ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
Διδάσκων: Επίκουρος Καθηγητής Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Λύσεις Θεμάτων Περιόδου Σεπτεμβρίου 2014

ΘΕΜΑ 1(30%)

Εφαρμόζοντας τον τελεστή του μετασχηματισμού *Laplace* και στα δύο μέλη της δοθείσας ΔΕ και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα A (τελευταία σελίδα θεμάτων), έχουμε:

$$(s^3 + (1+\alpha)s^2 + \alpha(1+\alpha)s + \alpha^2)\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\},$$

ή ισοδύναμα:

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) = \frac{1}{s^3 + (1+\alpha)s^2 + \alpha(1+\alpha)s + \alpha^2}, \tag{1}$$

όπου $H(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.

(α)(17.5%): Εφαρμόζοντας τον τελεστή του μετασχηματισμού *Laplace* και στα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης, και χρησιμοποιώντας πάλι την ιδιότητα A, έχουμε:

$$\mathcal{L}\{h_1(t)\} = (s+1)\mathcal{L}\{h(t)\},$$

η οποία μετά την αντικατάσταση της (1) γράφεται ως:

$$H_1(s) = \frac{(s+1)}{s^3 + (1+\alpha)s^2 + \alpha(1+\alpha)s + \alpha^2}. \tag{2}$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο παρονομαστής της Σχέσης (2) παραγοντοποιείται ως ακολούθως:

$$s^3 + (1+\alpha)s^2 + \alpha(1+\alpha)s + \alpha^2 = (s+1)(s^2 + \alpha s + \alpha^2)$$

και επομένως η Σχέση (2), που εκφράζει την συνάρτηση μεταφοράς του ζητούμενου συστήματος, μπορεί να γραφεί ως:

$$H_1(s) = \frac{1}{s^2 + \alpha s + \alpha^2} \tag{3}$$

και οι πόλοι του θα ταυτίζονται με τις ρίζες του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς του, δηλαδή:

$$s_i = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{j|\alpha|}{2},\ i = 1, 2, \tag{4}$$

όπου $|x|$ δηλώνει την απόλυτη τιμή του x.

(β)(12.5%): Η ΦΕΦΕ ευστάθεια ενός συστήματος συνεχούς χρόνου συνδέεται με το πρόσημο του πραγματικού μέρους των πόλων του συστήματος. Θεωρώντας ότι το σύστημα είναι αιτιατό για να είναι ένα σύστημα συνεχούς χρόνου ΦΕΦΕ ευσταθές, το πραγματικό μέρος των πόλων του πρέπει να είναι αρνητικό. Επομένως για να είναι το υπό εξέταση σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές αρκεί $\alpha > 0$.

ΘΕΜΑ 2(25%). Λυμένο πολλές φορές στο μάθημα.

1. Χρησιμοποιείστε τη γνωστή ιδιότητα του μετασχηματισμού $Fourier$ σύμφωνα με την οποία η συνέλιξη δύο σημάτων στο πεδίο του χρόνου ισούται με πολλαπλασιασμό των μετασχηματισμών τους.

2. Υπολογίστε τον γενικευμένο μετασχηματισμό $Fourier$ του συρμού του $Poisson$ και

3. τέλος χρησιμοποιώντας γνωστή ιδιότητα των κατανομών έχουμε ότι:

$$\tilde{X}_0(j\Omega) = \frac{2\pi}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_0(j\Omega)\delta(\Omega - k\Omega_0) = \frac{2\pi}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_0(jk\Omega_0)\delta(\Omega - k\Omega_0),$$

από την οποία δικαιολογείται η διακριτή φύση του μετασχηματισμού. Επιπλέον εφαρμόζοντας τον αντίστροφο γενικευμένο μετασχηματισμό $Fourier$ στην παραπάνω σχέση και χρησιμοποιώντας ιδιότητες της γενικευμένης συνάρτησης δέλτα, εύκολα καταλήγουμε στη σειρά $Fourier$ και στην ακόλουθη σχέση:

$$c_k = \frac{1}{T_0}X_0(jk\Omega_0),$$

που συνδέει φασματικές γραμμές και δείγματα του μετασχηματισμού $Fourier$ του αρχικού σήματος.

ΘΕΜΑ 3(20%). Εφαρμόζοντας τον τελεστή του διακριτού χρόνου μετασχηματισμού $Fourier$ και στα δύο μέλη της δοθείσας ΕΔ και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα Β (τελευταία σελίδα θεμάτων), έχουμε:

$$\mathcal{F}\{y(n)\} = Y(e^{j\omega}) = (1 + \alpha e^{-j\omega}))\mathcal{F}\{x(n)\} = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

και επομένως η απόκριση συχνότητας του συστήματος θα είναι:

$$H(e^{j\omega}) = 1 + \alpha e^{-j\omega}.$$

Υποθέτωντας ότι το αντίστροφο σύστημα υπάρχει και συμβολίζοντας με $h_{inv}(n)$ την κρουστική του απόκριση και με $H_{inv}(e^{j\omega})$ την απόκριση συχνότητάς του τότε, θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$H_{in}(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + \alpha e^{-j\omega}}.$$

Αν $|\alpha e^{-j\omega}| = |\alpha| < 1$ η $H_{inv}(e^{j\omega})$ μπορεί να γραφεί ως:

$$H_{inv}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha^n e^{-jn\omega}$$

η οποία εκφράζει τον διακριτού χρόνου μετασχηματισμό $Fourier$ της ακόλουθης αιτιατής ακολουθίας:

$$h_{inv}(n) = (-1)^n\alpha^n u(n),$$

όπου $u(n)$ η βηματική ακολουθία, και η οποία θα είναι η κρουστική απόκριση του αιτιατού συστήματος διακριτού χρόνου που αναζητούμε.

ΘΕΜΑ 4(25%). Για να μελετήσουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια ενός συστήματος, αρκεί να γνωρίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα κατάστασης ή ισοδύναμα τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του, δηλαδή τις ρίζες του ακόλουθου πολυωνύμου:

$$P(s) = \mathcal{D}et(sI - A).$$

Παίρνοντας υπόψην μας το μητρώο A, τον ορισμό της ορίζουσας και μετά από μερικές εύκολες μαθηματικές πράξεις, έχουμε:

$$P(s) = (s - \alpha)^2 + \beta^2$$

ή ισοδύναμα (αφού $\alpha,\ \beta \in R$):

$$P(s) = (s - (\alpha + j\beta))(s - (\alpha - j\beta)).$$

Άρα οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (ή ισοδύναμα οι ιδιοτιμές του πίνακα κατάστασης) είναι:

$$s_{\pm} = \alpha \pm j\beta. \tag{1}$$

Η ασυμπτωτική ευστάθεια ενός συστήματος συνεχούς χρόνου συνδέεται με το πρόσημο του πραγματικού μέρους των ιδιοτιμών του συστήματος. Θεωρώντας αιτιατότητα για να είναι ένα σύστημα συνεχούς χρόνου ασυμπτωτικά ευσταθές, το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών του πίνακα κατάστασης πρέπει να είναι αρνητικό. Επομένως για το υπό εξέταση σύστημα έχουμε:

$$\mathcal{R}eal\{s_{\pm}\} = \alpha$$

και διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για την παράμετρο α του καταστατικού μητρώου:

$$\begin{aligned}
\text{Αν } \alpha &< 0, \text{το σύστημα είναι ασυμπτωτικά εύσταθές.}\\
\text{Αν } \alpha &> 0, \text{το σύστημα είναι ασυμπτωτικά άσταθές.}\\
\text{Αν } \alpha &= 0, \text{το σύστημα είναι οριακά εύσταθές.}
\end{aligned}$$

Επομένως είναι προφανές ότι η παράμετρος α καθορίζει την ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος. Από την άλλη μεριά η παράμετρος β, όπως μπορούμε να δούμε από την Σχέση (1), καθορίζει τη συχνότητα ¨ταλάντωσης¨ του συστήματος και δεν επηρεάζει την ασυμπτωτική ευστάθεια του.