^{(1)}(t) - y_1(t) = x^{(1)}(t) - x(t) \xleftrightarrow{L} (s+1)Y_1(s) - y_1(0) = (s-1)X(s) \Leftrightarrow Y_1(s) = \frac{y_1(0)}{s+1} + \frac{s-1}{s+1}X(s)$

Τώρα το y_1 έρχεται ως είσοδος στο H_2 και έχω... $Y(s)(s-1) - y(0) = Y_1(s)$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{y(0)}{s-1} + \frac{y_1(0)}{(s-1)(s+1)} + \frac{X(s)}{s+1} \Leftrightarrow y(t) = \left[y(0)e^{t} + \tfrac{1}{2}(e^{t} - e^{-t})y_1(0) + e^{-t} * x(t)\right]u(t)$$

! Παρατηρώ πως αν $y(0) \neq 0$, τότε $\lim_{t\to\infty} y(0)e^{t} = +\infty$, άρα μετά από αρκετά μεγάλο χρόνο η έξοδος του sys $y(t)$ θα απειρίζεται ανεξάρτητα με το $x(t)$!

sys 2: Με αντίστοιχη ανάλυση, $y_1(t) = \left[y_1(0)e^{t} + e^{t} * x(t)\right]u(t)$

$$y(t) = \left[y(0)e^{-t} + e^{-t} * x(t)\right]u(t)$$

! Εδώ $\lim_{t\to\infty} y(0)e^{-t} = 0$, δηλαδή οι αρχικές συνθήκες θα παίξουν όλο και μικρότερο ρόλο!

Όμως η y_1 δεν είναι φραγμένη, άρα δεν θα έχουμε φραγμένη είσοδο μετά από αρκετό χρόνο..

5.2 Μελέτη Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης

① Κατάσταση Συστήματος

- Η κατάσταση του συστήματος την στιγμή t_0 (S_{t_0}) συσσωρεύει όλη την απαραίτητη πληροφορία για την ιστορία του συστήματος στο $(-\infty, t_0]$

- Αν ξέρω την S_{t_0} και την είσοδο $x(t)$ στο $[t_0, +\infty)$ τότε έχω επαρκή πληροφορία για να μελετήσω την συμπεριφορά του συστήματος για $t \geq t_0$

- Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από ένα σύνολο μεταβλητών κατάστασης που θα ορίζουν το διάνυσμα κατάστασης

Παράδειγμα 1 αιτιατό ΓΧΑΣ με κρ. απόκριση $h(t)$. Ποια είναι η S_{t_0};

Απ: Ξέρω πως $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t_0} x(\tau) h(t-\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$

$$= S_{t_0} + \int_{t_0}^{t} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Βλέπω πως αρκεί να ξέρω την $S_{t_0} = \int_{-\infty}^{t_0} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$ και την $x(t), t \geq t_0$ για να υπολογίσω την $y(t)$, $t \geq t_0$

② Δυναμικές Εξισώσεις

Θα εξετάσουμε ΓΧΑΣ, με μία είσοδο και μία έξοδο. Οι δυναμικές εξισώσεις είναι:

(εξίσωση καταστάσεων)	$\underline{s}^{(1)}(t) = A\,\underline{s}(t) + \underline{b}\,x(t)$
(εξίσωση εξόδου)	$y(t) = \underline{c}^T \underline{s}(t) + d\,x(t)$

- $\underline{s}(t)$ το διάνυσμα με τις n μεταβλητές κατάστασης
- $\underline{s}^{(1)}(t)$ η παράγωγος του $\underline{s}(t)$. Στην συνεχή περίπτωση έχω $\underline{s}(n+1)$
- $x(t), y(t)$ η είσοδος και η έξοδος αντίστοιχα
- $A \in N \times N$, $\underline{b} \in N \times 1$, $c^T \in 1 \times N$

5.3 Εκθετική Συνάρτηση Μητρώων

○ $\Phi(t) = e^{At}$ Απο την σειρά McLaurin της εκθετικής έχω: $e^{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

Αν στην θέση του x βάλω το At, όπου A μητρώο, t βαθμωτός έχω αντίστοιχα

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$$

Το e^{At} που προέκυψε είναι μητρώο που τηρεί τις βασικές ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης:

- $e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2}$
- $\left(e^{At}\right)^{(1)} = A e^{At}$

○ $\mathcal{L}\{e^{At}u(t)\} = (sI-A)^{-1}$

Έχω $\mathcal{L}\{e^{At}\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{L}\{\frac{t^k}{k!}\} A^k \Leftrightarrow \mathcal{L}\{e^{At}u(t)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{L}\{\frac{t^k}{k!}u(t)\} A^k$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} A^k \frac{1}{s^{k+1}} = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{A}{s}\right)^k$$

Συγκλίνει αν $|s^{-1}A| < 1$, δηλαδή οι ιδιοτιμές του $s^{-1}A < 1$

$$= s^{-1}\left(I - (s^{-1}A)\right)^{-1} = (sI-A)^{-1}$$

5.4 Γραμμική Άλγεβρα

○ Ορίζουσα Πίνακα

- 2×2 $A = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\det(A) = |A| = \alpha d - bc$

- Διαγώνιοι πίνακες $\begin{vmatrix} \alpha & & \\ & b & \\ & & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \vdots \\ & & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & & 0 \\ \vdots & b & \\ \vdots & \vdots & c \end{vmatrix} = \alpha \cdot b \cdot c$

- Με αλγεβρικά Συμπληρώματα

Βολεύει να επιλέγω την γραμμή με τα μηδενικά

Έστω $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ Για να βρω την ορίζουσα ακολουθώ την εξής διαδικασία:

1) Επιλέγω μία γραμμή ή στήλη. Έστω η γραμμή $2 = [-1,\ 1\ 3]$
2) Τότε $\det(A) = (-1)^{2+1}\cdot -1 \cdot \det\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 1 \cdot \det\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot 3 \cdot \det\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

Γενικά $\det(A) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{i+j} \alpha_{i,j} M_{i,j} = \sum_{i=1}^{N} \ldots$

κατά μήκος γραμμής

κατα μήκος στήλης

το στοιχείο του A που βρίσκεται στην θέση i, j

Ο πίνακας που προκύπτει αν από τον A αφαιρέσω την i-οστή γραμμή και την j-οστή στήλη

Ιδιοτιμές κ' Ιδιοδιανύσματα

Ιδιοτιμες είναι οι λύσεις λ_i στην εξίσωση $det(A-\lambda I)=0$, οπου A πίνακας

π.χ $A=\begin{bmatrix}-3 & -10\\ 2 & 6\end{bmatrix}$ $A-\lambda I=\begin{bmatrix}-3-\lambda & -10\\ 2 & 6-\lambda\end{bmatrix}$

$det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow (-3-\lambda)(6-\lambda)+20=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)=0 \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda=1\\ \lambda=2\end{matrix}$ · οι ιδιοτιμές

Ιδιοδιανυσματα Εστω πως εχω τις ιδιοτιμες του παραπάνω μητρώου, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$
Για να βρω τα ιδιοδιανύσματα δουλεύω ως εξής:

π.χ

ιδιοδ. $\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=X_1$ $AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-3 & -10\\ 2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x-10y=x\\ 2x+6y=y\end{cases} \Leftrightarrow -10y=4x \Leftrightarrow 5y=2x$ (1)

Απο την 1, για $x=1$, $y=-\frac{2}{5}$. Άρα το ιδιοδιάνυσμα είναι της μορφής

$X_1=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -\frac{2}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ -2\end{bmatrix}$ πολ/ζω με 5 για να τους κάνω ακέραια

ιδιοδ. X_2 $AX=\lambda_2 X \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-3 & -10\\ 2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x\\ 2y\end{bmatrix} \Leftrightarrow \{ 5x=-10y \Leftrightarrow x=-2y$

για $x=1$, $y=-\frac{1}{2}$ άρα $X_2=\begin{bmatrix}1\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$

Διαγωνοποίηση Πίνακα

Γράφω τον A ως $A=P\Lambda P^{-1}$, οπου Λ διαγώνιος πίνακας , P ο πίνακας ομοιότητας

Χρηση $A^k=(P\Lambda P^{-1})^k=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}\ldots P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^k P^{-1}$ και Λ^k εύκολα υπολογίσιμος

- ! Το P αποτελείται απο τα ιδιοδιανύσματα του A
- Για να είναι ο A διαγωνοποιήσιμος, πρεπει να έχει N διακριτές ιδιοτιμές

π.χ Στο παραπάνω παράδειγμα $P=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$

$P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & -5\end{bmatrix}$

- <u>Αντιστροφή Πίνακα</u> ⇝ για να είναι αντιστρέψιμος, πρέπει $\det(A) \neq 0$

Με χρήση του κανόνα του Kramer:

Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}$ τότε $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & \alpha \end{bmatrix}^T = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & \alpha \end{bmatrix}$

βλέπω πως σε κάθε θέση $\alpha_{i,j}$ μπαίνει $\det(M_{i,j})$

Ας δούμε και για 3x3 πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \cdot \\ - & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} ei - fh & \vdots & \vdots \\ -di + fg & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

5.5.1 Μητρώο Καταστατικής Μετάβασης

Αν η καταστατική εξίσωση είναι ομογενής ⇒ η είσοδος $x(t)$ δεν περιέχεται, τότε:

$$s^{(1)}(t) = A\,s(t)$$

$$\overset{\Lambda\Sigma}{\Longleftrightarrow} s\,S(s) - s(0) = A\,S(s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad S(s) = (sI - A)^{-1}\, s(0)$$

$$\overset{\Lambda\Sigma^{-1}}{\Longleftrightarrow} \quad s(t) = e^{At}\, s(0)$$

$$= \phi(t)\, s(0)$$

Το $\phi(t) = e^{At}$ καλείται μητρώο καταστατικής μετάβασης

Περιγράφει την εξέλιξη του $s(t)$ στο χρόνο αν ξέρω το $s(0)$ και αν εξαρτάται μόνο από αυτό!

5.5.2 Συνάρτηση Μεταφοράς

Εδώ μελετάμε την συνάρτηση μεταφοράς άρα δεν έχουν νόημα οι αρχικές συνθήκες.

Έχουμε λοιπόν $s(0) = 0$ και έτσι:

(κατάσταση) $\quad s^{(1)}(t) = A\,s(t) + b\,x(t) \overset{\Lambda\Sigma}{\Longleftrightarrow} s\,S(s) = A\,S(s) + b\,X(s) \Rightarrow S(s) = (sI - A)^{-1} b\,X(s)$ (1)

(έξοδος) $\quad y(t) = c^T s(t) + d\,x(t) \overset{\Lambda\Sigma}{\Longleftrightarrow} Y(s) = c^T S(s) + d\,X(s) \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} Y(s) = \left[c^T (sI - A)^{-1} b + d\right] X(s)$

Άρα $\boxed{H(s) = c^T (sI - A)^{-1} b + d}$

και $\boxed{h(t) = c^T e^{At}\, b + d\,\delta(t)}$

- Διαφορετικές Υλοποιήσεις του Ίδιου Sys με $H(s)$

  Είδαμε πως $H(s) = c^T (sI - A)^{-1} b + d$ → προσδιορίζεται από την 3-άδα (c, A, b)

  Έστω $A' = PAP^{-1}$, όπου P αντιστρέψιμος (πίνακας ομοιότητας)

  Τότε μπορώ να δείξω εύκολα πως το σύστημα με $\begin{matrix} A' = PAP^{-1} \\ b' = Pb \\ c'^T = c^T P^{-1} \end{matrix} = (c', A', b')$

  έχει την ίδια $H(s)$

! Σε κάθε συνάρτηση μεταφοράς αντιστοιχίζονται άπειρες υλοποιήσεις.

5.5 Εξίσωση Κατάστασης Μετάβασης

Στα 5.5.1 κ' 5.5.2 είχαμε περιορισμούς < κατάσταση ανεξάρτητη της εισόδου / μηδενικές αρχικές συνθήκες.
Εδώ τους άρουμε και θα μελετήσουμε το σύστημα μας πλήρως.

(κατάστασης) $s^{(1)}(t) = A s(t) + b\,x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} s\,S(s) - s(0) = A\,S(s) + b\,X(s)$

$\Leftrightarrow \boxed{S(s) = (sI-A)^{-1} s(0) + (sI-A)^{-1} b\,X(s)}$ (1)

$\xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}\{\}} \boxed{s(t) = e^{At} s(0) + e^{At} * (b\,x(t))}$ $\rightarrow \int_0^t \Phi(t-\tau)\, b\, x(\tau)\, d\tau$, αν $x(t)$ αιτιατό

(εξόδου) $y(t) = c^T s(t) + d\,x(t)$

$\xleftrightarrow[(1)]{\mathcal{L}\{\}} Y(s) = \underbrace{c^T (sI-A)^{-1} s(0)}_{} + \underbrace{(c^T (sI-A)^{-1} b + d)\, X(s)}_{}$

Απόκριση Μηδενικής Εισόδου y_{zi} οφείλεται μόνο σε αρχικές τιμές του $s(t)$. Άρα $s(0)=0 \Rightarrow y_{zi}=0$

Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης y_{zs} Επηρεάζεται μόνο από την είσοδο $x(t)$

- Ασυμπτωτική Ευστάθεια

Από τους τύπους $S(s) = (sI_d - A)^{-1} s(0) \Rightarrow s(t) = e^{At} s(0)$

παρατηρώ πως η ΦΕΦΕ ευστάθεια δεν είναι αρκετή!

- Στην ΦΕΦΕ ευστάθεια υποθέσαμε πως η κατάσταση του sys επηρεάζεται μόνο από την είσοδο που του εφαρμόζω
- Στην ασυμπτωτική ευστάθεια θα μελετήσω αν το sys θα καταφέρει να "εκφορτίσει ασυμπτωτικά" την αρχική του ενέργεια.

Θα λέμε λοιπόν πως ένα sys είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν:

$\forall s(0),\ \lim_{t\to\infty} s(0)\, e^{At} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0}$

Όμως αφού $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{\det(sI-A)} \mathrm{Adj}(sI-A) \right\}$ τότε $\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda_i$, όπου λ_i ιδιοτιμή του A ισχύει $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$

5.6 Παρατηρησιμότητα κ ελεγξιμότητα (ΓΧΑΣ)

○ Ελεγξιμότητα (κατάστασης)

Θα λέμε πως η κατάσταση ενος συστήματος είναι ελέγξιμη αν μπορούμε να κάνουμε το σύστημα να μεταβεί από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση $s(0)$ σε οποιαδήποτε τελική κατάσταση $s(t_0)$ μέσα σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα t_0, εφαρμόζοντας του κάποια είσοδο $x(t)$

Ορίζουμε το μητρώο ελεγξιμότητας $G(A,b) = [b \;\; Ab \;\; A^2b \dots A^{n-1}b] \in R^{n\times n}$

Αν $\text{rank}\{G(A,b)\} = n \iff G(A,b)$ αντιστρέψιμο, τότε το σύστημα είναι ελέγξιμο

○ Παρατηρησιμότητα

Θα λέμε πως η κατάσταση ενος sys είναι παρατηρήσιμη, αν ξέροντας την είσοδο και την έξοδο του συστήματος σε διάστημα πεπερασμένου μήκους, εστω $[0, t_0]$, τοτε μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική κατάσταση του συστήματος $s(0)$, οποιαδήποτε και αν είναι αυτή.

Ορίζω το μητρώο παρατηρησιμότητας $O(A,c) = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} \in R^{n\times n}$

Αν $\text{rank}\{O(A,c)\} = n \iff O(A,c)$ αντιστρέψιμος τοτε το sys είναι παρατηρήσιμο

3.7 Σταθεροποίηση με Ανάδραση Κατάστασης

Έστω ΓΧΑΣ και οι δυναμικές εξισώσεις του με A, b, c, d.

Αν αυτό το sys είναι ασυμπτωτικά ασταθές $\Rightarrow \exists$ ιδιοτιμές του A, λ_i με $Re\{\lambda_i\} \geq 0$

Αν μπορούσα να μετακινήσω τις ιδιοτιμές (ουσιαστικά πόλους) αριστερά, τότε θα μπορούσα να κάνω το sys ευσταθές. Το κάνω με state feedback.

- Ως είσοδο $x(t)$ βάζω $x(t) + k^T s(t)$ και έχω:

$$\dot{s}(t) = A s(t) + b x(t) + k s(t)$$
$$= \left[A + b k^T\right] s(t) + b x(t)$$

Άρα το νέο $A' = A + bk^T$ πρέπει να έχει ιδιοτιμές με $Re\{\lambda_i\} < 0$

Αυτό δεν μπορώ να το κάνω πάντα! Ικανή συνθήκη είναι το sys να είναι ελέγξιμο.

○ Παράδειγμα Έστω ελέγξιμο ΓΧΑΣ με $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

a) Είναι ασυμπτωτικά ευσταθές;

b) Αν όχι να σταθεροποιηθεί έτσι ώστε ο A να έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$

Απ. a) $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$

Άρα $\lambda_1 > 0 \Rightarrow$ ασυμπτωτικά ασταθές

b) Θα δώσω είσοδο $x(t) = x(t) + k^T s(t)$, $k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$

Άρα $A' = A + bk^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 + 1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A' - \lambda I) = \lambda^2 - k_2 \lambda - k_1 + 1 = 0$$

Για να έχει ρίζες $-1, 2$ πρέπει $\lambda^2 - k_2\lambda - k_1 + 1 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$
$= \lambda^2 + 3\lambda + 2$

$$\Rightarrow \begin{matrix} k_1 = 3 \\ k_2 = -3 \end{matrix}$$

* Ασκ 1.6.b set 1
Ασκ 1.7.α set 2

1.1 Να μελετηθούν ως προς την περιοδικότητα:

α) $x_1(t) = \cos(4\pi t) + \sin(5\pi t)$ (set 1, 1.3.b)

β) $x_2(t) = \sin(t) + \cos(\sqrt{2}\, t)$ (set 1, 1.2.b)

Απ:

α) Έστω T η περίοδος του x_1. Θα ισχύει $x_1(t+T) = x_1(t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(4\pi(t+T)) + \sin(5\pi(t+T)) = \cos(4\pi t + 4\pi T) + \sin(5\pi t + 5\pi T)$

Αρκεί λοιπόν $\begin{cases} 5\pi T = 2\pi k \\ 4\pi T = 2\pi \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} = \frac{k}{\lambda} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 5 \\ \lambda = 4 \end{cases}$

αφού 5, 4 πρώτοι μεταξύ τους

Άρα $T = 2$

β) Με το ίδιο σκεπτικό καταλήγουμε στο $\frac{k}{\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{1}$. όμως $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός,

άρα δεν υπάρχουν ακέραια k, λ που να ικανοποιούν την ισότητα. Άρα το $x_2(t)$ δεν είναι περιοδικό.

1.2 Να μελετηθούν ως προς γραμμικότητα κ' χρονική μεταβλητότητα τα:

α) $y_1(n) = x(n)\, e^{j\omega_0 n}$ β) $y_2(n) = x(n)\, e^{-j\omega_0 n}$ c) $y_3(n) = y_1(n) + y_2(n)$

Απ:

α) Αν στην είσοδο εφαρμόσω τον γρ. συνδυασμό $\alpha x_1(t) + b x_2(t)$ τότε έχω $[\alpha x_1(t) + b x_2(t)]\, e^{+j\omega_0 n} = \alpha(x_1(t) e^{j\omega_0 n}) + b(x_2(t) e^{j\omega_0 n}) = \alpha y_1(n) + b y_2(n)$

Άρα είναι γραμμικό

Για να ελέγξω την Χ.Α. εφαρμόζω στην είσοδο το καθυστερημένο σήμα $x(n-n_0)$ και έχω: $x(n-n_0)\, e^{j\omega_0 n} \neq x(n-n_0)\, e^{j\omega_0(n-n_0)} = y(n-n_0)$

Άρα δεν είναι Χ.Α.

β) Δουλεύω με ακριβώς τον ίδιο τρόπο

c) $y_3(n) = y_1(n) + y_2(n) = x(n)\left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right] = 2x(n)\cos(\omega_0 n)$

A2

1.3 Είναι το σύστημα με απόκριση κρουστική $h(n) = \begin{cases} 1/n, & n \geq 1 \\ 0, & n < 1 \end{cases}$ BIBO-ευσταθές; Ή ισοδύναμα, ανήκει το $h(n)$ στον χώρο ℓ_1

Απ: Θα αξιώσουμε αν $h(n) \in \ell_1$.

Έχω $h(n) \in \ell_1 \Leftrightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \sum_{1}^{+\infty} h(n) = \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Έχω $\sum_{1}^{+\infty} 1/n > \int_1^{\infty} 1/t \, dt = \ln(t) \Big|_1^{+\infty} \left(= \lim_{t \to +\infty} \ln(t) \right) = +\infty$

Άρα $h(n) \notin \ell_1$

1.4 Μελετήστε ως προς την BIBO-ευστάθεια το σύστημα με κρουστική απόκριση την εξής: $h(t) = \dfrac{1}{1+n^2+\log(n^2+1)+(\sin(n))}$

Απ: $h \in \ell_1 \Leftrightarrow \sum |h(n)| < \infty$

Έχω $\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \pi \coth(\pi) < \infty$ Άρα $h \in \ell_1$

A3

1.5 Να χαρακτηριστεί το σύστημα που περιγράφεται από την σχέση $y(n)=\sum_{m=0}^{n} \alpha^{n-m}x(m)$ ως προς α) ΓΧΑ β) αιτιατότητα c) ευστάθεια γ) υλοποιησιμότητα

Απ: α) Έχω: $y(n) = \sum_{m=0}^{n} \alpha^{(n-m)} x(m) = \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha^{(n-m)} u(n-m)\, x(m)$

Άρα είναι ΓΧΑΣ με $h(n) = \alpha^n u(n)$

β) Από τον αρχικό τύπο βλέπω πως η τιμή της εξόδου $y(n)$ εξαρτάται από τιμές της εισόδου στο $(-\infty, n]$. Άρα είναι αιτιατό.

c) Θα ελέγξω αν $h(n) \in \ell_1$

Έχω $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha^n u(n)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha|^n = \frac{1}{1-|\alpha|}$

Άρα για $|\alpha|<1 \Leftrightarrow -1<\alpha<1$, το σύστημα είναι BIBO-ευσταθές

δ) Θα προσπαθήσω να βρω αναδρομικό τύπο για να το υλοποιήσω. Έχω:

$y(n-1) = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha^{n-1-m} x(m)$

$y(n) = \sum_{m=0}^{n} \alpha^{n-m} x(m) = \alpha \sum_{m=0}^{n} \alpha^{n-m-1} x(m) = \alpha\left[\left[\sum_{m=0}^{n-1} \alpha^{n-1-m} x(m)\right] + \alpha^{-1} x(n)\right]$

$\Rightarrow y(n) = \alpha\, y(n-1) + x(n)$

Άρα χρειαζόμαστε 1 θέση μνήμης, 1 προσθέτη, 1 πολ/στή

Άρα το σύστημα μας είναι υλοποιήσιμο!

A4

1.6 Αν η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι $s(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, όταν σε αυτό εφαρμόσουμε την μοναδιαία ακολουθία, τότε ποια είναι η κρουστική του απόκριση;

Απ: Θα πάρω την κρουστική απόκριση αν στην είσοδο εφαρμόσω την $\delta(n)$

Όμως $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

άρα $h(n) = S[\delta(n)] = S[u(n) - u(n-1)] \overset{\text{γραμμικό}}{=} S[u(n)] - S[u(n-1)]$

$\overset{\text{ΧΑ}}{=} n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$

$$= \begin{cases} n\left(\frac{1}{2}\right)^n - (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, & n \geq 2 \\ n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n), & n = 1 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$$

1.7 Να εξεταστεί το σύστημα του ολοκληρωτή, δηλαδή $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

Απ: γραμμικότητα $S[\alpha x_1(t) + b x_2(t)] = \int_{-\infty}^{t} \alpha x_1(\tau) + b x_2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} \alpha x_1(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{t} b x_2(\tau)d\tau$

$= \alpha \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau + b\int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)d\tau = \alpha S[x_1(t)] + b S[x_2(t)]$ Άρα είναι γραμμικό

ΧΑ $S[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{t} x(\tau - t_0)d\tau = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)d\tau = y(t-t_0)$, Άρα είναι ΓΧΑ

Εναλλακτικά, $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)u(t-\tau)d\tau$. Άρα $h(t) = u(t)$ και είναι ΓΧΑ

Αιτιατότητα ΟΧΙ, αφού εξαρτάται και από περασμένες τιμές

Ευστάθεια Για $x(t) = 1$, $y(t) = \int_{-\infty}^{t} 1 d\tau = x\Big|_{-\infty}^{t} = t - (-\infty) = +\infty$, Άρα όχι

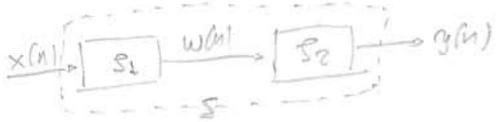
A5

1.8

Άσκηση 1.7.b , set 1

1.9

Έστω 2 αιτιατά, ευσταθή, ΓΧΑΣ S_1, S_2 τα οποία συνδέουμε στη σειρά. Τι ιδιότητες θα έχει το σύστημα που θα προκύψει

Απ: 

Γραμμικότητα

$$S'[\alpha x_1(t)+bx_2(t)] = S_2\big[S_1[\alpha x_1(t)+bx_2(t)]\big] \overset{S_1\ \text{ΓΧΑ}}{=} S_2[\alpha w_1(t)+bw_2(t)] \overset{S_2\ \text{ΓΧΑ}}{=} \alpha y_1(t)+by_2(t)$$. Άρα είναι

Χ.Α $S'[x(n-n_0)] = S_2'\big[S_1[x(n-n_0)]\big] = S_2'[w(n-n_0)] = y(n-n_0)$. Άρα είναι ✓

Αιτιατότητα: Και τα δύο υποσυστήματα εξαρτώνται μόνο από προηγούμενες τιμές των εισόδων τους, άρα και το συνολικό σύστημα το ίδιο.

Ευστάθεια: Για φραγμένη είσοδο $x(n)$, το S_1' θα δώσει φραγμένη έξοδο $w(n)$ ως BIBO-ευσταθές
Για " " $w(n)$, " S_2' " " " " $y(n)$ " " ;

Άρα για φραγμένη είσοδο $x(n)$ έχω φραγμένη έξοδο $y(n)$, άρα το S' είναι BIBO-stable

A6

2.1 Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $x_1(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, $\alpha > 0$

β) $x_2(t) = e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t)$, $\alpha > 0$

c) $x_3(t) = \begin{cases} 1 & , |t| > T \\ 0 & , t < T \end{cases}$

(Set 2, 1.1, 1.2)

Απ. α) $X_1(j\Omega) = MF\{x_1(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}u(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+j\Omega)t}dt = \left| \frac{e^{-(\alpha+j\Omega)t}}{-(\alpha+j\Omega)} \right|_0^{+\infty}$

$\alpha > 0$ $= 0 - \frac{1}{-(\alpha+j\Omega)} = \frac{1}{\alpha+j\Omega}$

β) Ξέρω πως αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\Omega)$ τότε $x(t)\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[X(j(\Omega-\Omega_0)) + X(j(\Omega+\Omega_0))\right]$

Άρα χρησιμοποιώντας και το ερώτημα α, έχω $X_2(j\Omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+j(\Omega-\omega_0)} + \frac{1}{\alpha+j(\Omega+\omega_0)}\right]$

c) $X_3(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-T}^{T} e^{-j\Omega t}dt = \frac{1}{j\Omega} e^{-j\Omega t}\Big|_{-T}^{T} = \frac{e^{j\Omega T} - e^{-j\Omega T}}{-j\Omega} = -2\frac{\sin(\Omega T)}{\Omega} = -2T\,\text{sinc}(\Omega$

2.2 Να βρεθεί ο F^{-1} των ακόλουθων συναρτήσεων:

α) $X_1(j\Omega) = \frac{2}{j\Omega}$ β) $X_2(j\Omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^n}$

Απ. α) $x(t) = F^{-1}\{X_1(j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{j\Omega}e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\omega t)}{j\omega}d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\omega t)}{\omega}d\omega$

$= \frac{1}{\pi}\pi\,\text{sign}(t) = \text{sign}(t)$

β) Ξέρω πως $e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{\alpha+j\Omega}$

Άρα $e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1+j\Omega}$

Όμως από τις ιδιότητες του Fourier ξέρω πως: $(-jt)^n x(t) = \frac{d^n X(j\Omega)}{d\Omega^n}$

Άρα $\left(\frac{1}{\alpha+j\Omega}\right)^{(1)} = (-1)j\frac{1}{\alpha+j\Omega} \xleftrightarrow{F} (-jt)x(t)$

Επομένως $\left(\frac{1}{\alpha+j\Omega}\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\, j^{n-1}\frac{1}{\alpha+j\Omega} \xleftrightarrow{F} (-jt)^n x(t)$

Άρα $\frac{1}{(1+j\Omega)^n} \xleftrightarrow{F} \frac{t^{n-1}e^{-t}u(t)}{(n-1)!}$

A8

2.3 Εστω η κρουστική απόκριση ΓΧΑ συστήματος δίνεται από την σχέση $h(t) = \delta(t) + 5e^{-7t}u(t)$. Ποια είναι η έξοδος αν η είσοδος είναι η $x(t) = 1 + 2\cos(100t)$;

(set 2, 1.9)

Απ: Καταρχήν, υπολογίζω την $H(j\Omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = 1 + \frac{5}{7+j\Omega} = a(\Omega) + b(\Omega)j$

SOS Για σύστημα ΓΧΑΣ δεν παράγει ή καταργεί συχνότητες, απλά αλλάζει το πλάτος και την φάση.

Δηλαδή $S\{A\cos(\Omega_0 t + \phi)\} = \underbrace{|H(j\Omega_0)|A}_{\text{νέο πλάτος}}\cos(\Omega_0 t + \underbrace{\phi + \angle H(j\Omega_0)}_{\text{νέα φάση}})$

Άρα εδώ υπολογίζω
$$|H(j\Omega_0)| = \sqrt{a^2(\Omega_0) + b^2(\Omega_0)}$$
$$\angle H(j\Omega_0) = \arctan\left[\frac{b(\Omega_0)}{a(\Omega_0)}\right]$$

Και δουλεύω ξεχωριστά για κάθε όρο της εισόδου

Για το $x_1(t) = 1$ $\quad \Omega = 0$, άρα την έξοδο $|H(j0)|$

Για το $x_2(t) = 2\cos(100t)$ $\quad \Omega = 100$, " " " $2|H(100j)|\cos(100t + \angle H(100j))$

Τους οποίους προσθέτω για να βρω την τελική έξοδο.

2.4 Ένα ΓΧΑΣ περιγράφεται από την Δ.Ε.: $y^{(2)}(t) + 6y^{(1)}(t) + 8y(t) = 2x(t)$. (1) Να βρεθεί η $h(t)$.

(set 2, 1.10)

Απ: $(1) \xrightarrow{\mathcal{F}\{\}} (j\Omega)^2 Y(j\Omega) + 6j\omega Y(j\Omega) + 8Y(j\Omega) = 2X(j\Omega) \Leftrightarrow H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{2}{(j\Omega)^2 + 6j\Omega + 8}$

$\Leftrightarrow H(j\Omega) = \frac{2}{(j\Omega+4)(j\Omega+2)} = \frac{A}{j\Omega+4} + \frac{B}{j\Omega+2} = \frac{1}{2+j\Omega} - \frac{1}{4+j\Omega}$

Διάσπαση
πολ/ζω με $j\Omega+2 \to B = \frac{2}{j\Omega+4} - \frac{A(j\Omega+2)}{j\Omega+4}\Big|_{j\omega=-2}$

$\Leftrightarrow B = \frac{2}{-2+4} = -2$

Ομοίως $A = \frac{2}{2-4} = -1$

Άρα $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\Omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{2+j\Omega}\} - \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{4+j\Omega}\} = e^{-2t}u(t) + (-e^{-4t})u(t)$

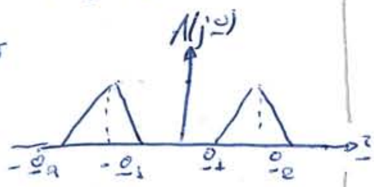
$= [e^{-2t} - e^{-4t}]u(t)$

2.5

Άσκηση 1.11, set 2

2.6

Έστω το σήμα $y(t) = e^{\alpha(t)}x(t)$, με $x(t)>0$, $\alpha(t)\in\mathbb{R}$ και $\alpha(t) \xleftrightarrow{F} A(j\Omega)$, ο οποίος φαίνεται στο σχήμα. Αν $z(t) = \ln(x(t)) \xleftrightarrow{F} Z(j\Omega) \geq 0$, μη αρνητικός και ορθογώνιος με τον $A(j\Omega)$, να βρεθεί σύστημα που να παίρνει είσοδο $y(t)$ και να δίνει έξοδο $x(t)$



Απ: Έχω $\ln(y(t)) = \ln(x(t)e^{\alpha(t)}) = \ln(x(t)) + \ln(e^{\alpha(t)}) = z(t) + \alpha(t)$

Άρα $\ln(y(t)) = z(t) + \alpha(t)$

$$\xrightarrow{FT} F\{\ln(y(t))\} = Z(j\Omega) + A(j\Omega) \quad (1)$$

Από την ορθογωνιότητα έχω $\langle Z(j\Omega) A(j\Omega)\rangle = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} Z(j\Omega)A(j\Omega)\,d\Omega = 0$ (2)

Από την σχέση (1), βλέπουμε πως στα σημεία όπου $A(j\Omega)=0$ ισχύει πως $F\{\ln(y(t))\} = Z(j\Omega)$

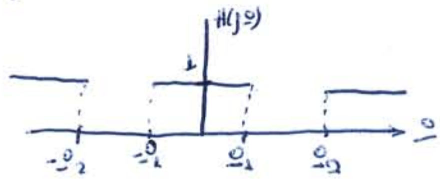
$\Rightarrow \ln(y(t)) = z(t) = \ln(x(t))$

Από την σχέση (2), βλέπουμε πως αφού $A(j\Omega)$, $Z(j\Omega) \geq 0$, τότε στα σημεία όπου $A(j\Omega) \neq 0$, πρέπει $Z(j\Omega) = 0 \Leftrightarrow \ln(x(t)) = 0$ $(\Leftrightarrow x(t) = 1)$

Άρα θα φτιάξουμε το σύστημά μας με τα εξής βήματα:

1) Περνάμε την είσοδο $y(t) = x(t)e^{\alpha(t)}$ από σύστημα $\ln\{\}$ και παίρνουμε έξοδο $\ln(x(t)) + \alpha(t)$,
2) Κατασκευάζουμε φίλτρο τέτοιο ώστε να κρατάει μόνο το $\ln(x(t))$

   Αυτό το φίλτρο είναι το εξής:

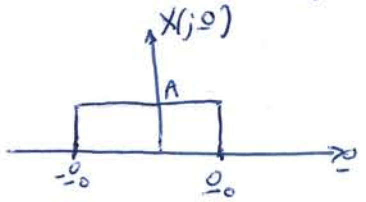


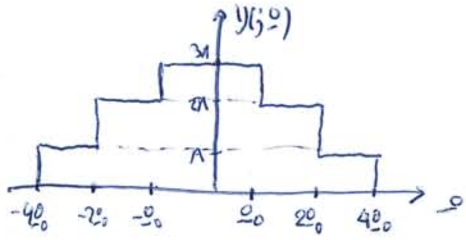
3) Περνάμε το $\ln(x(t))$ από $e^{\{\}}$ και παίρνουμε την έξοδο $x(t)$

Άρα $y(t) \longrightarrow \boxed{\ln\{\}} \longrightarrow \boxed{H(j\Omega)} \longrightarrow \boxed{\exp\{\}} \longrightarrow x(t)$

ΑΙΟ

2.7 Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τα $y(t)$, $x(t)$ αν οι $Y(j\Omega)$, $X(j\omega)$ είναι οι παρακάτω:





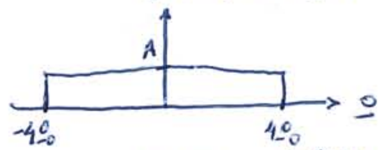
Απ: Από την ιδιότητα κλιμάκωσης του MF ξέρω πως αν $x(t) \xrightarrow{F} X(j\Omega)$

τότε $x(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} X\left(j\frac{\Omega}{\alpha}\right)$

Έχω $x(t) \leftrightarrow X(j\Omega) = \begin{cases} A, & \Omega \le |\Omega_0| \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

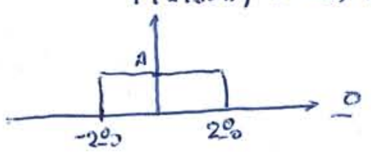
Άρα $x(4t) \longleftrightarrow \frac{1}{4} X\left(j\frac{\Omega}{4}\right) = \begin{cases} \frac{1}{4}A, & \frac{\Omega}{4} \le |\Omega_0| \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4}A, & \Omega \le |4\Omega_0| \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$F\{4x(4t)\} = G(j\Omega)$



Άρα $4x(4t) = \begin{cases} A, & \Omega \le |4\Omega_0| \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$

$F\{2x(2t)\} = Z(j\Omega)$



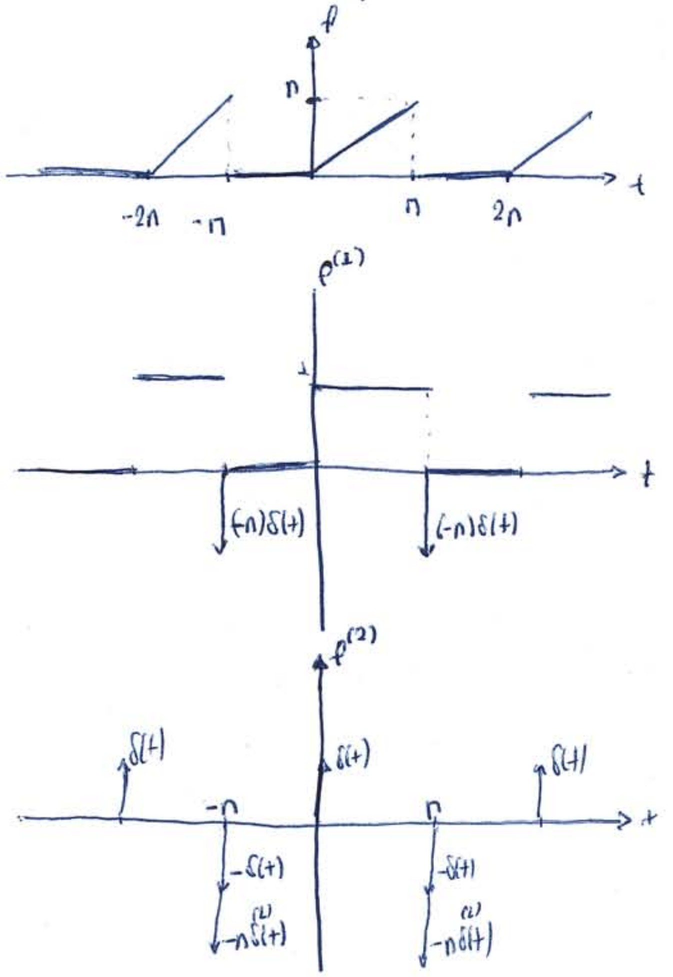
Αντίστοιχα, $2x(2t) = \begin{cases} A, & \Omega \le |2\Omega_0| \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

Επομένως $Y(j\Omega) = X(j\Omega) + G(j\Omega) + Z(j\Omega)$

Άρα $y(t) = 4x(4t) + 2x(2t) + x(t)$

2.8 Να βρεθεί η σειρά Fourier της περιοδικής επέκτασης της $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi, 0] \\ t, & t \in [0, \pi] \end{cases}$

Απ: Μπορώ να υπολογίσω άμεσα τους συντελεστές, αλλά εδώ θα δείξουμε έναν άλλο τρόπο, μέσω της παραγώγου της συνάρτησής μας. Έτσι έχω



Άρα για την $f^{(2)}$ έχω $$c_n^{(2)} = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(2)}(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \overset{T=2\pi,\ \omega_0=1}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^{(2)}(t)\, e^{-jnt}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \left[-\delta(t+\pi) - \pi\delta^{(1)}(t+\pi) + \delta(t) - \delta(t-\pi) - \pi\delta^{(1)}(t-\pi)\right] e^{-jnt}\, dt$$

$=$

Άρα $c_n^{(2)} =$

Όμως $c_n^{(m)} = (jn\omega_0)^m c_n$

Επομένως $c_n = \dfrac{c_n^{(2)}}{(jn)^2}$

A12

3.1 Δίνεται σύστημα με είσοδο $x(t) = e^{-3t}u(t)$ και έξοδο $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

α) Είναι το σύστημα ευσταθές;

β) Ποια διαφορική εξίσωση ικανοποιεί το σύστημα;

Απ: α) $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \frac{1}{s+3}$, $Re\{s\} > -3$

$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$, $Re\{s\} > -1$

Έχω $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1}$

Άρα πόλοι $p_1 = -2$ $p_2 = -1$

Άρα ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στην RoC → άρα έχουμε ευστάθεια.

β) Θα βρω $\frac{(A+B)s + C}{(s+1)(s+2)} = \frac{(A+B)s + C}{s^2 + 3s + 2} = \frac{Y(s)}{X(s)}$

$\Leftrightarrow \quad s^2 Y(s) + 3s\,Y(s) + 2Y(s) = (A+B)s\,X(s) + C\,X(s)$

$\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Leftrightarrow} \quad y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) + 2y(t) = (A+B)\,x^{(1)}(t) + C\,x(t)$

3.2

Ασκήσεις 1-4 του set

Καλές για εμπέδωση Ιδιοτήτων / Στοιχειώδων Μ.Δ.

A14

3.3 Ένα αιτιατό ΓΧΑ με κρουστική απόκριση $h(t)$ έχει τις εξής ιδιότητες
- Για είσοδο $x(t)=e^{2t}$, έξοδος $y(t)=\frac{1}{6}e^{2t}$
- $h^{(1)}(t)+2h(t)=e^{-4t}u(t)+b\,u(t) \quad (1)$

Να βρεθεί η $H(s)$

(1.6, set 3)

Απ: Το σύστημα είναι αιτιατό, άρα για $t<0$, $h(t)=0$. Άρα $h(0^-)=0$

Παίρνω μονόπλευρο ΜΛ $\{(1)\}$ και έχω:

$$sH(s)-h(0^-)+2H(s)=\frac{1}{s+4}+\frac{b}{s}$$

$$\overset{h(0^-)=0}{\Longleftrightarrow} H(s)=\frac{(b+1)s+4b}{s(s+2)(s+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+4}$$

$$=\frac{b}{2s}+\frac{\frac{1-b}{2}}{s+2}-\frac{\frac{1}{2}}{s+4}$$

$$\overset{ΜΛ^{-1}\{\}}{\Longleftrightarrow} h(t)=\left[\frac{b}{2}+\frac{1-b}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-4t}\right]u(t)$$

Τώρα ξέρω πως είναι ΓΧΑ, άρα

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau=\dots=\left[\frac{b}{4}+\frac{1-b}{8}-\frac{1}{12}\right]e^{2t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}=\frac{b}{4}+\frac{1-b}{8}-\frac{1}{12} \Leftrightarrow b=1$$

Άρα $H(s)=\dfrac{2}{s(s+4)}$, $Re\{s\}>0$

3.4 Για το αιτιατό, ΓΧΑ Σ ισχύει: $y^{(3)}(t) + (1+\alpha)\, y^{(2)}(t) + \alpha(1+\alpha)\, y^{(1)}(t) + \alpha^2 y(t) = x(t)$

α) Αν $g(t) = h^{(1)}(t) - h(t)$, τότε πόσους πόλους έχει η $G(s)$;

b) Για ποιες τιμές του α είναι το Σ ευσταθές;

(1.7, set 3)

Απ: α) Για τον ίδιο λόγο με την 3.3, $h(0^-)=0$. Άρα εφαρμόζοντας Μ.Λ. έχω:

$$s^3 Y(s) + (1+\alpha)s^2 Y(s) + \alpha(1+\alpha) s Y(s) + \alpha^2 Y(s) = X(s)$$

$$\Leftrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^3 + (1+\alpha)s^2 + \alpha(1+\alpha)s + \alpha^2}$$

Τώρα έχω $g(t) = h^{(1)}(t) - h(t) \underset{h(0^-)=0}{\overset{L\{\}}{\Longleftrightarrow}} G(s) = sH(s) - H(s) = \frac{s-1}{s^3+(1+\alpha)s^2+\alpha(1+\alpha)s+\alpha^2}$

$$\Leftrightarrow G(s) = \frac{s-1}{(s+1)\underbrace{(s^2+\alpha s+\alpha^2)}_{\Delta=-3\alpha^2}}$$

, άρα έχω πόλους $\begin{cases} -1 \\ \frac{-\beta \pm j\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\alpha \pm j\sqrt{3}|\alpha|}{2} = -\frac{\alpha}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}|\alpha|}{2} \end{cases}$

β) Για να είναι το Σ ευσταθές, αφού είναι αιτιατό πρέπει $Re\{p_i\} < 0$ για κάθε πόλο.

Άρα πρέπει $-\frac{\alpha}{2} < 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$

3.5 Δίνεται η Δ.Ε. $2y^{(2)}(t) + 4y^{(1)}(t) + 4y(t) = 2\delta(t) + 2u(t) - 3u(t-1)$ και $y(0^-) = y^{(1)}(0^-) = 0$. Να βρεθούν οι $y(0^+)$, $y^{(1)}(0^+)$

(1.8.α, set 3)

Απ: Αρχικά υπολογίζω τον $L\{Δ.Ε.\} \rightarrow 2[s^2 Y(s) - s y(0^-) - y^{(1)}(0^-)] + 4[sY(s) - y(0^-)] + 4Y(s) = 4 + \frac{2}{s} - \frac{3}{s}$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{4s+2-3e^{-s}}{2s^3+4s^2+4s}$$

Από το Θ. Αρχικής Τιμής έχω: $y(0^+) = \lim_{s\to+\infty} s Y_s = \lim_{s\to+\infty} \frac{(4s+2)-3e^{-s}}{2s^2+4s+4}$

$$= \lim_{s\to+\infty} \frac{4s+2}{2s^2+4s+4} - \lim_{s\to+\infty} \frac{3e^{-s}}{2s^2+4s+4} = 0$$

$y'(0^+) = \lim_{s\to+\infty} s^2 Y(s) = \ldots$ όμοια $= 2$

A16

4.1 Να βρεθεί ο $X(z)$ αν $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

(1,6, set 4)

Απ: **Α' ΤΡΟΠΟΣ** Παρατηρώ πως $y(n) = y(n-1) + x(n)$. (Το άθροισμα είναι ισοδύναμο ψηφιακού ολοκληρωτή)

$$\xrightarrow{Z\{\}} Y(z) = z^{-1}Y(z) + X(z) \Leftrightarrow Y(z) = \frac{X(z)}{1-z^{-1}}$$

Β' ΤΡΟΠΟΣ $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)u(n-k) = x(n) * u(n)$

Άρα $Y(z) = X(z)\,U(z)$
$= X(z)\,\frac{1}{1-z^{-1}}$

4.2 Να βρεθεί ο $Z\{\}$ των α) $x(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-2)$
β) $x(n) = \frac{1}{n}(-2)^{-n}u(n-1)$

(1.7, set 4)

Απ: α) Έχω $x(n) = n\,y(n) \Leftrightarrow X(z) = -z\,Y^{(1)}(z)$

Είναι $Y(z) = Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-2)\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u(n-2)\right\} = \frac{1}{4}\,\frac{z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

Άρα $X(z) = -z\left(\frac{1}{4}\,\frac{z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right)^{(1)} = \ldots$

β) $x(n) = \frac{1}{n}(-2)^{-n}u(n-1) \Leftrightarrow n\,x(n) = (-2)^{-n}u(n-1) \Leftrightarrow -z\,X^{(1)}(z) = Y(z)$

Έχω: $Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-2)^{-n}u(-n-1)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-2)^{-n}z^{-n} = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty}(-2z)^n = \ldots$
$= \frac{-1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$

Άρα $-z\,X^{(1)}(z) = \frac{-1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$

$\Rightarrow X'(z) = \frac{z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{z+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow X(z) = \ln\left(z+\frac{1}{2}\right)$

A18

4.3 Να βρεθεί ο Ζ{} της $x(n) = \begin{cases} \alpha^{n/10} & , n=0,10,20,\ldots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

(1.8, set 4)

Απ: Έχω $X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n (z^{-10})^n = X(z^{10}) = \frac{1}{1-\alpha z^{-10}}$, $|z| > \alpha^{1/10}$

4.4 Να γενικευτεί το Θ. Αρχικής Τιμής ώστε να βρεθεί η τιμή αιτιατής ακολουθίας στο n=1 και να υπολογιστεί το x(1) όταν $X(z) = \frac{2+6z^{-1}}{4-2z^{-2}+13z^{-3}}$

(1.12, set 4)

Απ: Έχω $X(z) \overset{x(n)\text{ αιτιατή}}{=} x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots$

$\Leftrightarrow X(z) - x(0) = x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots$

$\Leftrightarrow z(X(z) - x(0)) = x(1) + x(2)z^{-1} + x(3)z^{-2} + \ldots$

$\lim_{z\to+\infty} z(X(z)-x(0)) = \lim_{z\to+\infty}(x(1) + x(2)\overset{0}{z^{-1}} + \ldots)$

$\Leftrightarrow \lim_{z\to+\infty} z[X(z) - x(0)] = x(1)$

4.5

Άσκ. 1.17, set 4

4.6

Άσκ. 1.18, set 4