ΜΑΘΗΜΑ 1ο

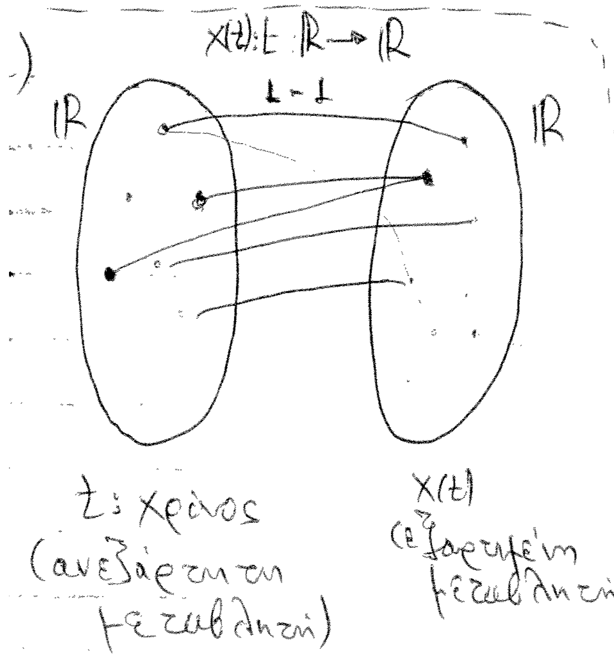
①

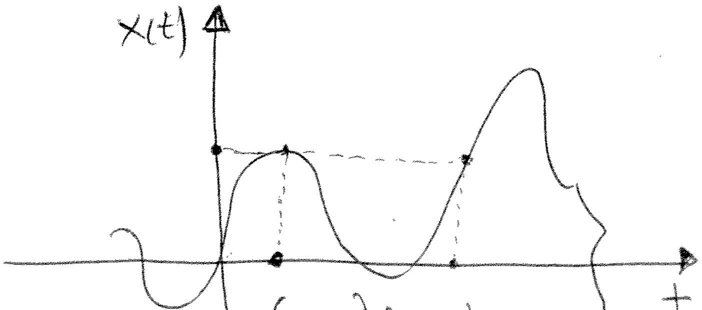
- **Σήμα:** σύνολο τιμών που λαμβάνει μια φυσική πο σύστημα όταν αυτό μεταβάλλεται. ($x(t)$, $x(n)$

1) → Αναλογικό: όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή (δηλ. ο χρόνος t) κι η εξαρτημένη ($x(t)$) λαμβάνουν τιμές σε συνεχές διαστ

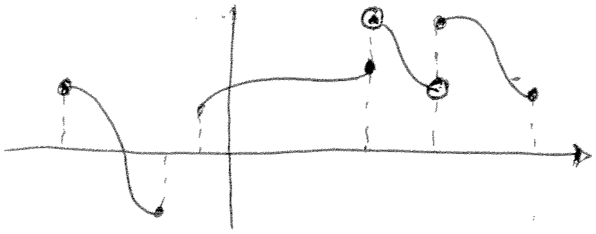
2) → Διακριτού χρόνου: όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή λαμβάν διακριτές τιμές (στο $\mathbb{Z}$) και η εξαρτημένη ($x(n)$) στο $\mathbb{R}$

3) → Ψηφιακά: όταν και η ανεξάρτητη κι η εξαρτημένη μεταβλητή (n, $x(n)$) λαμβάνουν τιμές διακριτές. (στο $\mathbb{Z}$).

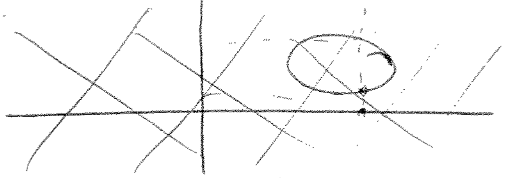




(αναλογικό → στο IR)

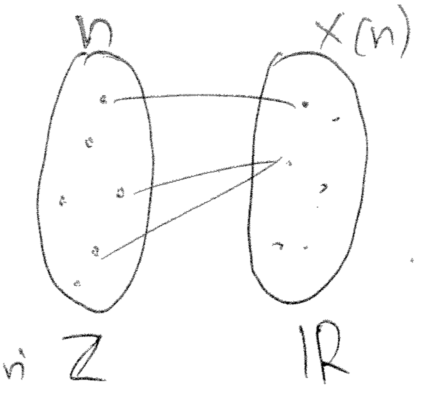


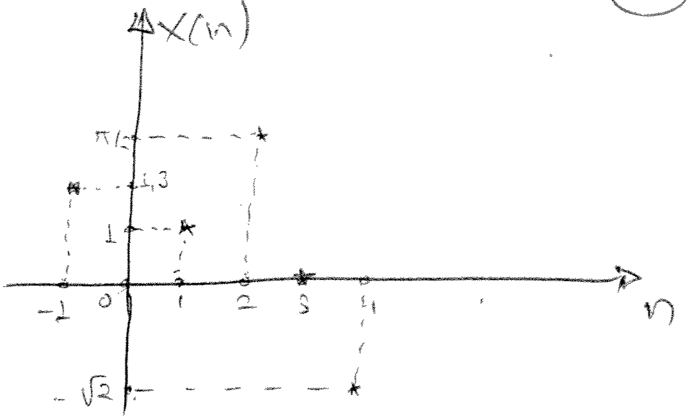
(αναλογικό → σε συνεχή διαστήματα)



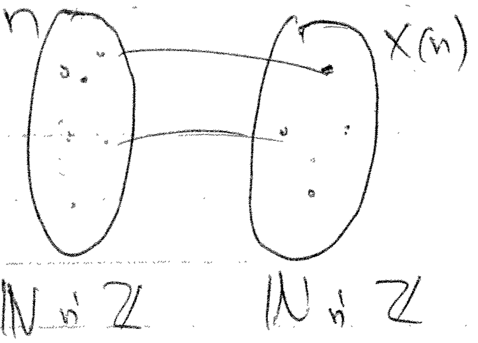
(δεν είναι σήμα)

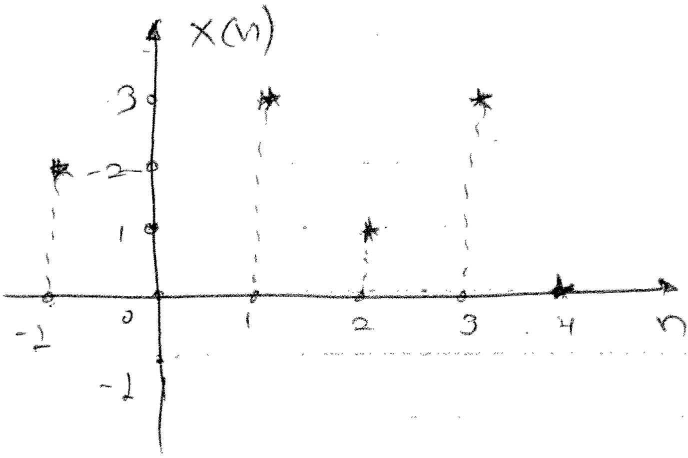
2)





3)

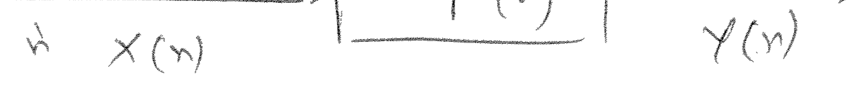




* * *

⊛ <u>Σύστημα</u>: μια οντότητα που μετατρέπει ένα σή μα σε ένα άλλο.

↳ <u>Μαθηματικός φορμαλισμός</u>: είναι μετασχηματισμός f(·) που μετασχηματίζει ένα σήμ εισόδου x(t) (ή x(n)) σε ένα άλλο σήμα εξόδου y(t) (ή y(n))



⊛ Διάκριση Συστημάτων ως προς τα σήματα εισόδου/ εξόδου.

1) ⟶ Αναλογικά συστήματα.
2) ⟶ διακριτού χρόνου "
3) ⟶ Ψηφιακά "
4) ⟶ Υβριδικά " (όταν το σήμα εισόδου είναι διαφορετικής κατηγορίας απ' το σήμα εξόδου).

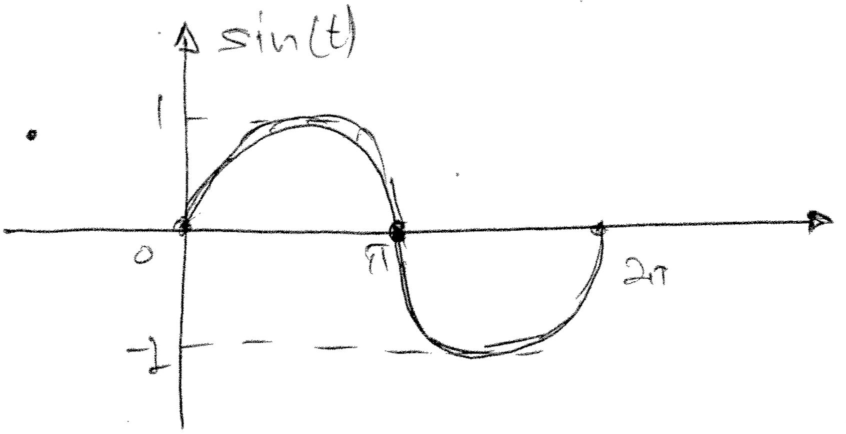
• <u>Περιοδικό Αναλογικό Σήμα</u>: κάθε αναλογικό σή $x(t)$ καλείται περιοδικό αν υπάρχει $T>0$ τέτ ώστε $x(t) = x(t+T)$ $\forall t$. Αφού ισχύει $\forall t$ θα ισχύει και για κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο τ T. Δηλαδή θα είναι: $x(t) = x(t+kT)$, $\forall k \in Z$.

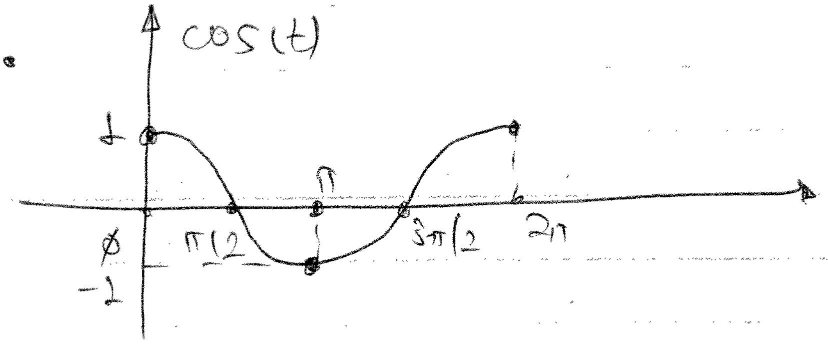
Άρα το $x(t)$ θα είναι περιοδικό $\forall$ ακέραιο πολλ/ο του T.

⊛ <u>Θεμελιώδης ή βασική περίοδος</u>: ο ελάχιστος θετικός $T>0$ για τον οποίο $x(t)=x(t+T)$. Προφαν θα είναι:

$$\underbrace{T_0}_{\text{βασική περίοδος}} = Μ.Κ.Δ.\{kT\}.$$

Βασικές Τριγωνομετρικές Σχέσεις





⊛ **Θα ισχύει:** το $\sin(t)$ είναι περιοδικό με $T=2\pi$.

το $\cos(t)$ " " " $T=2\pi$

το $\tan(t)$ " " " $T=\pi$

⊛ **ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ:** το $\sin(at)$ είναι περιοδικό με $T=\frac{2\pi}{a}$.

το $\cos(at)$ " " " $T=\frac{2\pi}{a}$.

το $\tan(at)$ " " " $T=\frac{\pi}{a}$.

⊛ Δηλ. είναι:

$$\left.\begin{aligned} \sin\left(at+\frac{2\kappa\pi}{a}\right) &= \sin(at) \\ \cos\left(at+\kappa\cdot\frac{2\pi}{a}\right) &= \cos(at) \end{aligned}\right\} \forall \kappa \in \mathbb{Z}.$$

⊕ Συμμετρίες :

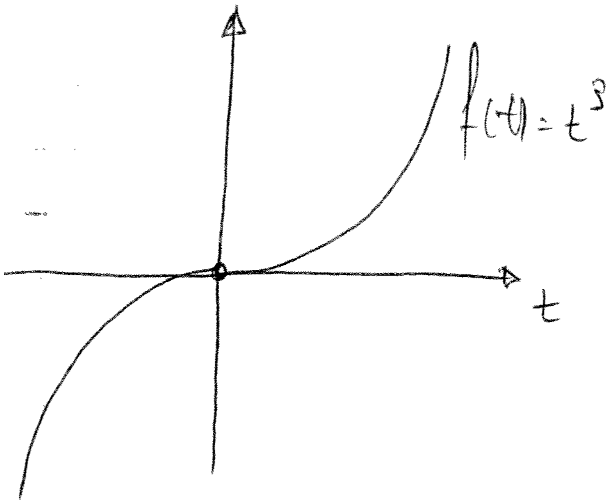
$$\sin(-at) = -\sin(at) \Rightarrow \text{περιττή}$$

$$\cos(-at) = \cos(at) \Rightarrow \text{άρτια}$$

$$\tan(-at) = -\tan(at) \Rightarrow \text{περιττή.}$$

• Περιττή συνάρτηση.

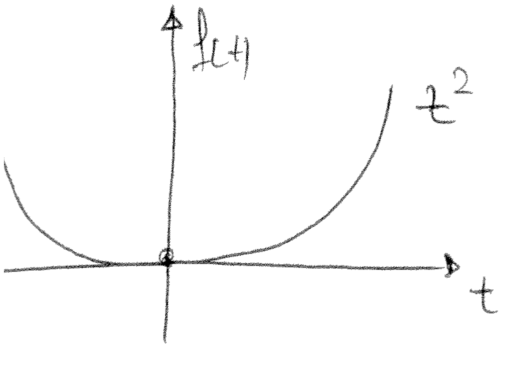
π.χ. $f(t) = t^3 \Rightarrow f(-t) = (-t)^3 = -t^3 = -f(t)$



ΚΑΘΕ ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
ΕΙΝΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΩΣ
ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΑΞ
ΝΩΝ.

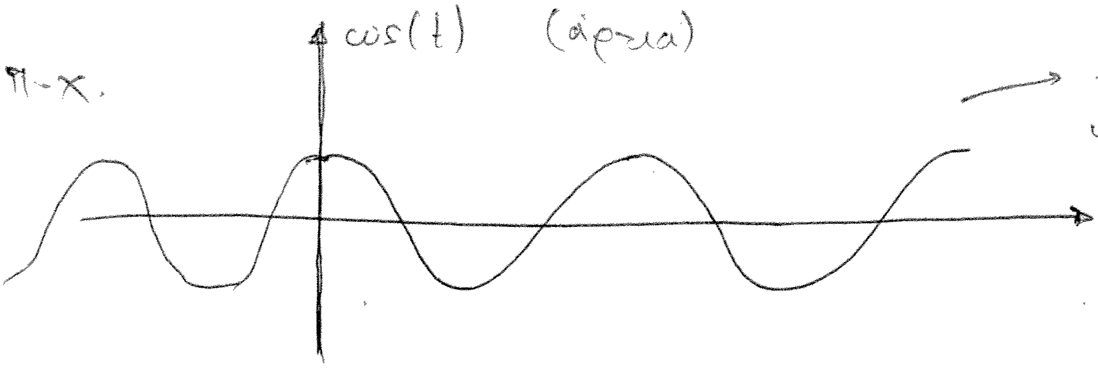
• Άρτια συνάρτηση

π.χ. $f(t) = t^2 \Rightarrow f(-t) = (-t)^2 = t^2 \Rightarrow f(-t) = f(t$



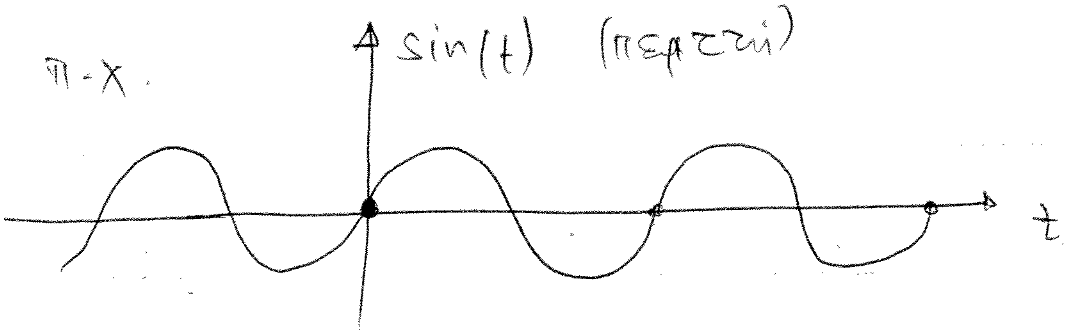
ΚΑΘΕ ΑΡΤΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΙΝΑ
ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ
y'y.

π.χ.



→ Συμμετρική ως προς y'y.

π.χ.



* * *

ΣΧΕΣΕΙΣ EULER

→ $\boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi}$ ←

→ $e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\sin\varphi$

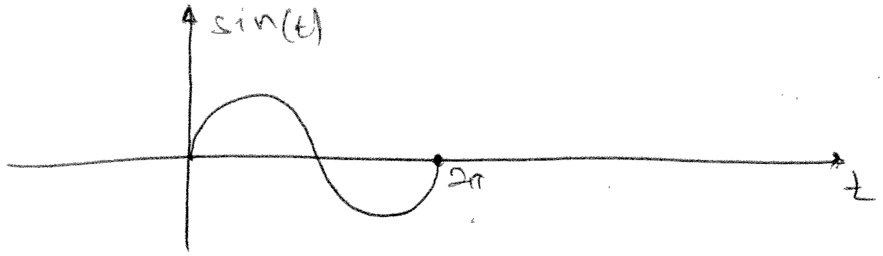
$$\left.\begin{aligned} &\to \cos\varphi = \frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2} \\ &\to \sin\varphi = \frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j} \end{aligned}\right\} \text{αντίστροφες Euler}$$

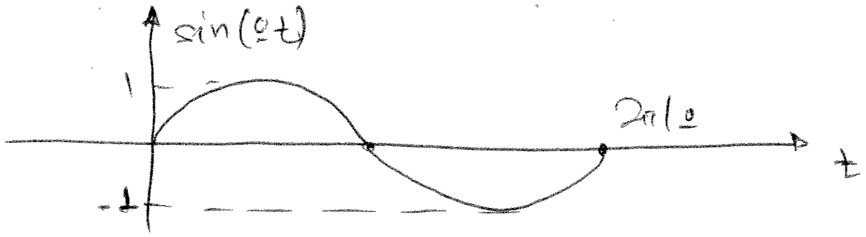
$$\boxed{e^{j\pi} = -1}$$

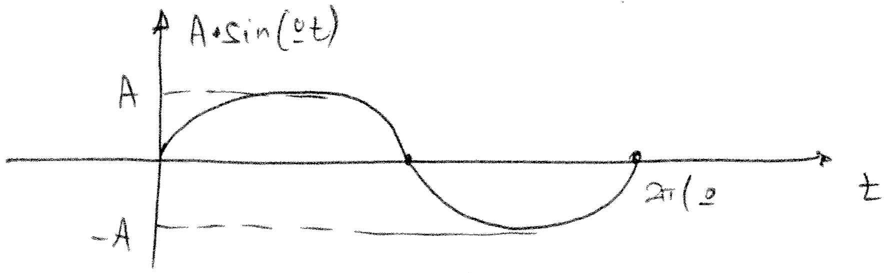
- Ημιτονοειδές Σήμα. : $x(t) = A\cdot\sin(\Omega t + \theta)$.

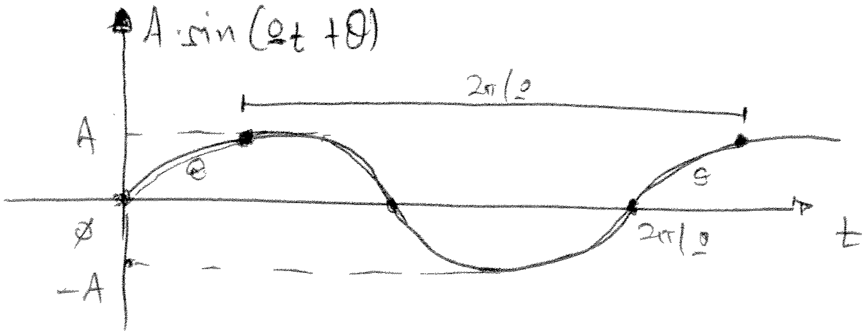
Α: πλάτος του σήματος
Ω: κυκλική συχνότητα $\left(\Omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}\right)$.

θ: σταθερά, φάση του σήματος.





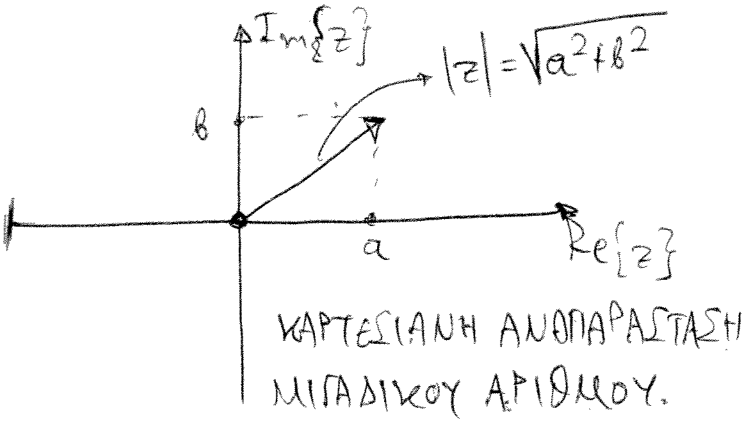




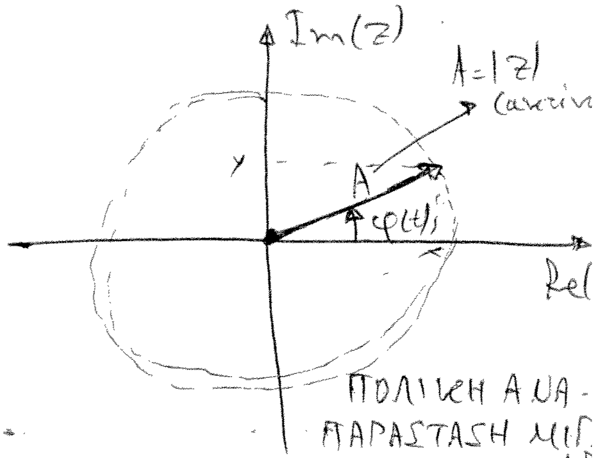
- Μιγαδικό Εκθετικό Σήμα: $x(t) = A\cdot e^{j(\Omega t+\theta)}$

Α: πλάτος του σήματος
Ω: κυκλική συχνότητα. $\left(\Omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{}\right)$.

⊛ Συσχέτιση Ημιτονοειδούς κ' Μιγαδικού Εκθετικού Σήματος



ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ.



ΠΟΛΙΚΗ ΑΝΑ-
ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΓ.
ΑΡ

$$z = a + j \cdot b = Re\{z\} + j \cdot Im\{z\},$$

$Re\{z\}, Im\{z\} \in \mathbb{R}.$

$$z = A \cdot e^{j \cdot \varphi(t)} = |z| \cdot e^{j\,\varphi(t)}$$

φ(t) → γωνιακ
ταχύτητ

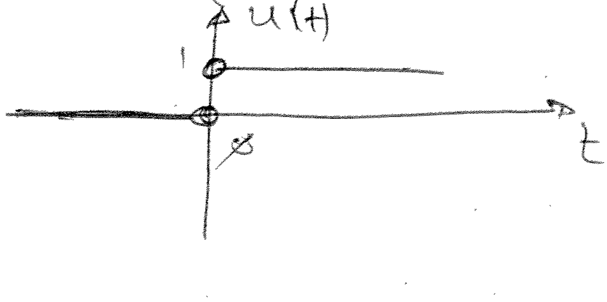
$$X(t) = A \cdot e^{j(\Omega t + \theta)} = A \cdot \left(\cos(\Omega t + \theta) + j \cdot \sin(\Omega t + \theta)\right)$$

*

Βασικές Συναρτήσεις Για συνεχή σήματα

1) Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση.

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



- Στο $t=0$ η $u(t)$ είναι ασυνεχής.

Σχολ. • Για κάθε σήμα $x(t)$ θα είναι:

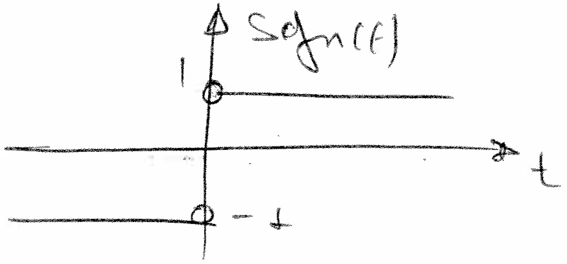
$$\int_{0}^{\infty} x(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{\downarrow} x(t)\cdot \underline{\underline{u(t)}}\,dt$$

ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΟΡΙΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

- Όταν σε σύστημα εφαρμοστεί η $u(t)$ (ως σήμα εισόδου) τότε η έξοδος $y(t)$ καλείται <u>βηματική απόκριση</u>.

2) <u>Συνάρτηση Πρόσημο</u> (signum function).

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \cancel{\geq} > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$



- Στο $t=0$ είναι ασυνεχής.

- Σχέση $u(t) - \mathrm{sgn}(t)$: $\underline{u(t) = \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{sgn}(t)\right)}$.

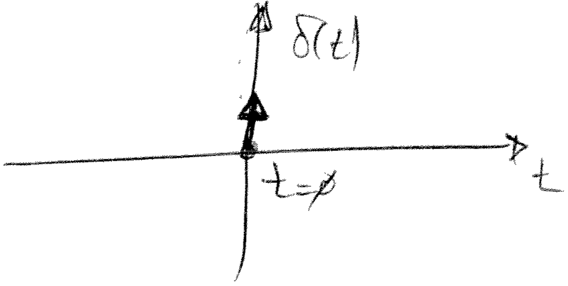
$$u(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}, \quad \mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ -1, & t<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 2, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{sgn}(t)\right) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} =$$

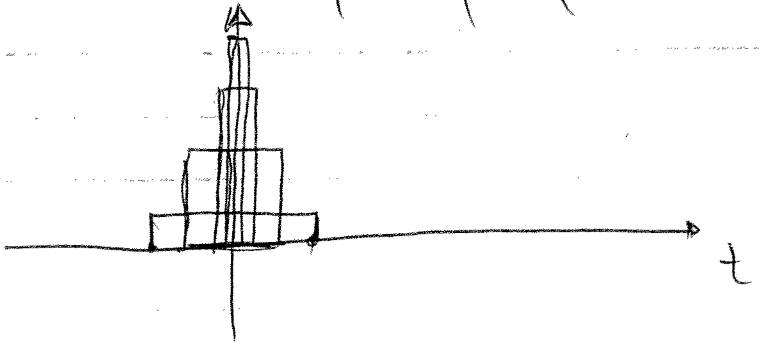
SUPER SOS

3) Κρουστική Συνάρτηση ή Συνάρτηση Dirac ή Συνάρτηση Δέλτα (delta function):

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t=0 \\ 0, & \text{αλλού } (t\neq 0) \end{cases}$$



- "Μοναδιαίο Βέλος" στο $t=0$
- Στην πράξη προσεγγίζεται με σήμα-τετραγωνικό παλμό μικρού πλάτους και μεγάλου ύψου



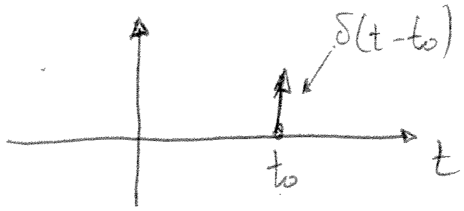
→ • Για οποιοδήποτε σήμα $x(t)$ θα είναι:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t)\,dt = x(0)}\qquad (1)$$

- Γενίκευση της (1):

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t-t_0)\,dt = \underline{\underline{x(t_0)}}}$$

(2)



- Η (1) για $x(t) = 1$ γίνεται :

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1} \quad (3)$$

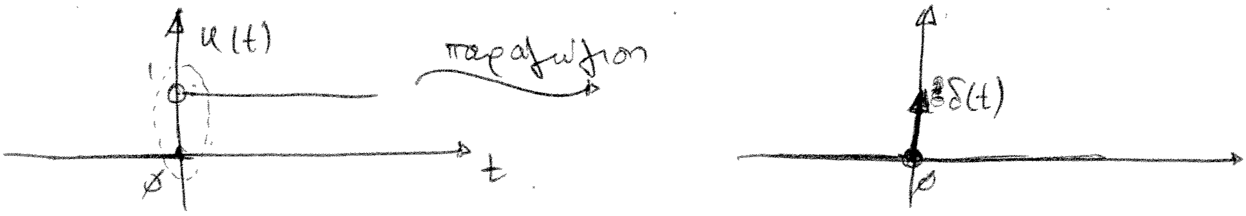
- Για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{R}$ θα είναι: $\underbrace{\delta(nt) = \frac{1}{|n|}\delta(t)}_{(4)}$

- Η (4) για $n = -1$: $\delta(-t) = \frac{1}{|-1|}\delta(t) \rightarrow$

$\rightarrow \underbrace{\delta(-t) = \delta(t)} \Longrightarrow$ Η δ(t) ΕΙΝΑΙ ΑΡΤΙΑ

- Σχέση βηματικής u(t) και κρουστικής δ(t):

$$\boxed{\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)} \quad (5)$$



ΕΚΦΡΑΖΩ ΤΗΝ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΗΣ u(t) ΣΤΟ t=0 ΜΕ ΤΗΝ δ(t).

- Γενίκευση της (5): $n\cdot\delta(t-t_0) = \frac{d}{dt}\left[n\cdot u(t-t_0)\right]$ ∀ $n \in \mathbb{R}$ ⑥

SOS

ΣΥΝΟΨΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΓΙΑ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- $$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΔΕΛΤΑ.

- $$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta^{(n)}(t-t_0)\,dt = (-1)^n \frac{d^{(n)}}{dt} x(t)\Big|_{t=t_0}$$ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ ΔΕΛΤΑ.

- $x(t)\cdot\delta(t-t_0) = x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$

- $\delta(t) = \dfrac{d}{dt}u(t)$

* * *

Περιοδικά Σήματα Διακριτού Χρόνου - Ακολουθίες

κάθε σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$ καλείται περιοδ κι αν υπάρχει $N>0$ **ΑΚΕΡΑΙΟΣ** τέτοιος ώστε $x(n)=x(n+N)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ή $\mathbb{Z}$. Αφού ισχύει $\forall n$ θα ισχύει και για κάθε ακέραιο πολ/σιο $\kappa\cdot N$. Δηλαδή:

$$x(n)=x(n+\kappa N) \;,\; \kappa\in\mathbb{Z}.$$

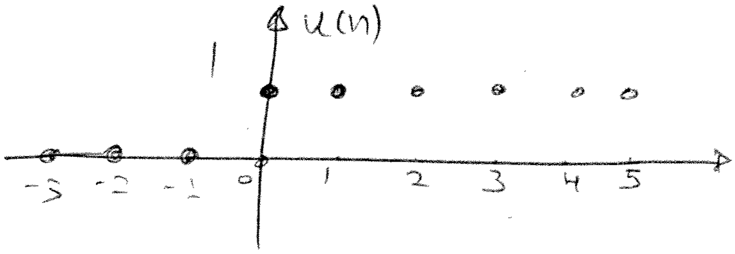
- Θεμελιώδης ή βασική περίοδος: ο ελάχιστος $N>$ ΑΚΕΡΑΙΟΣ για τον οποίο $x(n)=x(n+N)$. $\forall n$.

[illegible]

- Βασικές Συναρτήσεις για σήματα διακριτού χρόνου:

1) Μοναδιαία Βηματική Ακολουθία:

$$u(n) = \begin{cases} +1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



Στο $n=0$ είναι $u(0)=1$.

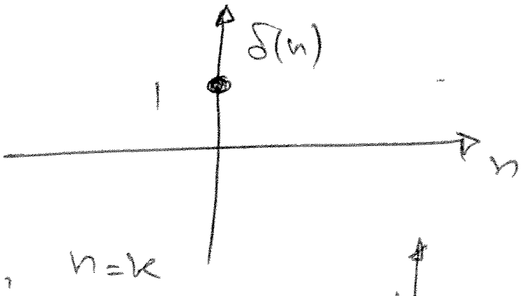
⊛ Για κάθε ακολουθία $x(n)$ θα είναι:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot u(k)$$

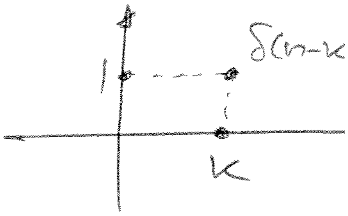
ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΟΡΙΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

2) Κρουστική Ακολουθία ή Ακολουθία Kronecke

$$\delta(n) = \begin{cases} +1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



- Γενίκευση: $\delta(n-k) = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$



- Σχέση $\delta(n)$, $u(n)$: $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$.

⊛ ΧΡΟΝΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ - ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΗΜΑΤΟΣ.

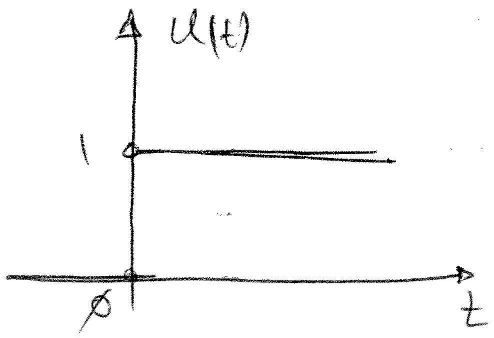
- Η χρονική ολίσθηση οποιουδήποτε σήματος (αναλογικού / διακριτού χρόνου) λαμβάνεται με ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ της γραφικής παράστασης της $x(t)$ (ή $x(n)$) στον άξονα του χρόνου

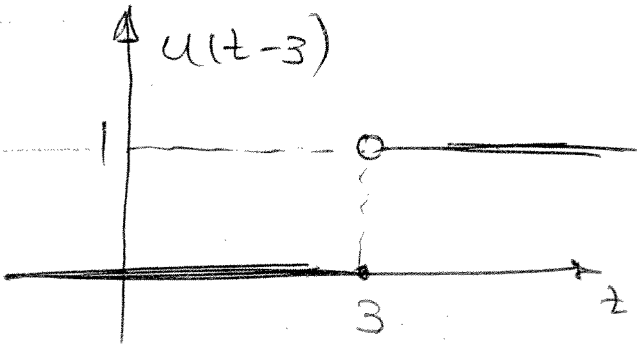
⊛ Η μετατόπιση κατά t_0 προς τα δεξιά σημαίνει καθυστέρηση ($x(t-t_0)$ ή $x(n-k)$).

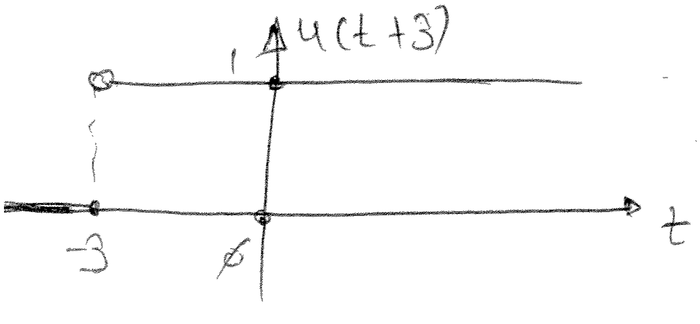
⊛ Η μετατόπιση κατά t_0 προς τα αριστερά σημαίνει προήγηση ($x(t+t_0)$ ή $x(n+k)$).

⊛ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

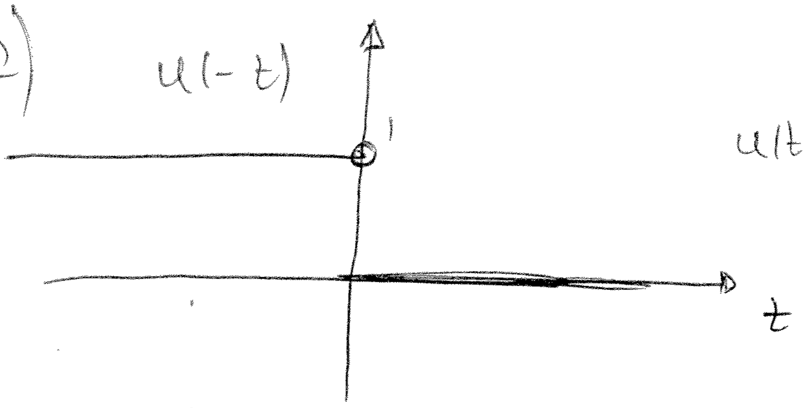
1)





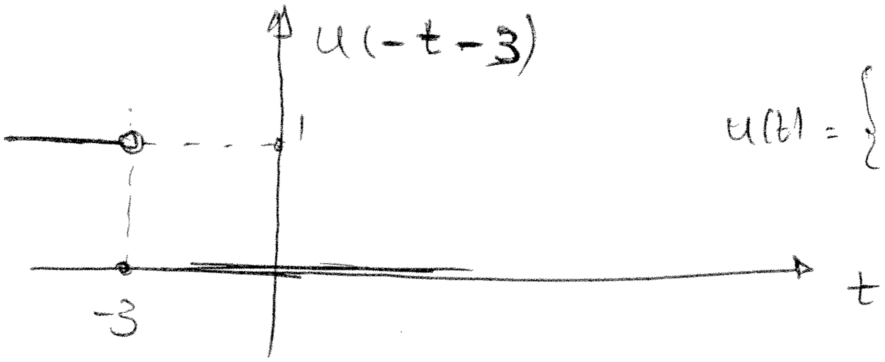


2)



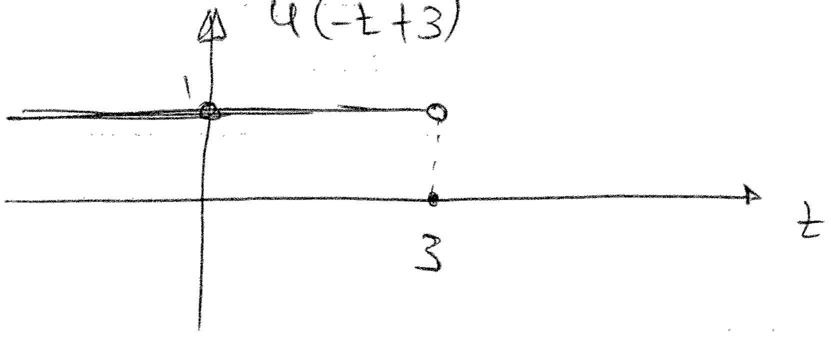
$$u(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \Rightarrow u(-t) = \begin{cases} 1, & -t>0 \\ 0, & -t<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(-t) = \begin{cases} 1, & t<0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$$

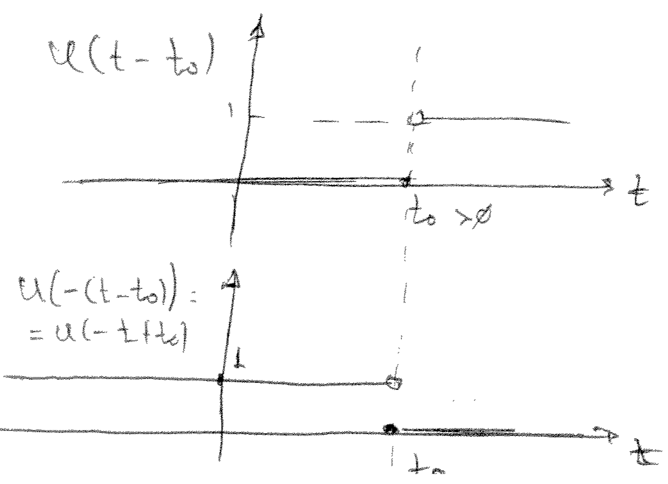


$$u(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \Rightarrow u(-t-3) = \begin{cases} 1, & -t-3> \\ 0, & -t-3< \end{cases}$$

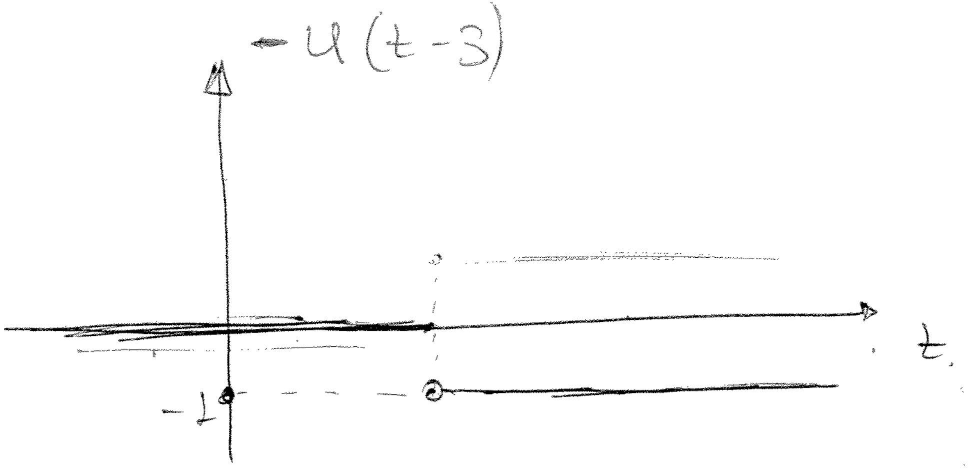
$$= \begin{cases} 1, & t<-3 \\ 0, & t>-3 \end{cases}$$



⊛



Όταν το "–" είναι εντό
της ανεξάρτητης μεταβ
της τότε η νέα γραφ
και παράσταση είναι
κατοπτρική της πρώτη
ως προς την κατακόρυ-
φη ευθεία $y = t_0$.



Όταν το "−" είναι επί της εξαρτημένης μεταβλητής τό η γραφική παράσταση της νέας συνάρτησης θα είναι κατοπτρική της προηγούμενης ως προς τον άξονα x'x.

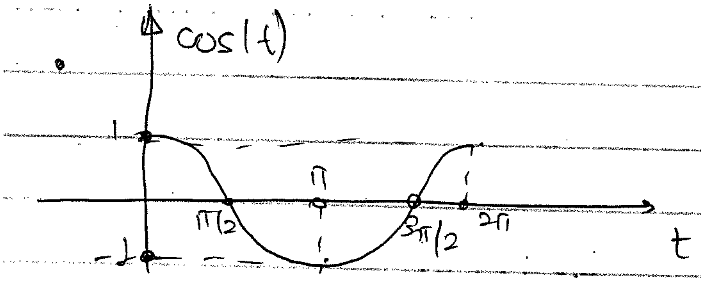
ΜΑΘΗΜΑ 2 :

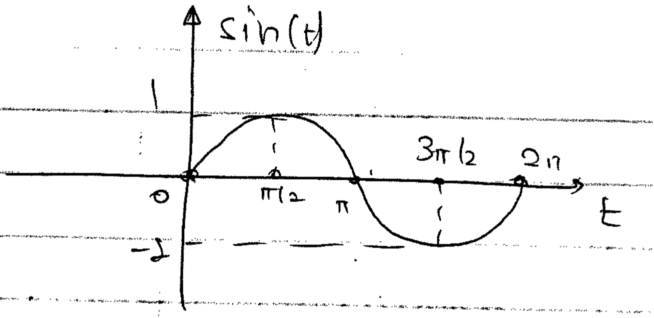
Σχέσεις Euler:

- $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$.

- $\cos\varphi = \dfrac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$
- $\sin\varphi = \dfrac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$

$\Big\}$ αντίστροφες Euler.





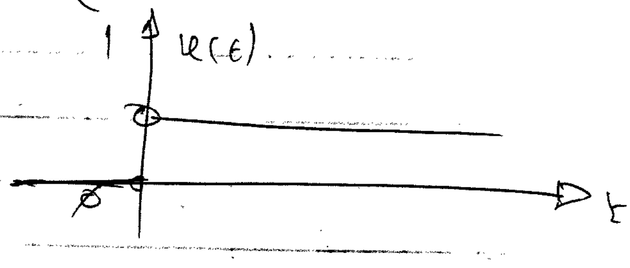
- $\cos(\pi n) = (-1)^n$
- $\sin(\pi n) = 0$
- $\cos(2\pi n) = 1$
- $\sin(2\pi n) = 0$.

- $e^{j\pi n} = \cos(\pi n) + j\sin(\pi n) = (-1)^n$
- $e^{-j\pi n} = \cos(-\pi n) + j\sin(-\pi n) = (-1)^n$.
- $\underline{e^{2j\pi n}} = \cos(2\pi n) + j\sin(2\pi n) = 1 = \underline{e^{2j\pi n}}$.

Βασικές Συναρτήσεις

1) Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



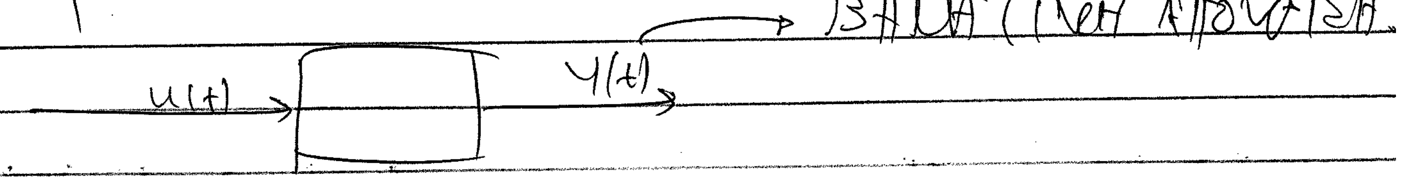
• Για $t=0$ είναι ασυνεχής.

(*) • Για κάθε σήμα $x(t)$:

$$\int_{0}^{\infty} x(t)\,dt = \int_{\boxed{-\infty}}^{\infty} x(t)\underline{u(t)}\,dt$$

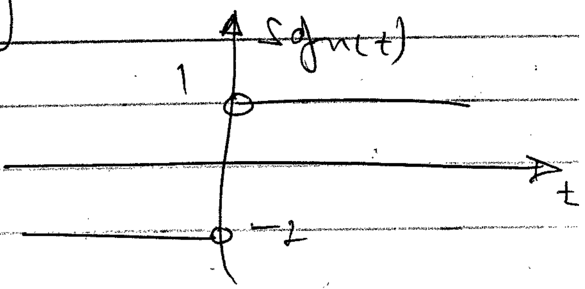
$\longrightarrow$ επέκταση.

• Για $x(t)$ είσοδο σε σύστημα η $y(t)$ έξοδος καλείτα βηματική ΑΠΟΚΡΙΣΗ.



2) Συνάρτηση προσήμου sgn(t).

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ -1, & t<0 \end{cases}$$



• Στο $t=0$ είναι ασυνεχής

• Σχέση u(t) – sgn(t): $u(t) = \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{sgn}(t)\right)$.

(*) Κατασκευαστικά:

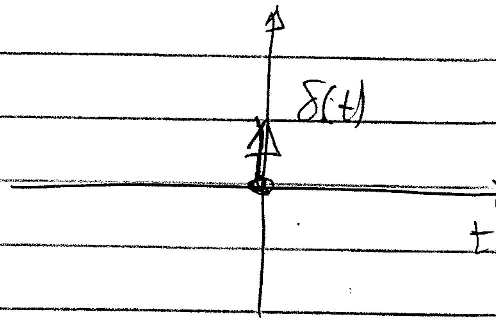
$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ -1, & t<0 \end{cases} \Rightarrow 1+\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1+1, & t>0 \\ 1-1, & t<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1+\mathrm{sgn}) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot 2, & t>0 \\ \frac{1}{2}\cdot 0, & t<0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases} = u(t).$$

SOS

3) Συνάρτηση Dirac ή Συνάρτηση Δέλτα ή Συνάρτηση Κρουστική

- $\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t=0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$



→ Στο t=0 συμβολίζεται με "βέλος" μοναδιαίο ύψους.

→ Για την δ(t) ισχύει: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- Για οποιοδήποτε σήμα x(t) συνεχές στο t=0 θα είναι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t)\,dt = x(0) \quad ①$$

- Για $x(t)=1$ η ①: $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot\delta(t)\,dt = 1}$ ②

- Γενίκευση της ①: $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)}$ ③

- Επίσης: $\boxed{\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\cdot\delta(t)}$ ④

- Για $n = -1$ η ④ δίνει: $\delta(-t) = \frac{1}{|-1|} \cdot \delta(t) \Rightarrow$

$\rightarrow \underbrace{\delta(-t) = \delta(t)}$ $\Rightarrow$ ΑΡΤΙΑ.

- Επίσης: $\boxed{\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)}$ ⑤

- Γενίκευση της ⑤: $n \cdot \delta(t - t_0) = \frac{d}{dt} [n \cdot u(t - t_0)$

$\forall n \in \mathbb{R}$.

⑥

- Ιδιότητα παραγώγισης: δέλτα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t - t_0)\, x(t)\, dt = (-1)^n \cdot \frac{d^{(n)}}{dt} x(t) \Big|_{t = t_0}$$

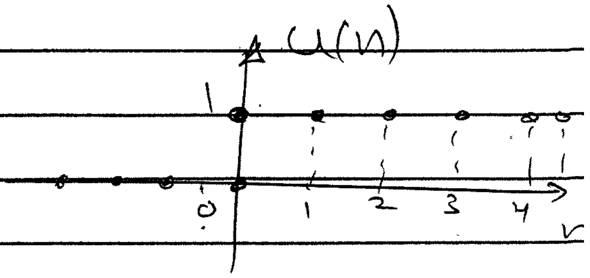
⑦

ξος ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΔΕΛΤΑ: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)\, dt = x(t_0)$.
- ΙΔ. ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t - t_0)\, x(t)\, dt = (-1)^n \cdot \frac{d^{(n)}}{dt} x(t) \Big|_{t=}$
- $\boxed{x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)}$

· Βασικές Συναρτήσεις - Ακολουθίες για σήματα διακριτού χρόνου:

1) $u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$



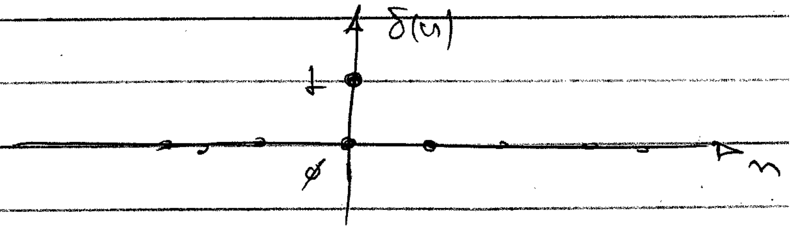
↓

Μοναδιαία Βηματική Ακολουθία

(*) Η u(n) ορίζεται στο $n = 0$ $(u(0) = 1)$.

2) Κρουστική ακολουθία ή ακολουθία Kronecker

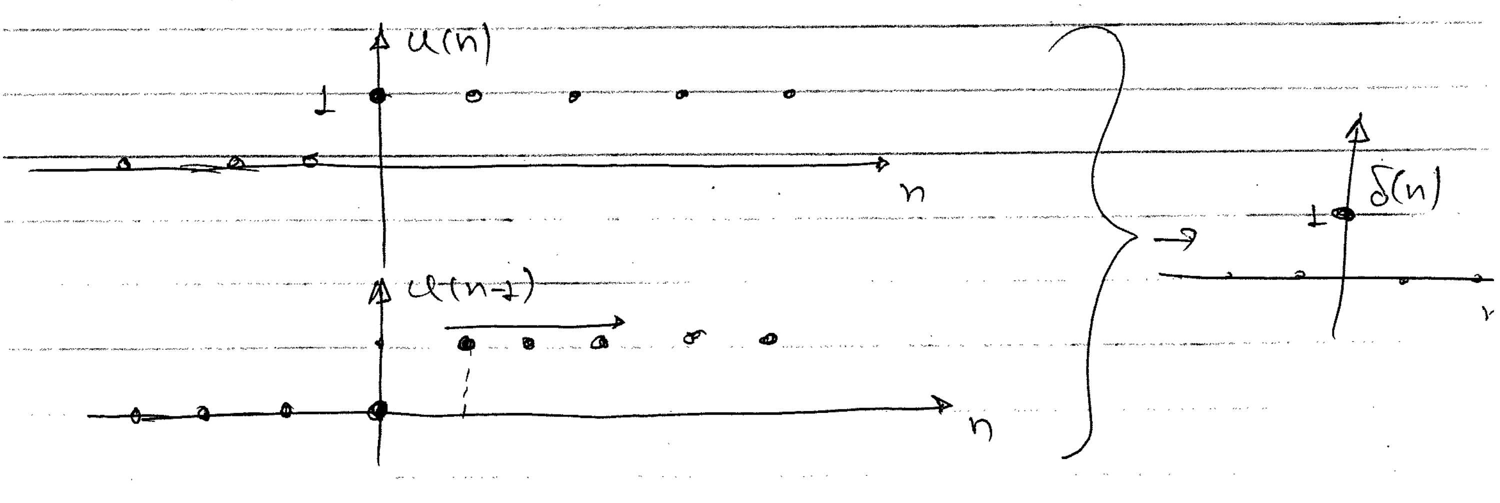
$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$



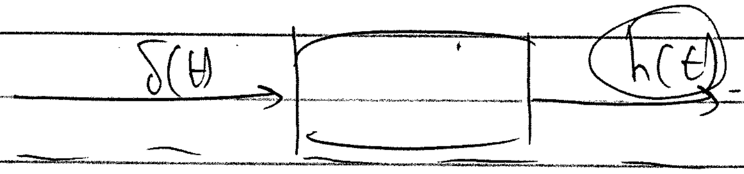
~~Εξίσωση~~

· Η δ(n) ορίζεται στο $n = 0$ και κάνει 1.

· Σχέση δ(n) - u(n): $\boxed{\delta(n) = u(n) - u(n-1)}$



- Αν σε ένα σύστημα θέσω ως σήμα εισόδου την $x(t) = \delta(t)$ το σήμα εξόδου $y(t)$ καλείται **ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ $h(t)$**



ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

1) Περιοδική ακολουθία: ένα οποιοδήποτε σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$ είναι περιοδικό αν και μόνο αν $\exists N$ ακέραιο ισχύει:

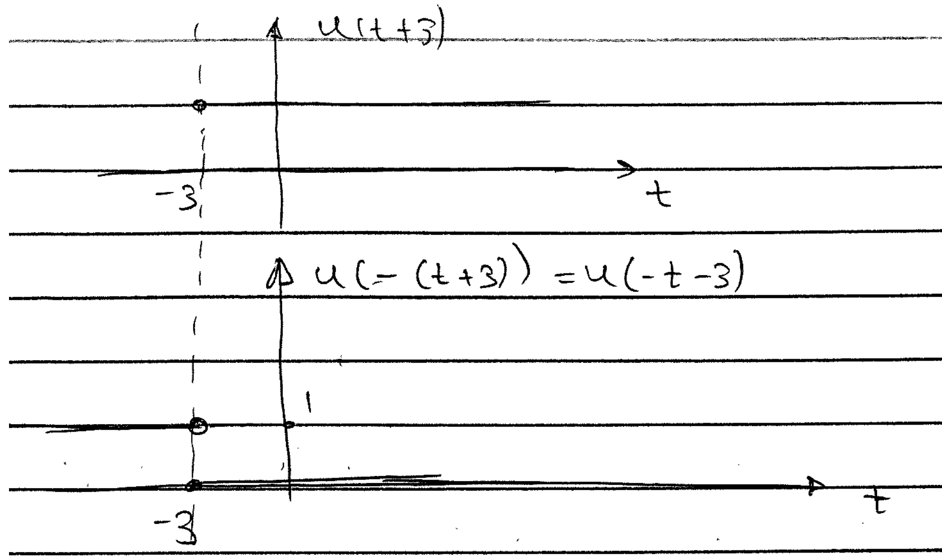
$$x(n) = x(n+N) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Αφού ισχύει $\forall n \in \mathbb{Z}$ θα ισχύει και για κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο του N. Άρα:

$$X(n) = x(n + k \cdot N), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ο ελάχιστος θετικός N (ΑΚΕΡΑΙΟΣ) καλείται βασική περίοδος του σήματος $x(n)$.

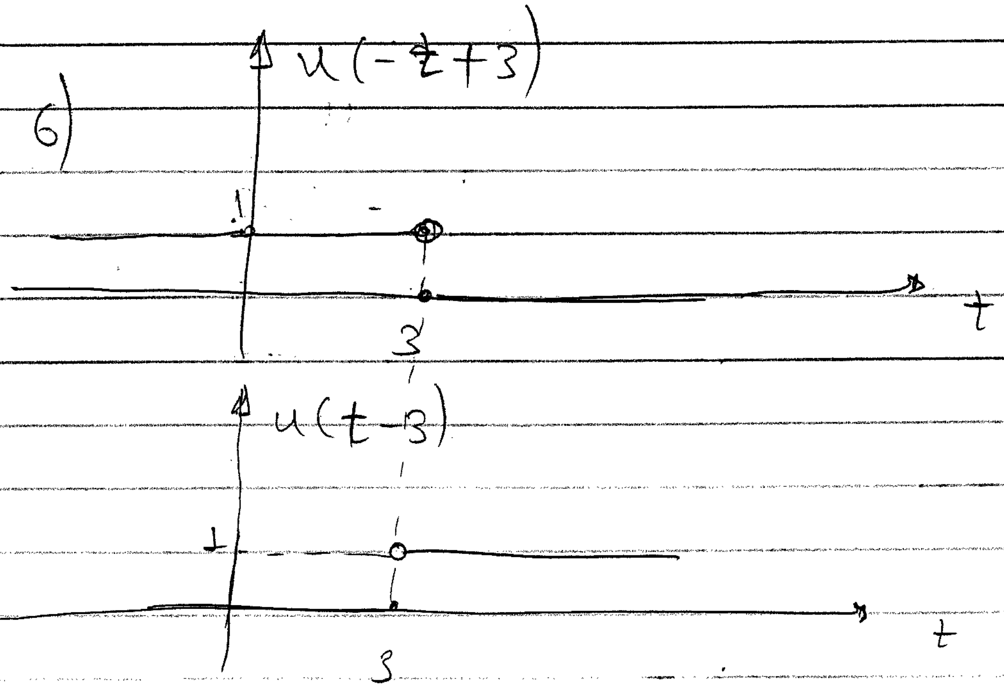
Π.χ.: $\sin(0,2n) \longrightarrow N = \frac{2\pi}{0,2} = 10\pi \rightarrow$ δεν είναι ακέραιος. Άρα το $\sin(0,2n)$ δεν είναι περιοδικό.



Οι γρ. παραστά-
σεις είναι κατο-
πτρικές ως πρός
~~την~~ κατακόρυφη
ευθεία που περνά
από το t_0

$[x(t+t_0), x(-t-t_0)]$

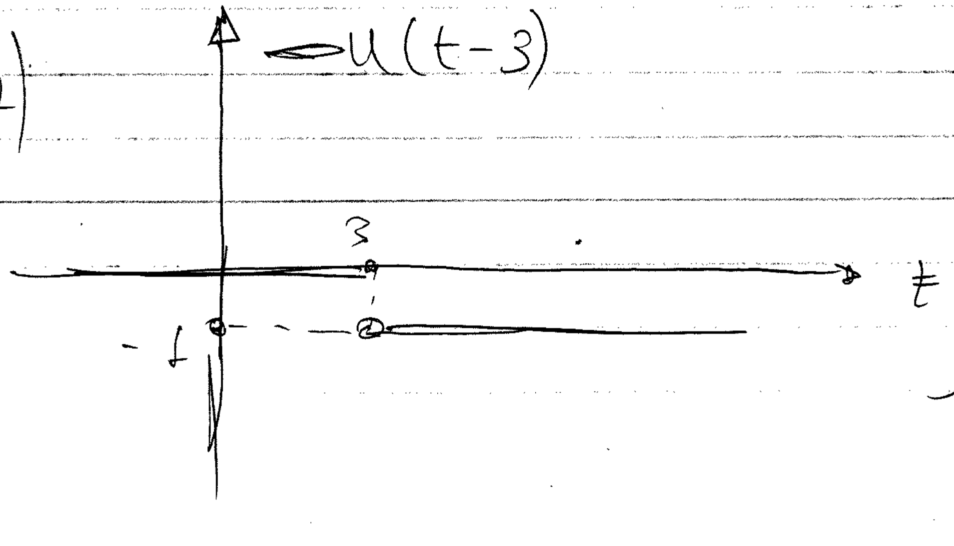
6)



Οι γρ. παραστά-
σεις είναι
κατοπτρικές
ως πρός το
ευθεία.

$(x(t-t_0), X(-t$

7)



"Όταν το "−"
είναι στην
εξαρτημένη
μεταβλητή,
τότε έχω κατο-
πτρισμό ως πρός
τον x'x.

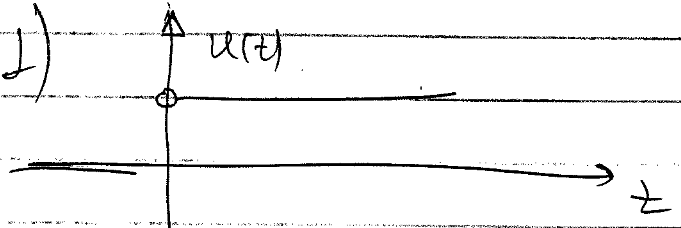
*) ΧΡΟΝΙΚΗ ΟΛΙΣΘΗΣΗ - ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

- Χρονική ολίσθηση ενός οποιουδήποτε σήματος ή ακολουθίας λαμβάνεται με μετατόπιση της γραφικής του παράστασης στον άξονα του χρόνου.

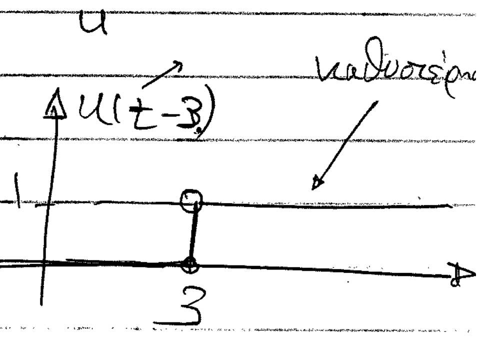
- Η μετατόπιση κατά δεξιά κατά t μονάδες σημαίνει καθυστέρηση. $(x(t-t_0)) \rightarrow t_0>0$
- Η μετατόπιση κατά αριστερά κατά t μονάδες σημαίνει προήγηση. $(x(t+t_0)) \rightarrow t_0>0$.

Παραδείγματα.

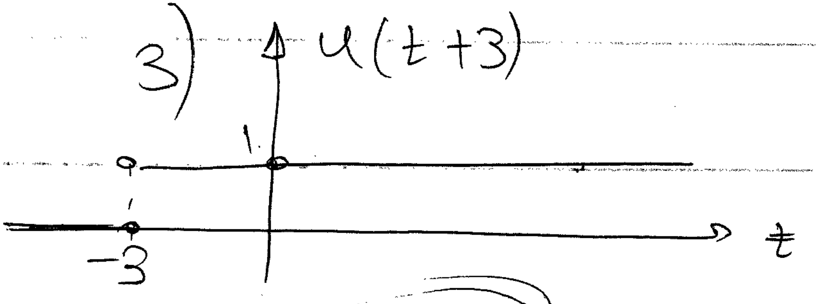
1)



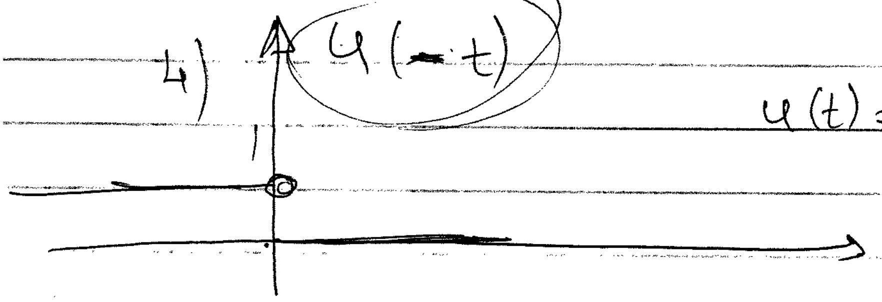
2)



3)



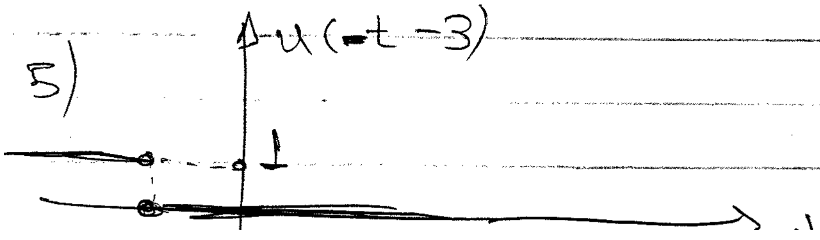
4)



$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases} \Rightarrow u(-t)=\begin{cases}1, & -t>\\ 0, & -t<\end{cases}$$

$$\Rightarrow u(-t)=\begin{cases}1, & t<0\\ 0, & t>0\end{cases}$$

5)



3) Αιτιατά συστήματα: είναι τα συστήματα για τα οποία το σήμα εξόδου y(t) εξαρτάτα απ' το σήμα εισόδου x(t) στην ίδια χρονική στιγμ και σε παρελθούσες.

(π.χ. ο πυκνωτής).

4) Μη αιτιατά συστήματα: το σήμα εξόδου y(t) εξ τάται απ' την είσοδο στη στιγμή t και από μέλλουσες χρονικές στιγμές της εισόδου

(π.χ. ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ).

5) Γραμμικά συστήματα: ένα οποιοδήποτε σύστημα λέγεται γραμμικό αν κ' μόνο αν δοθέντων 2 σημάτων εισόδου (ή και περισσοτέρων), η απόκριση στο γραμμικ συνδυασμό των εισόδων θα ισούται με το γραμμικό συνδυασμό των επιμέρους αποκρίσεων.

π.χ. $\xrightarrow{x(t)} \boxed{f(.)} \xrightarrow{y(t)}$

(ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΘΕΣΗΣ)

μετασχηματισμ

$$x(t) = \underbrace{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)} \xrightarrow[\text{γραμμικό}]{\text{σύστημα}} f\{x(t)\} =$$

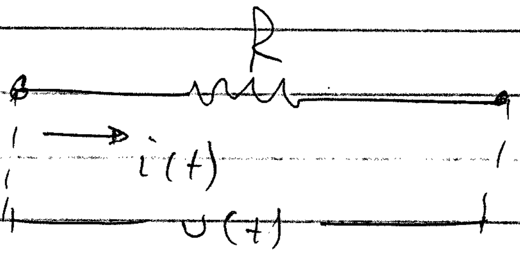
$$= f\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = \underbrace{a_1 f\{x_1(t)\} + a_2 f\{x_2(t)}$$

ίδιες σταθερές?

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ.

1). **Στατικό ή σύστημα χωρίς μνήμη:** ένα σύστημα για το οποίο για κάθε t, το σήμα εξόδου y(t) εξαρτάται μόνο από την τιμή του σήματος x(t) στην ίδια χρονική στιγμή.

Π.Χ.

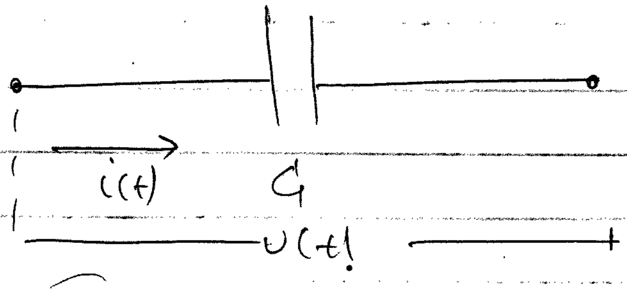


i(t): σήμα εισόδου
υ(t): " εξόδου

$$\underset{\sim\sim}{υ(t)} = i(t) \cdot R .$$

2) **Δυναμικό σύστημα ή σύστημα με μνήμη:** ένα σύστημα για το οποίο η έξοδος y(t) τη στιγμή t εξαρτάται από τιμές του x(t) στην ίδια χρονική στιγμή και από άλλες χρονικές στιγμές (παρελθούσες ή/και μέλλουσες).

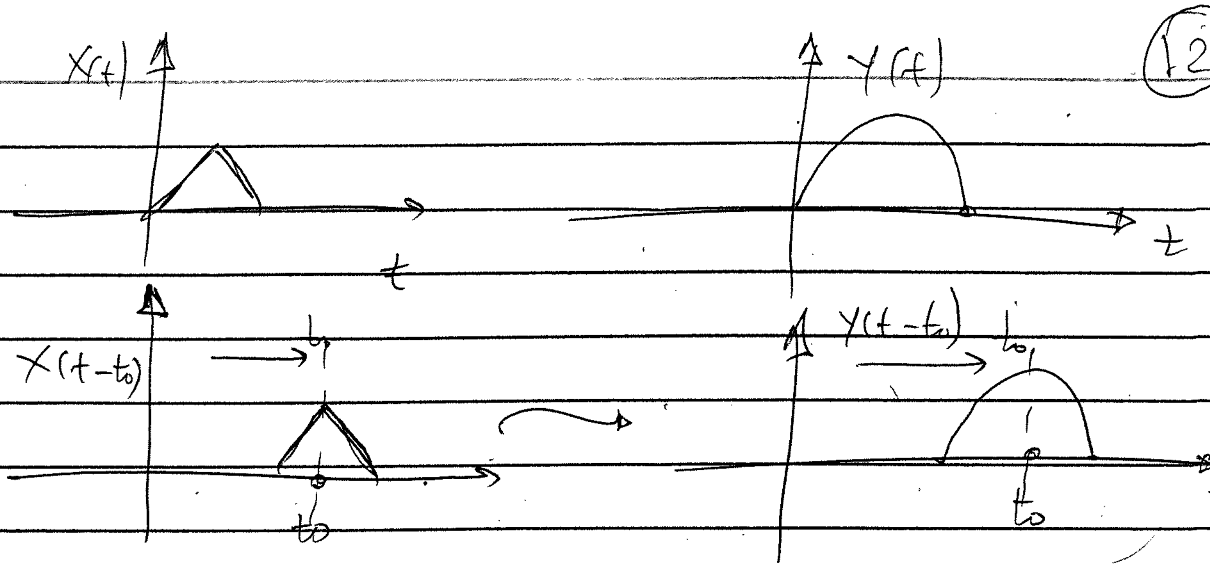
Π.Χ.



i(t): σήμα εισόδου
υ(t): σήμα εξόδου

$$υ(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau .$$

Π.χ



⊛ ⊛ ⊛

Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα (ΓΧΑΣ)

- Για κάθε ΓΧΑΣ ισχύει: $\boxed{y(t) = x(t) \overset{\text{συνέλιξη}}{*} \underbrace{h(t)}_{\text{κρουστική απόκριση}}}$

⊛ Συνέλιξη σημάτων:

$$\cdot\ a(t) * b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)\cdot b(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} b(\tau)\cdot a(t-\tau)d$$

- Ιδιότητες Συνέλιξης:

1) Αντιμεταθετική: $a_1(t) * a_2(t) = a_2(t) * a_1(t)$

2) Προσεταιριστική: $a_1(t) * \left(a_2(t) * a_3(t)\right) =$

$$= \left(a_1(t) * a_2(t)\right) * a_3(t)$$

3) Επιμεριστική

Π.χ. Πυκνωτής:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} \underline{i(\tau)}\, d\tau.$$

Αν $i(t) = a_1 i_1(t) + a_2 i_2(t) \Longrightarrow v(t) = a_1 \cdot v_1(t) + a_2 \cdot v_2(t)$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} \left(a_1 i_1(\tau) + a_2 i_2(\tau)\right) d\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} a_1 i_1(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} a_2 i_2(\tau)\, d\tau = a_1 \underbrace{\left(\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_1(\tau)\, d\tau\right)}_{v_1(t)} + a_2 \underbrace{\left(\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_2(\tau)\, d\tau\right)}_{v_2(t)}$$

$\Rightarrow$ ο πυκνωτής είναι γραμμικό σύστημα.

5ος

6) Χρονικά αμετάβλητα: ένα σύστημα είναι ΧΑ αν και μόνο αν οι χρονικές ολισθήσεις του σήματος εισόδου συνεπάγονται και αντίστοιχες χρονικές ολισθήσεις στην έξοδο.

$$y(t) = f\{x(t)\} \Longleftrightarrow y(t-t_0) = f\{x(t-t_0)\}$$

$\forall\, t_0 \in \mathbb{R}$.

⊕ Σημασία: Η $y(t)$ ως μορφή παραμένει η ίδια

$\boxed{h(t) = 0, \ \forall t < 0} \rightarrow$ η $h(t)$ να είναι αιτιατό σήμα.

[redacted] $\Rightarrow$

⊛ Άρα: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

$$\overset{\text{ΑΙΤΙΑΤΟ ΓΧΑΣ}}{=} \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

ΑΙΤΙΑΤΟ ΓΧΑΣ ΜΕ ΑΙΤΙΑΤΗ ΕΙΣΟΔΟ.

- ΓΧΑΣ: $y(t) = x(t) * h(t) = \boxed{= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau.}$
- Αιτιατό ΓΧΑΣ: $y\boxed{(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau.}$
- Αιτιατό ΓΧΑΣ με αιτιατή είσοδο: $\boxed{y(t) = \int_{0}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau}$
- ΣΥΝΘΗΚΗ ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑΣ ΓΧΑΣ: $\boxed{h(t) = 0 \ \forall t < 0.}$

(*) 4) Ταυτοτική: $\boxed{X(t) * \delta(t)} = X(t) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot \boxed{\delta(t-\tau)}\, d\tau \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot \boxed{\delta(\tau - \boxed{t})}\, d\tau =$$

δ(t) άρτια

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΔΕΛΤΑ.

$$= X(t).$$

(*)(*) $\boxed{x(t) * \delta(t-t_i)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau-t_i)\, d\tau =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot\delta(\tau - t + t_i)\, d\tau =$$

δ(t) άρτια

ΙΔ. ΔΕΛΤΑ

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot\delta(\tau - (t-t_i))\, d\tau = \boxed{x(t-t_i)}$$

ΓΧΑΣ

- Για κάθε ΓΧΑΣ: $y(t) = x(t) * \boxed{h(t)} =$

$$= \int_{\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

- ΙΚΑΝΗ Κ' ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑΣ ΓΧΑΣ :

ΜΑΘΗΜΑ 3ο:

⊛ ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ:

Για κάθε 2 συναρτήσεις $a(t), b(t)$ η συνέλιξη ορίζεται ως:

$$\underline{a(t)} * b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)\cdot b(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} b(\tau)\cdot a(t-\tau)\, d\tau.$$

Αντίστοιχα για 2 συναρτήσεις $a(n), b(n)$ (π.χ. σήματα διακριτού χρόνου) η συνέλιξη ορίζεται:

$$a(n) * b(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k)\cdot b(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b(k)\, a(n-k).$$

- Ιδιότητες Συνέλιξης:

1) Αντιμεταθετική: $a(t) * b(t) = b(t) * a(t)$.

2) Προσεταιριστική: $a(t) * \big(b(t) * \gamma(t)\big) = \big(a(t) * b(t)\big) * \gamma(t)$.

3) Επιμεριστική: $a(t) * \big(b(t) + \gamma(t)\big) = a(t) * b(t) + a(t) * \gamma(t)$.

⇓ σος

4) Ταυτοτική: $\boxed{a(t) * \delta(t) = a(t)}$

$$a(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau \overset{\delta(t)\text{ άρτια}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)\,\delta(\tau-t)\,d\tau =$$

[ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΔΕΛΤΑ: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,x(t)\,dt = x(t_0)$]

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)\cdot\delta(\tau-t)\,d\tau = a(t)$$

σως

⊛ Γενίκευση ταυτοτικής ιδιότητας :

$$a(t) * \delta(t-t_i) = a(t-t_i)$$

Απόδειξη:

$$a(t) * \delta(t-t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)\,\delta(t-\tau-t_i)\,d\tau =$$

$$\overset{\delta(t)\text{ άρτια}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)\,\delta(\tau-t+t_i)\,d\tau = a(t-t_i)$$

⊛ $$u(\overset{\tau}{t}-2) * \delta(t+5) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-2)\cdot\delta(t-\tau+5)\,d\tau$$

$t-\tau$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau+5)\cdot u(t-\tau-2)\,d\tau =$$

$$\delta\Big(\tau - \underbrace{(t+5)}_{t_0}\Big)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-2)\cdot\delta(\tau - \underbrace{t}_{} - 5)\,d\tau = u\big(t+5-2\big) =$$

$$= u(t+3)$$

Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα (ΓΧΑΣ)

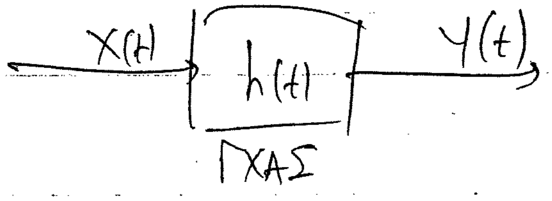
- Για κάθε ΓΧΑΣ ισχύει: $\boxed{y(t) = x(t) * h(t)}$,

όπου $h(t)$ η Κρουστική Απόκριση του συστήματος

($h(t)$ ⇒ η έξοδος όταν η είσοδος είναι η $\delta(t)$)

Άρα:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau}$$

- 

- Ικανή κ' Αναγκαία Συνθήκη Αιτιατότητας ΓΧΑΣ:

$$\boxed{h(t) = 0 \quad \forall\, t<0} \Longleftrightarrow \text{Αιτιατό ΓΧΑΣ}$$

Οπότε:

- ΓΧΑΣ: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau.$

- Αιτιατό ΓΧΑΣ: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau.$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\left(h(t) = 0 \;\; \forall\, t<0 \Rightarrow h(\tau) = 0 \;\; \forall\, \tau < 0 \Rightarrow h(-\tau) = 0 \right.$$

$$\forall\, \tau > 0 \Rightarrow \boxed{\underline{h(-\tau+t) = 0} \;\; \forall \;\; \tau > t}$$

Άρα: $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau = \int_{\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau +$$

$$+ \underbrace{\cancel{\int_{t}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau}}_{0} = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau.$$

- Αιτιατό ΓΧΑΣ με αιτιατή είσοδο:

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = \int_{0}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau}, \text{ αφού}$$

$$x(t) = 0 \;\; \forall\, t < 0.$$

• ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ.

- αιτιατά / μη αιτιατά.
- στατικά / δυναμικά.
- γραμμικά / μη γραμμικά
- ΧΑ / χρονικά μεταβαλλόμενα.

ΓΧΑΣ Διακριτού Χρόνου.

- $$\boxed{y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, x(n-k)}$$

- Αιτιατό ΓΧΑΣ:

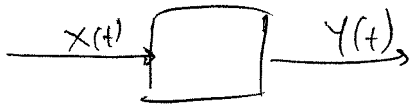
$$\boxed{y(\underline{\underline{n}}) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \underline{\underline{x(k)}} \cdot h(n-k)}$$

- Αιτιατό ΓΧΑΣ με αιτιατή είσοδο:

$$\boxed{y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k) \cdot h(n-k)}$$

(*) Ικανή κ' Αναγκαία συνθήκη αιτιατότητας ΓΧΑΣ:

$$\boxed{h(n) = 0 \quad \forall n<0}$$



• **Ευστάθεια**: για κάθε σύστημα ορίζουμε την ΦΕΦΕ ευστάθεια (Φραγμένης εισόδου - Φραγμένης εξόδου) (ή BIBO) αν ισχύει ότι: για κάθε φραγμένη είσοδο η έξοδος του συστήματος παραμένει φραγμένη.

⊛ Π.Χ. $\boxed{y(t)=\frac{1}{x(t)}}$ αν $|x(t)| \le M$ τότε και $|y(t)| \le \frac{1}{M}$

sos

⊛ Ικανή κ' Αναγκαία Συνθήκη ευστάθειας για ΓΧΑΣ :

• ένα οποιοδήποτε ΓΧΑΣ καλείται ΦΕΦΕ ευσταθές αν και μόνο αν:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, d\tau < \infty}$$

, δηλ. αν η $h(t)$ είναι ΑΠΟΛΥΤΩΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΗ

• αντίστοιχα για διακριτού χρόνου:

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty}$$

, δηλ. αν η $h(n)$ είναι ΑΠΟΛΥΤΩΣ ΑΘΡΟΙΣΙΜΗ.

ΑΣΚΗΣΗ 6 - φυλλάδιο

Δείξτε ότι τα παρακάτω συστήματα είναι ΓΧΑΣ και αν είναι βρείτε την κρουστική τους απόκριση.

α) $$y(t) = \frac{1}{\tau_1+\tau_2}\cdot\int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2} x(\tau)\,d\tau.$$

β) $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau + \sum_{i=1}^{N} a_i\, x(t-t_i).$$

ΛΥΣΗ

α) Αρχικά δείχνουμε ότι είναι γραμμικό:

Για είσοδο $\boxed{x(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)}$ θα έχω:

$$y(t) = \frac{1}{\tau_1+\tau_2}\int_{t-\tau_1}^{t-\tau_2}\left(a_1x_1(\tau)+a_2x_2(\tau)\right)d\tau =$$

$$= a_1\cdot\underbrace{\frac{1}{\tau_1+\tau_2}\cdot\int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2} x_1(\tau)\,d\tau} + a_2\frac{1}{\tau_1+\tau_2}\int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2} x_2(\tau)\,d\tau$$

$$= \boxed{a_1\cdot y_1(t) + a_2\cdot y_2(t)} \Rightarrow$$ είναι γραμμικό.

Έπειτα να δείξουμε ότι είναι ΧΑ:

$$y(t)=\frac{1}{\tau_1+\tau_2}\int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2} x(\tau)\,d\tau .$$

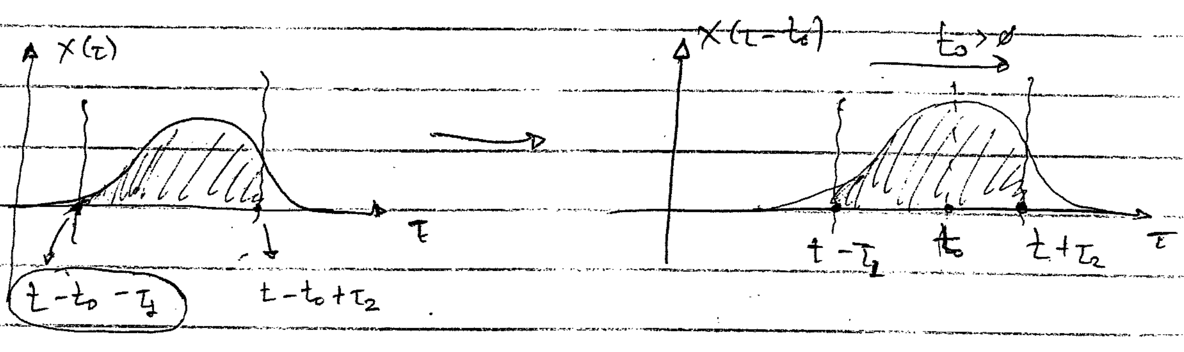
Για $x(t-t_0)$ θα πάρουμε:

$$\underbrace{\underbrace{y_1(t)}=\frac{1}{\tau_1+\tau_2}\int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2} \underbrace{x(\tau-\boxed{t_0})}\,d\tau}\qquad (1)$$

Όμως: $$\underbrace{y(t-t_0)=\frac{1}{\tau_1+\tau_2}\int_{\boxed{t-t_0-\tau_1}}^{t-t_0+\tau_2} x(\tau)\,d\tau}\qquad (2)$$

$(1)=(2)$ $\overset{\text{λόγω}}{\text{(ιδιότητας ολοκληρώματος)}}$

π.χ.



Άρα $y_1(t) = y(t-t_0) \Rightarrow$ $x(t-t_0) \Longleftrightarrow y(t-t_0) =$

$$= F\{x(t-t_0)\}$$

$$\Downarrow$$

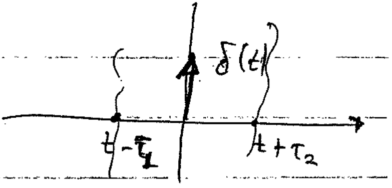
ΧΑ.

Άρα το σύστημα είναι ΓΧΑΣ.

$$y(t) = \frac{1}{\tau_1+\tau_2}\int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2} x(\tau)\,d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{\tau_1+\tau_2}\int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2} \delta(\tau)\,d\tau =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\tau_1+\tau_2}\cdot 1 \,, \quad -\tau_2 < t < \tau_1}$$



$\cdot\; t-\tau_1 < 0 \Rightarrow$

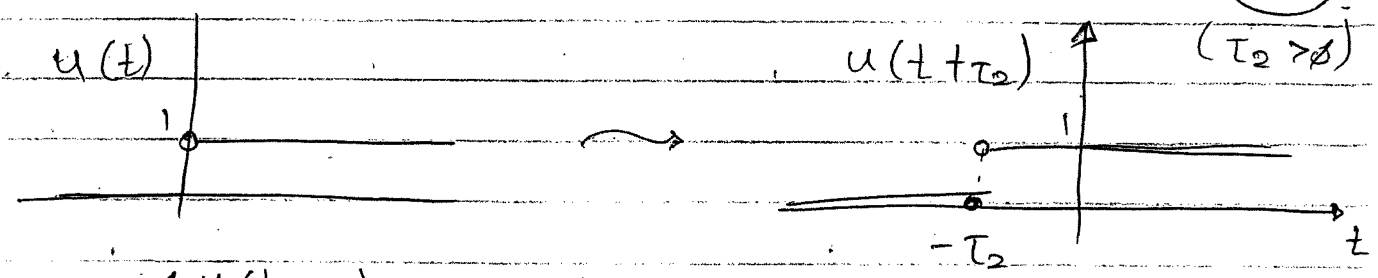
$\Rightarrow t < \tau_1.$

$t+\tau_2 > 0 \Rightarrow t > -\tau_2$

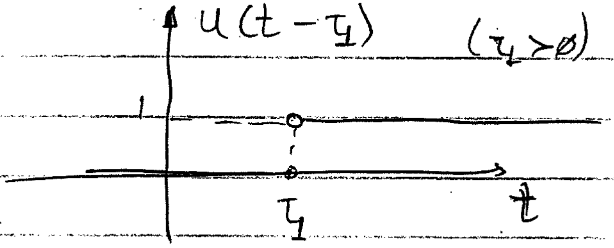
2ος τρόπος: $\displaystyle\int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2} \delta(\tau)\,d\tau =$

$$= \int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2} \frac{d}{d\tau}\,u(\tau)\,d\tau = u(\tau)\Big|_{t-\tau_1}^{t+\tau_2} = \underline{u(t+\tau_2) - u(t-\tau_1)}.$$

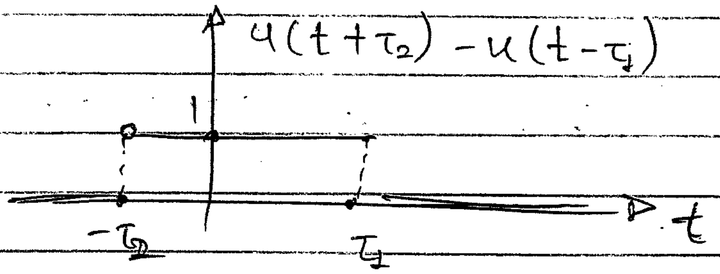
$(\tau_2 > 0)$



$(\tau_1 > 0)$



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ 1 για $-\tau_2 < t < \tau_1$

(b) $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau + \sum_{i=1}^{N} a_i x(t-t_i)$$

Θα είναι: $$y(t) = x(t) * \rho(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i \, x(t-t_i) =$$

$$= x(t) * \rho(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot \big(x(t) * \delta(t-t_i)\big) \qquad (1)$$

(αφού $x(t) * \delta(t-t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau-t_i)\,d\tau =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot\delta(\tau - t + t_i)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(\tau-(t-t_i))\,d\tau =$

$= x(t-t_i)$)

(11).

$$a_1 x(t) * \delta(t-t_1) + a_2 x(t) * \delta(t-t_2) + \ldots =$$
$$= x(t) * (a_1 \delta(t-t_1) + a_2 \delta(t-t_2) + \ldots)$$

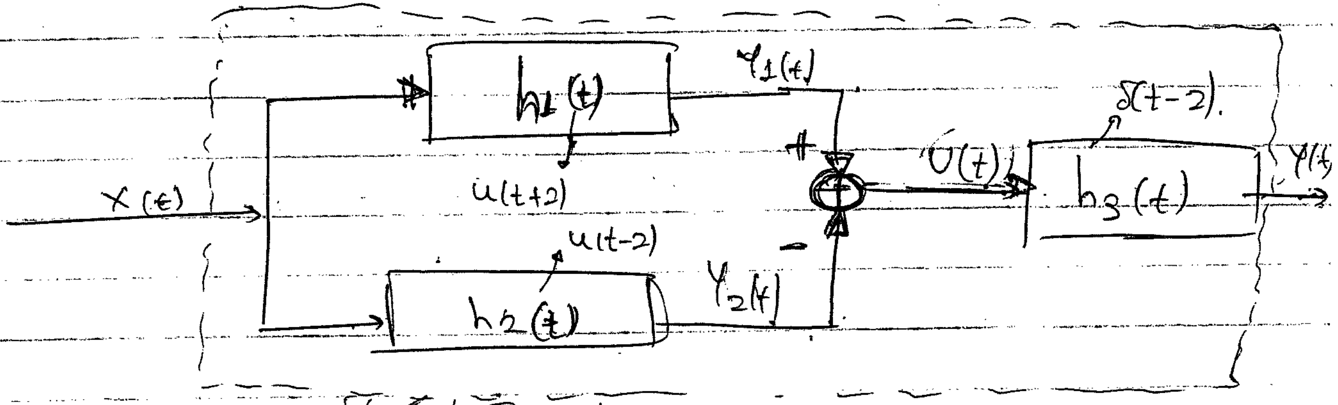
(δ): $y(t) = x(t) * \rho(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i x(t) * \delta(t-t_i) =$

$$= x(t) * \underbrace{\left[\rho(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i \delta(t-t_i)\right]}. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ είναι ΓΧΑΣ με $\boxed{h(t) = \rho(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i \delta(t-t_i)}$

ΑΣΚΗΣΗ 9 - Φυλλάδιο

Κρουστική απόκριση - αιτιατό, BIBO ευσταθές



ΛΥΣΗ. ~~$\delta(t+1) * h_2(t) = h_2(t) = u(t-2)$~~ ~~$(u(t+2) - u(t-2)) * \delta(t) = h_1(t)$~~

Συνολικά θα είναι: $y(t) = x(t) * \underset{?}{\underline{h(t)}}$

Όμως: $\upsilon(t) = y_1(t) - y_2(t) = x(t) * h_1(t) - x(t) * h_2(t)$

$$= \underbrace{x(t) * (h_1(t) - h_2(t))} \qquad (1)$$

<u>Επίσης:</u> $y(t) = v(t) * h_3(t) \overset{(1)}{=} \underline{x(t)} * \underbrace{(h_1(t) - h_2(t))} *$

$$\underbrace{h_3(t)} = x(t) * \underbrace{\left(h_1(t) * h_3(t) - h_2(t) * h_3(t) \right)}_{h(t)}$$

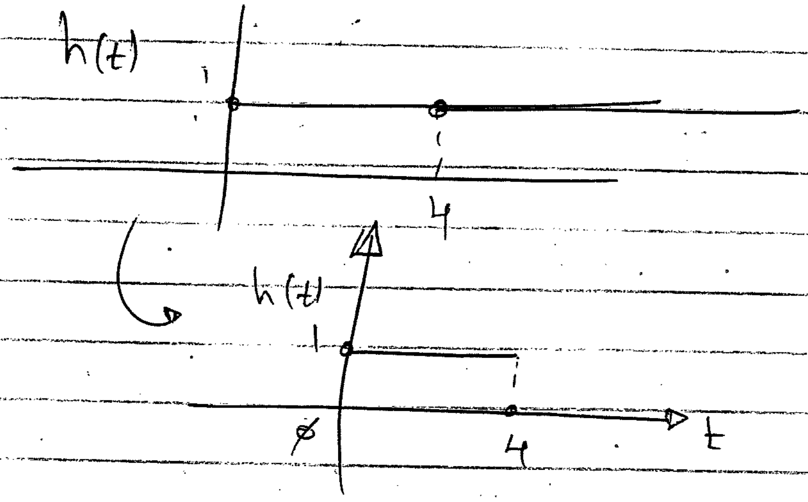
Οπότε η κρουστική απόκριση του συστήματος θα είναι:

$$h(t) = u(t+2) * \delta(t-2) - u(t-2) * \delta(t-2) =$$

$$= u(t+2-2) - u(t-2-2) =$$

$$= u(t) - u(t-4). \Rightarrow \boxed{h(t) = u(t) - u(t-4)}$$

- Αιτιατό: $\boxed{h(t) = 0 \ \forall \ t < 0}$ ⇒ προφανώς και είναι αιτά



- <u>Ευσταθές:</u> πρέπει $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ ⇒ προφανώς και

είναι: $\int^{\infty} |h(t)| dt = 4 < \infty$

ΑΣΚΗΣΗ 5 φυλλάδιο

a) $y(t) = \dfrac{x(t)}{1+x(t-1)}$

- Γραμμικό: $\underbrace{x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)} \Rightarrow x(t-1) = a_1 x_1(t-1) + a_2 x_2(t-1)$.

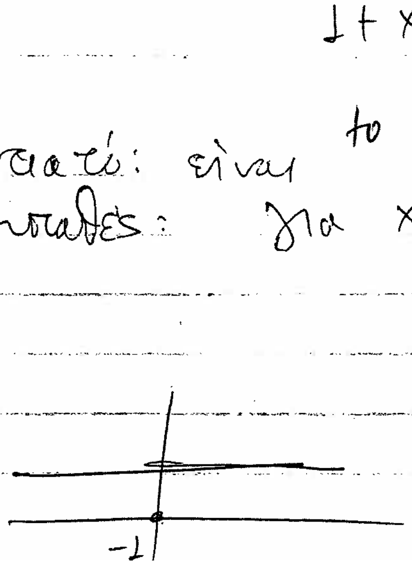
$$y_1(t) = \frac{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)}{1 + a_1 x_1(t-1) + a_2 x_2(t-1)} =$$

$$= \frac{a_1 x_1(t)}{1+a_1 x_1(t-1)+a_2 x_2(t-1)} + \frac{a_2 x_2(t)}{1+a_1 x_1(t-1)+a_2 x_2(t-1)} =$$

$$= a_1 \cdot \frac{x_1(t)}{1+a_1 x_1(t-1)+a_2 x_2(t-1)} + a_2 \frac{x_2(t)}{1+a_1 x_1(t-1)+a_2 x_2(t-1)}$$

$$\neq a_1 \cdot \underbrace{y_1(t)}_{\downarrow \; \frac{x_1(t)}{1+x_1(t-1)}} + a_2 \cdot \underbrace{y_2(t)}_{\downarrow \; \frac{x_2(t)}{1+x_2(t-1)}}$$

- Αιτιατό: είναι το $y(t)$ εξαρτάται από το $x(t)$
- Ευσταθές: για $x(t) = -1$: $y(t) = \dfrac{-1}{1+(-1)} = \dfrac{-1}{0} \Rightarrow$ άπειρο



δ) $$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot \underbrace{e^{-(t-\tau)}\cdot u(t-\tau)}_{}\,d\tau}$$

$f(t-\tau)$

$$y(t) = x(t) * \underbrace{\left(u(t)\cdot e^{-t}\right)}_{h(t)} \rightarrow \text{ΓΧΑΣ}$$

→ **Αιτιατό**: $h(t) = 0 \ \forall \ t<0$ είναι

→ **Ευσταθές**: $$\int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-t} u(t) \right| dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t}\,dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \left(-e^{-t}\right)' dt = -e^{-t}\Big|_{0}^{\infty} =$$

$$= -\left(e^{-\infty} - e^{0}\right) = -\left(0 - 1\right) = 1 < \infty.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(\tau)\cdot e^{-t}}_{k(\tau)}\cdot \underbrace{u(t-\tau)}_{}\,d\tau = \underset{x(t)\cdot e^{-t}}{\overset{}{k(t)}} * u(t)$$

ΜΑΘΗΜΑ 4ο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOYRIER

- Έστω συνάρτηση x(t). Ορίζουμε ως Μ.F της x(t) την μιγαδική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad , -\infty < \omega < \infty$$

- Αντίστροφος ΜF: αν X(ω) ο ΜF μιας x(t) που πληρεί ορισμένες προϋποθέσεις, τότε:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \xleftrightarrow{MF^{-1}}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad , -\infty < t < \infty$$

- Συνθήκη Ύπαρξης ΜF: οι συνθήκες που είναι ικανές για την ύπαρξη του ΜF μιας x(t) είναι οι συνθήκες Diriclet:

α) Η x(t) είναι συνεχής ή τμηματικά συνεχής με πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών πεπερασμένου ύψους.

β) Η x(t) να είναι φραγμένης κύμανσης (δηλ. να έχει πεπερασμένο ακροτάτων)

γ) Η x(t) να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, δηλ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

⊛ Όταν ένα $x(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμο τότε σίγουρα ο MF του $X(\Omega)$ υπάρχει. Ωστόσο οι παραπάνω συνθήκες δεν είναι αναγκαίες

(π.χ. $x(t) = c$, $\forall t \in \mathbb{R}$ → έχει MF)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ MF

1) Γραμμικότητα :

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \leftrightarrow X_1(\Omega) \\ x_2(t) \leftrightarrow X_2(\Omega) \end{array}\right\} \text{τότε}$$

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \xleftrightarrow{MF} a_1 X_1(\Omega) + a_2 X_2(\Omega),$$

$\forall a_1, a_2$ σταθερές

2) Χρονική ολίσθηση:

$x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$ τότε

$$\boxed{x(t - t_0) \leftrightarrow X(\Omega) \cdot e^{-j\Omega t_0}, \ \forall t_0 \in \mathbb{R}}$$

3) Ολίσθηση στη συχνότητα

$$x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$$

$$\boxed{e^{+j\Omega_0 t} \cdot x(t) \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)}$$

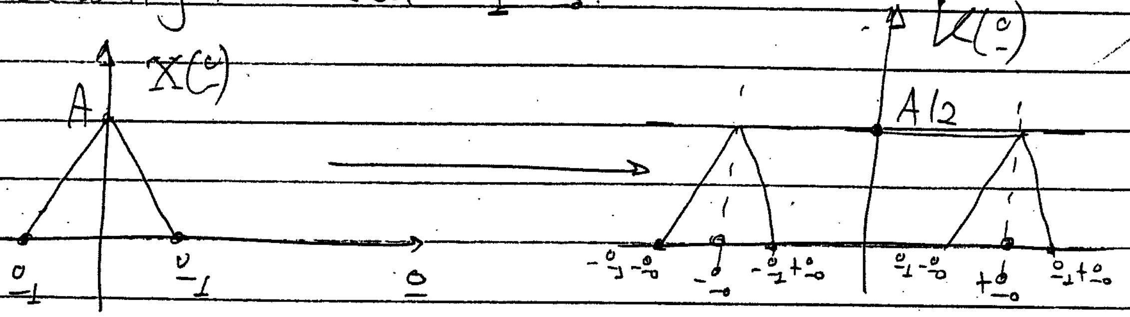
4) Ιδιότητα Διαμόρφωσης

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

$$x(t)\cdot\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)\right]$$

✱ Ο πολλαπλασιασμός με $\cos(\omega_0 t)$ δεν αλλοιώνει τη μορφή του ΜF ($X(\omega)$), αλλά απλώς τη μετατοπίζει κατά ±ω_0.

π.χ.



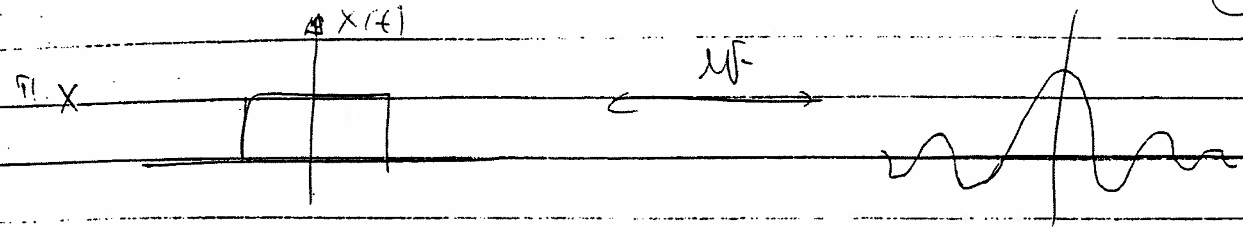
5) Κλιμάκωση στο χρόνο κ' τη συχνότητα

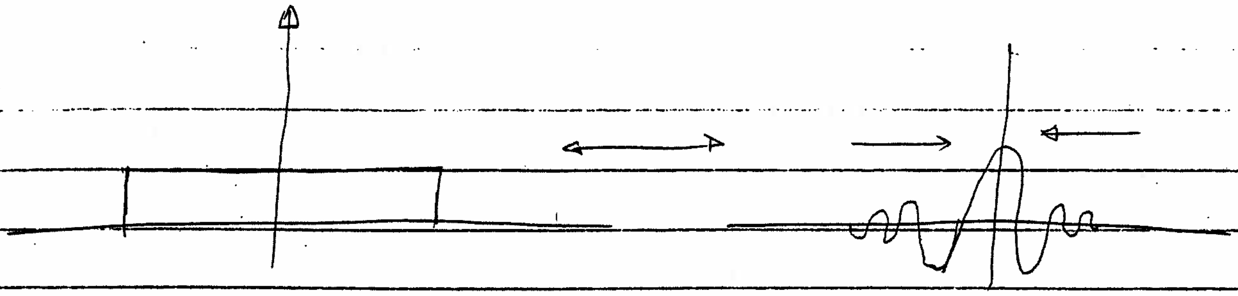
$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

$$\rightarrow x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}\cdot X\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \frac{1}{|a|}x\left(\frac{t}{a}\right) \longleftrightarrow X(a\cdot\omega), \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

{ Η φυσική σημασία της ιδιότητας είναι ότι αν ο άξονας t διαστέλλει τότε ο αντίστοιχος άξονας των συχνοτήτων συστέλλεται και αντίστροφα.





6) Δυϊκότητα του ΜF.

$$x(t) \longleftrightarrow X(\underline{\omega})$$

$$X(t) \longleftrightarrow 2\pi\, x(-\underline{\omega})$$

7) Παραγώγιση:

$$x(t) \longleftrightarrow X(\underline{\omega})$$

$$\boxed{\frac{d^{(n)}}{dt}x(t) \longleftrightarrow (j\underline{\omega})^{n} \cdot X(\underline{\omega})}$$

$$(-jt)^{n} \cdot x(t) \longleftrightarrow \frac{d^{(n)}}{d\underline{\omega}} X(\underline{\omega})$$

*

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

1) Θ. Συνέλιξης:

$$- \boxed{y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{MF} Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)}$$

Συνέλιξη στο χρόνο ⇔ Πολ/σμός στη συχνότητα.

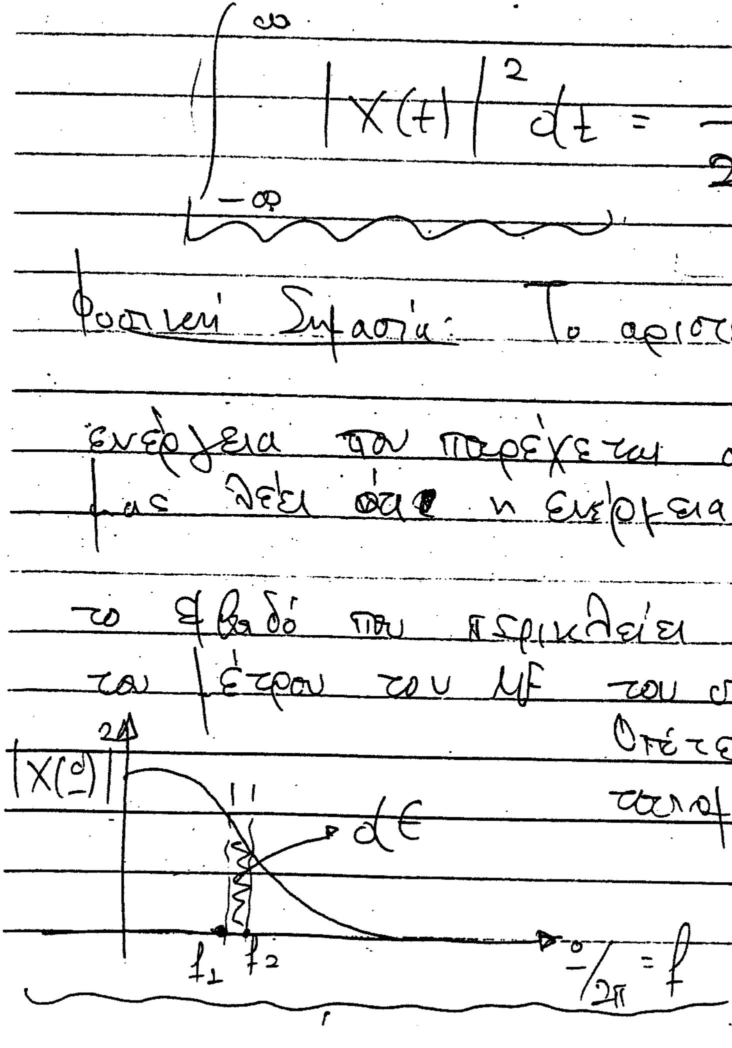
$$- \ y(t) = x(t) \cdot h(t) \xleftrightarrow{MF} Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot X(\omega) * H(\omega)$$

Πολ/σμός στο χρόνο ⇔ Συνέλιξη στη συχνότητα

2) Θ. Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Φυσική Σημασία: Το αριστερό μέλος είναι η ολική ενέργεια που παρέχεται από το σήμα. Το Θ. Parseval μας λέει ότι η ενέργεια του x(t) ισούται με $\frac{1}{2\pi}$ επί το εμβαδό που περικλείει η καμπύλη του τετραγώνου του μέτρου του MF του σήματος.



Οπότε η $|X(\omega)|^2$ εκφράζει την κατανομή ενέργειας ανά μονάδα συχνότητας.

Επίσης, στο σχήμα η στοιχειώδης ενέργεια dE του $x(t)$ θα είναι:

$$dE = \frac{1}{2\pi}\int_{\underline{\omega}_1}^{\underline{\omega}_2} |X(\underline{\omega})|^2 d\underline{\omega} = \int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2 df$$

ΜΕΛΕΤΗ ΓΧΑΣ κ' ΜF

- Για κάθε ΓΧΑΣ θα ισχύει:

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{MF} Y(\underline{\omega}) = X(\underline{\omega})\cdot H(\underline{\omega})$$

$$\Rightarrow \boxed{H(\underline{\omega}) = \frac{Y(\underline{\omega})}{X(\underline{\omega})}}$$

⊛ **ΣΟΣ**: ο ΜF της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ $H(\underline{\omega})$ καλείται Συνάρτηση Μεταφοράς ή Απόκριση Συχνότητας.

ΣΟΣ

- Περιγραφή ΓΧΑΣ με Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις (Γ.Δ.Ε.)

Κάθε ΓΧΑΣ περιγράφεται από μια Γ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές:

$$\begin{cases} a_0 \cdot y(t) + a_1 y'(t) + a_2 y''(t) + \dots + a_N y^{(N)}(t) = \\ = b_0 x(t) + b_1 x'(t) + b_2 x''(t) + \dots + b_M x^{(M)}(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d}{dt}^{(k)} y(t) = \sum_{l=0}^{M} b_l \frac{d}{dt}^{(l)} x(t)}$$

(1)

Από ιδιότητα παραγώγισης ΜF θα είναι:

$$(1): \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot (j\Omega)^k \, Y(\Omega) =$$

$$= \sum_{l=0}^{M} b_l (j\Omega)^l \, X(\Omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \boxed{H(\Omega) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l \cdot (j\Omega)^l}{\sum_{k=0}^{M} a_k (j\Omega)^k}}$$

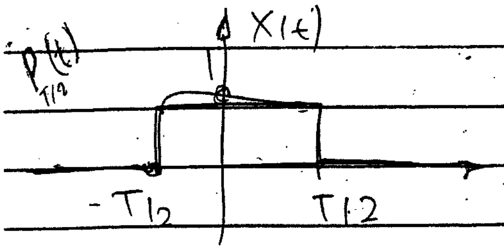
① ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

1) Να βρεθεί ο ΜF του τετραγωνικού παλμού

$$x(t) = p_{T/2}(t)$$

ΛΥΣΗ

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



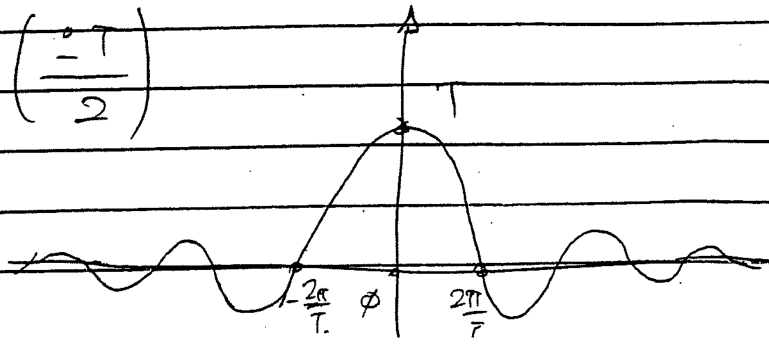
Ισχύει: $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt =$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} \left(e^{-j\omega t}\right) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \left(-\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t}\right)' dt =$$

$$= e^{-j\omega t} \cdot \frac{1}{-j\omega} \Bigg|_{-T/2}^{T/2} = -\frac{1}{j\omega} \cdot \left(e^{-j\omega \frac{T}{2}} - e^{+j\omega T/2}\right) =$$

$$= + \frac{1}{j\omega} \left(e^{+j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}\right) \overset{euler}{=} \frac{1}{\omega} \cdot 2 \sin\left(\omega \frac{T}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\rightarrow X(\omega) = \frac{2}{\omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$



2) Να βρεθεί ο ΜF της $x(t) = c, \ \forall t$

ΛΥΣΗ

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{\infty}^{\infty} c \cdot e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \underbrace{c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt}_{(1)} = c \cdot \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} =$$

$$\cancel{= -\frac{c}{j\omega} \cdot (\emptyset - ?)} \qquad - \infty$$

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi x t} dx \rightarrow \underbrace{\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi x \omega} dx}_{(2)}$$

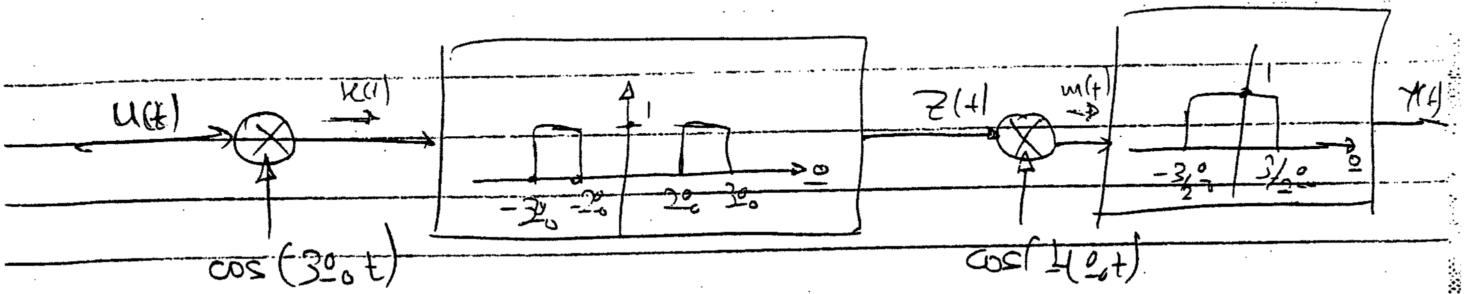
$$\rightarrow \delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt \cdot \frac{1}{2\pi} \Rightarrow \underbrace{2\pi\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt}_{(3)}$$

αλλαγή μεταβλητής

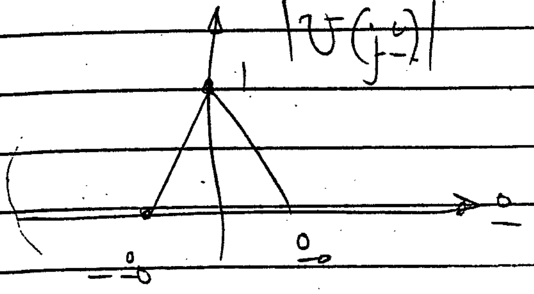
Από (3) προκύπτει: $\boxed{X(\omega) = 2\pi c \cdot \delta(\omega)}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) ΘΕΜΑ 2 - ΜΑΡΤΙΟΣ 2009 (ΑΓΥΠΤΗ)



Παραστήστε γραφικά τα μέτρα των ΜF των z(t), y(t) αν



ΛΥΣΗ

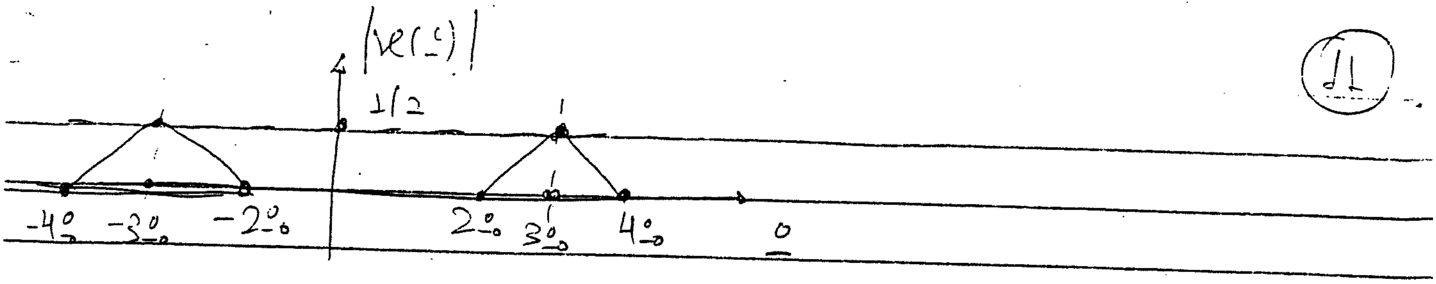
- Αρχικά παρατηρώ ότι η u(t) πολ/ζεται με $\cos(3\omega_0 t)$ (διαμορφώνεται). Άρα από ιδ. διαμόρφωσης ΜF:

$$u(t) \longleftrightarrow U(\omega)$$

$$k(t)=u(t)\cdot\cos(3\omega_0 t) \longleftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\left[U(\omega-3\omega_0)+U(\omega+3\omega_0)\right]}_{K(\omega)}.$$

- Το $K(\omega)$ θα είναι γραφικά:

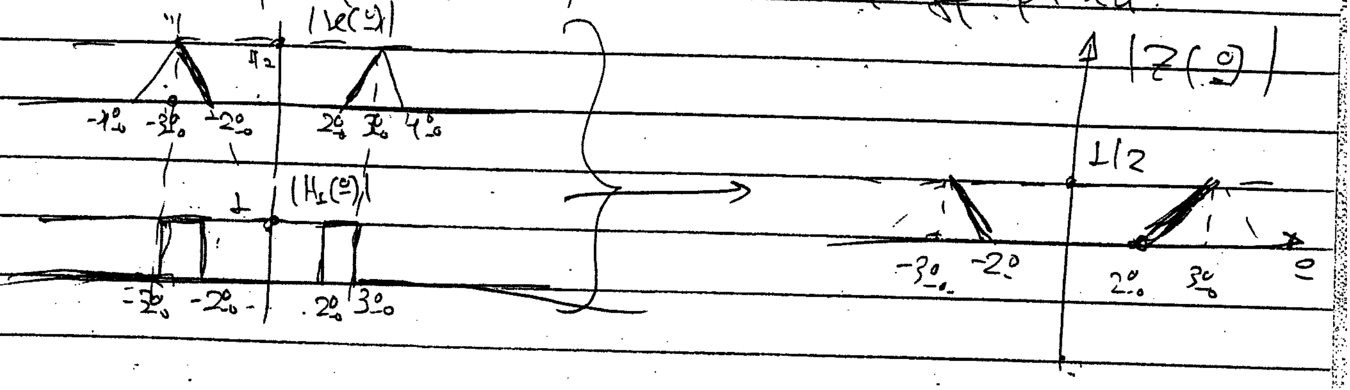
↓ φ



• Στη συνέχεια το v(t) εισέρχεται στο 1ο σύστημα. Άρα (Θ. Συνέλιξης)

$$z(t) = v(t) * h_1(t) \xleftrightarrow{\text{ΜF}} Z(\omega) = V(\omega) \cdot H_1(\omega)$$

Τότε το μέτρο |Z(ω)| θα είναι γραφικά:

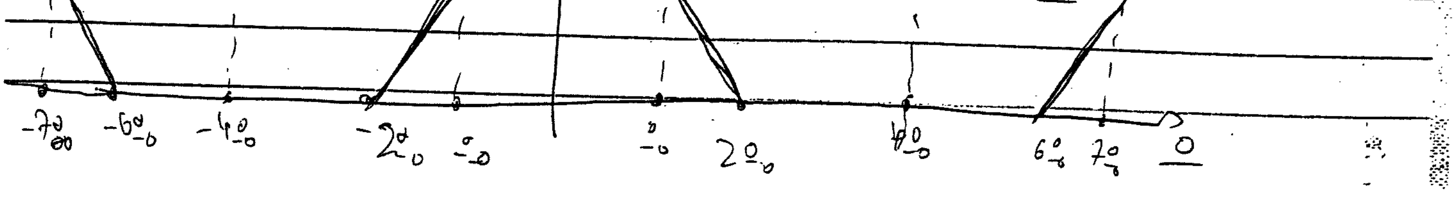


• Στη συνέχεια το z(t) πολ/ζεται με cos(4ω₀t). Άρα από ιδ. διαμόρφωσης θα είναι.

$$z(t) \xleftrightarrow{\text{ΜF}} Z(\omega).$$

$$z(t) \cdot \cos(4\omega_0 t) \xleftrightarrow{\text{ΜF}} \frac{1}{2}\left[Z(\omega - 4\omega_0) + Z(\omega + 4\omega_0) \right] = M(\omega)$$

Τότε η |M(ω)| γραφικά θα είναι.

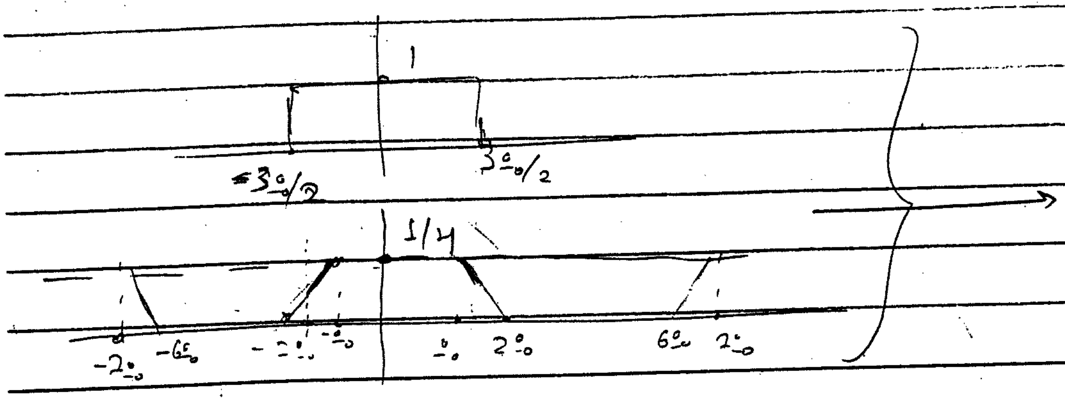


↓φ

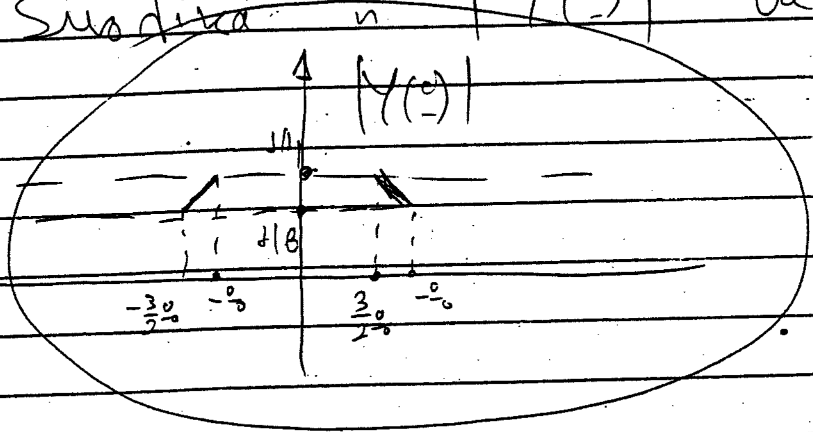
. Τέλος η |m(t) εισέρχεται σε σύστημα. Τότε:

$$y(t) = m(t) * h_2(t) \xleftarrow{MF},$$

$$Y(f) = M(f) \cdot H_2(f).$$



Συνολικά η |Y(f)| θα είναι γραφικά:



★

B' ΣΕΤ - MF .

1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.10, 1.11

↓ ΔΥΣΚΟΛΗ

ΜΑΘΗΜΑ 5ο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

1) 1.10 ΓΧΑΣ → ΓΔΕ: $y''(t)+6y'(t)+8y(t)=2x(t)$

Βρείτε την κρουστική απόκριση του ΓΧΑΣ

ΛΥΣΗ

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=2x(t) \xleftrightarrow{MF}$$
$$(j\omega)^2\,Y(\omega)+6(j\omega)Y(\omega)+8Y(\omega)=2X(\omega) \Rightarrow$$

ΙΔ ΔΙΑΦΟΡΙΣΗΣ: $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$

$$\frac{d^{(n)}}{dt}x(t) \Leftrightarrow (j\omega)^n \cdot X(\omega)$$

$$\Rightarrow \underbrace{Y(\omega)\left[(j\omega)^2+6(j\omega)+8\right]=2X(\omega)} \Rightarrow \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{2}{(j\omega)^2+6(j\omega)+8} \Rightarrow H(\omega)=\frac{2}{\boxed{(j\omega)^2+6(j\omega)+8}}$$

Θεωρώ το πολυώνυμο $(j\omega)^2+6(j\omega)+8=0$ και βρίσκ τις ρίζες του (το παραγοντοποιώ). ΠΡΟΣΟΧΗ: η μεταβλητή είναι η $(j\omega)$

$x^2+6x+8=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=36-4\cdot1\cdot8=4$

ΣΠΑΣΙΜΟ ΣΕ ΑΠΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

$$H(\omega) = \frac{2}{(j\omega+2)(j\omega+4)} = \frac{C_1}{j\omega+2} + \frac{C_2}{j\omega+4}$$

όπου:

$$c_1 = \lim_{j\omega \to -2} \cancel{(j\omega+2)} \cdot \frac{2}{\cancel{(j\omega+2)}(j\omega+4)} =$$

$$= \frac{2}{-2+4} = 1$$

$$c_2 = \left.\frac{2}{j\omega+2}\right|_{j\omega=-4} = \frac{2}{-4+2} = -1$$

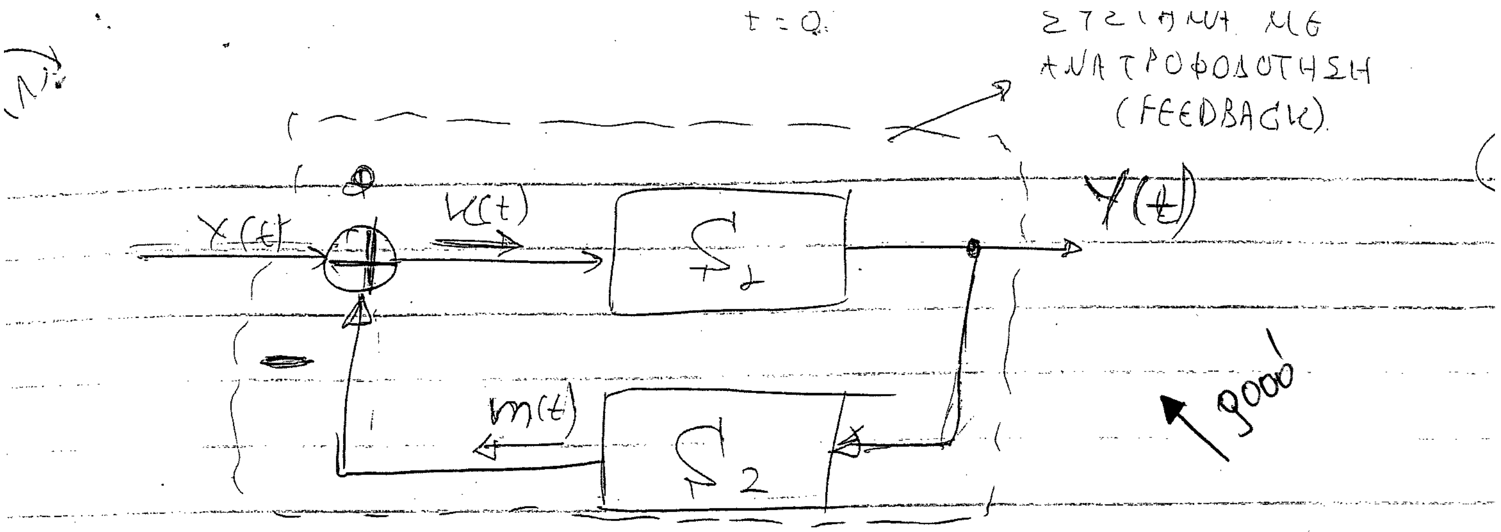
Άρα: $H(\omega) = \frac{1}{j\omega+2} - \frac{1}{j\omega+4} \xleftrightarrow{MF^{-1}}$

$$\boxed{h(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-4t}u(t) = \underline{\underline{(e^{-2t}-e^{-4t})\cdot u(t)}}}$$

2)$^{1.II}$ Έστω 2 ΓΧΑΣ S_1, S_2:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &: y'(t) + y(t) = x(t) \\ S_2 &: y'(t) + 2y(t) = x'(t) + x(t) \end{aligned}\right\}$$

t = 0.



a) Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος

b) Αν $x(t) = u(t)$ (βηματική) να βρεθεί η βηματική απόκριση

ΛΥΣΗ

a) Για το σύστημα από το σχήμα θα είναι:

- $Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega) \Rightarrow \underbrace{H(\Omega)}_{\text{απόκριση συχνότητας}} = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$

- $u(t) = x(t) - m(t) \xleftrightarrow{MF} U(\Omega) = X(\Omega) - M(\Omega)$ (1

- $S_2: \; y(t) * h_2(t) = m(t) \xleftrightarrow{MF} Y(\Omega) \cdot H_2(\Omega) = M(\Omega)$

- $S_1: \; u(t) * h_1(t) = y(t) \xleftrightarrow{MF} U(\Omega) \cdot H_1(\Omega) = Y(\Omega)$ (

$(2) \overset{(3)}{\Rightarrow} U(\Omega) \cdot H_1(\Omega) \cdot H_2(\Omega) = M(\Omega)$ (4)

$(1) \overset{(4)}{\Rightarrow} U(\Omega) = X(\Omega) - U(\Omega) \cdot H_1(\Omega) \cdot H_2(\Omega) \Rightarrow$

$$\rightarrow V(\Omega) + V(\Omega) \cdot H_1(\Omega) \cdot H_2(\Omega) = X(\Omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(\Omega)\left(1 + H_1(\Omega) H_2(\Omega)\right) = X(\Omega) \Rightarrow$$

$$\rightarrow V(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{1 + H_1(\Omega) H_2(\Omega)} \xrightarrow{(3)} \frac{Y(\Omega)}{H_1(\Omega)} = \frac{X(\Omega)}{1 + H_1(\Omega) H_2(\Omega)}$$

$$\rightarrow \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{H_1(\Omega)}{1 + H_1(\Omega) H_2(\Omega)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{H(\Omega) = \frac{H_1(\Omega)}{1 + H_1(\Omega) H_2(\Omega)}} \quad (1)$$

ΓΔΕ 1: $y'(t) + y(t) = x(t) \xrightarrow{MF} Y(\Omega)(j\Omega) + Y(\Omega)$

$$= X(\Omega) \Rightarrow \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{j\Omega + 1} \Rightarrow$$

$$\rightarrow H_1(\Omega) = \frac{1}{1 + j\Omega} \quad (2)$$

ΓΔΕ 2: $y'(t) + 2y(t) = x'(t) + x(t) \xrightarrow{MF}$

$$(j\Omega) Y(\Omega) + 2Y(\Omega) = (j\Omega) X(\Omega) + X(\Omega) \Rightarrow$$

Σ*

$$\rightarrow \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{j\omega+1}{j\omega+2} = H_2(\omega) \quad (3).$$

Άρα (1) $\xrightarrow{(2),(3)}$ $H(\omega) = \dfrac{\frac{1}{1+j\omega}}{1+\frac{1}{\cancel{1+j\omega}}\cdot\frac{\cancel{j\omega+1}}{j\omega+2}}$

$$= \frac{\frac{1}{1+j\omega}}{1+\frac{1}{j\omega+2}} = \frac{\frac{1}{1+j\omega}}{\frac{j\omega+2+1}{j\omega+2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{1+j\omega}}{\frac{j\omega+3}{j\omega+2}} = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{H(\omega) = \frac{2+j\omega}{(1+j\omega)(3+j\omega)}}.$$

β) Για $x(t) = u(t)$: $y(t) = x(t) * h(t)$

$$Y(\omega) = X(\omega)\cdot H(\omega) = U(\omega)\cdot H(\omega) =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right)} \cdot \frac{2+j\omega}{(1+j\omega)(3+j\omega)} = \ldots ?$$

Για την $H(\omega)$ θα είναι:

$$H(\omega) = \frac{2+j\omega}{(\underset{-1}{1+j\omega})(\underset{-3}{3+j\omega})} = \frac{C_1}{1+j\omega} + \frac{C_2}{3+j\omega}, \text{ όπου}$$

$$C_1 = \left.\frac{2+j\omega}{3+j\omega}\right|_{j\omega=-1} = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = \left.\frac{2+j\omega}{1+j\omega}\right|_{j\omega=-3} = \frac{2-3}{1-3} = -\frac{1}{2}$$

Άρα: $$H(\omega) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{3+j\omega} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{2}\cdot e^{-t}\,\underline{u(t)} - \frac{1}{2}\,e^{-3t}\,\underline{u(t)}}$$

Άρα: $$y(t) = x(t) * h(t) =$$

$$= u(t) * \left[\left(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}\right)\cdot u(t)\right] =$$

$$= \underline{u(t)} * \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{-t}u(t)}} - u(t) * \frac{1}{2}e^{-3t}u(t) =$$

$$= \int^{\infty} \frac{1}{2}e^{-\tau}u(\tau)\cdot u(t-\tau)\,d\tau - \int^{\infty} \frac{1}{2}e^{-3\tau}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\tau}\underbrace{u(t-\tau)d\tau}_{} - \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-3\tau}u(t-\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{t} e^{-\tau}d\tau - \frac{1}{2}\int_{0}^{t} e^{-3\tau}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-e^{-\tau}\right)\Big|_{0}^{t} - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3\tau}\right)\Big|_{0}^{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-e^{-t}+e^{0}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{3}e^{0}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-e^{-t}+1\right) + \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{6}1 =$$

$$= \left(\frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{3}\right)u(t).$$

3) $\underline{1.3}$ Αν $F\{x(t)\} = X(j\omega)$

$$x_m(t) = x(t)\cdot\cos(\omega_1 t)\cdot\sin(\omega_2 t+\theta).$$

α) Βρείτε τον $F\{x_m(t)\}$

β) Αν $\underbrace{f''(t)+2f'(t)+2f(t) = -\left(\delta(t+\pi)+\delta(t-\pi)\right)}_{}$ βρείτε την $f(t)$.

(θ)

ΛΥΣΗ

α) $x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$

$$\underbrace{x_m(t)} = \boxed{x(t)\cos(\omega_1 t)}\,\sin(\omega_2 t+\theta) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} ?$$

⊛ Για την $y(t)=x(t)\cdot\cos(\omega_1 t)$ θα ισχύει :

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

$$\boxed{y(t)=x(t)\cdot\cos(\omega_1 t)} \longleftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\left(X(\omega-\omega_1)+X(\omega+\omega_1)\right)}_{=\,Y(\omega)}$$

ιδ. ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ.

Οπότε: $x_m(t) = y(t)\cdot\underbrace{\sin(\omega_2 t+\theta)} =$

$$= y(t)\cdot\underbrace{\cos\left(\omega_2 t+\theta-\frac{\pi}{2}\right)} \quad (1)$$

• Ξέρουμε από ιδιότητα χρονικής ολίσθησης ότι:

$$a(t) \longleftrightarrow A(\omega)$$

$$a(t-t_0) \longleftrightarrow A(\omega)\cdot \underbrace{e^{-j\omega t_0}}$$

• Από σχέση Euler:

$$\cos\left(\omega_2 t+\theta-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{+j(\omega_2 t+\theta-\frac{\pi}{2})}+e^{-j(\omega_2 t+\theta-\frac{\pi}{2})}}{} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{j\omega_2 t} \cdot \underbrace{e^{j(\theta-\frac{\pi}{2})}}_{\text{αριθμός}} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_2 t} \cdot \underbrace{e^{-j(\theta-\frac{\pi}{2})}}_{\text{αριθμός.}} \quad (2)$$

Συνεπώς:

$$X_m(t) = y(t) \cdot \underbrace{\frac{1}{2} e^{j(\theta-\frac{\pi}{2})}}_{\text{αριθμός}} \cdot e^{+j\omega_2 t} + y(t) \cdot \frac{1}{2} e^{-j\omega_2 t} \cdot e^{-j}$$

$$\Rightarrow X_m(t) = \frac{1}{2} e^{j(\theta-\frac{\pi}{2})} \cdot y(t) \cdot e^{j\omega_2 t} + \frac{1}{2} e^{-j(\theta-\frac{\pi}{2})} \cdot y(t) \cdot e^{-j\omega_2}$$

$\updownarrow$ ΜF (ιδιότητα ολίσθησης στη συχνότητ

$$\boxed{X_m(\omega)} = \frac{1}{2} e^{j(\theta-\frac{\pi}{2})} \cdot Y(\omega-\omega_2) + \frac{1}{2} e^{-j(\theta-\frac{\pi}{2})} \cdot Y(\omega+\omega$$

$$= \frac{1}{2} e^{j(\theta-\frac{\pi}{2})} \cdot \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_2-\omega_1) + X(\omega-\omega_2+\omega_1)\right] +$$

$$\frac{1}{2} e^{-j(\theta-\frac{\pi}{2})} \cdot \frac{1}{2}\left[X(\omega+\omega_2-\omega_1) + X(\omega+\omega_2+\omega_1)\right].$$

β) $f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = \boxed{x(t)} \xleftrightarrow[\text{ιδ. διαφόρισης}]{MF} (j\omega)^2 F(\omega) +$

$2(j\omega)F(\omega) + 2F(\omega) = X(\omega) \Rightarrow F(\omega) = \frac{X(\omega)}{\quad} =$

$$\rightarrow F(\Omega) = \frac{-e^{j\Omega\pi} - e^{-j\Omega\pi}}{\underbrace{(j\Omega)^2 + 2j\Omega + 2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta = 4 - 4\cdot 1\cdot 2 = -4 =$$

$$= (2j)^2 \Rightarrow (j\Omega)_{1,2} = \frac{-2 \pm 2j}{2} \begin{array}{l} \nearrow -1+j \\ \searrow -1-j \end{array}$$

Άρα:

$$F(\Omega) = \frac{-e^{+j\Omega\pi} - e^{-j\Omega\pi}}{(j\Omega+1-j)(j\Omega+1+j)} = \cancel{\frac{c_1}{j\Omega+1-j} + \frac{c_2}{j\Omega+1+j}}$$

~~$-1 = \frac{-e^{j\Omega\pi} - e^{-j\Omega\pi}}{j\Omega+1+j} \Big|_{j\Omega=-1+j}$~~

ΑΓΚΙΑ ⊛

$$= \left(-e^{j\Omega\pi} - e^{-j\Omega\pi}\right) \cdot \underbrace{\frac{1}{(j\Omega+1-j)(j\Omega+1+j)}} =$$

$$= \left(-e^{-j\Omega\pi} - e^{j\Omega\pi}\right) \cdot \left[\frac{c_1}{j\Omega+1-j} + \frac{c_2}{j\Omega+1+j}\right],$$

όπου:

$$c_1 = \frac{1}{j\Omega+1+j}\Big|_{j\Omega=-1+j} = \frac{1}{-1+j+1+j} = \frac{1}{2j}$$

$$c_2 = \frac{1}{\ldots}\Big| = \frac{1}{\quad} = \frac{1}{\quad}$$

①

Άρα: $F(\omega) = \left(-e^{-j\omega\pi} - e^{+j\omega\pi}\right) \cdot \left(\frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{j\omega+1-j} - \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{j\omega+1+j}\right)$

$$\Big\updownarrow \text{ΜΣ}^{-1}$$

$f(t) = \left(-\delta(t+\pi) - \delta(t-\pi)\right) * \left(\frac{1}{2j} e^{-(1-j)t} - \frac{1}{2j} e^{-(1+j)t}\right) u$

$= -\frac{1}{2j} e^{+(1-j)\pi} + \frac{1}{2j} e^{+(1+j)\pi} - \frac{1}{2j} e^{-(1-j)\pi} + \frac{1}{2j} e^{-($

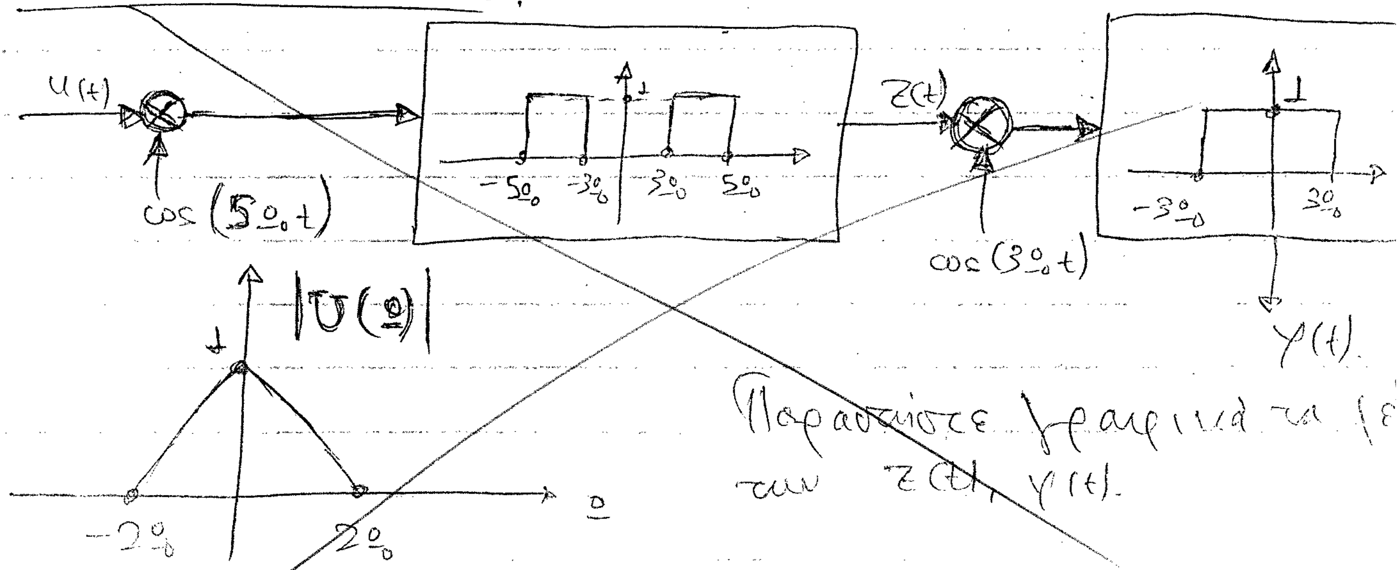
~~$= \sin(1-j)\pi - \sin$~~

~~$= \sin(1-j)\pi + \cos(1+j)\pi$~~

ΜΑΘΗΜΑ 6ο

①

1) ΘΕΜΑ 2, ΦΕΒ. 05



~~Παραστήστε γραφικά τα φ των z(t), y(t).~~

ΛΥΣΗ:

. . .

2) ΦΕΒ. 06, ΘΕΜΑ 2

. . .

3) ΘΕΜΑ 1 - ΦΕΒ. 04

$h(t) = 2 \cdot \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \cdot \cos(7\pi t)$, $x(t) = 3\cos(3\pi t) + \sin($

ΜF

$$\frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t} \longleftrightarrow \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

α) $y(t) = ;$

β) $y(t)$? $x(t) = 3\cos(3\pi t) + \sin(2\pi t)$.

$\downarrow 9$

ΛΥΣΗ

α) $\underbrace{y(t) = h(t) * x(t)}$ $\xleftrightarrow{\mathcal{MF}}$ $\underbrace{Y(\Omega) = H(\Omega) \cdot X(\Omega)}$ (1)

$$x(t) = 3\cos(3\pi t) + \sin(6\pi t) \xleftrightarrow{\mathcal{MF}}$$

$$X(\Omega) = 3\,\mathcal{F}\{\cos 3\pi t\} + \underbrace{\mathcal{F}\{\sin 6\pi t\}}, \text{ όπου:}$$

$$1 \xleftrightarrow{\mathcal{MF}} 2\pi\delta(\Omega)$$

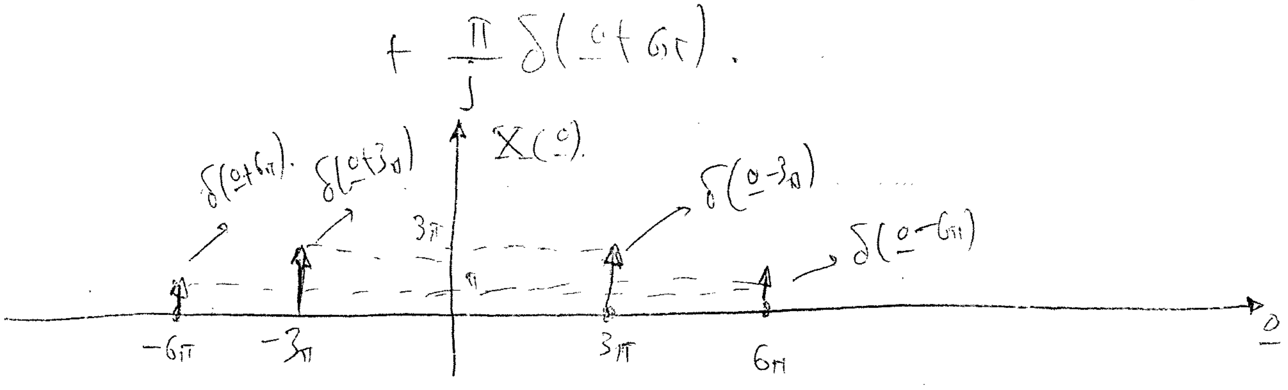
$$1\ \cos(3\pi t) \xleftrightarrow{\mathcal{MF}} \frac{1}{2}\left[2\pi\delta(\Omega-3\pi) + 2\pi\delta(\Omega+3\pi)\right] = \pi\delta(\Omega-3\pi) + \pi\delta(\Omega+3\pi)$$

ιδ. διαμόρφωσης

$$\sin 6\pi t \xleftrightarrow{\mathcal{MF}} \overset{?}{\boxed{\frac{\pi}{j}}}\left[\delta(\Omega-6\pi) + \delta(\Omega+6\pi)\right].$$

Άρα: $X(\Omega) = 3\pi\delta(\Omega-3\pi) + 3\pi\delta(\Omega+3\pi) + \frac{\pi}{j}\delta(\Omega-6\pi)$

$$+ \frac{\pi}{j}\delta(\Omega+6\pi).$$



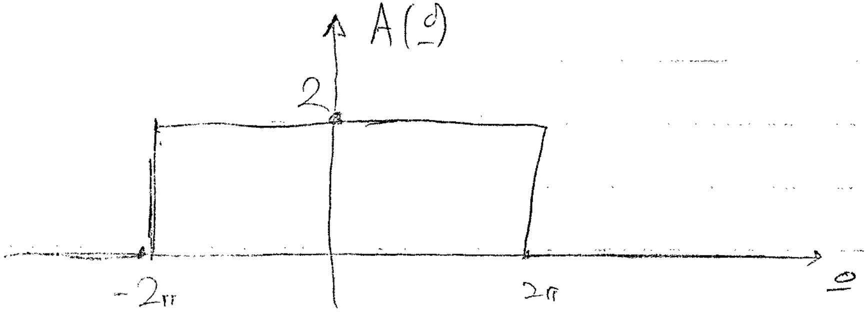
$\downarrow \varphi(\cancel{x}) > 3$ ~~$\begin{cases} x>3 \\ x<-3 \end{cases}$~~

Για την $h(t)$ θα είναι: $h(t) = 2\cdot\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\cdot\cos(7\pi$

$= \underbrace{a(t)\cdot\cos(7\pi t)}$, όπου $\underbrace{a(t) = 2\cdot\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}}$.

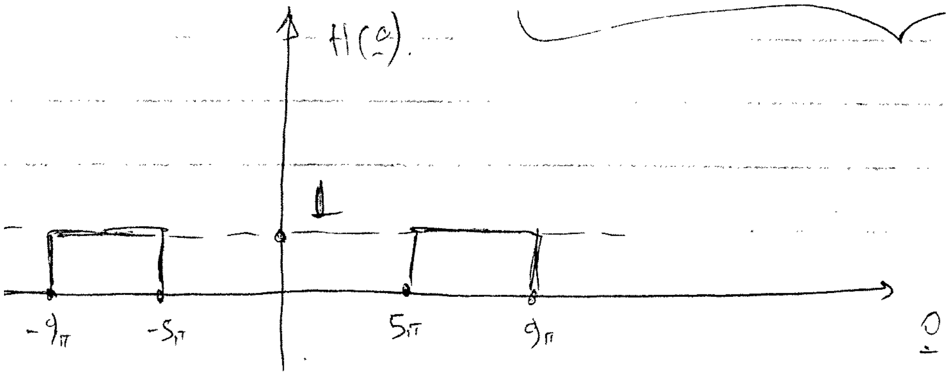
Τότε: $a(t) = 2\cdot\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \xleftrightarrow{MF} \underbrace{\begin{cases} \cancel{2}1, & |\omega| < 2\pi \\ \emptyset, & \text{διαφορετ} \end{cases}}_{A(\omega)}$

από εκφώνηση



Άρα: $H(\omega) = F\left\{a(t)\cdot\cos(7\pi t)\right\} =$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left[A(\omega - 7\pi) + A(\omega + 7\pi)\right]}.$$



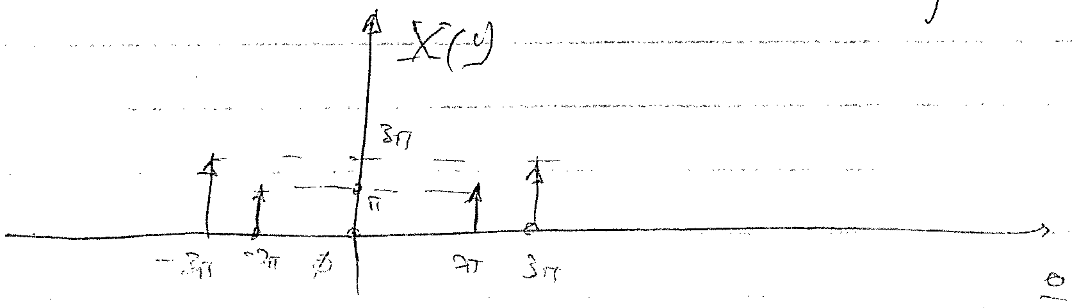
Επομένως: $Y(\omega) = X(\omega)\cdot H(\omega) = \frac{\pi}{1}\delta(\omega - 6\pi) + \frac{\pi}{1}\delta(\omega + 6\pi) \xleftarrow{MF}$

$y(t) = \sin(6\pi t)$.

b) Όταν $\underbrace{x(t) = 3\cos(3\pi t) + \sin(2\pi t)}$

$$\Big\updownarrow MF$$

$$X(\Omega) = 3\pi\,\delta(\Omega - 3\pi) + 3\pi\,\delta(\Omega + 3\pi) + \frac{\pi}{j}\,\delta(\Omega - 2\pi) + \frac{\pi}{j}\,\delta(\Omega + 2\pi).$$



$$Y(\Omega) = X(\Omega)\cdot H(\Omega) = 0 \xleftarrow{MF^{-1}} Y(t) = 0.$$

---

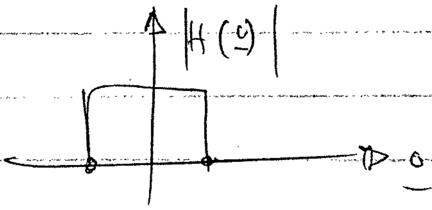
1) ΘΕΜΑ 1 ΣΕΛ. 92

Για να είναι ΓΧΑΣ πρέπει: $y(t) = x(t) * h(t) \xleftarrow{MF}$

$\underbrace{Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega)}$.

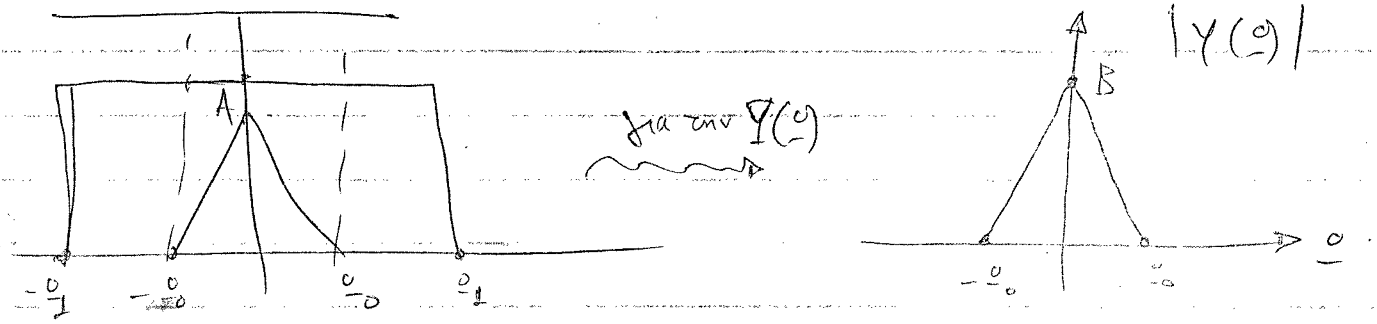
Δηλαδή πρέπει να βρω την κατάλληλη $H(\Omega)$ προσαρμένω να την πολλαπλασιάσω με την $X(\Omega)$ (εκφώνηση) για να πάρω την δοθείσα (από εκφώνηση) $Y(\Omega)$.

Αν $H(\omega)$ τετραγωνικού παλμού της μορφής

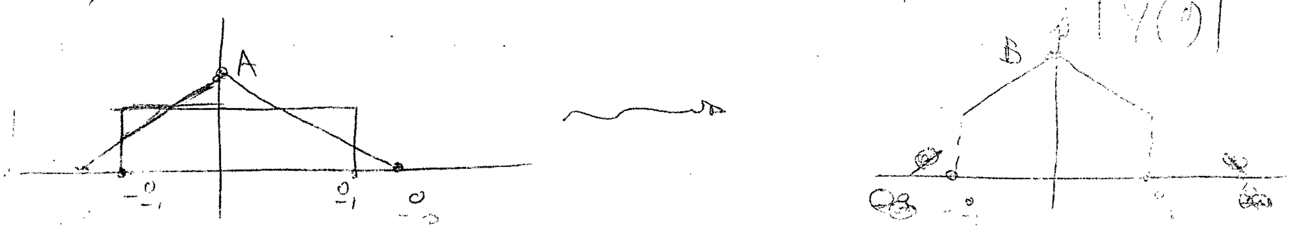


η μόνη περίπτωση να διατηρ
θεί η μορφή του $X(\omega)$ στην
$Y(\omega)$ είναι όταν $\omega > \omega_0$ κα

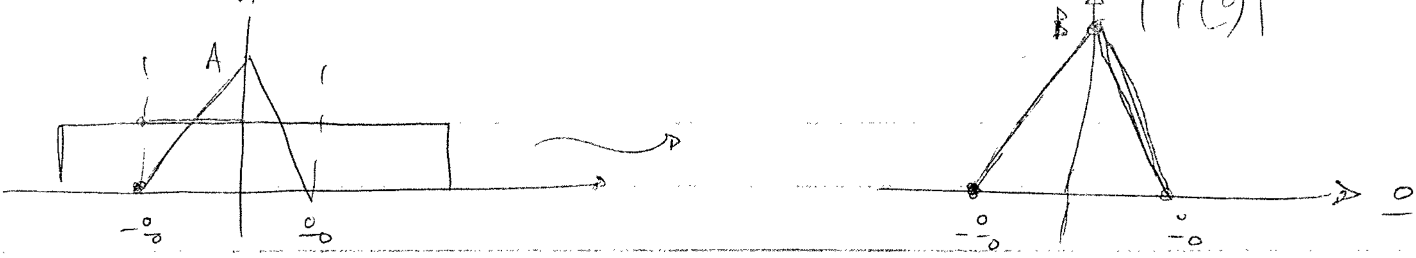
πλάτος $> A$, δηλ.



γιατί σε κάθε άλλη περίπτωση, δηλ. αν $\omega < \omega_0$ ή/και το πλάτος $< A$ θα έχω:



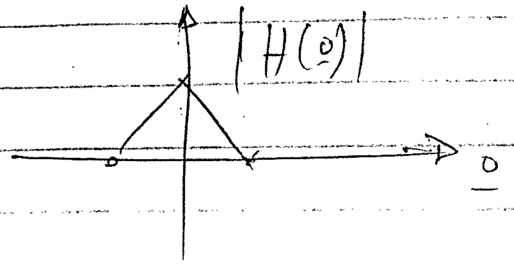
ή



(εδώ όμως δεν έχω την
περίπτωση του $|Y(\omega)|$
της εκφώνησης αφού για
$\omega_0 \neq \omega_1$).

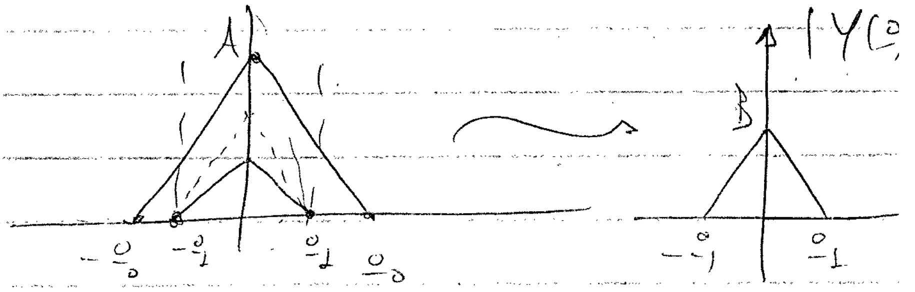
⑥

Αν $H(\omega)$ τριγωνικός παλμός, δηλ: της μορφ

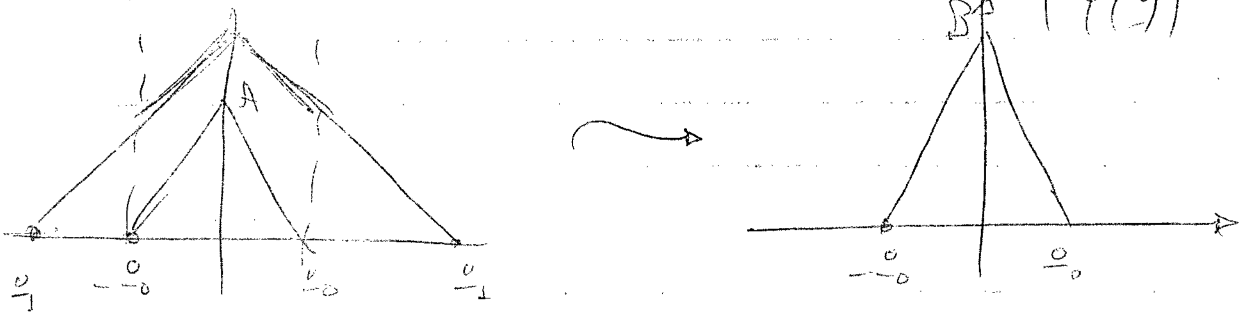


η μόνη περίπτωση να δια μορφή ίδια της Χ είναι όταν $\omega < \omega_0$ και π

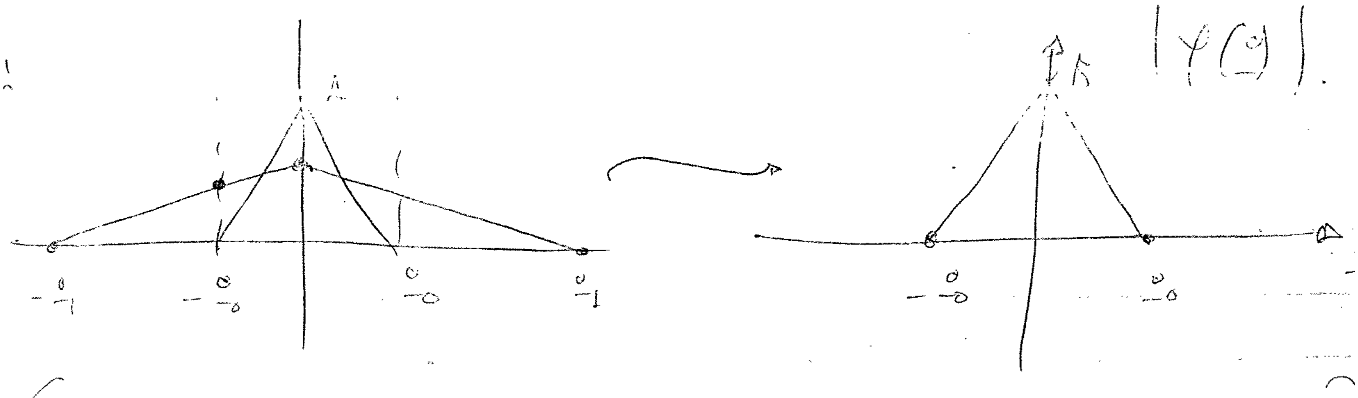
ως $<A$. Δηλ.: (η πλάτος $<A$)

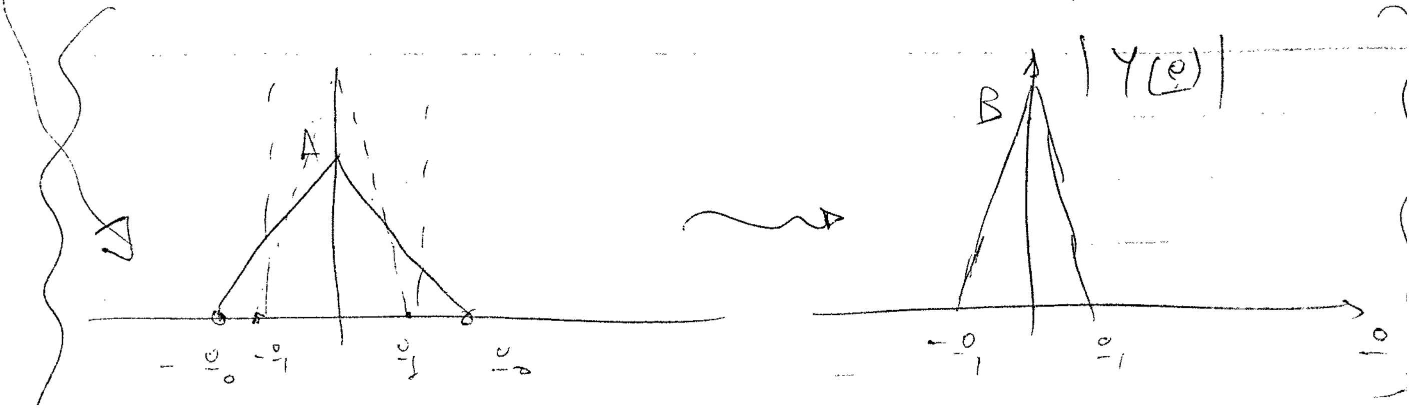


γιατί διαφορετικά αν $\omega > \omega_0$ η/και πλάτος
δηλ. της μορφής



ή





ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

→ Τριγωνομετρική ΣF : αν x(t) ορίζεται σ
[t_0, t_0+T] τότε υποθέτουμε ότι υπάρχει το αν
πτυγμα:

$$\boxed{\underline{\underline{x(t)}} = \underline{\underline{a_0}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\underline{\underline{a_n}}\cdot\cos(n\Omega_0 t) + \underline{\underline{b_n}}\sin(n\Omega_0 t)\right), \quad \underline{\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}}.}$$

ανάπτυγμα της x(t) ως άθροισμα τριγωνομετρικ
συναρτήσεων.

Τότε για τους συντελεστές a_0, a_n, b_n θα είναι:

$$\rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,dt}$$

$$\rightarrow \boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cdot\cos(n\Omega_0 t)\,dt}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\rightarrow \boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cdot\sin(n\Omega_0 t)\,dt,} \quad n = 1, 2, \ldots$$

→ Εκθετική Σειρά Fourier: αν $x(t)$ ορίζεται στο $[t_0, t_0+T]$ υποθέτουμε ότι υπάρχει το ανάπτυγμα

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{\underline{c_n}} \cdot e^{+jn\omega_0 t}} \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

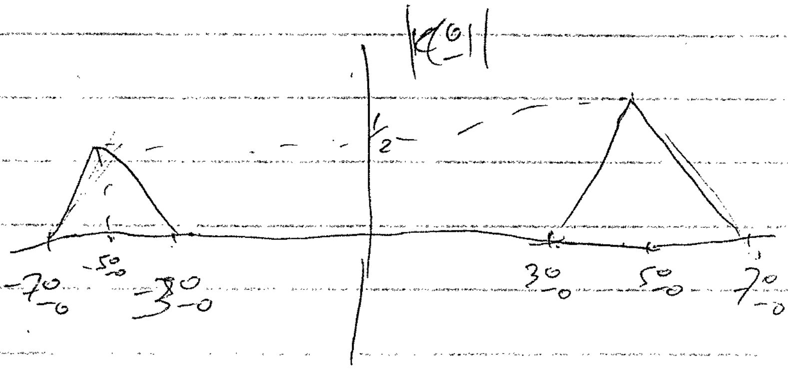
Ανάπτυγμα σε εκθετική σειρά Fourier

Τότε οι συντελεστές c_n θα είναι:

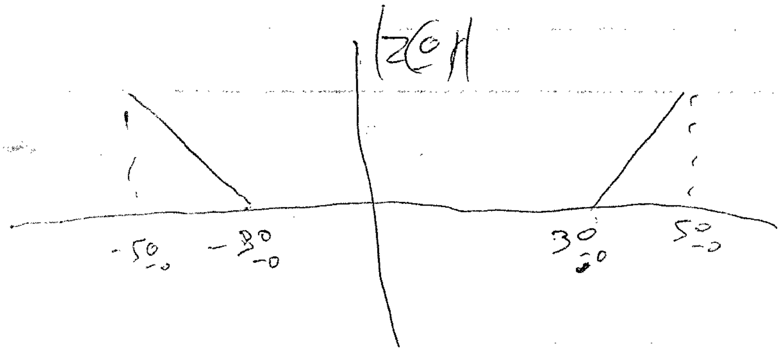
$$\longrightarrow \boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t}\, dt}$$

ΘΕΜΑ 2, ΦΕΒ 2005.

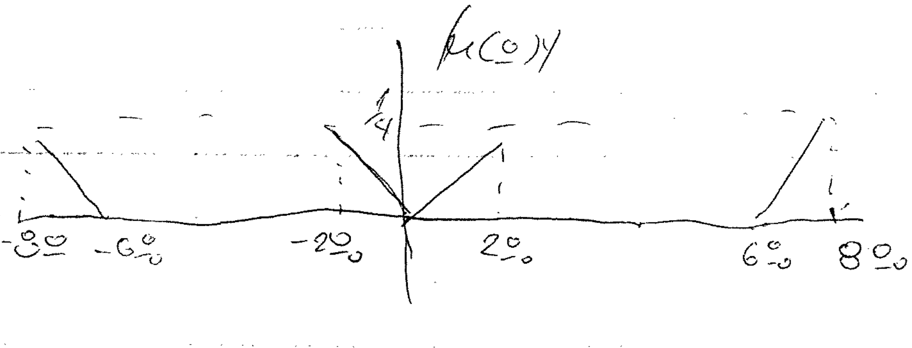
$k(t) = u(t)\cos(5\Omega_0 t) \overset{MF}{\longleftrightarrow} K(\Omega) = \cancel{U(\Omega)}\,\frac{1}{2}\left[U(\Omega-5\Omega_0) + U(\Omega+5\Omega_0)\right]$



$z(t) = k(t) * h_1(t) \overset{MF}{\longleftrightarrow} Z(\Omega) = K(\Omega)\cdot H_1(\Omega)$



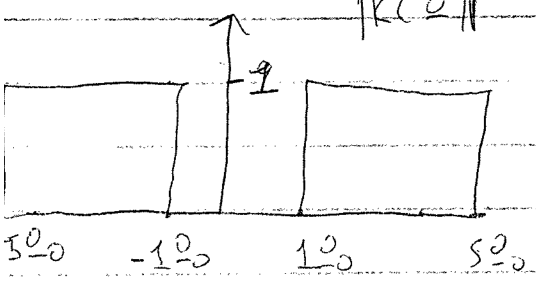
$m(t) = z(t)\cdot\cos(3\Omega_0 t) \overset{MF}{\longleftrightarrow} M(\Omega) = \frac{1}{2}\left[Z(\Omega-3\Omega_0) + Z(\Omega+\right.$



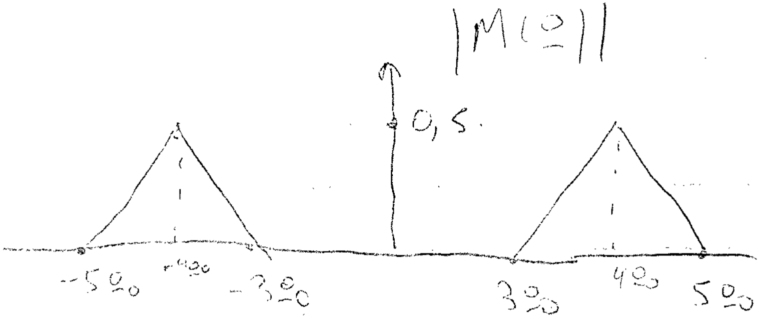
$y(t) = m(t) * h_2(t) \overset{MF}{\longleftrightarrow} Y(\Omega) = M(\Omega)\cdot H_2(\Omega)$

Σεπ. 20   Θέμα: 2ο

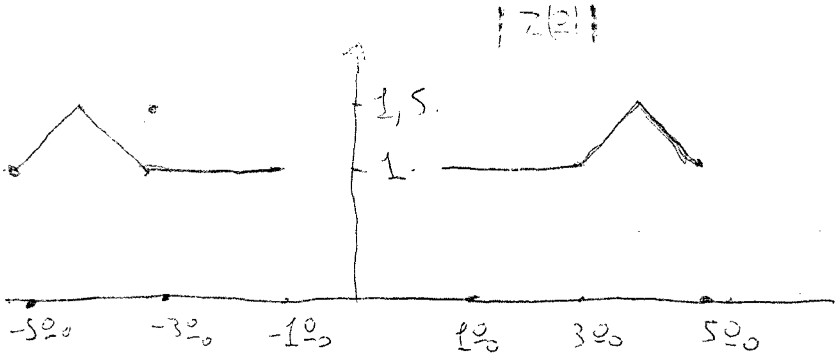
$k(t) = v(t) \cdot 4\cos(3\Omega_0 t) \xleftrightarrow{MF} K(\Omega) = 4 \cdot \frac{1}{2}[V(\Omega - 3\Omega_0) + V(\Omega$



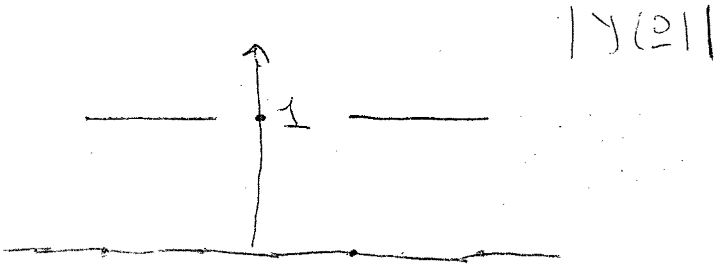
$m(t) = u(t) \cdot \cos(4\Omega_0 t) \xleftrightarrow{MF} M(\Omega) = \frac{1}{2}[U(\Omega - 4\Omega_0) + U(\Omega + 4$



$z(t) = k(t) + m(t) \xleftrightarrow{MF} Z(\Omega) = K(\Omega) + M(\Omega)$



$y(t) = z(t) * h_1(t) \xleftrightarrow{MF} Y(\Omega) = Z(\Omega) \cdot H_1(\Omega)$



√

ΜΑΘΗΜΑ 7ο

→ Τριγωνομετρική ΣF:

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t) + a_0}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\begin{cases} \rightarrow a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt \\ \rightarrow a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\cos(n\omega_0 t)\,dt, \quad n=1,2,\dots \\ \rightarrow b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\sin(n\omega_0 t)\,dt, \quad n=1,2,\dots \end{cases}$$

→ Εκθετική ΣF

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+jn\omega_0 t}} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

ίσος →
$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\,dt} \longleftarrow$$

→ Σχέσεις συντελεστών τριγωνομετρικής / εκθετικής ΣF:

$$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = j\cdot(c_n - c_{-n}) \\ c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \end{cases} \quad n=1,2,\dots$$

Επίσης: $$\boxed{C_n^* = \frac{1}{2}\left(a_n + j\cdot b_n\right) = C_{-n}.}$$

Μιγαδικός Συζυγής.

$$z = a + jb \Rightarrow z^* = a - jb.$$

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad z\cdot z^* =$$

$$= (a+jb)(a-jb) = a^2 - \cancel{ajb} + jb$$

$$-j^2b^2 = a^2+b^2 = |z$$

→ Τριγωνομετρική ΣF κ' Συμμετρία.

αν $x(-t) = x(t)$ άρτια ⇒ τότε $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

αν $x(-t) = -x(t)$ περιττή ⇒ τότε $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2,$

→ Εκθετική ΣF κ' Συμμετρία.

αν $x(-t) = x(t)$ άρτια ⇒ τότε $C_n = C_{-n}$

αν $x(-t) = -x(t)$ περιττή ⇒ τότε $C_n = -C_{-n}$.

→ Θ. Parseval : αν $x(t)$ περιοδική με περίοδο T ορίζεται στο $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ (δηλαδή υπάρχει το ανάπτυ σε ΣF). τότε θα είναι:

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2}$$

Στην παραπάνω, το αριστερό μέλος είναι η μέση ισχυ
του σήματος x(t) σε μια περίοδο.

$$\left(P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \right) \rightarrow$$ ισχύς: ενέργεια στη μονάδ
του χρόν

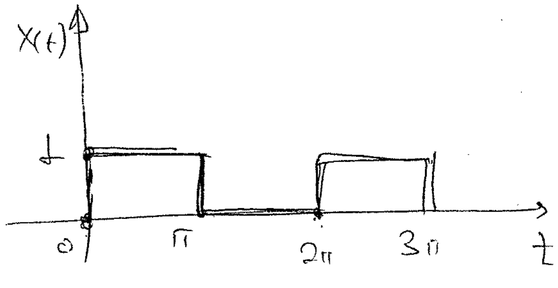
→ Για τα σήματα για τα οποία ισχύει η παραπάνω σχέσ
παίρνουμε το φάσμα πυκνότητας ισχύος (γι' αυτό τα
τα αυτά καλούνται σήματα ισχύος)
Το φάσμα ισχύος ενός περιοδικού σήματος απαρτίζ
από διακριτές τιμές (φάσμα γραμμών).

* * *

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

↓ φ →

1) Δίνεται η περιοδική συνάρτηση x(t)



α) Να αναπτυχθεί σε μιγαδ
ΣF.
β) Χρησιμοποιώντας γνωστό
ρημα, να βρεθεί το άθ

σμα: $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

ΛΥΣΗ

α). Για την περιοδική x(t) θα είναι: $T = 2\pi \Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{T} =$

$$(e \quad = (-1) \qquad (\quad) \quad = e \quad = (-1).$$

$$e^{-j\pi 2n} = (-1)^{2n} = 1$$

Άρα η x(t) γράφεται σε μιγαδική ΣF :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnt}$$

Τότε:

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cancel{x(t)} \cdot e^{-jnt} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1 \cdot e^{-jnt} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-jnt} dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\frac{1}{jn}\right)\cdot e^{-jnt}\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2\pi j n}\cdot(e^{-j}$$

$$1) \overset{}{=} -\frac{1}{2\pi j n}\left((-1)^n - 1\right) \Rightarrow \boxed{C_n = \frac{1-(-1)^n}{2\pi j n}}$$

$$e^{-jn\pi} = (-1)^n - 1$$

Προσοχή: για n=0 ο παραπάνω τύπος δεν ισχύει, απ

πηγαίνω απ' τον αρχικό τύπο:

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1\, dt = \frac{1}{2\pi}\cdot t\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}(\pi - 0$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Άρα η x(t) γράφεται ως:

$$x(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2\pi j n}\cdot e^{+jnt} + \frac{1}{2}$$

β) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$

Από Θ. Parseval θα είναι:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 1^2 dt = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left| \frac{1-(-1)^n}{2\pi j n} \right|^2 + |c_0|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \cdot t \Big|_{0}^{\pi} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left| \frac{(1-(-1)^n)^2}{4\pi^2 j^2 n^2} \right| + \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)^2}{4\pi^2 n^2} + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{\underline{4\pi^2 n}}$$

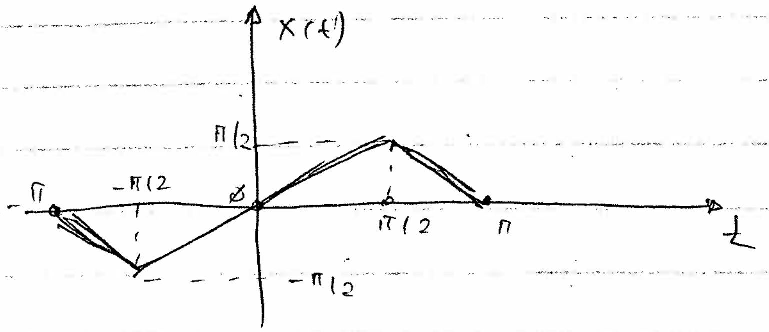
$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{4}} = \frac{1}{\cancel{4}\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)^2}{n^2} \Rightarrow \pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)^2}{n^2}$$

$$+ \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(1-(-1)^n)^2}{n^2}}_{(\text{όπου } n \leftrightarrow -n)} \Rightarrow \pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)^2}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow \pi^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)^2}{n^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{2} = \frac{2^2}{1^2} + \frac{2^2}{3^2} +$$

$$+ \frac{2^2}{7^2} + \dots \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} =$$

2) Έστω η περιοδική x(t):



ΘΕΩΡΙΑ ⇒ α) Να βρεθεί σχέση μεταξύ των συντελεστών της ΣF της x(t) και των συντελεστών της ΣF της x[illegible](t).

β) Να χρησιμοποιηθεί η σχέση αυτή για τον υπολ
γισμό της x(t) σε ΣF.

γ) Να βρεθούν τα αθροίσματα: $S_1 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}$ ...

$S_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$

ΛΥΣΗ

α) Αφού η x(t) είναι περιοδική με $T = 2\pi$, $\omega_0 = 1$, θα γρ
φεται ως:

$$\underbrace{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+jnt}}$$

Όμως: $c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underset{?}{\underline{x(t)}}\, e^{-jnt}\,dt$

Αφού $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{+jnt} \Rightarrow x'(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnt}\right)'$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jnt} \cdot jn \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{(k)}(t) = \left(\sum_{n=-\infty} C_n e^{jnt}\right)^{(k)} \Rightarrow x^{(k)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnt} \cdot (jn)^k$$

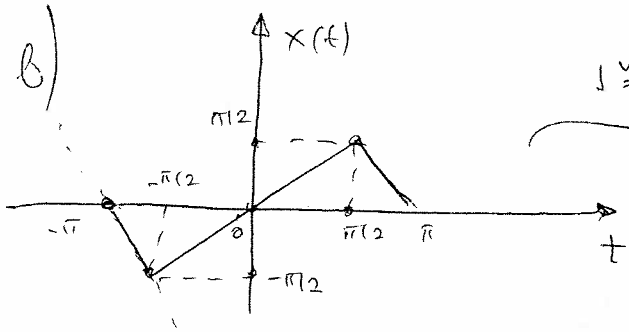
Άρα:
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jnt} \\ x^{(k)}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot (jn)^k \cdot e^{jnt} \end{aligned}\right\} \longrightarrow C_n^{(k)} = C_n \cdot (jn$$

$\boxed{C_n^{(k)}}$ (συμβολισμός).

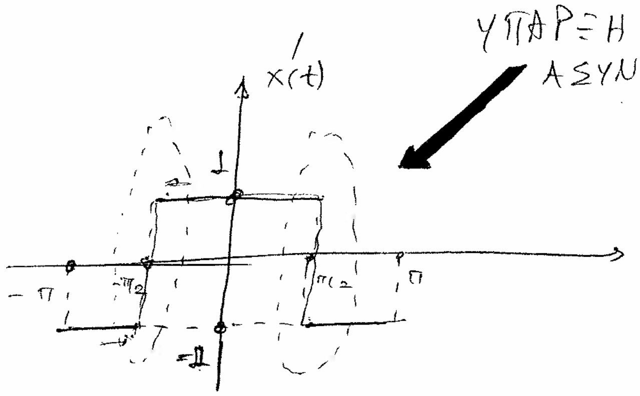
Γενικότερα θα ισχύει: $C_n^{(k)} = C_n \cdot (jn\omega_0)^k \Rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{C_n = \frac{C_n^{(k)}}{(jn\omega_0)^k}}$$ → ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

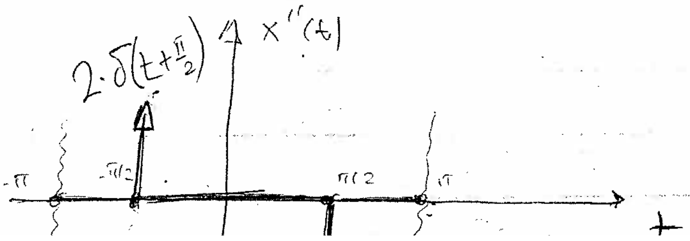
β)



1η παραγ.



2η παραγ.



<u>Άρα:</u> $x''(t) = 2\delta(t+\frac{\pi}{2}) - 2\delta(t-\frac{\pi}{2}), \quad -\pi \le t \le \pi .$

<u>Τότε:</u>

$$x''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(2)} \cdot e^{+jnt}$$, όπου:

$$C_n^{(2)} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x''(t)\, e^{-jn\Omega_0 t}\, dt = \frac{1}{\cancel{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cancel{2}\delta(t+\tfrac{\pi}{2}) - \cancel{2}\delta(t-\tfrac{\pi}{2})\right) \cdot e^{-jnt}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\delta(t+\tfrac{\pi}{2}) \cdot e^{-jnt}\, dt}_{\text{ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΔΕΛΤΑ}} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t- \cdot e^{-jnt}\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_n^{(2)} = \frac{1}{\pi} \cdot e^{-jn\cdot(-\frac{\pi}{2})} - \frac{1}{\pi} \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi} \cdot \underbrace{\left(e^{j\frac{\pi n}{2}} - e\right.}_{\text{euler}}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_n^{(2)} = \frac{1}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \cdot 2j}$$

<u>Οπότε:</u>

$$C_n^{(0)} = \frac{C_n^{(2)}}{(jn\cdot 1)^2} = \frac{\frac{2j}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\underbrace{j^2 \quad n^2}_{-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C_n = \frac{2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{-j\pi n^2}} = -\frac{2j\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n^2}$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> για $n=0$ θα είναι: $C_0 = \frac{1}{T}\int^{t_0+T} x(t)\,dt$

⑧

Α' δεξιά

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x(t)\,dt}_{?} \equiv \cancel{0}$$

$t = \frac{\pi}{4}$

→ η x(t) είναι

σε

περιφέ

αφα μη

Επομένως:

$$\boxed{x(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2\sin(\frac{\cdot}{2})}{j\pi n^2} \cdot e^{+jnt}}$$

γ) **Θ. Parseval:**

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \Rightarrow (x(t)^2) \; ?$$

2ος τρόπος:

$$x(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2\sin(\frac{\pi n}{2})}{j\pi n^2} \, e^{jnt} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\cancel{2}}{j\pi n^2} \cdot \left[\frac{e^{j\frac{\pi n}{2}} - e^{-j\frac{\pi n}{2}}}{\cancel{2}j}\right] \cdot e^{jnt} \Rightarrow$$

Θέτω $t = \frac{\pi}{2}$ ⇒

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} -\frac{1}{\pi n^2} \cdot \left(e^{j\frac{\pi n}{2}} - e^{-j\frac{\pi n}{2}}\right) \cdot e^{j\frac{\pi n}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} -\frac{1}{\pi n^2}\left(\underbrace{e^{j\pi n}}_{(-1)^n} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{2} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{2} = \underbrace{\left(\frac{2}{1^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \cdots\right)}_{n=1 \text{ έως } \infty} + \underbrace{\left(\frac{2}{1^2} + \frac{2}{3^2} + \cdots\right.}_{n=-\infty \text{ έως } -}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{2} = 2 \cdot 2 \underbrace{\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)}_{S_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S_1 = \frac{\pi^2}{8}}$$

Επίσης:

$$S_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right)}_{S_1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots =$$

$$= S_1 + \frac{1}{2^2 \cdot 1^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2}$$

$$\Rightarrow S_2 = S_1 + \frac{1}{2^2} \underbrace{\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right)}_{S_2} =$$

$$\Rightarrow S_2 = S_1 + \frac{1}{4} S_2 \Rightarrow$$

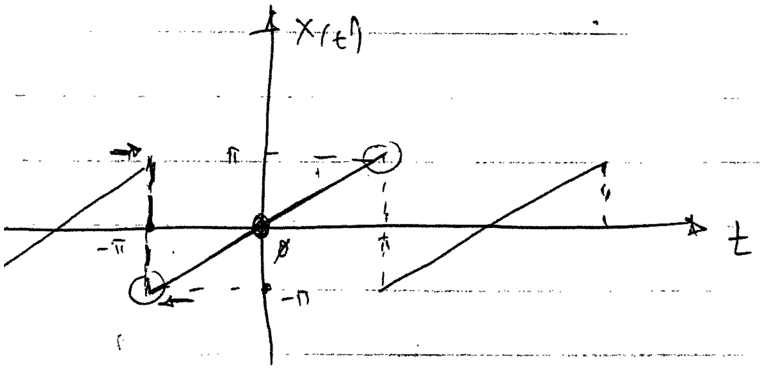
$$\Rightarrow \frac{3}{4}\zeta_2 = \zeta_1 \Rightarrow \zeta_2 = \frac{\cancel{4}^{1}}{3}\cdot\frac{\pi^2}{\cancel{8}\,2} \Rightarrow \zeta_2 = \frac{\pi^2}{6}$$

3)

ΜΑΘΗΜΑ 8ο   ↓ 9

①

Άσκηση 3: έστω η x(t) του σχήματος



α) Βρείτε τη μιγαδικ
σειρά Fourier της x
β) Από Θ. Parseval βρε
τε το $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

γ) Υπολογίστε τη σειρά $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$

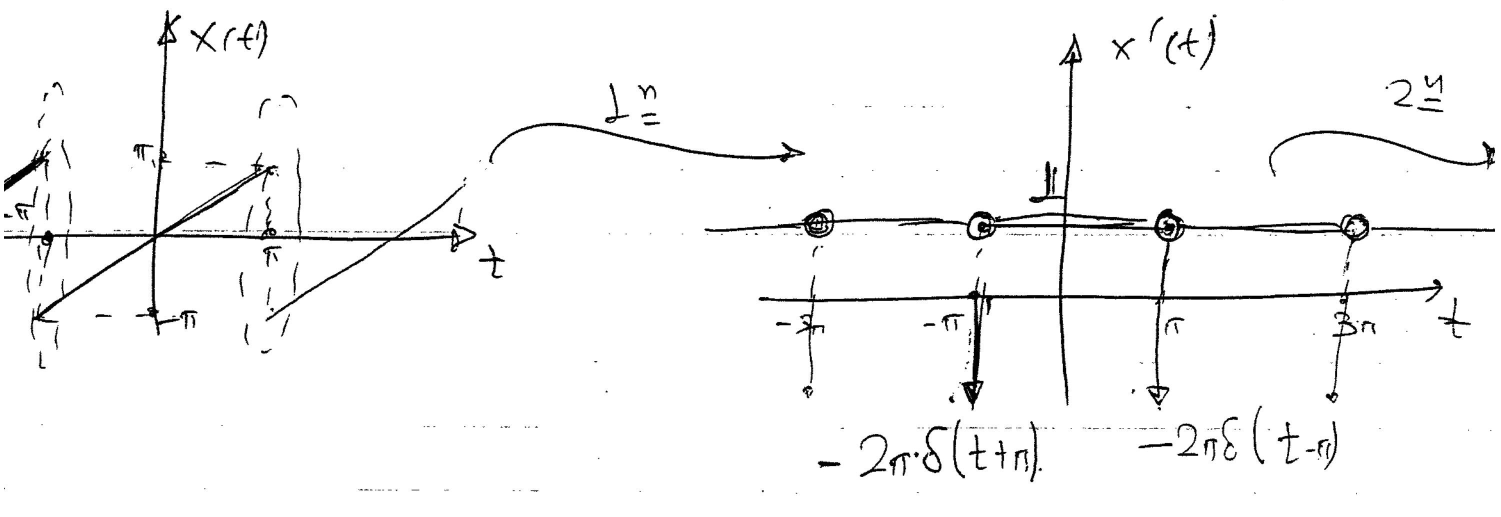
ΛΥΣΗ.

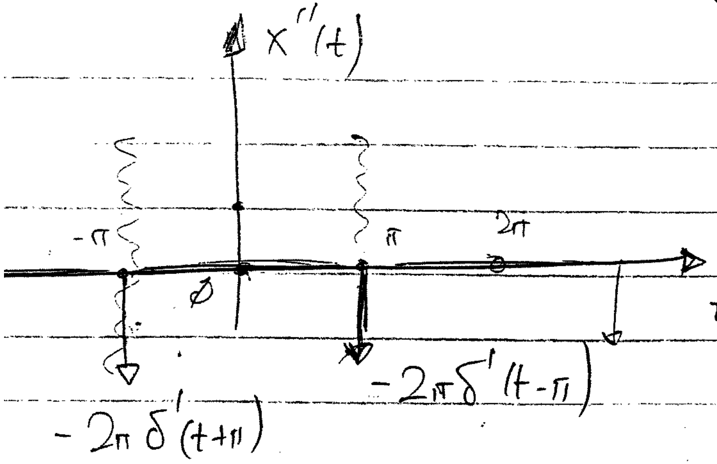
Παρατηρώ ότι $T=2\pi$, $\omega_0=1$.

Άρα: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+jnt}$.

Τότε: $c_n = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t e^{-jnt}\,dt = \dots$ (ΒΑΡΙΕΜ

ΜΕ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ.





②

Άρα: $x''(t) = -2\pi\delta'(t+\pi) - 2\pi\delta'(t-\pi)$

$-\pi \le t \le \pi$.

Άρα: $C_n^{(2)} = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} x''(t)\cdot e^{-jnt}\,dt = \frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\left[-\cancel{2\pi}\delta'(t+\pi) - \cancel{2\pi}\delta'(t-\pi)\right]\cdot e^{-jnt}\,dt =$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi}\left(\delta'(t+\pi) + \underline{\delta'(t-\pi)}\right)e^{-jnt}\,dt =$$

$$\underset{b}{=} -\int_{0}^{2\pi}\delta'(t-\pi)\,e^{-jnt}\,dt =$$ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ ΔΕΛΤΑ

ΠΡΟΣΟΧΗ: ΔΕΝ ΠΑΙΡΝΩ ΑΚΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΕΚΕΙ ΠΟΥ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΣΥΛ
ΤΗΣΕΙΣ ΔΕΛΤΑ.

$$= -(-1)^1\cdot\underbrace{\frac{d}{dt}e^{-jnt}\Big|_{t=\pi}} = +(-jn)\cdot e^{-jnt}\Big|_{t=\pi} = (-j$$

$$\cdot e^{-jn\pi} \Rightarrow \boxed{C_n^{(2)} = (-jn)\cdot(-1)^n}.$$

↓φ

Συνεπώς για τα c_n θα είναι:

$$c_n = \frac{c_n^{(2)}}{(jn\cdot 1)^2} = \frac{-\cancel{(jn)}\cdot(-1)^n}{(jn)^{\cancel{2}}} = -\frac{(-1)^n}{jn} =$$

$$= \frac{j(-1)^n}{n} \Rightarrow \boxed{c_n = -\frac{(-1)^n}{jn}.}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: για $n=0$ θα είναι:

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2}\right) =$$

$$= 0$$

Άρα:

$$\boxed{x(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{j^n}\cdot e^{+jnt}}$$

β) Θα είναι από θ. Parseval:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{}\int^{\pi} t^2\,dt = \sum^{\infty} \left|-\frac{(-1)^n}{jn}\right|^2 + |c_0|^2 \Rightarrow$$

$- = I|$

↓Ψ

④

$$\to \frac{1}{2\pi}\frac{t^3}{3}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{2n}}{j^2 n^2}\right| \to \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{(-\pi)}{3}\right.$$

$$= \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2\pi}}\cdot\frac{\cancel{2}\pi^{\cancel{3}\,2}}{3} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}}_{n\leftrightarrow -n}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

γ). $\underbrace{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots}$

Θα είναι: $X(t)=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{jn}e^{+jnt} \to$

$t=\frac{\pi}{2}: \Rightarrow X\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{jn}\cdot e^{j\frac{\pi n}{2}} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{jn}\cdot$

$\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+j\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) \Rightarrow$ ~~$\frac{\pi}{2} = \sum -\frac{(-1)^n}{jn}\cos$~~

~~$\Rightarrow \{$ Για $n=$ άρτιος $\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)=0$~~

$\to \frac{\pi}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{jn}\left(\cos\frac{\pi n}{2}+j\sin\frac{\pi n}{2}\right) \Rightarrow$

$$\downarrow 0 \qquad \text{euler}$$

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{jn} e^{jnt} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{jn} \cdot \left(\cos(nt) + j\right.$$

$$\left.\sin(nt)\right) = \underbrace{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{jn} \cos(nt)}_{0} + \sum_{\substack{n=\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{\cancel{j}n}\cancel{j}\sin(nt) \Rightarrow$$

$\cos(nt) \Rightarrow$ άρτια

$$\left(\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{jn} \cos(nt) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{jn} \cos(nt) + \sum_{n=-\infty}^{-1} -\frac{(-1)^n}{jn} \cdot \right.$$

$$\cos(nt) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{jn} \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} + \frac{(-1)^n}{jn} \cdot \cos($$

$$\left. = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 \right)$$

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{n} \sin(nt) \xrightarrow{t=\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{n}$$

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \rightarrow \left(\text{για } n = \text{άρτιος} \Rightarrow \sin\frac{\pi n}{2} = 0\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{2} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0 \\ n:\text{περιττός}}}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{2} = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right.$$

19 ⓔ

ΘΕΜΑ 3 - ΙΟΥΝΙΟΣ 09

$f(t) = \frac{t}{a}$, $\sqrt{a} \geq t \geq 0$ → $T = \sqrt{a}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}$

a) SF : $\underbrace{f_{\tau mod(2)}}(t) = f\left(a(\tau mod(2)) + (-1)^{\tau mod(2)}\right.$

→ Για $\tau mod(2) = 0$: $\left(f(t) = \frac{t}{a}\right)$

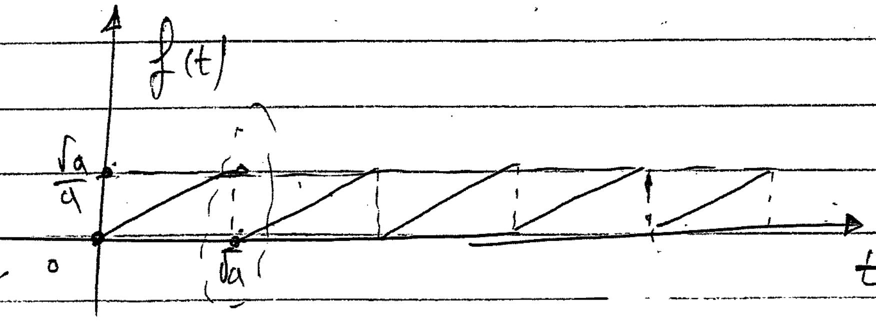
$$f_0(t) = f\left(a \cdot 0 + (-1)^0 t\right) = f(t) = \frac{t}{a}$$

→ Για $\tau mod(2) = 1$ $\left(f(t) = \frac{t}{a}\right)$

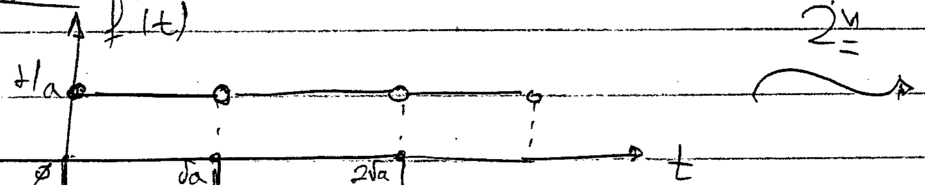
$$f_1(t) = f\left(a \cdot 1 + (-1)^1 t\right) = \underbrace{f(-t+a)}$$

⊛ Για $\tau mod(2) = 0$.

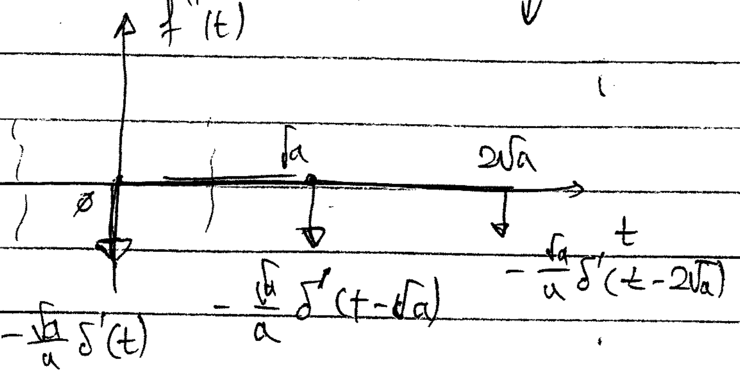
$f(t) = \frac{t}{a}$.



1η παράγωγος.



$\downarrow \Phi$



Άρα: $f''(t) = -\frac{\sqrt{a}}{a}\delta'(t) - \frac{\sqrt{a}}{a}\delta'(t-\sqrt{a})$, $0 \le t \le \sqrt{a}$

Οπότε: $C_n^{(2)} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f''(t)\, e^{-jn\Omega_0 t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}} -\frac{\sqrt{a}}{a}\delta'($

$\cdot e^{-jn\Omega_0 t}\,dt = -\frac{1}{a}\cdot(-1)^1\cdot\frac{d}{dt}e^{-jn\Omega_0 t}\Big|_{t=0} =$

ΙΔ. ΔΙΑΦ. ΔΕΛΤΑ

$= +\frac{1}{a}\cdot\left\{e^{-jn\Omega_0 t}\cdot(-jn\Omega_0)\right\}\Big|_{t=0} = -\frac{jn\Omega_0}{a}\cdot\underbrace{e^{-jn\Omega_0\cdot 0}}_{1} =$

$= \underbrace{-\frac{jn2\pi}{a\sqrt{a}}}$.

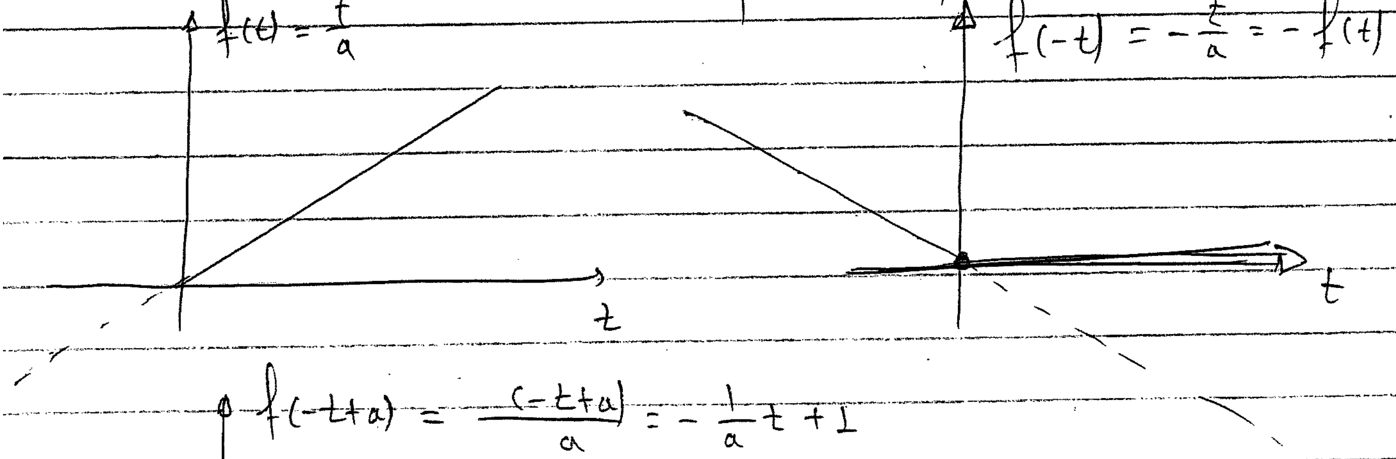
Οπότε: $C_n = \frac{C_n^{(2)}}{(jn\Omega_0)^2} = \frac{-\frac{\cancel{2\pi} jn}{\cancel{a}\sqrt{a}}}{-n^{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4\pi^2}}{\cancel{a}}} = \frac{\frac{j}{\sqrt{a}}}{2\pi n} =$

$\rightarrow \boxed{C_n = \frac{j}{2\sqrt{a}\pi n}}$

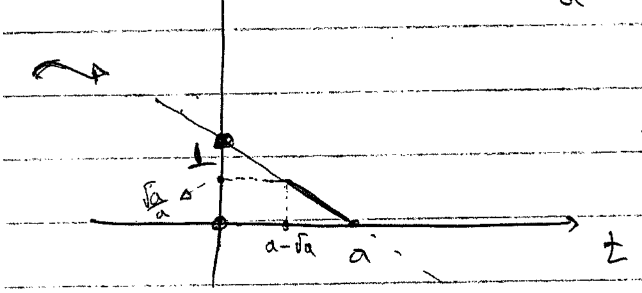
Για $n=0$: $C_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\sqrt{a}}\frac{t}{a}\,dt = \frac{1}{a\sqrt{a}}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0$

Άρα: $$\boxed{f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\overset{\sqrt{a}}{\downarrow}\, j}{2a\pi n} \cdot e^{+jn\Omega_0 t} + \frac{1}{2\sqrt{a}}}$$

Για ερωτ(2) = 1 : $f_1(t) = f(-t+a)$



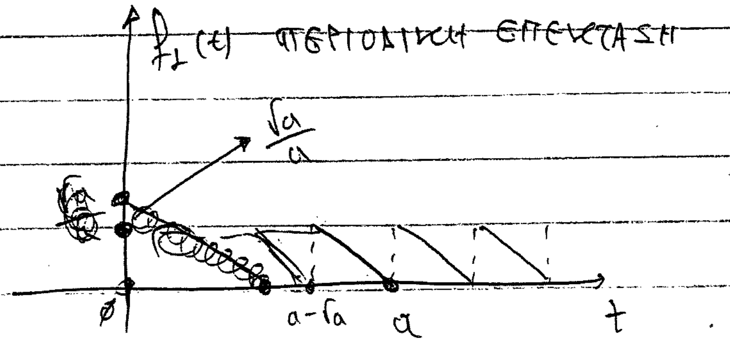
$f(-t+a) = \frac{(-t+a)}{a} = -\frac{1}{a}t + 1$



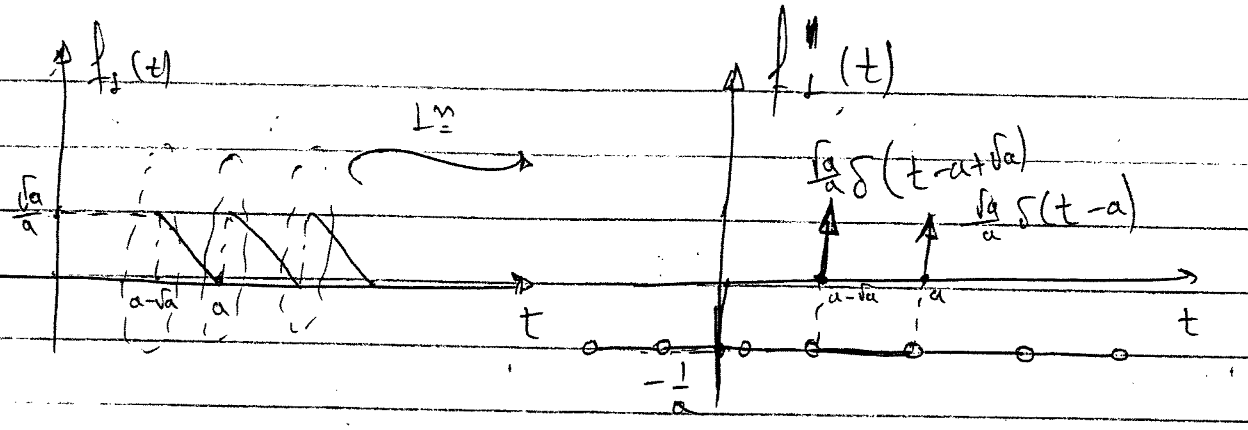
Άρα: $f_1(t) = f(-t+a) = \underbrace{-\frac{1}{a}t + 1}$ για $0 \leq -t+a \leq \sqrt{a} \Rightarrow$

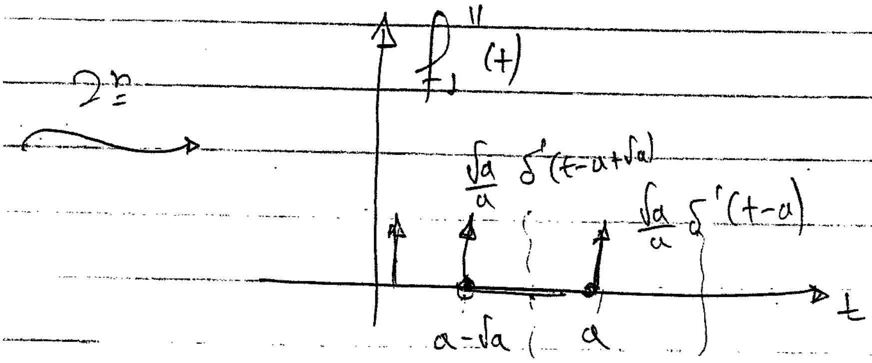
$\Rightarrow -a \leq -t < -a+\sqrt{a} \Rightarrow a \geq t \geq a-\sqrt{a} \Rightarrow \boxed{a-\sqrt{a} \leq t \leq a}$.

ή $0 \leq t \leq \sqrt{a}$



Τότε:





Άρα:

$$f_1''(t) = \frac{\sqrt{a}}{a}\delta'(t-a+\sqrt{a}) - \frac{\sqrt{a}}{a}\delta'(t-a) \ldots,$$

$a-\sqrt{a} \leq t \leq a.$

Οπότε:
$$C_n^{(2)} = \frac{1}{T}\int_{a-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{a+\frac{\sqrt{a}}{2}} \frac{\sqrt{a}}{a}\delta'(t-a)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{a}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{a}}}{a}\cdot(-1)^1\cdot\frac{d}{dt}e^{-jn\omega_0 t}\Big|_{t=a} =$$

$$= -\frac{1}{a}\cdot(-jn\omega_0)\cdot e^{-jn\omega_0 a} = \frac{jn\frac{2\pi}{\sqrt{a}}}{a}\cdot e^{-jn\frac{2\pi}{\sqrt{a}}\cancel{a}} =$$

$$= \underbrace{\frac{2\pi jn}{a\sqrt{a}}\cdot \boxed{e^{-jn2\pi\sqrt{a}}}}\xrightarrow{\quad} \left(e^{-j2\pi n}\right)^{\sqrt{a}} = 1^{\sqrt{a}} = 1$$

Άρα:
$$C_n = \frac{C_n^{(2)}}{(jn\omega_0)^2} = \frac{\frac{\cancel{2\pi}j\cancel{n}}{\cancel{a}\sqrt{a}}}{-n^{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}\pi^{\cancel{2}}}{\cancel{a}}}\cdot 1 = = \frac{\frac{j}{\sqrt{a}}}{-n\cdot\frac{2\pi}{1}} =$$

~~**ΠΡΟΣΟΧΗ:** $c_0 = \frac{1}{T}\int_0^{\sqrt{a}} f_1(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\sqrt{a}}\left(-\frac{1}{a}t+1\right)d$~~

~~$= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\sqrt{a}} -\frac{1}{a}t\,dt + \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\sqrt{a}} 1\,dt =$~~

~~$= -\frac{1}{a\sqrt{a}}\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot t\Big|_0^{\sqrt{a}} = -\frac{1}{a\sqrt{a}}\left(\frac{a}{2}-0\right)+$~~

~~$+\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot(\sqrt{a}-0) = \underline{-\frac{1}{2\sqrt{a}}+1}$~~

Άρα $c_0 = \frac{1}{T}\int_{a-\sqrt{a}}^{a} f_1(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{a-\sqrt{a}}^{a}\left(-\frac{1}{a}t+1\right)dt =$

$$= -\frac{1}{a\sqrt{a}}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_{a-\sqrt{a}}^{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot t\Big|_{a-\sqrt{a}}^{a} =$$

$$= -\frac{1}{2a\sqrt{a}}\left(a^2-(a-\sqrt{a})^2\right) + \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\cancel{a}-\cancel{a}+\sqrt{a}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2a\sqrt{a}}\left(a-(a^2-2a\sqrt{a}+a)\right) + \frac{1}{\cancel{\sqrt{a}}}\cdot 2\cancel{\sqrt{a}} -$$

$$= -\frac{1}{2a\sqrt{a}}\left(\cancel{a}-a^2+2a\sqrt{a}-\cancel{a}\right) + 2 - \frac{a}{\sqrt{a}} =$$

$$= +\frac{1}{2\cancel{a}\sqrt{a}}\cdot a^2 - \cancel{\frac{1}{2a\sqrt{a}}\cdot 2a\sqrt{a}} + 2 - \frac{a}{\sqrt{a}} =$$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{a-\sqrt{a}}^{a}\left(-\frac{1}{a}t+1\right)dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{a-\sqrt{a}}^{a}\left(-\frac{1}{a}t+1\right)d($$

$$\dots = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

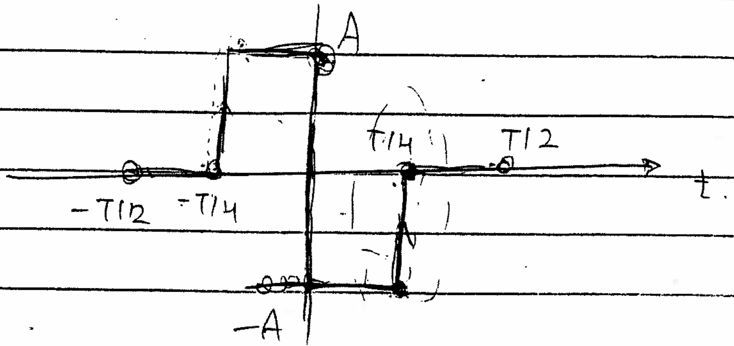
Οπότε:

$$\boxed{f_1(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} -\frac{j}{2\pi\sqrt{a}\,n}\, e^{+jn\omega_0 t} + \frac{1}{2\sqrt{a}}}$$

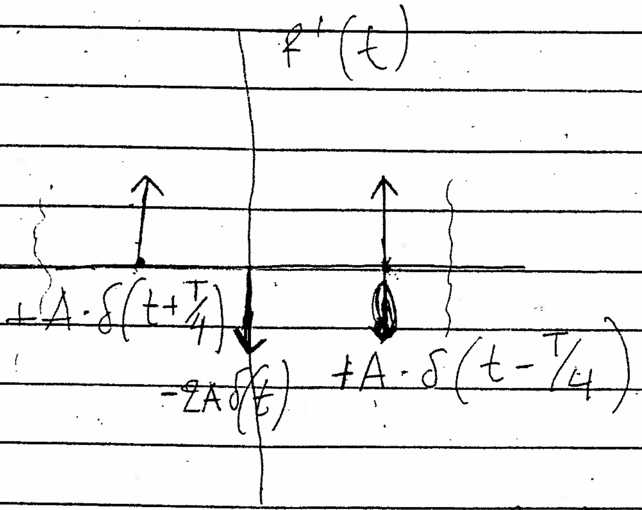
ΜΑΘΗΜΑ 9ο

ΙΟΥΝΙΟΣ 07

ΘΕΜΑ 2: Αναπτύξτε σε ΣF την περιοδική επέκταση της:



ΛΥΣΗ



$$f'(t) = A\cdot\delta(t+T/4) - 2A\,\delta(t) + A\cdot\delta(t-T/4)$$

$$C_n^{(1)} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f'(t)\, e^{jn\omega_0 t}\, dt =$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(A\cdot\delta(t+T/4) - 2A\,\delta(t) + A(\delta - T/4)\right)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_{-T/2}^{T/2} A\cdot\delta(t+T/4)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\,dt - \int_{-T/2}^{T/2} 2A\,\delta(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\,dt + \int_{-T/2}^{T/2} A\,\delta(t-T/4)\,e^{-jn\omega_0 t}\,dt\right)$$

$$= \frac{A}{T}\left(e^{+jn\omega_0\frac{T}{4}} - 2 + e^{-jn\omega T/4}\right)$$

$$= \frac{A}{T}\left(2\cos(n\omega_0 T/4) - 2\right) = \frac{2A}{T}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)$$

$$C_n = \frac{C_n^{(1)}}{(jn\omega_0)} = \frac{\frac{\cancel{2}A}{\cancel{T}}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right)}{jn\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{T}}} = \frac{A\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 1\right)}{jn\pi}$$

Για $n=0$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = 0 \qquad f(t) \text{ περιττη}$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{A\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 1\right)}{jn\pi}\cdot e^{jn\frac{2\pi}{T}t}}$$

③

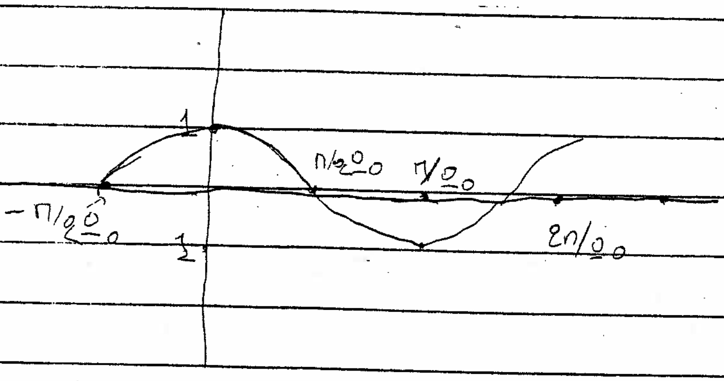
2) ΘΕΜΑ 3 - ΙΟΥΝΙΟΣ 08

$$f(t) = \cos(\Omega_0 t), \qquad |t| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Να βρεθεί η ΣF της περιοδικής επέκτασης του σήματος.

ΛΥΣΗ

$$|t| \leq \pi/2 \rightarrow -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$$



Προσοχη!!! Περίοδος της περιοδικής επέκτασης.

$$\boxed{T = \pi} \qquad \boxed{\Omega_0 = 2}$$

προσοχη!!

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{+jn\Omega_0 t} = \sum C_n e^{jn2t}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \cdot e^{-jn\Omega_0 t}\, dt \underset{\Omega_0=2}{\overset{T=\pi}{=}} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\Omega_0 t) \cdot e^{-jn2t}\, dt$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}\right) \cdot e^{-2jnt}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{j\Omega_0 t - 2jnt}\, dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-j\Omega_0 t - 2jnt}\, dt\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{jt(\Omega_0 - 2n)}\, dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-jt(\Omega_0 + 2n)}\, dt$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{1}{j(\Omega_0 - 2n)} e^{jt(\Omega_0 - 2n)}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[\frac{1}{-j(\Omega_0 + 2n)} e^{-jt(\Omega_0 + 2n)}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{j(\Omega_0 - 2n)} e^{\frac{j\pi}{2}(\Omega_0 - 2n)}\right) - \left(\frac{1}{j(\Omega_0 - 2n)} e^{-\pi/2 j (\Omega_0 - 2n)}\right) + \left(\frac{1}{-j(\Omega_0 + 2n)} e^{-j\pi/2(\Omega_0}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{1}{-j(\Omega_0 + 2n)} e^{+j\pi/2(\Omega_0 + 2n)}\right)\right]$$

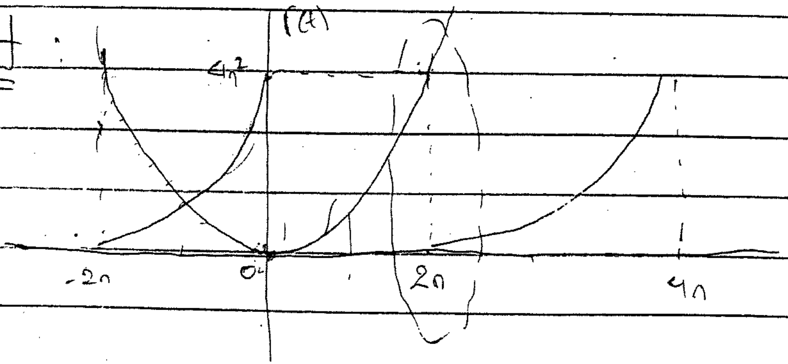
3) ΘΕΜΑ I - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2003

a) Βρείτε τη ΣF της περιοδικής

$f(t) = t^2, \quad 0 < t < 2\pi$

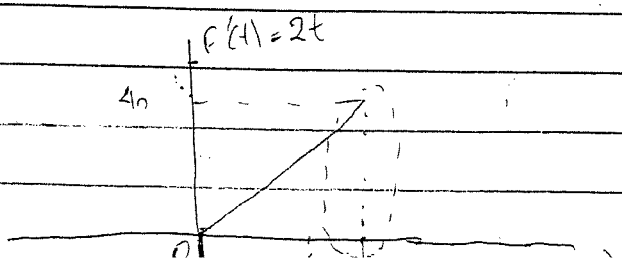
β) Απ' το a) βρείτε το $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

ΛΥΣΗ:

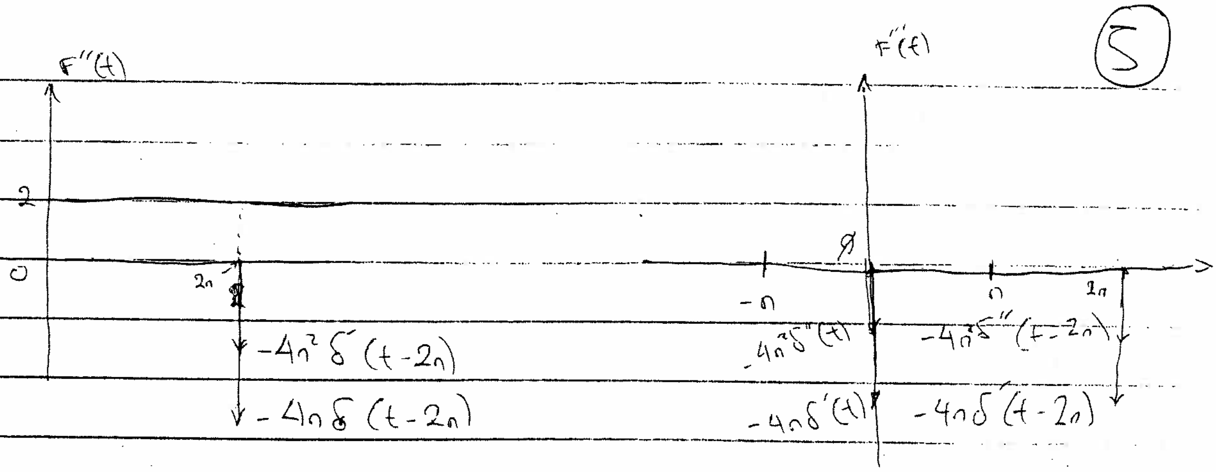


$T = 2\pi$

$\Rightarrow \Omega_0 = 1$



⑤



$$F'''(t) = -4\pi^2\delta''(t) - 4\pi\delta'(t)$$
$$\underbrace{-4\pi^2\delta''(t-2\pi) - 4\pi\delta'(t-2\pi)}$$
~~$(t) \le 0$~~ $0 \le t \le 2\pi$

$$c_n^{(3)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-4\pi^2\delta''(t) - 4\pi\delta'(t))\cdot e^{-jnt}\,dt$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta''(t)\cdot e^{-jnt}\,dt - 2\int_{-\pi}^{\pi}\delta'(t)\cdot e^{-jnt}\,dt$$

$$= -2\pi\cdot(-1)^2\frac{d^{(2)}}{dt}e^{-jnt}\Big|_{t=0} - 2(-1)^1\frac{d}{dt}e^{-jnt}\Big|_{t=0}$$

$$= -2\pi\cdot(-jn)^2\cdot 1 + 2\cdot(-jn) =$$

$$= -2\pi(jn)^2 - 2jn = -2jn + 2\pi n^2$$

$$c_n = \frac{c_n^{(3)}}{(jn\Omega_0)^3} = \frac{-2jn + 2\pi n^2}{j^3n^3} = \boxed{\frac{+2}{n^2} + \left(-\frac{2\pi}{jn}\right)}$$

Για $n=0 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} t^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{6\pi}\left((2\pi)^3\right) =$

$8\pi^3 = \frac{4}{}\pi^2$

⑥

Άρα $$\boxed{F(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2} - \frac{2\pi}{jn}\right) e^{jnt} + \frac{4}{3}\pi^2}$$

β) Από α) ερώτημα $$F(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2} - \frac{2\pi}{jn}\right) \cdot e^{jnt} + \frac{4}{3}\pi^2$$

=> (στα σημεία ασυνεχείας δεν επιλέγω ποτέ τιμή για το t)

για $t=\pi$ => (συμφέρει επειδή το $e^{j\pi n} = (-1)^n$)

$$F(\pi) = 2\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{\pi}{jn}\right) \cdot (-1)^n + \frac{4}{3}\pi^2 =>$$

$$\pi^2 - \frac{4}{3}\pi^2 = 2 \cdot \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{(-1)^n \pi}{jn} =>$$

$$-\frac{1}{6}\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{(-1)^n\pi}{jn}\right) + \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{(-1)^n \pi}{jn}\right)$$

για $n \leftrightarrow -n$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(-1)^n \pi}{jn}\right)$$

$$=> -\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \left\{ -\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) - \right.$$

$$\left. \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \dots\right) = \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) \right\}$$

$$\Rightarrow (*) \; -\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} +$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) - \underbrace{\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right) -}$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right)} - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right)$$

↓

ΠΡΟΣΘΕΤΩ κ' ΑΦΑΙΡΩ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΠΟΣΟΤΗΤΑ

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = \underbrace{\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right)} - 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \cancel{2}\cdot\frac{1}{2^{\cancel{2}}}\underbrace{\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

ΜΑΘΗΜΑ 10ο

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

→ Ο ML διευρύνει την κλάση των συναρτήσεων για τις οποίες ορίζεται ο MF.

→ Ορισμός: $L\{x(t)\} = X(s) = \int_{a}^{\infty} x(t)\cdot e^{-st}\,dt$,

όταν $a = -\infty$ ⇒ ο ML καλείται αμφίπλευρος
" $a = 0$ → ο ML " μονόπλευρος.

→ Γενικά: $\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\,dt}$, όπου s μιγαδική συχνότητα.

$\boxed{s = \sigma + j\cdot\Omega}$

↳ $\underbrace{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-(\sigma+j\Omega)t}\,dt}$ $= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t}\cdot e^{-j\Omega t}\,dt$

⊛ Για $\sigma = 0$ ο ML ταυτίζεται με τον MF:

$$X_L(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\,dt = X_F(\Omega).$$

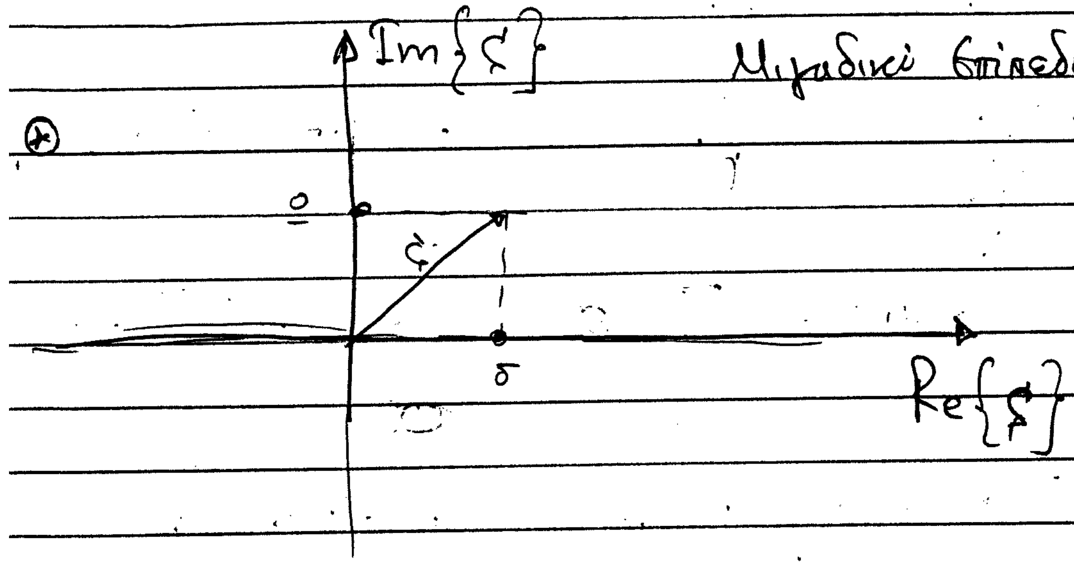
ή αλλιώς: $X(s) = F\left\{ x(t) e^{-\sigma t} \right\} =$

$$= \int^{\infty} x(t) e^{-\sigma t}\cdot e^{-j\Omega t}\,dt = \int^{\infty} x(t) e^{-st}$$

$x(t) \longleftrightarrow X(s)$

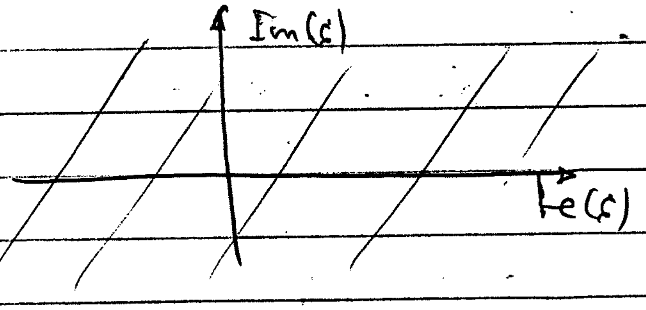
ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ - ΠΟΤΕ ΥΠΑΡΧΕΙ Ο ΜL

Μιγαδικό επίπεδο s $(= \sigma + j\omega)$



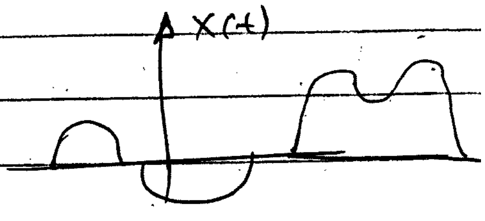
Περιπτώσεις για την Π.Σ

1) αν x(t) πεπερασμένης διάρκειας και ολοκληρώσιμη (σε απόλυτη τιμή). Τότε η ΠΣ του X(s) θα είναι ολόκληρο το επίπεδο s



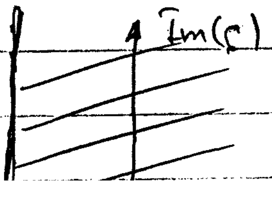
$\rightsquigarrow \boxed{\mathrm{Re}(s) > -\infty}$

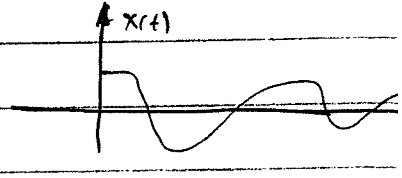
π.χ.



2) αν x(t) είναι σήμα δεξιάς επέκτασης (δηλ. x(t)·u(t)) Τότε η ΠΣ του X(s) θα είναι της μορφής

$\boxed{\mathrm{Re}(s) > \sigma_0}$

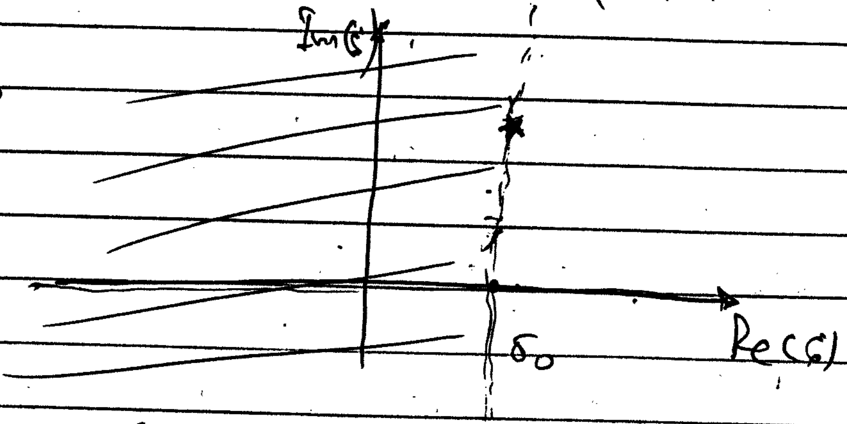


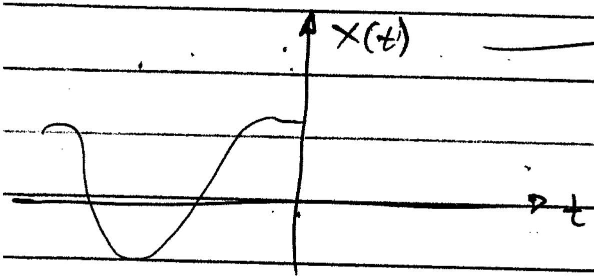


3) αν x(t) είναι σήμα αριστερής επέκτασης (δηλ. x(t)·
u(−

Τότε η ΠΣ του X(s) είναι της μορφής:

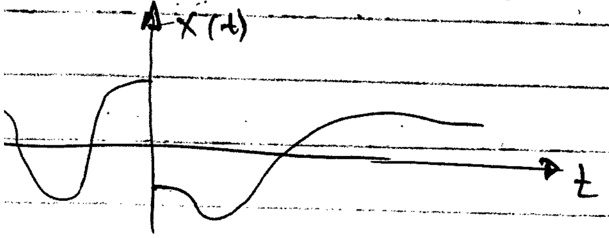
$\mathrm{Re}(s) < \sigma_0$





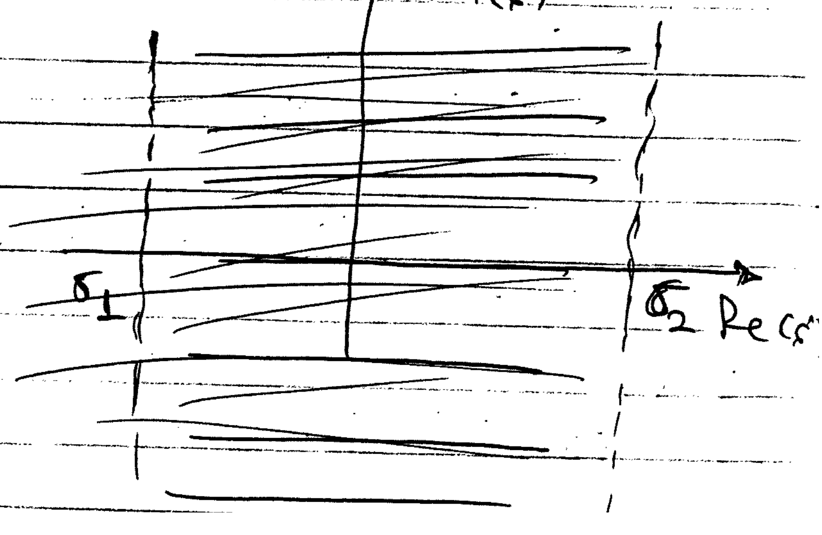
(δηλ. x(t): αντι-αιτιατό)

4) αν x(t) είναι σήμα αμφίπλευρης επέκτασης, δηλ
ένα κομμάτι του x(t) πολ/ζεται με u(t) και το υπόλοιπο με u(−t).



Τότε η ΠΣ του X(s) είνα
μια λωρίδα στο επίπεδο s.

$\sigma_1 < \mathrm{Re}(s) < \sigma_2$



⊛ Αν η $X(s)$ μπορεί να γράφει σε μορφή ρητ
συνάρτησης (λόγος πολυωνύμων του s), δηλ.

$X(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$, τότε οι ρίζες του $D(s)$ κα

λούνται **ΠΟΛΟΙ** του $X(s)$ και οι ρίζες του N

καλούνται **ΜΗΔΕΝΙΚΑ**

⊛ Η ΠΣ μιας ρητής συνάρτησης $X(s)$ ΔΕΝ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ ΠΟΤΕ **ΠΟΛΟΥΣ**

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜL

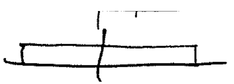
1): Γραμμικότητα: αν $X_1(s)$, $X_2(s)$ οι ML τω

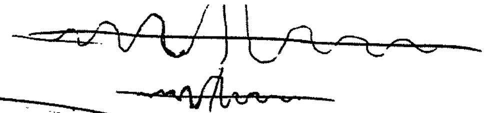
$x_1(t), x_2(t)$ με $Re(s)>\sigma_1$, $Re(s)>\sigma_2$, τότε:

$$L\{a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\} = a_1 L\{x_1(t)\}+a_2\cdot L\{x_2(t)\} =$$

$$=\underbrace{a_1\cdot X_1(s)+a_2\cdot X_2(s)}, \quad Re(s)>\max\{\sigma_1,\sigma_2$$

2) Χρονική ολίσθηση $X(s)=L\{x(t)\}$, $Re(s)>$





$$\boxed{L\{x(t-t_0)\} = \underset{\sim\sim\sim}{X(s)\cdot e^{-st_0}}}\ , \quad Re(s) > \sigma_0$$

3) <u>Μετατόπιση στη μιγαδική συχνότητα s:</u>

$$X(s) = L\{x(t)\}, \quad Re(s) > \sigma_0$$

$$\left(L\{x(t)\cdot e^{+s_0 t}\} = \underset{\sim\sim\sim}{X(s-s_0)} \right), \quad Re(s) > \sigma_0 + Re(s_0)$$

4) <u>Κλιμάκωση στο χρόνο κ' τη μιγαδ. συχνότητα</u>

$$X(s) = L\{x(t)\}, \quad Re(s) > \sigma_0$$

$$L\{x(b\cdot t)\} = \frac{1}{b}\cdot X\left(\frac{s}{b}\right), \quad Re(s) > \sigma_0\cdot b$$

$$L\left\{\frac{1}{b}\cdot x\left(\frac{t}{b}\right)\right\} = X(b\cdot s)$$

5) <u>Παραγώγιση στη μιγαδική συχνότητα:</u>

$$X(s) = L\{x(t)\}, \quad Re(s) > \sigma_0$$

$$\underbrace{\frac{d^{(n)}}{ds}X(s) = \int_0^\infty (-t)^n\cdot x(t)\,e^{-st}\,dt}$$

ή αλλιώς $L\{(-t)^n\cdot x(t)\}$ $d^{(n)}$

Ⓑ

6) Ολοκλήρωση στη μιγαδ. συχνότητα:

αν $X(s) = L\{x(t)\}, \quad Re(s) > \sigma_0$

$$L\left\{\frac{x(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} X(u)\,du \;, \quad Re(s) > \sigma_0$$

σος **

7) ΜL - ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ.

$X(s) = L\{x(t)\}, \quad Re(s) > \sigma_0$.

τότε $\boxed{L\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = s\cdot X(s) - x(0^-)}$, Re(s)

Γενίκευση:

$$L\left\{\frac{d^{(n)}}{dt}x(t)\right\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}\frac{d}{dt}x(0^-) - s^{n-3}\frac{d^{(2)}}{dt}x(0^-) - \dots - \frac{d^{(n-1)}}{dt}x(0^-).$$

$\hookrightarrow \left.\frac{d^{(n-1)}}{dt}x(t)\right|_{t=0^-}$

σος **

8) ΜL - ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

$X(s) = L\{x(t)\}, \quad Re(s) > \sigma_0$.

$$\boxed{L\{y(t)\} = \frac{X(s)}{s} + \frac{y(0^-)}{s}, \text{ όπου} \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \qquad y(0^-) = \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau.}$$

*

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ.

1) <u>Θεώρημα Αρχικής Τιμής:</u> έστω $x(t)$ που δεν περι χει κρουστικές συναρτήσεις στο $t=0$. Αν $X(s)=L\{$ $x(t)\}$, $\mathrm{Re}(s)>\sigma_0$ θα είναι:

$$\boxed{\lim_{s\to\infty} s\cdot X(s) = x(0^+)}$$

(→ μπορούμε να βρούμε αρχικές τιμές).

2) <u>Θεώρημα Τελικής Τιμής:</u> αν $X(s) = L\{x(t)\}$, $\mathrm{Re}(s$ $>\sigma_0$, τότε αν η $X(s)$ είναι αναλυτική (→ παραγωγίζεται) συνάρτηση στο φανταστικό άξονα και στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, θα είναι:

$$\lim x(t) = \lim s X(s)$$

⊛ Το Θ.Τ.Τ. δεν ισχύει αν η $s\cdot X(s)$ έχει πόλους στο δεξιό ημ. s-επίπεδο ή στο φανταστικό άξονα. Το Θ.Τ.Τ. χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό τι ισορροπίας στη μελέτη συστημάτων.

3) Θ. Συνέλιξης:

→ στο χρόνο: $L\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(s)\cdot X_2(s)$,

$Re(s) > \max\{\sigma_1, \sigma$

→ στη συχνότητα $L\{x_1(t)\cdot x_2(t)\} = \dfrac{1}{2\pi j} X_1(s) * X_2(s)$

* * *

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Να βρεθεί ο ΜΛ της $x(t) = (3e^{-2t} - 2e^{-t})u(t)$

ΛΥΣΗ $L\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} (3e^{-2t} - 2e^{-t})\, u(t)\cdot e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} (3e^{-2t}\cdot e^{-st} -$

$$2e^{-t}\cdot e^{-st}\Big)\,dt = \int_0^\infty 3e^{-t(s+2)}\,dt -$$

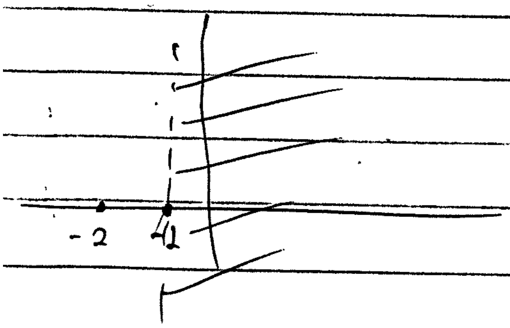
$$\int_0^\infty 2e^{-t(s+1)}\,dt = -\frac{1}{(s+2)}\,3e^{-t(s+2)}\Big|_0^\infty - 2\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{-(s+1)}\cdot e^{-t(s+1)}\Big|_0^\infty = -\frac{3}{s+2}\cdot(0-1) +$$

$$\frac{2}{(s+1)}\cdot(0-1) = +\frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1} =$$

$$= \frac{3(s+1)-2(s+2)}{(s+1)(s+2)} = \frac{3s+3-2s-4}{(s+1)(s+2)} = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}}\ , \quad Re(s) > -1$$



2) Να βρεθεί ο ΜL της $x(t) = 3e^{-2t}u(t) + \cos(3t)\cdot e^{-t}u(t)$

$\ln t \cdot y''(t) + x(t)\, y(t) = u$

$3a(t)$

⑩

$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(3e^{-2t} + \cos(3t)\, e^{-t}\right) e^{-st} u(t)\, dt =$

$= \int_{0}^{\infty} \left(3e^{-2t} + \cos(3t)\, e^{-t}\right) dt = 3 \int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt +$

$+ \int_{0}^{\infty} \cos(3t)\, e^{-t} dt = 3 \cdot \frac{1}{-2} e^{-2t} \Big|_{0}^{\infty} +$

$+ \int_{0}^{\infty} \frac{e^{+j \cdot 3t} + e^{-j \cdot 3t}}{2} e^{-t} dt =$

$= -\frac{3}{2}(0 - 1) + \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} e^{-t(-3j+1)} dt + \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} e^{-t(3}$

$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-(1-3j)} e^{-t(1-3j)} \Big|_{0}^{\infty} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-(1+3j)}$

$\cdot e^{-t(1+3j)} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2(1-3j)} \cdot (0 - 1) - \frac{1}{2(1+3}$

$\cdot (0 - 1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2(1-3j)} + \frac{1}{2(1+3j)} =$

$=$ ______

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(3e^{-2t} + \cos(3t)\, e^{-t}\right) \cdot e^{-st} u(t)\, dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \left(3e^{-2t} + \cos(3t) e^{-t}\right) e^{-st}\, dt =$$

$$= 3 \int_{0}^{\infty} e^{-2t} \cdot e^{-st} dt + \int_{0}^{\infty} \cos(3t) \cdot e^{-t} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= 3 \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-t(s+2)} dt + \int_{0}^{\infty} \cos(3t) \cdot e^{-t(s+1)} dt =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{-(s+2)} e^{-t(s+2)} \Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{3jt} + e^{-3jt}}{2} e^{-t(s+1)} dt =$$

$$= -\frac{3}{s+2} \cdot (0 - 1) + \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-t(-3j + s + 1)} dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-t(3j + s + 1)} dt = \frac{3}{s+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-(s+1-3j)}$$

$$\cdot e^{-t(s+1-3j)} \Big|_{0}^{\infty} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-(s+1+3j)} \cdot e^{-t(s+1+3j)} \Big|_{0}^{\infty} =$$

$$= \frac{3}{s+2} - \frac{1}{2(s+1-3j)} \cdot (0 - 1) - \frac{1}{2(s+1+3j)} (0 - 1)$$

$$= 3 \quad 1 \quad 1$$

$$\rightarrow X(s) = \frac{3\cdot 2(s+1+3j)(s+1-3j) + (s+2)(s+1-3j) + (s+2)(s+1+3j)}{(s+2)\cdot 2\cdot (s+1+3j)(s+1-3j)}$$

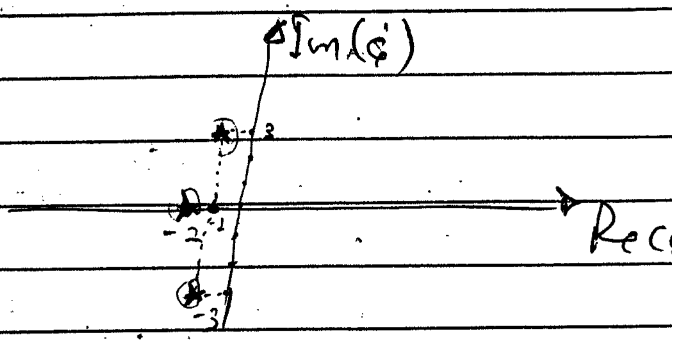
$$\boxed{Re(s) > -1}$$

Πόλοι:

$s_1 = -2$

$s_2 = -1-3j$

$s_3 = -1+3j = s_2^*$



3) Να λυθεί η ολοκληρωτικό-διαφορική εξί σωση:

$$\frac{d}{dt}x(t) + 3x(t) + 2\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = u(t).$$

Με αρχικές συνθήκες $x(0^-) = 2$, $\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau = 4$

ΛΥΣΗ

Εφαρμόζω ML κατά μέλη και έχω:

$$L\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} + 3L\{x(t)\} + 2L\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = L\{u(t)$$

$$\Rightarrow sX(s) - x(0^-) + 3\cdot X(s) + 2\cdot\left(\frac{X(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0^-} x}{s}\right.$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st}\,dt}_{1/s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$s\cdot X(s) - 2 + 3X(s) + \frac{2}{s}X(s) + \cancel{0} - \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$\overset{\cdot s}{\Rightarrow} s^2X(s) - 2s + 3sX(s) + 2X(s) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(s)\cdot(s^2+3s+2) = 1+2s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1+2s}{s^2+3s+2} \qquad \boxed{Re(s) > -1}$$

$$\hookrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4\cdot 1\cdot 2 = 1.$$

$$s_{1,2} = \frac{-3\pm 1}{2} \begin{cases} \to -1 \\ \to -2 \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{1+2s}{(s+1)(s+2)} =$$

$$= \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2}, \quad c_1 = \lim_{s\to -1}(s+1)\frac{1+2s}{(s+1)(s+2)}$$

$$= \left.\frac{1+2s}{s+2}\right|_{s=-1} \Rightarrow c_1 = -1$$

$$c_2 = \left.\frac{1+2s}{s+1}\right|_{s=-2} = \frac{1-4}{-2+1} = 3.$$

$$\underbrace{X(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2}}$$

$$X(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$x(t) = \left(-e^{-t} + 3\cdot e^{-2t}\right)u(t).$$

——— → ———

4) Αν $x(t) = \cos(\Omega_0 t)u(t)$ να βρεθεί η τιμή της $x(t)$ στο $t=0^+$.

ΛΥΣΗ

Από Θ.Α.Τ. θα είναι: $\underbrace{\lim_{s\to\infty} s\cdot X(s) = x(0^+)}$.

Όμως: $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\Omega_0 t)\, u(t)\cdot e^{-st}\,dt = \int_{0}^{\infty} \cos\Omega_0 t \cdot e^{-st}\,dt = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-j\Omega_0 t} + e^{+j\Omega_0 t}}{2}\, e^{-st}\,dt =$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-t(s+j\Omega_0)}\,dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-t(s-j\Omega_0)}\,dt =$$

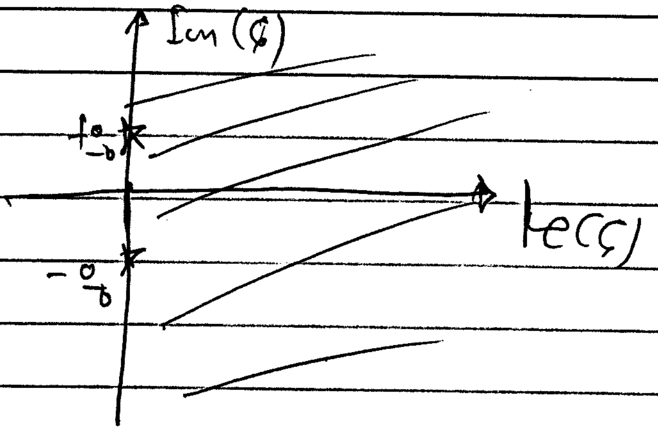
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-(s+j\Omega_0)}\cdot e^{-t(s+j\Omega_0)}\Big|_{0}^{\infty} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{-(s-j\Omega_0)}\cdot e^{-t(s-j\Omega_0)}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1(s-j\omega_0) + 1(s+j\omega_0)}{2(s+j\omega_0)(s-j\omega_0)} = \frac{2s}{2(s^2+\omega_0^2)}$$

$$= \frac{s}{s^2+\omega_0^2}\,, \quad Re(s) > 0$$

$$s^2+\omega_0^2 = 0 \Rightarrow s^2 = -\omega_0^2 \Rightarrow s^2 = (j\omega_0)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \pm\sqrt{(j\omega_0)^2} \Rightarrow s = \pm j\omega_0 .$$



Άρα: $$\lim_{s\to\infty} s\cdot X(s) = \lim_{s\to\infty} s\cdot\frac{s}{s^2+\omega_0^2} =$$

$$= \lim_{s\to\infty}\frac{s^2}{s^2+\omega_0^2} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'Hospital}{=}} \lim_{s\to\infty}\frac{2s}{2s} = 1 = x(0^+).$$

ΜΑΘΗΜΑ 11ο :

①

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΜL

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-st}\,dt \longleftrightarrow x(t) = \underbrace{\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\cdot\infty}^{\sigma+j\cdot\infty} X(s)e^{+st}\,d}_{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ.}}$$

$$(s=\sigma+j\cdot\Omega) \qquad \sigma \geq \sigma_0$$

⊛ Αν ο ΜL $X(s)$ μπορεί να εκφραστεί ως λόγος πολυωνύμων τότε:

$$X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{\overset{\text{βαθμού } m}{b_m\cdot s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}}{\underset{\text{βαθμού } n}{a_n\cdot s^n + a_{n-1}\cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}}$$

⊛ Κάθε ΓΧΑΣ που είναι πρακτικώς υλοποιήσιμο έχε κρουστική απόκριση $h(t)$ με ΜL $(H(s))$ μια ρ τή συνάρτηση.

1 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ)

Για ρητές συναρτήσεις $X(s)$ με $m < n$ διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

1). Ρίζες παρονομαστή διακριτές κ' πραγματικές, δηλ. $\lambda_i \in \mathbb{R}$ και $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$.
Τότε:

$$\rightarrow \boxed{X(s) = \frac{c_1}{s-\lambda_1} + \frac{c_2}{s-\lambda_2} + \dots + \frac{c_n}{s-\lambda_n}},$$

$$\rightarrow \boxed{c_i = \lim_{s \to \lambda_i} X(s) \cdot (s-\lambda_i)}$$

$$\rightarrow \boxed{x(t) = \left(c_1 \cdot e^{+\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{+\lambda_2 t} + \dots + c_n \cdot e^{\lambda_n t}\right) \cdot u(t)}$$

2) Για ρίζες παρονομαστή πολλαπλές κ' πραγματικές:

Έστω ρίζα λ_1 με πολλ/τητα τ και οι υπόλοιπες είναι απλές. Τότε:

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} X(s) &= \frac{c_1}{(s-\lambda_1)} + \frac{c_2}{(s-\lambda_1)^2} + \dots + \frac{c_\tau}{(s-\lambda_1)^\tau} + \\ &\quad \frac{c_{\tau+1}}{(s-\lambda_2)} + \frac{c_{\tau+2}}{(s-\lambda_3)} + \dots + \frac{c_n}{s-\lambda_n} \end{aligned}}$$

$$\rightarrow \boxed{c_i = \lim_{s \to \lambda_1} \frac{1}{(\tau-i)!} \cdot \frac{d^{(\tau-i)}}{ds} \left[X(s) \cdot (s-\lambda_1)^\tau \right], \quad i = 1, \dots, \tau}$$

$\rightsquigarrow$ για τα c_i, $i = \tau+1, \dots, n$ θα είναι: $c_i = \lim_{s \to \lambda_i} X(s) \cdot (s-$

$$\rightarrow x(t) = \Big(c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot t e^{\lambda_1 t} + c_3 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \frac{t^2}{2!} + \dots + c_\tau \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \frac{t^{\tau-1}}{(\tau-1)!} + c_{\tau+1} e^{\lambda_2 t} + \dots +$$

3) Για ρίζες παρονομαστή μιγαδικές : Έστω ότι ο παρονομαστής έχει ένα ζεύγος μιγαδικών ριζών, τ

$\lambda_1 = \sigma + j\omega$, $\lambda_2 = \lambda_1^* = \sigma - j\omega$ Τότε:

$$\rightarrow X(s) = \frac{c_1}{s-\lambda_1} + \frac{c_2}{s-\lambda_1^*} + \frac{c_3}{s-\lambda_3} + \dots + \frac{c_n}{s-\lambda_n}$$

$$\rightarrow \boxed{c_i = \lim_{s \to \lambda_i} X(s)\cdot(s-\lambda_i)} \quad , \quad c_1 = c_2^*$$

(συζυγείς μιγαδικ

$$\rightarrow x(t) = \left(c_1 e^{\lambda_1 t} + c_1^* \cdot e^{\lambda_1^* t} + \sum_{i=3}^{n} c_i e^{\lambda_i t} \right) \cdot u(t)$$

⊛ Σε περίπτωση που το ζεύγος των μιγαδικών ριζών εμφανίζεται με πολ/τητα ≥ τότε λαμβάνουμε τη 2η περίπτωση αντίστοιχως

―――― * ――――

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ)

•) Για ρητές συναρτήσεις $X(s)$ με $m \geq n$. Τότε κάνουμε την εξής διαδικασία:

1) Εκτελούμε τη διαίρεση: $X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} =$

$= \Pi(s) + \frac{g(s)}{a(s)}$, όπου το $\Pi(s)$ είναι πο λυώνυμο βαθμού $m-n$, δηλ. :

$$\Pi(\varsigma) = b_m\left(\varsigma^{m-n} + \pi_{m-n-1}\cdot\varsigma^{m-n-1} + \dots + \pi_1\cdot\varsigma + \pi_0\right)$$

και το $q(\varsigma)$ είναι βαθμού το πολύ $\underline{n-1} < n$

2) Άρα θα είναι: $L^{-1}\{X(\varsigma)\} = L^{-1}\{\Pi(\varsigma)\} + L^{-1}\Big\{\frac{q(\varsigma)}{a(\varsigma)}$

Όσον αφορά τον όρο $L^{-1}\left\{\frac{q(\varsigma)}{a(\varsigma)}\right\}$ θα ισχύει μ

απ' τις 3 πρώτες περιπτώσεις, αφού ο βαθμός του $q(\varsigma)$ είναι μικρότερος του βαθμού του $a(\varsigma$

Όσον αφορά τον όρο $L^{-1}\{\Pi(\varsigma)\}$ αυτός θα αποτελεί <u>άθροισμα κρουστικών συναρτήσεων</u>.

*

<u>ΑΣΚΗΣΗ 1</u>: Να βρεθεί ο αντίστροφος ΜL του

$$X(\varsigma) = \frac{\varsigma}{(\varsigma+1)^3\cdot(\varsigma+2)}.$$

<u>ΛΥΣΗ</u>. $\underset{r=3}{\boxed{\lambda_1=-1}}$, $\lambda_2 = -2$.

<u>Θα είναι</u>: $X(\varsigma) = \frac{c_1}{\varsigma+1} + \frac{c_2}{(\varsigma+1)^2} + \frac{c_3}{(\varsigma+1)^3} + \frac{c_4}{\varsigma+2}$,

$$c_1 = \lim_{\varsigma\to -1}\frac{1}{2!}\cdot\frac{d^{(2)}}{d\varsigma}\left(\frac{\varsigma}{\varsigma+2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{s\to -1}\left(\frac{-4}{(\varsigma+2)^3}\right) =$$

$$-\frac{\quad}{(s+2)^4} = -\frac{1}{(s+2)^3}.$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-4}{(-1+2)^3} = -2.$$

$$c_2 = \lim_{s\to -1}\frac{1}{1!}\frac{d^{(1)}}{ds}\left(\frac{s}{s+2}\right) = \lim_{s\to -1}\frac{2}{(s+2)^2} =$$

$$= 2.$$

$$c_3 = \lim_{s\to -1}\frac{1}{0!}\frac{d^{(0)}}{ds}\left(\frac{s}{s+2}\right) = \left.\frac{s}{s+2}\right|_{s=-1} = \frac{-1}{-1+2}$$

$$= -1.$$

$$c_4 = \lim_{s\to -2} X(s)(s+2) = \left.\frac{s}{(s+1)^3}\right|_{s=-2} = \frac{-2}{(-2+1)^3} =$$

$$= +2.$$

Άρα: $\underbrace{X(s) = -\frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{2}{(s+2)}}_{} \xleftrightarrow{ML^{-1}}$

$$x(t) = \left(-2\cdot e^{-t} + 2\cdot e^{-t}\cdot t - 1\cdot e^{-t}\cdot\frac{t^2}{2!} + 2\cdot e^{-2t}\right)\cdot u(t).$$

——— + ———

ΑΣΚΗΣΗ 2: Να βρεθεί ο αντίστροφος ΜL της

$$X(s) = \frac{s+5}{s\cdot(s^2+8s+25)}$$

ΛΥΣΗ

$s^2+8s+25=0$ $\quad \Delta = b^2-4ac = 64-4\cdot1\cdot(+25) = 64-100 =$
$= -36 = (6j)^2$

$$s_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8\pm 6j}{2} \begin{array}{l} \nearrow -4+3j \\ \searrow -4-3j \end{array}$$

Άρα: $X(s) = \dfrac{s+5}{s\cdot(s+4-3j)(s+4+3j)} =$

$$= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+4-3j} + \frac{c_3}{s+4+3j},$$

όπου $c_2 = c_3^*$ και:

$$c_1 = \lim_{s\to 0} X(s)\cdot s = \left.\frac{s+5}{(s+4-3j)(s+4+3j)}\right|_{s=0} =$$

$$= \frac{5}{(4-3j)(4+3j)} = \frac{5}{4^2-(3j)^2} = \frac{5}{16+9} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

$$c_2 = \lim X(s)\cdot(s+4-3j) = \left.\frac{s+5}{\quad}\right| =$$

$$= \frac{-4+3j+5}{(-4+3j)\cdot(\cancel{-4}+3j+\cancel{4}+3j)} = \frac{1+3j}{(-4+3j)\,6\cdot j} = \frac{1+3j}{-24j-18}$$

$$= -\frac{1+3j}{24j+18} \Rightarrow C_2 = -\frac{1+3j}{18+24j}.$$

Οπότε

$$\underbrace{C_3 = C_2^{*} = -\frac{1-3j}{18-24j}}.$$

Άρα $X(s) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1+3j}{18+24j}\cdot\frac{1}{s+4-3j} - \frac{1-3j}{18-24j}\cdot\frac{1}{s+4+3j}$ $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$

$$\rightsquigarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{5}\cdot u(t) + C_2\cdot e^{-(4-3j)t} + C_3^{*}\cdot e^{-(4+3j)t}}$$

⊛ $$X(s) = \frac{(s+5)}{s\cdot(s^2+8s+25)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2\cdot s+C_3}{s^2+8s+25} = ①$$

$$= \frac{C_1}{s} + \frac{C_2\cdot s+C_3}{\underbrace{s^2+8s+16}_{(s+4)^2}+9} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2\cdot s+C_3}{(s+4)^2+3^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{C_1\cdot\left((s+4)^2+3^2\right) + C_2\cdot s^2 + C_3\cdot s}{s\cdot\left[(s+4)^2+3^2\right]} = \frac{s+5}{s\left[(s+4)^2+3^2\right]} \Rightarrow$$

ΙΣΟΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΩΝ

4

$\Rightarrow \underline{c_1\cdot s^2} + 8s\cdot c_1 + 25\cdot c_1 + \underline{c_2\cdot s^2} + c_3\cdot s = s+5 \Rightarrow$

$\Rightarrow (c_1+c_2)\cdot s^2 + (8c_1+c_3)\cdot s + 25\cdot c_1 = s+5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2=0 \\ 8c_1+c_3=1 \\ 25c_1=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{c_2=-c_1=-\frac{1}{5}} \\ 8\cdot\frac{1}{5}+c_3=1 \Rightarrow \boxed{c_3=1-\frac{8}{5}=-\frac{3}{5}} \\ \boxed{c_1=\frac{1}{5}} \end{cases}$$

Άρα: $X(s) = \dfrac{s+5}{s\cdot(s^2+8s+25)} = \dfrac{1/5}{s} + \dfrac{-\frac{1}{5}\cdot s + (-\frac{3}{5}}{s^2+8c+25}$

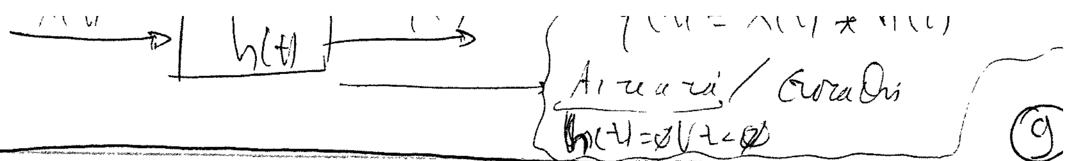
$= \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{s+3+1-1}{(s+4)^2+3^2} =$ [redacted]

[redacted]

$= \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{s+4}{(s+4)^2+3^2} + \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{(s+4)^2+3^2} \leftarrow$ ML

$x(t) = \Big(\dfrac{1}{5}\cdot u(t) - \dfrac{1}{5}\cdot e^{-4t}\cdot\cos(3t) + \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot e^{-4t}\sin(3$

$\cdot u(t).$



⊛ Χρήση του ΜL στην ανάλυση ΣΧΑΣ:

Έστω ΣΧΑΣ που περιγράφεται απ' την Σ.Δ.Ε.:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot x^{(m)}(t) + b_{m-1} \cdot x^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 x(t)$$

, όπου $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

Αν όλες οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές τό παίρνοντας ΜL κατά μέλη θα είναι:

$$\longleftrightarrow a_n Y(s) \cdot s^n + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \dots + b_0 X(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}} \longrightarrow$$ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

⊛ Η H(s) είναι ο ⓂL της κρουστικής απόκρισης h(t)

⊛ Η H(s) για $s=j\omega$ $(\sigma=0)$ είναι η απόκριση συχνότητας του συστήματος

⑩

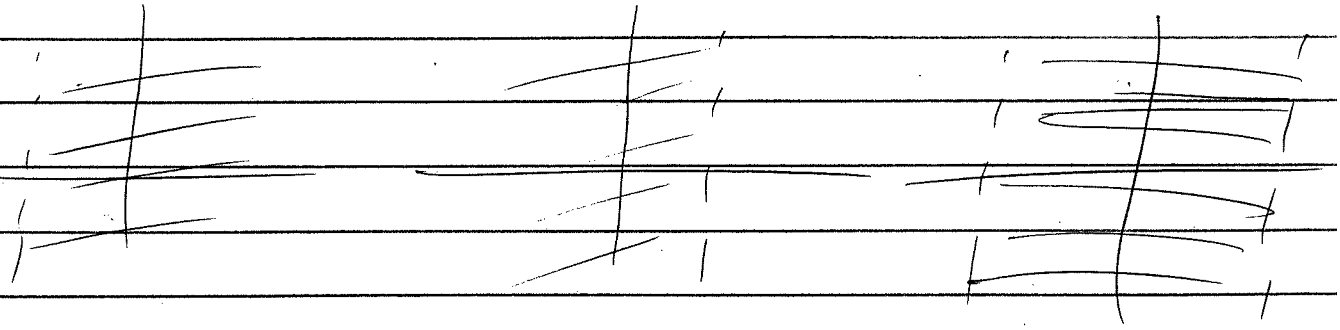
ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΥΠΟΥ ΦΕΦΕ

→ Ικανή κ' αναγκαία συνθήκη ευστάθειας για ΓΧ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

⊛ Απ' την ΠΣ της $H(s)$ προκύπτει ότι:

ΣΟΣ → Για να είναι ένα ΓΧΑΣ ευσταθές πρέπει η ΠΣ της $H(s)$ να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.



→ Εάν οι πόλοι της $H(s)$ ενός αιτιατού συστήματος βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο ή στο φανταστικό άξονα, το σύστημα είναι ασταθές.

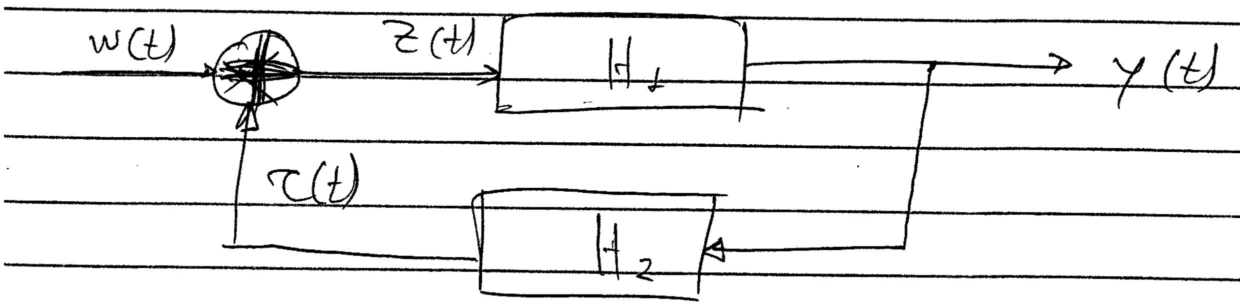
αιτιατό σύστημα: $h(t) = 0 \ \forall t < 0$ δεξιάς επέκτασ

$\rightarrow H(s)$ με ΠΣ: $Re(s) >$

→ Αντίθετα αν οι πόλοι της $H(s)$ βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο ή έχουν αρνητικ πραγματικό μέρος, ώστε το σύστημα είναι ευσταθές.

ΑΣΚΗΣΗ 3:

Δίνεται το παρακάτω σύστημα:



όπου $H_1(s)=\frac{1}{s-1}$, $Re(s)>1$

$H_2(s)=\frac{k}{s+2}$, $Re(s)>-2$.

α) Να βρεθεί η συνολική $H(s)$.

β) Αν H_1, H_2 αιτιατά (όπως και το συνολικό), για ποια τιμή k το συνολικό είναι ευσταθές.

ΛΥΣΗ

α) Δουλεύοντας στο πεδίο της συχνότητας, θα είναι:

1ο σύστημα: $Y(s) = Z(s)\cdot H_1(s)$. (1)

2ο σύστημα: $R(s) = Y(s)\cdot H_2(s)$ (2)

Επίσης: $Z(s) = W(s)+R(s)$. (3)

α) $\overset{(3)}{\Rightarrow} \; Y(s) = (W(s)+R(s))\cdot H_1(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow Y(s) = W(s)H_1(s) + \underbrace{R(s)}\cdot H_1(s) \Rightarrow$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} Y(s) = W(s)\cdot H_1(s) + Y(s)\cdot H_1(s)\cdot H_2(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow Y(s)\cdot\left(1 - H_1(s)\cdot H_2(s)\right) = W(s)\cdot H_1(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{H_1(s)}{1-H_1(s)\cdot H_2(s)} \Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{H_1(s)}{1-H_1(s)\cdot}}$

β) $H(s) = \frac{\frac{1}{s-1}}{1-\frac{1}{s-1}\cdot\frac{k}{s+2}} = \frac{\frac{1}{\cancel{s-1}}}{\frac{(s-1)(s+2)-k}{\cancel{(s-1)}(s+2)}} =$

$= \frac{s+2}{(s-1)(s+2)-k} = \frac{s+2}{\underbrace{s^2+s-(k+2)}}.$

$\Delta = b^2 - 4\alpha\gamma = 1 - 4\cdot 1\cdot(-(k+2)) = 1+4k+8 =$
$= \boxed{9+4k}.$

Για να είναι ευσταθές το σύστημα πρέπει οι πόλοι της H(s) να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Ανάλογα με τη Δ διακρίνω περιπτώσεις :

i) $\Delta \geq 0 \Rightarrow 9+4\kappa \geq 0 \Rightarrow \boxed{\kappa \geq -\frac{9}{4} = -2{,}25}$

Τότε έχω 2 πραγματικές ρίζες: $s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{9+4\kappa}}{2} \begin{cases} \rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{9+4\kappa}}{2} \rightarrow ? \\ \rightarrow \boxed{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{9+4\kappa}}{2}} < 0 \end{cases}$$

Θα πρέπει και ο s να είναι αρνητικός:

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{9+4\kappa}}{2} < 0 \Rightarrow \sqrt{9+4\kappa} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9+4\kappa < 1 \Rightarrow 4\kappa < -8 \Rightarrow \boxed{\kappa < -2}$$

Συνολικά πρέπει

$$\boxed{-2{,}25 \leq \kappa < -2}.$$

ii) $\Delta < 0 \Rightarrow 9+4\kappa < 0 \Rightarrow \kappa < -2{,}25$

Τότε έχω 2 μιγ. συζυγείς ρίζες:

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm j\sqrt{9+4\kappa}}{2} \rightarrow (\sqrt{9+4\kappa} \geq 0)$$

$$\begin{cases} \rightarrow -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{9+4\kappa}}{2} \\ \rightarrow -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{9+4\kappa}}{2} \end{cases}$$

και οι 2 έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος

ΜΑΘΗΜΑ 12ο

Άσκηση 1: α) Να λυθεί η ΔΕ:

$$\frac{d}{dt}x(t)+3x(t)+2\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau = u(t), \quad t\geq 0.$$

~~ΛΥΣΗ~~ με $x(0^-)=2$, $\int_{-\infty}^{0^-}x(t)dt=0$

β) Να επαληθευτεί η ισχύς των Θ.Α.Τ., Θ.Τ.Τ.

ΛΥΣΗ

α) $s\cdot X(s) - x(0^-) + 3\cdot X(s) + 2\left(\frac{X(s)}{s} + \frac{\cancel{\int_{-\infty}^{0}x(\tau)d\tau}}{s}\right)$

$= \frac{1}{s} \Rightarrow s\cdot X(s) - 2 + 3X(s) + 2\cdot\frac{X(s)}{s} = \frac{1}{s} \Rightarrow$

$X(s)\cdot\left(s+3+\frac{2}{s}\right) = \overset{\frac{1+2s}{s}}{\frac{1}{s}+2} \Rightarrow X(s)=\frac{1+2s}{s^2+3s+2}$

$\Delta = 9-4\cdot2 = 1 \quad a_{1,2}=\frac{-3\pm1}{2} = <^{-2}_{-1}$

$X(s)=\frac{1+2s}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{s+1}+\frac{c_2}{s+2}$,

όπου $c_1 = \frac{1+2(s)}{s+2}\Big|_{s=-1} = \frac{1+2\cdot(-1)}{-1+2} = \frac{-1}{1} = -1$

$c_2 = \frac{1+2s}{\cdot}\Big| = \frac{1+2(-2)}{} = \frac{-3}{} = 3$

Άρα $X(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \xleftrightarrow{ML^{-1}}$

$x(t) = (-e^{-t} + 3 \cdot e^{-2t}) \, u(t)$

β) $\overset{\text{Θ.Α.Τ.}}{\lim_{s \to \infty}} s \cdot X(s) = \lim_{s \to \infty} s \cdot \frac{1+2s}{(s+1)(s+2)} \overset{\infty/\infty}{=}$

$\lim_{s \to \infty} \frac{1+4s}{2s+3} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{s \to \infty} \frac{4}{2} = 2 = x(0^+)$

Θ.Τ.Τ. $\lim_{s \to 0} s \cdot X(s) = \frac{0}{2} = 0$

$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} (-e^{-t} + 3 \cdot e^{-2t}) \cdot u(t) = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 2: Ένα αιτιατό ΓΧΑΣ με κρουστική απόκριση $h(t)$ έχει τις ιδιότητες:

α) Όταν η είσοδος στο σύστημα είναι η $x(t) = e^{2t}$, η έξοδος $y(t) = \frac{1}{6} e^{2t}$.

β) Η $h(t)$ ικανοποιεί τη ΔΕ:

$$h'(t) + 2h(t) = e^{-4t} u(t) + b \cdot u(t), \quad b \text{ σταθερά}$$

Βρείτε την $H(s)$.

ΛΥΣΗ

α) $y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{ML} Y(s) = X(s)\cdot H(s) \Rightarrow$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (1)$$

$$y(t) = \frac{1}{6}e^{2t} \xleftrightarrow{ML} Y(s) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s-2}$$

$$X(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$(1) \longrightarrow H(s) = \frac{\frac{1}{6(s-2)}}{\frac{1}{s-2}} = \frac{s-2}{6(s-2)} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

β) ~~$sH(s)+2H(s)$~~

$$s\cdot H(s) - h(0^-) + 2H(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{6}{s} \Rightarrow$$

αιτιατό ΓΧΑΣ σημαίνει $h(t) = 0 \ \forall t<0$ Άρα $h(0^-)=0$

$$(2+s)H(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{6}{s} \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{1}{(2+s)(s+4)} + \frac{6}{s(2+s)} \Rightarrow$$ ~~$H(s) = \frac{1}{6s+s^2+8} + \frac{6}{}$~~

$$\frac{s(\cancel{2+s})+b(\cancel{2+s})(s+4)}{s(\cancel{2+s})(2+s)(s+4)}=\frac{s+b(s+4)}{\underbrace{s(2+s)(s+4)}}$$

$$\boxed{H(s)=\frac{s+bs+4b}{s(s+2)(s+4)}}$$

(*) (*) Αν $y(t)=\frac{1}{6}e^{2t}$ (όχι απαραίτητως αιτιατό σήμα)

Τότε: $\underbrace{y(t)}=\underbrace{x(t)*h(t)}=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau=$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)\cdot h(\tau)\,d\tau$$

όπου $h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\underline{\underline{H(s)}}\}$

$$\hookrightarrow=\frac{c_1}{s+2}+\frac{c_2}{s+4}+\frac{c_3}{s}$$

$$H(s)=\frac{c_1}{s+2}+\frac{c_2}{s+4}+\frac{c_3}{s},\quad c_1=\left.\frac{(1+b)s+4b}{s(s+4)}\right|_{s=-2}=$$

$$=\frac{-2(b+1)+4b}{-2(-2+4)}=\frac{2b-2}{-4}=\boxed{\frac{1-b}{2}}$$

$$c_2 = \frac{(1+\beta)\cdot s+4\beta}{s(s+2)}\Bigg|_{s=-4} = \frac{-4\cancel{-4\beta+4\beta}}{-4(-4+2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$c_3 = \frac{(1+\beta)\cdot s+4\beta}{(s+2)(s+4)}\Bigg|_{s=0} = \frac{4\beta}{8} = \frac{\beta}{2}$$

Ἄρα:

$$\underbrace{H(s) = \frac{1-\beta}{2}\cdot\frac{1}{s+2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+4} + \frac{\beta}{2}\cdot\frac{1}{s}}$$

$$\Big\updownarrow \text{A}L^{-1}$$

$$\underbrace{h(t) = \left(\frac{1-\beta}{2}\cdot e^{-2t} - \frac{1}{2}\cdot e^{-4t} + \frac{\beta}{2}\cdot 1\right)u(t)}$$

Τότε: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\cdot h(\tau)\,d\tau =$

$$= \int_{0}^{\infty} \underbrace{x(t-\tau)}\cdot\left[\frac{\beta}{2} + \frac{1-\beta}{2}e^{-2\tau} - \frac{1}{2}e^{-4\tau}\right]d\tau =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{2(t-\tau)}\left[\frac{\beta}{2} + \frac{1-\beta}{2}e^{-2\tau} - \frac{1}{2}e^{-4\tau}\right]d\tau =$$

$x(\tau) = e^{2\tau}$

$$= e^{2t}\left[\underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-2\tau}\frac{\beta}{2}d\tau} + \frac{1-\beta}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-4\tau}d\tau - \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-6\tau}d\tau\right]$$

~~$\int_0^\infty e^{-2\tau} d\tau = -\frac{1}{2} e^{-\tau}$~~ $\qquad\qquad \int e^{-6\tau} d\tau$ ⑥

$$= e^{2t}\left[\frac{b}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2\tau}\right)\Big|_0^\infty + \frac{1-b}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-4\tau}\Big|_0^\infty + \frac{1}{12}e^{-6\tau}\Big|_0^\infty\right]$$

$$= \dots = \underbrace{e^{2t}\left[\frac{b}{4} + \frac{1-b}{8} - \frac{1}{12}\right]} = y(t) \quad , -\infty < t < \infty$$

Εφόσον $y(t) = \frac{1}{6}e^{2t}$ ώστε:

$$\underbrace{\frac{b}{4} + \frac{1-b}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}} \Rightarrow \dots \Rightarrow \underline{\underline{b = 1}}$$

Άρα τελικά: $H(s) = \frac{2s+4}{s(s+2)(s+4)} = \frac{2\cancel{(s+2)}}{s\cancel{(s+2)}(s+4)}$

$$= \frac{2}{s(s+4)}$$

* * *

ΑΣΚΗΣΗ 3: Ένα αιτιατό ΓΧΑΣ S έχει κρουστική απόκριση $h(t)$ και περιγράφεται από τη ΓΔΕ:

$$y'''(t) + (1+a)y''(t) + a(1+a)y'(t) + a^2 y(t) = x(t) \quad (1)$$

⑦

α) Αν $g(t) = h'(t) - h(t)$, πόσους πόλους έχει η $G(s)$.

β) Για ποιές πραγματικές τιμές της πραγματικής παραμέτρου <u>α</u> το Σ είναι ευσταθές;

ΛΥΣΗ

α) ΜL στην (1) και έχουμε:

$$s^3 Y(s) + (1+a)s^2 Y(s) + a(1+a)sY(s) + a^2 Y(s) = X(s).$$

(S.O.S.) κάθε φορά που εφαρμόζω ML σε Γ.Δ.Ε. για να βρω H(s) θεωρώ πάντα μηδενικές αρχικές συνθήκες.

$$Y(s)\{s^3 + (1+a)s^2 + a(1+a)s + a^2\} = X(s) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + (1+a)s^2 + a(1+a)s + a^2}$$

$$g(t) = h'(t) - h(t) \xleftrightarrow{ML} G(s) = s \cdot H(s) - H(s) - \overset{0\ \text{αιτιατό}}{\cancel{h}(0)} \cdot 1$$

$$G(s) = H(s) \cdot (s-1) = \frac{1(s-1)}{s^3 + (1+a)s^2 + a(1+a)s + a^2}.$$

Έχει 3 πόλους. γιατί είναι 3ου βαθμού.

β) Για να είναι ευσταθές θα πρέπει οι πόλοι της H(s) στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Δηλαδή να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + (1+a)s^2 + (1+a)a \cdot s + a^2}$$

$$= \frac{1}{s^3 + s^2 + as^2 + as + a^2 s + a^2}$$

$$= \frac{1}{s^2(s+1) + as(s+1) + a^2(s+1)}$$

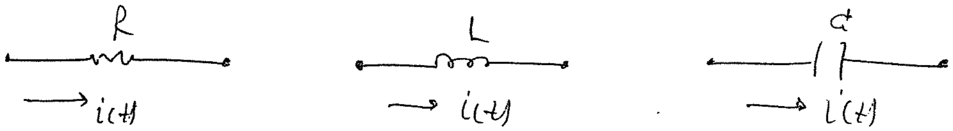
$$= \frac{1}{(s^2 + as + a^2)(s+1)} \qquad s = -1.$$

$$\Delta = a^2 - 4a^2 = -3a^2 = j^2 3a^2 = (\sqrt{3}aj)^2$$

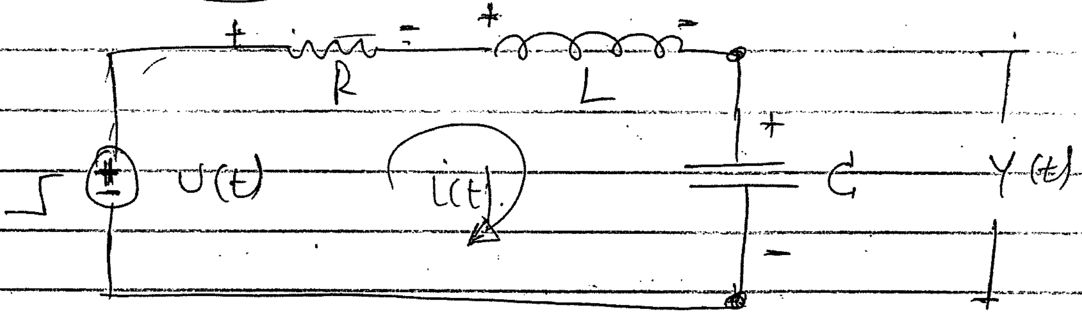
$$s = \begin{cases} \dfrac{-a + \sqrt{3}aj}{2} \\[2ex] \dfrac{-a - \sqrt{3}aj}{2} \end{cases}$$

Άρα οι $s_{1,2}$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος όταν $\frac{-a}{2} < 0$.

Δηλαδή $\boxed{a \geq 0}$



ΑΣΚΗΣΗ 4η: Δίνεται το κύκλωμα. Να προσδιοριστεί η $H(s)$ του.



υ(t): σήμα εισόδου
i(t): σήμα εξόδου

ΛΥΣΗ: Το RLC σε σειρά είναι ΓΧΑΣ. Άρα θα περιγράφεται από μια ΣΔΕ. Συγκεκριμένα:

→ Νόμος τάσεων Kirchoff: $+u(t) - V_R(t) - V_L(t) - V_C(t) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u(t) - i(t)\cdot R - L\,i'(t) - \frac{1}{C}\cdot\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{i(t)R + i'(t)\cdot L + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = u(t).}_{\text{ολοκληρωτικο-διαφορική.}}$$

$$\Big\updownarrow \text{ΜL}$$

$$I(s)\cdot R + L\left(sI(s) - \cancel{i(0^-)}^{\,0}\right) + \frac{1}{C}\left(\frac{I(s)}{s} + \right.$$

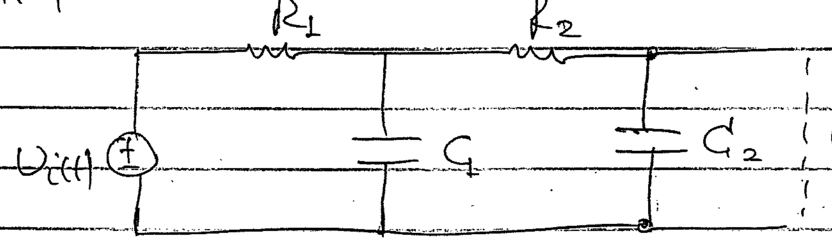
$$+\cancelto{0}{\left(\frac{\int_{-\infty}^{0^-} i(\tau)d\tau}{ς}\right)} = V(ς) \Rightarrow$$

→ (ΘΕΩΡΩ ΠΑΝΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ · H(ς) ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ) →

$$\rightarrow I(ς)\cdot R + Lς I(ς) + \frac{1}{ςC} I(ς) = V(ς) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{H(ς) = \frac{I(ς)}{V(ς)} = \frac{1}{R + ςL + \frac{1}{ςC}}}$$

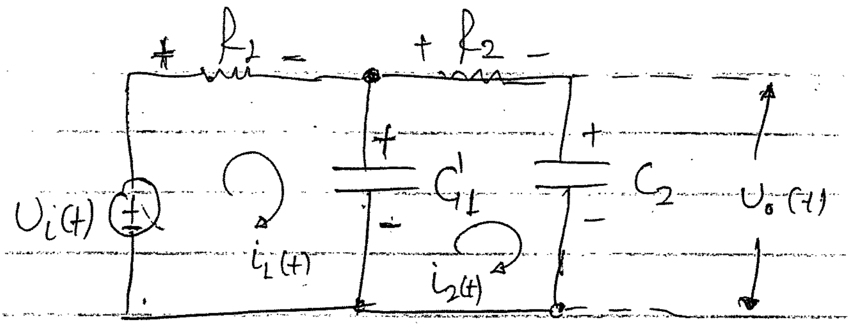
ΑΣΚΗΣΗ 6: Δίνεται το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος



α. Να βρεθεί η H(ς) του κυκλώματος μεταξύ της πηγής $υ_i(t)$ - είσοδος και της τάσης $U_o(t)$ - έξοδος.

β. Γράψτε και επιλύσετε τη Δ.Ε. που περιγράφει τη συμπεριφορά της τάσης $υ_o(t)$ όταν $R_1 = R_2 = C_1 = C_2 = 1$, $υ_i(t) = u(t)$ και η $υ_{C_1}(0^-) = 1$, $υ_{C_2}(0^-) = 0$.

α)



1ος βρόχος: (Νόμος τάσεων Kirchoff):

$$+U_i(t) - V_{R_1}(t) - V_{C_1}(t) = \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_i(t) - i_1(t)\cdot R_1 - \frac{1}{C_1}\cdot\int_{-\infty}^{t}(i_1(\tau)-i_2(\tau))\,d\tau$$

$$= \emptyset \xleftrightarrow{ML} V_i(s) - I_1(s)R_1 - \frac{1}{C_1}\cdot\left(\frac{I_1(s)-I_2(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0}(i_1(\tau)-i_2(\tau))\,d\tau}{s}\right) = \emptyset \Rightarrow$$

⇒ (Αφού ψάχνω H(s) Θεωρώ Μηδενικές Αρχικές Συνθήκες) ⇒ $V_i(s) - I_1(s)R_1 - \frac{1}{sC_1}\cdot I_1(s) + \frac{1}{sC_1}I_2(s) = \emptyset$ (1)

2ος βρόχος: $+V_{C_1}(t) - V_{R_2}(t) - V_{C_2}(t) = \emptyset \Rightarrow$

$$\rightarrow \frac{1}{C_1}\cdot\int_{-\infty}^{t}(i_1(\tau)-i_2(\tau))\,d\tau - i_2(t)\cdot R_2 - \frac{1}{C_2}\cdot\int_{-\infty}^{t} i_2(\tau)\,d\tau = \emptyset$$

$$\xleftrightarrow{ML}$$

$$\xleftrightarrow{ML} \frac{1}{C_1}\cdot\left(\frac{I_1(s)-I_2(s)}{s} + 0\right) - I_2(s)R_2 =$$

$$= \frac{1}{C_2}\cdot\frac{I_2(s)}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{sC_1} I_1(s) = \frac{1}{sC_1} I_2(s) + I_2(s)R_2 + \frac{1}{sC_2} I_2(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{sC_1} I_1(s) = \left(\frac{1}{sC_1} + R_2 + \frac{1}{sC_2}\right)\cdot I_2(s) \quad (2)}$$

Θέλω να βρω την $\boxed{H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}}$

Θα είναι:

$$v_o(t) = V_{C_2}(t) = \frac{1}{C_2}\cdot\int_0^t i_2(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{ML}$$

$$V_o(s) = \frac{1}{C_2}\cdot\frac{I_2(s)}{s} = \underline{\frac{1}{sC_2}\cdot I_2(s)}$$

$$(1) \xRightarrow{(2)} V_i(s) = \underbrace{I_1(s)\cdot R_1 + \frac{1}{sC_1} I_1(s) - \frac{1}{sC_2}\cdot I_2(s)} =$$

$$= \left(R_1+\frac{1}{sC_1}\right)\cdot I_1(s) - \frac{1}{sC_2}\cdot I_2(s) =$$

$$\Rightarrow \quad V_i(s) = \left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right) \cdot \left[sC_1 \cdot \left(\frac{1}{sC_1} + R_2 + \frac{1}{sC_2} \right) I_2(s) \right]$$

$$- \frac{1}{sC_2} I_2(s) =$$

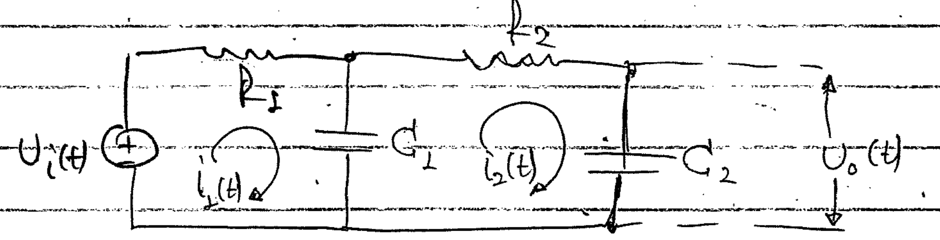
$$= \left[\left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right) sC_1 \left(\frac{1}{sC_1} + R_2 + \frac{1}{sC_2} \right) - \frac{1}{sC_2} \right] I_2(s) .$$

Άρα: $H(s) = \dfrac{V_o(s)}{V_i(s)} = \dfrac{\frac{1}{sC_2} \cancel{I_2(s)}}{\left[\left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right) \cdot sC_1 \left(\frac{1}{sC_1} + R_2 + \frac{1}{sC_2} \right) - \frac{1}{sC_2} \right] \cancel{I_2(s)}}$

$$\rightarrow H(s) = \frac{1}{sC_2 \left[\; . \quad . \quad . \quad . \; \right]}$$

β)

ΜΑΘΗΜΑ 13ο



α) $H(s) = \dfrac{V_o(s)}{V_i(s)}$ $\qquad u_o(t) = \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} i_2(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{ML}$

$$\boxed{V_o(s) = \frac{1}{sC_2} \cdot I_2(s).}$$

$$\left.\begin{array}{l}\longrightarrow 1^{ος} \text{ Βρόχος} \\ \longrightarrow 2^{ος} \text{ Βρόχος}\end{array}\right\} \longrightarrow \text{σχέση } (1),(2) \longrightarrow V_i(s) = \dots I_2(s)$$

Από (1), (2): $\boxed{U_i(s) = \dfrac{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s(R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2) + 1}{sC_2}}$

Τότε:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)+1}$$

β) Το κύκλωμα ως ΓΧΑΣ περιγράφεται από μια Δ.Ε. Βρίσκουμε τη μορφή της Δ.Ε. μέσω της H(s). Συγκεκριμένα θα είναι:

$$\left.\begin{array}{l}\rightarrow R_1 = R_2 = C_1 = C_2 = 1. \\ \rightarrow \underbrace{U_{C_1}(0^-) = 1}, \ \underbrace{U_{C_2}(0^-) = 0.}\end{array}\right\} \longrightarrow H(s) = \frac{1}{s^2+3s+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+3s+1} \Rightarrow \underline{s^2Y(s) + 3sY(s) + Y(s) = X(s)}$$

ΜL Παραγώγου: $\underbrace{L\left\{\frac{d}{dt}^{(n)}x(t)\right\} = \varsigma^{n}\cdot X(\varsigma) - \varsigma^{n-1}x(0^-) - \varsigma^{n-2}\cdot\frac{d}{dt}x(0^-) - \dots - \frac{d}{dt}^{(n-1)}x(0^-)}$

②

$$\xleftrightarrow{ML^{-1}} \frac{d}{dt}^{(2)}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t) \Rightarrow$$

$$\rightarrow \left(y(t) = U_o(t),\ x(t) = U_i(t) = u(t),\ \text{βηματική}\right) \Rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{U_o''(t) + 3U_o'(t) + U_o(t) = u(t)} \quad \underline{\underline{\text{Δ.Ε.}}}$$

⊛ Παραπάνω βρήκαμε τη μορφή της Δ.Ε.

⊛ Για να λύσουμε τη Δ.Ε. πρέπει να εφαρμόσουμε ML κατά μέλη:

$$\left\{\underline{\varsigma^2 U_o(\varsigma) - \varsigma\cdot U_o(0^-) - \frac{d}{dt}U_o(0^-) + 3\cdot\left(\varsigma U_o(\varsigma) - U_o(0^-)\right) + + U_o(\varsigma) = \frac{1}{\varsigma}} \quad (1)\right\}$$

Απ' την (1) οι αρχικές συνθήκες είναι οι $U_o(0^-)$, $\frac{d}{dt}U_o(0^-)$. ΠΡΟΣΟΧΗ: Αυτές δεν τις θεωρώ μηδενικές αφού θέλουμε να ΛΥΣΟΥΜΕ τη Δ.Ε. Τότε:

$$U_o(0^-) = U_{C_2}(0^-) = 0$$

$$\frac{d}{dt}U_o(0^-) = ?$$

Για να βρούμε την $\frac{d}{dt}v_0(0^-)$ εργαζόμαστε ως εξής:

– Στο χρόνο $t=0^-$ θα είναι:

$$U_0(0^-) = U_{C_2}\underset{\Xi}{(0^-)} = \frac{1}{C_2}\cdot\int_{-\infty}^{0^-} i_2(\tau)\,d\tau \xrightarrow[\text{κ' τα 2 μέλη}]{\text{παραγωγίζω}}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}U_0(0^-) \underset{\substack{\downarrow\\ C_2=1}}{=} i_2(\tau)\Big|_{-\infty}^{0^-} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}U_0(0^-) = i_2(0^-)} \qquad (2)$$

→ Επίσης στο χρόνο $t=0^-$ θα είναι στο βρόχο 2:

Νόμος τάσεων Kirchoff: $+U_{C_1}(0^-) - U_{R_2}(0^-) - U_{C_2}(0^-) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{U_{C_1}(0^-)}_{1} - i_2(0^-)\cdot\underbrace{R_2}_{1} - \underbrace{U_{C_2}(0^-)}_{0} = 0 \Rightarrow 1 - i_2(0^-) - 0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{i_2(0^-)=1} \xrightarrow{(2)} \underbrace{\frac{d}{dt}U_0(0^-)=1}$$

→ Άρα η επίλυση της ΔΕ είναι:

$$(1):\ s^2U_0(s) - 0 - \underbrace{1} + 3sU_0(s) - 0 + U_0(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$\rightarrow (s^2+3s+1)\,U_0(s) = \frac{1}{s}+1 \Rightarrow \underbrace{U_0(s) = \frac{s+1}{(s^2+3s+1)\,s}}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+3s+1} \Rightarrow$$ (εξισώνω τους αριθμητές)

⇒

$\Rightarrow s+1 = A\cdot(s^2+3s+1) + (Bs+C)\cdot s \Rightarrow$

$\Rightarrow s+1 = As^2+3As+A+Bs^2+Cs \Rightarrow s+1 = (A+B)s^2+(3A+C)s$

$+A \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \rightarrow B=-1 \\ 3A+C=1 \Rightarrow C=-3A+1 \Rightarrow \underline{\underline{C=-2}} \\ A=1 \end{cases}$

<u>Άρα:</u>

$$U_o(s) = \frac{1}{s} + \frac{-s-2}{s^2+3s+1} = \frac{1}{s} - \left(\frac{s+2}{s^2+3s+1}\right) =$$

$\Delta = 9-4\cdot1\cdot1 = 5$

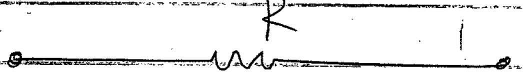
$s_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

$$= \frac{1}{s} - \left(\frac{C_1}{(s+\frac{3-\sqrt{5}}{2})} + \frac{C_2}{(s+\frac{3+\sqrt{5}}{2})}\right)$$

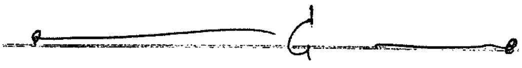
$C_1 = \ldots$

$C_2 = \ldots$

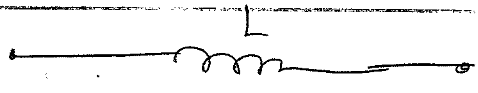
ΑΣΚΗΣΗ (2)



$U_R(t) = i(t)\cdot R$



$U_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$



$U_L(t) = L \quad d \quad i(t)$

ΑΣΚΗΣΗ 2 : Να βρεθούν οι αντίστροφοι ΜL

1) $X(s) = \dfrac{3s^2+17s+47}{(s+2)(s^2+4s+29)}$, $Re(s) > -2$

2) $X(s) = \dfrac{s^2-s+1}{(s+1)^2}$, $Re(s) > -1$

ΛΥΣΗ

1) **Α' Τρόπος** : $s^2+4s+29=0$, $\Delta = 16-4\cdot1\cdot29 = -100 = (10j)^2$

$$s_{1,2} = \frac{-4\pm10j}{2} \begin{array}{l} \longrightarrow -2+5j \\ \longrightarrow -2-5j \end{array}$$

Άρα: $X(s) = \dfrac{c_1}{s+2} + \dfrac{c_2}{s+2-5j} + \dfrac{c_3}{s+2+5j}$

$$c_1 = \left.\frac{3s^2+17s+47}{s^2+4s+29}\right|_{s=-2} = \frac{3(-2)^2+17(-2)+47}{(-2)^2+4(-2)+29} =$$

$$= \frac{12-34+47}{4-8+29} = \frac{25}{25} = 1.$$

$(-2)^2+(5j)^2+2\cdot(-2)(5j)$

$$c_2 = \left.\frac{3s^2+17s+47}{(s+2)\cdot(s+2+5j)}\right|_{s=-2+5j} = \frac{3(-2+5j)^2+17(-2+5j)+47}{(\cancel{-2}+5j+\cancel{2})(\cancel{-2}+5j+\cancel{2}+5j)}$$

~~$\frac{a-b}{a+b}$ $(a+b)^2 = (-2+5j)^2$ $(5j-2)^2 = (5j)^2 - 2\cdot 2\cdot 5j + 2^2$~~

$$= \frac{3(4-25-20j) - 34 + 85j + 47}{-50} =$$

$$= \frac{-63 - 60j - 34 + 85j + 47}{-50} = \frac{-50+25j}{-50} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}j \Rightarrow \boxed{C_2 = 1 - \frac{1}{2}j}$$

$$C_3 = 1 + \frac{1}{2}j = C_2^{*}.$$

Άρα: $X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1-\frac{1}{2}j}{s+2-5j} + \frac{1+\frac{1}{2}j}{s+2+5j} \underset{\longrightarrow}{ML^{-1}}$

$$x(t) = \left(e^{-2t} + \left(1 - \frac{1}{2}j\right)\cdot e^{(-2+5j)t} + \left(1+\frac{1}{2}j\right)e^{(-2-5j)t}\right)$$

$\cdot u(t)$

→ Β' Τρόπος: $X(s) = \frac{3s^2+17s+47}{(s+2)(s^2+4s+29)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+29}$

$$\Rightarrow A(s^2+4s+29) + (Bs+C)(s+2) = 3s^2+17s+47 \rightarrow$$

$$\rightarrow As^2 + 4As + 29A + Bs^2 + 2Bs + Cs + 2C = 3s^2+17s+47 \rightarrow$$

$$\rightarrow (A+B)s^2 + (4A+2B+C)s + 29A + 2C = 3s^2+17s+47 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} A+B=3 & (1) \rightarrow A=3-B. \\ 4A+2B+C=17 & (2) \\ 29A+2C=47 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \xrightarrow{(1)} 29(3-B)+2C=47 \rightarrow 87-29B+2C=47 \rightarrow$$

$$\rightarrow -29B+2C=-40 \rightarrow \underline{\underline{29B-2C=40}} \quad (4).$$

$$(2) \xrightarrow{(1)} \cancel{29}\ 4(3-B)+2B+C=17 \rightarrow \underline{\underline{C=5+2B}} \quad (5).$$

$$(4) \xrightarrow{(5)} 29B-2\cdot(5+2B)=40 \rightarrow 29B-10-4B=40 \rightarrow$$

$$\rightarrow 25B=50 \rightarrow \boxed{B=2}, \quad C = 5+2\cdot 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{C=9} \text{ και } A=3-2 \rightarrow \boxed{A=1}.$$

Άρα: $$X(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{2s+9}{s^2+4s+29}=\frac{1}{s+2}+\frac{2(s+2)+5}{s^2+4s+\underline{25+4}}=$$

$$(s^2+4s+4)=(s+2)^2$$

$$=\frac{1}{s+2}+\frac{2(s+2)}{(s+2)^2+25}+\frac{5}{(s+2)^2+25}=$$

$$=\frac{1}{s+2}+\frac{2(s+2)}{(s+2)^2+5^2}+\frac{5}{(s+2)^2+5^2} \xleftarrow{ML^{-1}}$$

$$\boxed{x(t)=\left(e^{-2t}+2\cdot e^{-2t}\underline{\cos(5t)}+e^{-2t}\underline{\sin(5t)}\right)u(t)}$$

2) $X(z) = \frac{z^2 - z + 1}{(z+1)^2}$ ⑧

Παρατηρώ ότι βαθμός αριθμητή = βαθμός παρονομαστή (άρα περίπτωση 2). Οπότε, παραγοντοποιούμε κατάλληλα τον αριθμητή και στη συνέχεια κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων:

$$X(z) = \frac{z^2 + 2z + 1 - 3z}{(z+1)^2} = \frac{(z+1)^2 - 3z}{(z+1)^2} =$$

ΦΤΙΑΧΝΩ ΤΟΝ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ ΣΤΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΗ

$$= \boxed{1} - \frac{3z}{(z+1)^2} \qquad (1)$$

① Για το κλάσμα $\frac{3z}{(z+1)^2}$ θα είναι:

$$\frac{3z}{(z+1)^2} = \frac{c_1}{z+1} + \frac{c_2}{(z+1)^2}, \text{ όπου}$$

$$c_1 = \lim_{z \to -1} \frac{1}{(2-1)!} \cdot \frac{d^{(2-1)}}{dz}\left[\frac{3z}{(z+1)^2} \cdot (z+1)^2\right] =$$

$= 3.$

$$c_2 = \lim_{s \to -1} \frac{1}{(2-2)!} \frac{d^{(2-2)}}{ds}\left[\frac{3s}{(s+1)^2} \cancel{(s+1)^2}\right] = -3.$$

Άρα: (1): $X(s) = 1 - \left(\frac{3}{s+1} - \frac{3}{(s+1)^2} \right) =$

$= 1 - \frac{3}{s+1} + \frac{3}{(s+1)^2} \xleftarrow{ML^{-1}}$

$$\boxed{x(t) = \delta(t) - \left(3 \cdot e^{-t} - 3 \cdot t e^{-t}\right) u(t)}$$

$3s = C_1(s+1) + C_2 \Rightarrow 3s = s C_1 + C_1 + C_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{C_1 = 3} \\ C_1 = -C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = -3} \end{cases}$

$$\begin{array}{c|c} \boxed{s^2 - s + 1} & s^2 + 2s + 1 \\ \hline 0 \qquad (1) & 1 \quad \boxed{-3s} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c|c} s^2 - s + 1 & \boxed{s^2 + 2s + 1} \\ \hline - s^2 - 2s - 1 & 1 \\ \hline 0 \quad \boxed{-3s} \quad 0 & \end{array}}$$

$(s^2 + 2s + 1) - 3s =$

$= (s+1)^2 - 3s$

ΑΣΚΗΣΗ 3: ΘΕΜΑ 2 - ΣΕΠΤ 09 (α')

Βρείτε το αιτιατό x(t) και την ΠΣ του ΜL που δίνεται από:

$$L\{x(t)\} = X(s) = \prod_{k=1}^{2} \frac{\lambda_k}{s+a_k}, \quad a_k \geq 0$$

ΛΥΣΗ:

$$X(s) = \frac{\lambda_1}{s+a_1} \cdot \frac{\lambda_2}{s+a_2} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(s+a_1)(s+a_2)} =$$

$$= \frac{C_1}{s+a_1} + \frac{C_2}{s+a_2}, \text{ όπου}$$

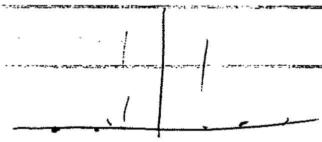
$$C_1 = \left.\frac{\lambda_1\lambda_2}{s+a_2}\right|_{s=-a_1} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{a_2-a_1}$$

$$C_2 = \left.\frac{\lambda_1\lambda_2}{s+a_1}\right|_{s=-a_2} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{a_1-a_2} = -C_1$$

Άρα: $$X(s) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{a_2-a_1} \cdot \frac{1}{s+a_1} - \frac{\lambda_1\lambda_2}{a_2-a_1} \cdot \frac{1}{s+a_2} \xleftrightarrow{ML^{-1}}$$

$$x(t) = \left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{a_2-a_1} \cdot e^{-a_1 t} - \frac{\lambda_1\lambda_2}{a_2-a_1} \cdot e^{-a_2 t} \right) u(t)$$

ΠΣ: $$\mathrm{Re}(s) \underbrace{>}_{\text{αφού } x(t) \text{ αιτιατό}} \max\{-a_1, -a_2\}$$



ΘΕΜΑ 3 - ΣΕΠΤ. 09

a) Για rmod(2) = 0 : $$f_0(t)=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi^2 n^2}-\frac{1}{2\pi j n}\right)e^{jn\frac{2\pi}{\sqrt{a}}t}+\frac{1}{3}$$

Για rmod(2) = 1 :

$$f_1(t)=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi^2 n^2}+\frac{1}{2\pi j n}\right)e^{jn\frac{2\pi}{\sqrt{a}}t}+\frac{1}{3}$$

b) Για rmod(2) = 0.

$$\boxed{F_0(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f_0(t)e^{-st}dt}$$

$ML\{f_0(t)\} = L\{f_0(t)\}$, όπου:

$$f_0(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi^2 n^2}-\frac{1}{2\pi j n}\right)\cdot e^{+jn\frac{2\pi}{\sqrt{a}}t}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi^2 n^2}-\frac{1}{2\pi j n}\right)\cdot e^{+jn\frac{2\pi}{\sqrt{a}}t}+\frac{1}{3}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi^2 n^2}-\frac{1}{2\pi j n}\right)e^{jn\frac{2\pi}{\sqrt{a}}t}+$$

$$+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi^2 n^2}+\frac{1}{2\pi j n}\right)\cdot e^{-jn\frac{2\pi}{\sqrt{a}}t}}+\frac{1}{3}$$

Άρα: $$L\{f_0(t)\}=\underbrace{\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi^2 n^2}-\frac{1}{2\pi j n}\right)e^{jn\frac{2\pi}{\sqrt{a}}t}\right)\cdot e^{-st}dt}_{Ⓐ}$$

ΘΕΩΡΩ ΤΟ ΣΗΜΑ $f_0(t)$ ΑΙΤΙΑΤΟ

⑫

$$+\underbrace{\int_{0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi^2 n^2}+\frac{1}{2\pi j n}\right)e^{-jn\frac{2\pi}{\sqrt{a}}t}\right)e^{-st}\,dt}_{\textcircled{B}} \quad +$$

$$+\underbrace{\int_{0}^{\infty}\frac{1}{3}\,e^{-st}\,dt}_{\textcircled{\Gamma}} \qquad (1)$$

$$A = \int_{0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi^2 n^2}-\frac{1}{2\pi j n}\right)e^{jn\frac{2\pi}{\sqrt{a}}t}\right)e^{-st}\,dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi^2 n^2}-\frac{1}{2\pi j n}\right)\cdot\int_{0}^{\infty}e^{-t\left(s-jn\frac{2\pi}{\sqrt{a}}\right)}\,dt =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi^2 n^2}-\frac{1}{2\pi j n}\right)\cdot\frac{1}{-\left(s-jn\frac{2\pi}{\sqrt{a}}\right)}}\cdot e^{-t\left(s-jn\frac{2\pi}{\sqrt{a}}\right)}\Bigg|_{0}^{\infty} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi^2 n^2}-\frac{1}{2\pi j n}\right)\cdot\frac{1}{-\left(s-jn\frac{2\pi}{\sqrt{a}}\right)}\cdot(0-1) =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\;---\;\right)\cdot\frac{1}{s-jn\frac{2\pi}{\sqrt{a}}}}$$

$$B = ---- = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\;--\;\right)\frac{1}{s+jn\frac{2\pi}{\sqrt{a}}}}$$

$$\Gamma - \underline{1}$$

Άρα: $\mathcal{L}\{f_0(t)\} = \mathcal{L}\{A\} + \mathcal{L}\{B\} + \mathcal{L}\{\Gamma\} =$

$= \underline{\sum(\ldots)} + \sum(\ldots) + \frac{1}{3s}, \quad \underline{\mathrm{Re}(s) > 0}$

ΜΑΘΗΜΑ 14ο

• ΣΧΕΣΗ ML - MF

→ Θεωρώ αιτιατό σήμα x(t) $(x(t)=0 \ \forall t<0)$. Τότε

$$X(s)=\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt, \quad Re(s)=\sigma>\sigma_0$$

$$X(\Omega)=\int_0^\infty x(t)\cdot e^{-j\Omega t}dt$$

• Για $s=\sigma+j\Omega$ (μιγ. συχνότητα) έχω:

$$X(s)=\int_0^\infty x(t)e^{-\sigma t}\cdot e^{-j\Omega t}dt$$

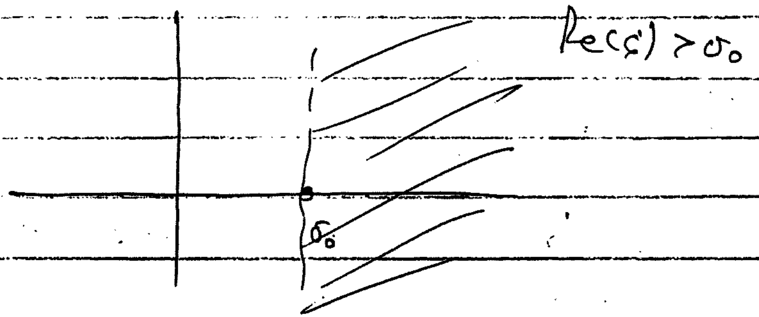
Θέτοντας $\sigma=0$ έχω $X(s)=\int_0^\infty x(t)e^{-j\Omega t}dt=$
$=X(\Omega)$.

→ Δηλ. απ' τον ML λαμβάνω MF αν ο ML συγκλίνει (δηλ. υπάρχει) όταν $Re(s)=0$.

Δηλ. λαμβάνω όπου $s=j\Omega$ τον MF απ' τον ML αν ο φανταστικός άξονας $(Re(s)=0)$ περιλαμβάνεται στην ΠΣ του ML.

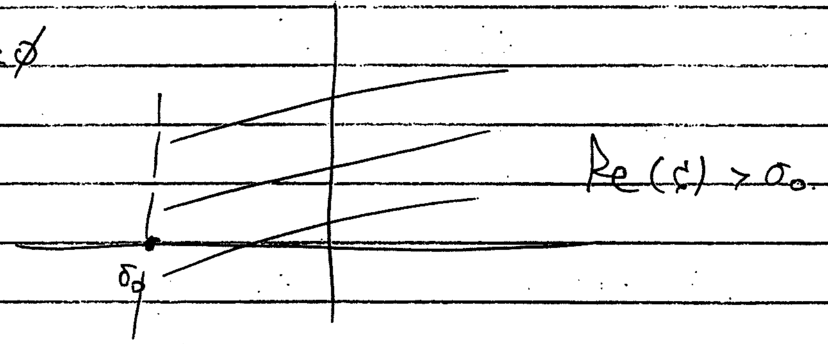
(*) Ανάλογα με το σ_0 λαμβάνουμε 3 περιπτώσεις

1) $\sigma_0 > 0$



Στην περίπτωση αυτή ο ΜΛ δεν ορίζεται για Re(s) = 0 . Άρα ο ΜΦ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ.

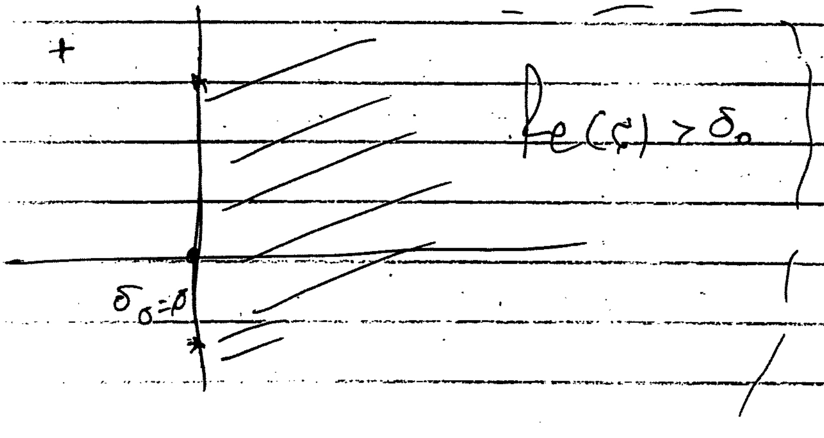
2) $\sigma_0 < 0$



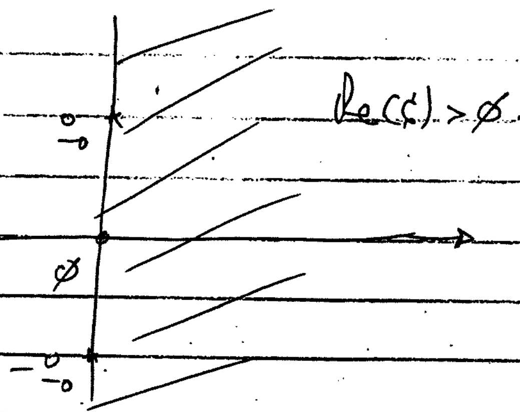
Στην περίπτωση αυτή η ΠΣ του ΜΛ περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα, άρα ο ΜΦ υπάρχει και θα είναι:

$$X(\Omega) = X(s)\Big|_{\sigma = 0 \text{ ή } s = j\Omega}$$

3) $\sigma_0 = 0$: Στην περίπτωση αυτή η ΠΣ του ΜΛ έχει σημεία ανωμαλίας στον φανταστικό άξονα, δηλ. εκεί που ορίζεται ο ΜΦ.



Π_x : $\underbrace{x(t) = \cos(\omega_0 t)\cdot u(t)} \xleftrightarrow{ML} \dfrac{s}{\underbrace{s^2+\omega_0^2}}$, $Re(s)>0$



Για τον $X(\omega)$ του $x(t)$ θα είναι:

$$\rightsquigarrow \underbrace{u(t) \xleftrightarrow{MF} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)} = U(\omega)$$

Τότε θα είναι από ιδιότητα διαμόρφωσης:

$$u(t)\cdot\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{MF} \frac{1}{2}\left[\underbrace{U(\omega-\omega_0)} + U(\omega+\omega_0)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j(\omega-\omega_0)} + \pi\delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{j(\omega+\omega_0)} + \pi\delta(\omega+\omega_0)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right) + \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{\omega-\omega_0}+\frac{1}{\omega+\omega_0}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right) + \frac{1}{2j}\cdot\frac{\omega+\cancel{\omega_0}+\omega-\cancel{\omega_0}}{\omega^2-\omega_0^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\delta(\omega=\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right) + \frac{1}{j}\cdot\frac{\omega}{\omega^2-\omega_0^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{\pi}{2}\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right) + \frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

<u>Συμπέρασμα</u>: η $x(t) = \cos(\Omega_0 t) \cdot u(t)$ έχει

$\rightarrow$ ΜL: $x(t) \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+\Omega_0^2}$, $Re(s) > \phi$.

$\rightarrow$ MF: $x(t) \longleftrightarrow \frac{\pi}{2}\left(\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right) + \frac{j\Omega}{\Omega_0^2-\Omega^2}$

Ο ΜL έχει 2 σημεία ανωμαλίας οπότε δεν μπορώ να μεταβώ απευθείας στον ΜF απλά θέτοντας όπου $s = j\Omega$.

<u>ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ</u>: Αν η $X(s)$ έχει N σημεία ανωμαλίας (πόλους) με πολλαπλότητα 1 τότε μπορώ να τη γράψω ως εξής:

$$\boxed{X(s) = X_a(s) + \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{s - j\Omega_k}} \qquad (1),$$

όπου η $X_a(s)$ είναι αναλυτική στο φανταστικό άξονα (δηλ. οι πόλοι της είναι εκτός αυτού) και η άλλη περιέχει τους πόλους στο φανταστικό άξονα.

<u>Οπότε βρίσκουμε τον ΜF ως εξής:</u>

$\boxed{e^{j\Omega_k t}} \cdot u(t)$

⑤

1) Ο ML^{-1} της $C(t)$ είναι: $\underbrace{x(t) = x_a(t) + \sum_{k=1}^{N} b_k \cdot e^{j\Omega_k t} \cdot u(t)}$ (2)

2) Απ' την (2) βρίσκω τον ΜF της $x(t)$:

$$x(t) \xleftrightarrow{MF} X_F(\Omega) = \underbrace{X_a(j\Omega)}_{\text{απλά θέτω όπου } s=j\Omega} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} b_k \cdot \underbrace{\left[\pi \cdot \delta(\Omega - \Omega_k) + \frac{1}{j(\Omega-\Omega_k)}\right]} \quad (3)$$

$$e^{j\Omega_k t} \xleftrightarrow{MF} 2\pi\delta(\Omega-\Omega_k)$$

$$u(t) \xleftrightarrow{MF} \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$$

$$\boxed{\underbrace{e^{j\Omega_k t} \cdot u(t)}_{\text{συχνοτική ολίσθηση}} \xleftrightarrow{MF} \frac{1}{j(\Omega-\Omega_k)} + \pi\delta(\Omega-\Omega_k)}$$

~~$x(t) \longleftrightarrow X(\Omega)$~~

$e^{j\Omega_k t}$

$$(1):\ \underline{X(s)} = \underline{X_a(s)} + \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{s - j\Omega_k}$$

$$(2):\ x(t) = x_a(t) + \sum_{k=1}^{N} b_k \cdot e^{j\Omega_k t} u(t)$$

$$(3)\ X_F(\Omega) = X_a(j\Omega) + \sum_{k=1}^{N} b_k \left[\pi\delta(\Omega - \Omega_k) + \frac{1}{j(\Omega - \Omega_k)}\right]$$

⊛ Αντικαθιστώ στην (1) όπου $s \longleftrightarrow j\Omega$ θα πάρω

$$\underbrace{X(j\Omega) = X_a(j\Omega) + \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{j(\Omega - \Omega_k)}}\qquad (4)$$

Άρα η $(3) \xrightarrow{(4)}$ $\boxed{\underline{X_F(\Omega)} = \underbrace{X(j\Omega)} + \pi \sum_{k=1}^{N} b_k \delta(\Omega - \Omega_k)}$ //

ΘΕΜΑ 2 - ΙΟΥΝΙΟΣ 09 β)

$$L\{x(t)\} = X(s) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{s}{s^2 + (n \bmod(2) + 1)\cdot \Omega_n^2} + (2 - n \bmod(2)) \cdot \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{s + \kappa_n}$$

$, \ Re(s) > 0.$ όπου $\kappa_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots, M-1$

i) $\underline{\underline{\tau \bmod(2)=0}}$

$$L\{x(t)\}=\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{s}{s^2+\omega_n^2}\right)+2\cdot\sum_{n=0}^{M-1}\frac{1}{s+\kappa_n}}\quad,\ \operatorname{Re}(s)>0$$

Για να πάρω τον MF από τον ML αν οι πόλοι της X(s) είναι στο αριστερό μιγ. ημιεπίπεδο θέτω απλά όπου $s=j\omega$. (στο σημειωμένο $s=j\omega$ θέτω στο 2ο άθροισμα)

Στην περίπτωση όπου οι πόλοι της X(s) είναι επί του φανταστικού, τότε εκτός από το να θέσω όπου $s=j\omega$, λαμβάνω και τις αντίστοιχες κρουστικές συναρτήσεις.

Άρα:

$$\sum_{n=0}^{M-1}\frac{1}{s+\kappa_n}\xrightarrow{MF}\sum_{n=0}^{M-1}\frac{1}{j\omega+\kappa_n}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{s}{s^2+\omega_n^2}\xrightarrow{MF}\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}\frac{j\omega}{\omega_n^2-\omega^2}}+$$

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\delta(\omega-\omega_n)+\delta(\omega+\omega_n)\right)$$

Άρα συνολικά:

$$\boxed{L\{x(t)\}\xrightarrow{MF}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{j\omega}{\omega_n^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\delta(\omega-\omega_n)+\delta(\omega+\omega_n)\right)}$$

$s^2 = -2\omega_n^2 \Rightarrow \quad s = \pm\sqrt{2} j\omega_n$

⑧

ii) τmod(2) = 1 :

$$X(s) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{s}{s^2+2\omega_n^2} + \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{s+k_n}$$

$$\Big\downarrow \text{MF}$$

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{j\omega+k_n} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{j\omega}{2\omega_n^2-\omega^2} + \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\delta(\omega-\sqrt{2}\omega_n)+\delta(\omega+\sqrt{2}\omega_n)\right)$$

ΘΕΜΑ 2 - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2009 β).

$$X(\omega) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\delta\left(\omega+\sqrt{\tau mod(2)+1} * \omega_n\right) + \delta\left(\omega-\sqrt{\tau mod(2)+1} * \omega_n\right)\right] + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{j\omega}{(\tau mod(2)+1)\cdot\omega_n^2-\omega^2}$$

i) τmod(2) = 0 :

$$X(\omega) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\delta(\omega+\omega_n)+\delta(\omega-\omega_n)\right) + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{j\omega}{\omega_n^2-\omega^2}$$

⊛ Στην περίπτωση όπου $\sigma_0 = 0$ (δηλ. όταν ο ML έχει σημεία ανωμαλίας στο φανταστικό άξονα) θα είναι:

$$\bar{X}_F(\omega) = X(j\omega) + \pi \sum_{k=1}^{N} b_k \delta(\omega - \omega_k).$$

⊛ Παρατηρώ ότι ο δοθέντας $X(\omega)$ έχει την παραπάνω μορφή. Αν αφαιρέσω τα σημεία ανωμαλίας τότε θέτω όπου $s = j\omega$ στο υπόλοιπο κομμάτι. Δηλαδή:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{j\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \xrightarrow{s = j\omega} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{s}{\omega_n^2 + s^2} = L\{x(t)\}$$

Άρα: $$\boxed{X_L(s) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}}.$$

ii) τmod(2) = 1:

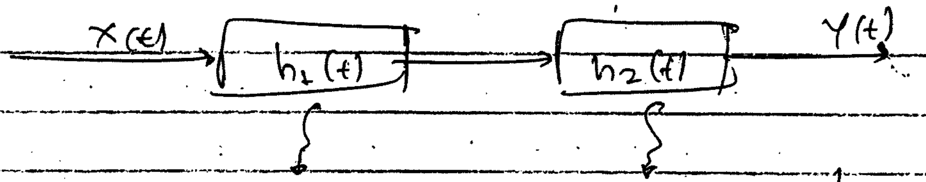
$$X(\omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\delta(\omega + \sqrt{2}\,\omega_n) + \delta(\omega - \sqrt{2}\,\omega_n) \right) +$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{j\omega}{2\omega_n^2 - \omega^2}$$

$$\boxed{X_L(s) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{s}{s^2 + 2\omega_n^2}}$$

ΚΕΦ. 4 - ΧΩΡΟΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ.

→ Πόλοι στο αριστερό μιγ. ημιεπίπεδο ΔΕΝ ΣΗΜΑΙΝΟΥΝ πάντα ευστάθεια.



$$H_1(s) = \frac{s-1}{s+1} \qquad H_2(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$H(s) = H_1(s)\cdot H_2(s) = \frac{\cancel{s-1}}{s+1}\,\frac{1}{\boxed{s-1}} = \frac{1}{s+1}$$

(με διακριτή επιλογή μιας H(s) καταλήγω σε εσφαλμένο συμπέρασμα για την ευστάθεια του τελικού συστήματος)

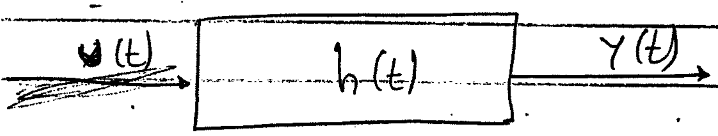
→ **Χώρος Κατάστασης**: ορίζω ως κατάσταση (state) του συστήματος στη χρονική στιγμή t_0, το σύνολο της ελάχιστης πληροφορίας στη στιγμή t_0, η οποία μαζί με τη γνώση της εισόδου x(t) καθορίζει πλήρως τη συμπεριφορά του συστήματος.

⊛ Η τιμή της κατάστασης στο $t = t_0$ είναι ανεξάρτητη της πορείας που ακολούθησε το σύστημα μέχρι να φτάσει στην τιμή αυτή.

→ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ: το σύνολο των μεταβλητών που καθορίζουν την κατάσταση του συστήματος. Οι μεταβλητές αυτές αποτελούν συνιστώσες ενός διανύσματος που καλείται ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

→ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΓΧΑΣ

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{x}(t) = A\, x(t) + b \cdot u(t) \\[2ex] y(t) = c^{T} \cdot x(t) + d \cdot u(t) \end{array}} \begin{array}{l} \rightarrow \text{καταστατική εξίσωση} \\[2ex] \rightarrow \text{εξίσωση εξόδου} \end{array}$$



όπου
- $x(t)$: διάνυσμα κατάστασης
- $\dot{x}(t)$: οι συνιστώσες του διανύσματος ως παράγωγοι.
- A : μητρώο $n \times n$ (n: η διάσταση του συστήματος ή το πλήθος των μεταβλητών κατάστασης)
- b, c : διανύσματα $n \times 1$
- $y(t)$: έξοδος του συστήματος
- $u(t)$: είσοδος " "
- d : αριθμός ($\in \mathbb{R}$)

→ Μητρώο Καταστατικής Μετάβασης

- Θεωρώ την καταστατική εξίσωση $\dot{x}(t) = A\cdot x(t)$
- Με ML^{-1} στην παραπάνω έχω $x(t) = \underline{\underline{\Phi(t)}}\cdot x(0)$

- $\Phi(t)$ είναι το Μητρώο καταστατικής μετάβασης.
- $$\boxed{\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}\left\{\left(\underbrace{sI}_{n\times n} - \underbrace{A}_{n\times n}\right)^{-1}\right\}}$$

→ Επίλυση Καταστατικής Εξίσωσης:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{\Phi(t)\cdot x(0)}_{\text{ΛΥΣΗ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΔΕ}} + \underbrace{\int_0^t \Phi(t-\tau)\cdot b\,u(\tau)\,d\tau}_{\text{ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑ ΤΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ}}}$$

→ Έχοντας βρει το $x(t)$, βρίσκουμε εύκολα την $y(t)$:

$$y(t) = c^T\cdot x(t) + d\,u(t)$$

→ Συνάρτηση μεταφοράς από Δυναμικές Εξισώσεις

$$\rightarrow \boxed{H(s) = c^{T} \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b + d}$$

→ Με ML^{-1} στην παραπάνω λαμβάνω:

$$\boxed{h(t) = c^{T} \cdot e^{At} \cdot b + d \cdot \delta(t)}$$

$$\circledast \quad \boxed{(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \cdot \mathrm{Adj}\,(sI - A)}$$

ΜΑΘΗΜΑ 15ο

- $\phi(t) = e^{At} = L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$
- Καταστατικές: $\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + b \cdot u(t) \\ y(t) = c^T x(t) + d\,u(t) \end{cases}$

→ Επίλυση: $\boxed{x(t)} = \phi(t)\cdot x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)\, b\, u(\tau)\, d\tau$

- $H(s) = c^T \cdot (sI-A)^{-1} \cdot b + d$
- $h(t) = c^T \cdot e^{At} \cdot b + d \cdot \delta(t)$

Παραδείγματα

1. Δίνεται το $A = \begin{bmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί το $\phi(t)$.

ΛΥΣΗ

- $sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s+3 & 10 \\ -2 & s-6 \end{bmatrix}}$

- $\det(sI-A) = \begin{vmatrix} s+3 & 10 \\ -2 & s-6 \end{vmatrix} = (s+3)(s-6) - (-2)\cdot 10 =$

$= s^2 - 6s + 3s - 18 + 20 =$

$= \underline{s^2 - 3s + 2}$

$\left.\begin{array}{l} \Delta = 9 - 4\cdot 1\cdot 2 = 1 \\ s_{1,2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \begin{array}{l} \to ② \\ \to ① \end{array} \end{array}\right\} \underline{(s-1)(s-2)}$

$Adj(\underline{sI-A}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ \end{bmatrix}$, όπου $(C_{ij} = (-1)^{i+j}$

$c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det M_{11} = 1 \cdot \left| s-6 \right| = s-6$

$c_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det M_{12} = -\left| -2 \right| = +2$

$c_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det M_{21} = -\left| 10 \right| = -10$

$c_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det M_{22} = +\left| s+3 \right| = s+3$

<u>Άρα:</u> $$\underbrace{Adj\,(sI-A) = \begin{bmatrix} s-6 & -10 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}}$$

<u>Οπότε:</u> $$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI-A)} \cdot Adj\,(sI-A) =$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s-2)} \begin{bmatrix} s-6 & -10 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s-6}{(s-1)(s-2)} & -\frac{10}{(s-1)(s-2)} \\ \frac{2}{(s-1)(s-2)} & \frac{s+3}{(s-1)(s-2)} \end{bmatrix}$$

<u>Άρα:</u> $\phi(t) = e^{At} = L^{-1}\left\{ (sI-A)^{-1} \right\}$

- $\frac{s-6}{(s-1)(s-2)} = \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{s-2}$, όπου $c_1 = \frac{s-6}{s-2}\Big|_{s=1} =$

$= 5$, $c_2 = \frac{s-6}{s-1}\Big|_{s=2} = -4. \rightsquigarrow \boxed{\frac{5}{s-1} - \frac{4}{s-2}}$

- $-\frac{10}{(s-1)(s-2)} = \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{s-2}$, όπου $c_1 = \frac{-10}{s-2}\Big|_{s=1} = 10$,

$c_2 = \frac{-10}{s-1}\Big|_{s=2} = -10. \rightsquigarrow \boxed{\frac{10}{s-1} - \frac{10}{s-2}}$

- $\frac{2}{(s-1)(s-2)} = \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{s-2}$, όπου $c_1 = \frac{2}{s-2}\Big|_{s=1} = -2$,

$c_2 = \frac{2}{s-1}\Big|_{s=2} = 2 \rightsquigarrow \boxed{\frac{-2}{s-1} + \frac{2}{s-2}}$

$\frac{s+3}{(s-1)(s-2)} = \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{s-2}$, όπου $c_1 = \frac{s+3}{s-2}\Big|_{s=1} = \frac{4}{-1} = -4$

$c_2 = \frac{s+3}{s-1}\Big|_{s=2} = \frac{5}{1} = 5 \rightsquigarrow \boxed{-\frac{4}{s-1} + \frac{5}{s-2}}$

Άρα:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{s-1} - \frac{4}{s-2} & \frac{10}{s-1} - \frac{10}{s-2} \\ -\frac{2}{s-1} + \frac{2}{s-2} & -\frac{4}{s-1} + \frac{5}{s-2} \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

④

$$\xrightarrow{L^{-1}} \underbrace{\phi(t) = e^{At}} = \begin{bmatrix} 5e^{t} - 4e^{2t} & 10e^{t} - 10e^{2t} \\ -2e^{t} + 2e^{2t} & -4e^{t} + 5e^{2t} \end{bmatrix} \cdot u(t).$$

---

2. Δίνεται η καταστατική εξίσωση:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} x(t)$$

Να βρεθεί το $x(t)$ για $x(\emptyset) = x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

ΛΥΣΗ

Απ τη γενική μορφή της καταστατικής έχω:

$$\underbrace{\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t)} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

Οπότε για την $x(t)$ θα είναι:

$$x(t) = \phi(t) \cdot x(\emptyset) + \int_{\emptyset}^{t} \phi(t-\tau) \overset{\emptyset}{b} \cdot u(\tau) \, d\tau =$$

$$= \underbrace{\phi(t) \cdot x(\emptyset)} = \begin{bmatrix} 5e^{t} - 4e^{2t} & 10e^{t} - 10e^{2t} \\ -2e^{t} + 2e^{2t} & -4e^{t} + 5e^{2t} \end{bmatrix} \cdot u(t) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 15e^{t} - 14e^{2t} \\ -6e^{t} + 7e^{2t} \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

3. Δίνεται το σύστημα:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

όπου $u(t)$ η βηματική. Να βρεθεί η $y(t)$ για $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ΛΥΣΗ.

Από τη γενική μορφή των καταστατικών εξισώσεων

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + b\,u(t) \\ y(t) &= c^{T} x(t) + d\,u(t) \end{aligned}\right\} A = \begin{bmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},\quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ u(t) = u(t),$$

$$c^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε:

$$x(t) = \underbrace{\Phi(t)\cdot x(0)}_{\text{από παράδειγμα (2)}} + \int_{0}^{t} \Phi(t-\tau)\,\underbrace{b\,u(\tau)}\,d\tau =$$

$$= \begin{bmatrix} 15e^{t} - 14e^{2t} \\ -6e^{t} + 7e^{2t} \end{bmatrix} \cdot u(t) + \int_{0}^{t} \begin{bmatrix} 5e^{t-\tau} - 4e^{2(t-\tau)} & 10e^{t-\tau} - 10e^{2t-2\tau} \\ -2e^{t-\tau} + 2e^{2(t-\tau)} & -4e^{t-\tau} + 5e^{2(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(\tau)\,d\tau =$$

$$= \begin{bmatrix} 15e^{t} - 14e^{2t} \\ -6e^{t} + 7e^{2t} \end{bmatrix} u(t) + \int_0^t \begin{bmatrix} 5e^{t-\tau} - 4e^{2t-2\tau} \\ -2e^{t-\tau} + 2e^{2t-2\tau} \end{bmatrix} d\tau =$$

$$= \begin{bmatrix} \ldots \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \int_0^t \ldots \, d\tau \\ \int_0^t \ldots \, d\tau \end{bmatrix} =$$

$$= \ldots = \underbrace{\begin{bmatrix} 20e^{t} - 16e^{2t} - 3 \\ -8e^{t} + 8e^{2t} + 1 \end{bmatrix} u(t)}$$

Άρα:

$$y(t) = c^{T} x(t) + d\,u(t) =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\cdot\cdot} x(t) + 0 =$$

$$= \underbrace{\left(12e^{t} - 8e^{2t} - 2\right)} u(t).$$

+

4). Δίνεται το σύστημα:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).$$

ΛΥΣΗ

- $sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & \\ 0 & s & - \\ 0 & 1 & s+ \end{bmatrix}$

- $\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 1 & s+2 \end{vmatrix} = +s \cdot \begin{vmatrix} s & 1 \\ 1 & s+2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & s+2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & s \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - s \cdot \left[s \cdot (s+2) - (-1) \cdot 1 \right]$

$+ 0 + 0 = s(s^2 + 2s + 1) = s(s+1)^2$

- $\mathrm{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}, \quad C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij}$

$C_{11} = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{vmatrix} = s(s+2) - (-1) = s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2$

$C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & s+2 \end{vmatrix} = 0$

$C_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & s \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & s+2 \end{vmatrix} = -\left((-1)(s+2) - 0\right) = s+2$$

$$C_{22} = +\begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s+2 \end{vmatrix} = s(s+2)$$

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} s & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(s-0) = -s$$

$$C_{31} = +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ s & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-s - 0) = s$$

$$C_{33} = +\begin{vmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{vmatrix} = s^2$$

<u>Άρα:</u>

$$Adj(sI-A) = \begin{bmatrix} (s+1)^2 & s+2 & 1 \\ 0 & s(s+2) & s \\ 0 & -s & s^2 \end{bmatrix}$$

<u>Οπότε:</u>

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2 s}\begin{bmatrix} (s+1)^2 & s+2 & 1 \\ 0 & s(s+2) & s \\ 0 & -s & s^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{s+2}{s(s+1)^2} & \frac{1}{s(s+1)^2} \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

Τότε για το $H(s)$ θα είναι:

συνάρτηση μεταφορ

$$\boxed{H(s) = C^T \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b + d}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1/s & \frac{s+2}{s(s+1)^2} & \frac{1}{s(s+1)^2} \\ 0 & \frac{s+2}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & -\frac{1}{(s+1)^2} & \frac{s}{(s+1)^2} \end{bmatrix}} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} + 0 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)^2} \\ \frac{1}{(s+1)^2} \\ \frac{s}{(s+1)^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{s(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2} =$$

$$= \frac{s+1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow$$

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

1. **Ελεγξιμότητα:** Ένα ΓΧΑΣ που περιγράφεται από τις καταστατικές εξισώσεις καλείται ελέγξιμο α
και μόνο αν το n×n μητρώο

$$S = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$ έχει

βαθμό (τάξη) ίσο με n ή αλλιώς αν το S είναι αντιστρέψιμο, δηλ. $\boxed{\det S \neq 0}$.

2. **Παρατηρησιμότητα:** Ένα ΓΧΑΣ περιγράφεται από τις καταστατικές εξισώσεις καλείται παρατηρ
σιμο αν και μόνο αν το n×n μητρώο

$$V = \begin{bmatrix} c^T \\ c^TA \\ c^TA^2 \\ \vdots \\ c^TA^{n-1} \end{bmatrix}$$ είναι αντιστρέψιμο, δηλ. $\boxed{\det V \neq 0}$.

3. **Ασυμπτωτική ευστάθεια:** ένα ΓΧΑΣ που περι
γράφεται από την $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ καλεί
ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν η λύσ

της ομογενούς καταστατικής εξίσωσης $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(t_0) = x_0$, $t \geq t_0$, τείνει στο 0 για κάθε x_0, δηλ. :

$$\lim_{t \to \infty} \underline{x}(t) = 0 \quad \forall x_0$$

Όμως το $\Phi(t)$ τείνει στο Μηδενικό Μητρώο όταν $\boxed{Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall \lambda_i}$, όπου λ_i οι ιδιοτιμές του Α.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

1. Ελέγξιμο : $\det(S) \neq 0$.
2. Παρατηρήσιμο: $\det(V) \neq 0$
3. Ασυμπτωτικά ευσταθές: $Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall \lambda_i$, όπου λ_i οι ιδιοτιμές του Α.

④ Σταθεροποίηση Συστήματος:

Για δυναμικό ΓΧΑ μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον 1 διάνυσμα $\underline{k}$ τέτοιο ώστε οι ιδιοτιμές του πίνακα $(A + bk^T)$ να βρίσκονται στο αριστερό μιγ. ημιεπίπεδο $(Re(\lambda_i) < 0)$. Τότε το σύστημα θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

(Για να σταθεροποιήσω αλλάζω τον Α με τον $\underline{A + bk^T}$).

⊛ ΟΙ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΤΟΥ Α ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΓΧΑΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ. ΕΠΙΠΛΕΟΝ, ΟΙ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΤΟΥ Α ΕΙΝΑΙ ΚΑΙ ΟΙ ΠΟΛΟΙ ΤΗΣ $H(s)$ (ΜΑΖΙ ΜΕ ΑΥΤΟΥΣ ΠΟΥ ΤΥΧΟΝ ΑΠΑΛΟΙΦΟΝΤΑΙ).

ΘΕΜΑ 4 ΦΕΒ. 05

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix},\quad c=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix},\quad d=0,\quad x(0)=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}.$$

a) $H(s)$, $h(t)$

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad sI-A=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 0 & s-2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(sI-A)=(s+1)(s-2)$$

$$\mathrm{Adj}(sI-A)=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{21}\\ c_{12} & c_{22}\end{bmatrix},\quad c_{11}=s-2 \quad c_{21}=-(-1)=$$

$$c_{12}=-0=0 \quad c_{22}=+(s+1)$$

Άρα: $$\mathrm{Adj}(sI-A)=\begin{bmatrix}s-2 & 1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}.$$

Τώρα:

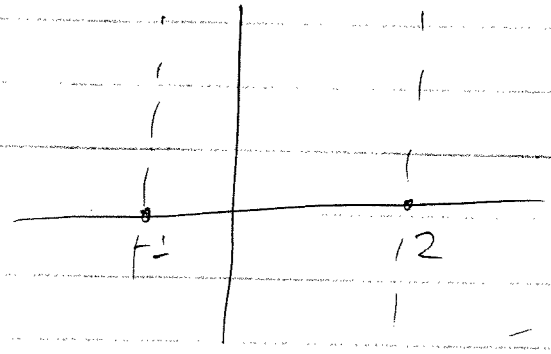
$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{\det(sI-A)}\cdot \mathrm{Adj}(sI-A)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s-}\\ 0 & \frac{1}{s-2}\end{bmatrix}$$

Τότε: $H(s) = C^T \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b + d = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdots \end{bmatrix}$

$$\cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{s+1} & \frac{3}{(s+1)(s-2)} - \frac{1}{s-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{9}{s+1} + \frac{3}{(s+1)(s-2)} - \frac{1}{s-2} = \frac{9(s-2)+3-1(s+1)}{(s+1)(s-2)}$$

$$= \frac{9s-18+3-s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{8s-16}{(s+1)(s-2)} = \frac{8\cancel{(s-2)}}{(s+1)\cancel{(s-2)}} =$$



$$= \frac{8}{s+1} \longleftrightarrow$$

$$h(t) = 8 \cdot e^{-t} u(t)$$

b) Θα πρέπει $Re(\lambda_i) < 0$ $\forall \lambda_i$, όπου λ_i οι ιδιοτιμές του A.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\det(A - \lambda I) = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-1-\lambda)(2-\lambda) - 0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow Re(\lambda_1) > 0$$

γ) Για να το σταθεροποιήσουμε πρέπει να αντικαταστήσουμε τον A με τον $A+\beta\kappa^T$ ώστε ο τελευταίος να έχει ιδιοτιμές με $Re(\lambda_i)<0$

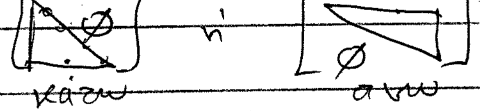
Τότε:

$$A+\beta\underbrace{\kappa}^{T}=\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}}_{2\times 2}+\underbrace{\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}}_{2\times 1}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\kappa_1 & \kappa_2\end{bmatrix}}_{1\times 2}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\kappa_1 & 3\kappa_2\\ \kappa_1 & \kappa_2\end{bmatrix}=$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}3\kappa_1-1 & 3\kappa_2+1\\ \kappa_1 & 2+\kappa_2\end{bmatrix}}.$$

(*) Αν ο $A+\beta\kappa^T$ είναι τριγωνικός (π.χ. άνω ή κάτω)



τότε οι ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ ΕΠΙ ΤΗΣ ΚΥΡΙΑΣ ΔΙΑΓΩΝΙΟΥ ΤΟΥ.

(*) Για $\kappa_1=0$: $A+\beta\kappa^T=\begin{bmatrix}\boxed{-1} & 3\kappa_2+1\\ 0 & \boxed{\kappa_2+2}\end{bmatrix}$

Για $\kappa_2=-3$: $A+\beta\kappa^T=\begin{bmatrix}\boxed{-1} & -8\\ 0 & \boxed{-1}\end{bmatrix}$.

ΜΑΘΗΜΑ 16ο

ΘΕΜΑ 4- ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 09

Χ.Κ.:

$$s^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} s(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x(t),$$

$$y(t) = C^T s(t).$$

α) Μητρώο κατάστασης μετάβασης

β) Ασυμπτωτικά ευσταθές; Σταθεροποίηση ώστε να έχει διαφορετικές ιδιοσυχνότητες

ΛΥΣΗ

α) $A = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $d = 0$.

$$\cdot\ sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} s-3 & 0 & 0 \\ -4 & s-2 & 0 \\ -2 & -3 & s-1 \end{bmatrix} \end{array}}.$$

$$\cdot\ \det(sI-A) = +(s-3)\cdot \det\left(\begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ -3 & s-1 \end{bmatrix}\right) = (s-3)\cdot\left[(s-1)\cdot(s-2) - 0\right] =$$

$$= \underline{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

$$\cdot\ Adj(sI-A) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}, \text{ όπου } c_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot \underbrace{\det M_{ij}}_{\text{υποπίνακας}}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s-3 & 0 & 0 \\ -4 & s-2 & 0 \\ -2 & -3 & s-1 \end{bmatrix}$$

②

$c_{11} = +(s-2)(s-1)$ $\qquad c_{21} = -0 = 0$ $\qquad c_{31} = +0$

$c_{12} = +4(s-1)$ $\qquad c_{22} = (s-1)(s-3)$ $\qquad c_{32} = 0$

$c_{13} = +\left(12 + 2(s-2)\right) =$ $\qquad c_{23} = +3(s-3)$ $\qquad c_{33} = (s-2)(s-$

$= 12 + 2s - 4 =$

$= 2s + 8 = 2(s+4)$

<u>Άρα:</u> $$Adj(sI-A) = \begin{bmatrix} (s-1)(s-2) & 0 & 0 \\ 4(s-1) & (s-1)(s-3) & 0 \\ 2(s+4) & 3(s-3) & (s-2)(s-3) \end{bmatrix}$$

<u>Τότε:</u> $$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI-A)} \cdot Adj(sI-A) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{(s-2)(s-3)} & \frac{1}{s-2} & 0 \\ \frac{2(s+4)}{(s-1)(s-2)(s-3)} & \frac{3}{(s-1)(s-2)} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}.$$

$$\rightarrow \frac{4}{(s-2)(s-3)} = \frac{c_1}{s-2} + \frac{c_2}{s-3}, \quad c_1 = \frac{4}{s-3}\Big|_{s=2} = -4$$

$$c_2 = \frac{4}{s-2}\Big|_{s=3} = 4.$$

$$= -\frac{4}{s-2} + \frac{4}{s-3}$$

$$\longrightarrow \frac{2(s+4)}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{s-2} + \frac{c_3}{s-3}, \text{ όπου } c_1 = \frac{2(s+4)}{(s-2)(s-3)}\Big|_{s=1} =$$

$$= \frac{10}{2} = 5, \quad c_2 = \left.\frac{2(s+4)}{(s-1)(s-3)}\right|_{s=2} = \frac{12}{-1} = -12.$$

$$c_3 = \left.\frac{2(s+4)}{(s-1)(s-2)}\right|_{s=3} = \frac{14}{2\cdot 1} = 7.$$

<u>Άρα:</u> $$\frac{2(s+4)}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{5}{s-1} - \frac{12}{s-2} + \frac{7}{s-3}$$

$$\longrightarrow \frac{3}{(s-1)(s-2)} = \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{s-2}, \quad c_1 = \left.\frac{3}{s-2}\right|_{s=1} = -3$$

$$c_2 = \left.\frac{3}{s-1}\right|_{s=2} = 3.$$

<u>Άρα:</u> $$\frac{3}{(s-1)(s-2)} = \frac{-3}{s-1} + \frac{3}{s-2}.$$

<u>Οπότε:</u>

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{s-2} + \frac{4}{s-3} & \frac{1}{s-2} & 0 \\ \frac{5}{s-1} - \frac{12}{s-2} + \frac{7}{s-3} & -\frac{3}{s-1} + \frac{3}{s-2} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} \xleftrightarrow{M_1^{-1}}$$

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}\left\{ (sI-A)^{-1} \right\} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ -4e^{2t}+4e^{3t} & e^{2t} & 0 \\ 5e^{t}-12e^{2t}+7e^{3t} & -3e^{t}+3e^{2t} & e^{t} \end{bmatrix}.$$

β) Ασυμπτωτική ευστάθεια: πρέπει $Re(\lambda_i) < 0$

όπου λ_i οι ιδιοτιμές του A.

Όμως οι ιδιοτιμές του $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ είναι

οι : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

Θέλω σταθεροποίηση, οπότε χρησιμοποιώ ανατροφοδότηση κατάστασης, δηλ. αντικαθιστούμε τον A με τον:

$$A + bk^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{3\times 1} \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}}_{1\times 3} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k_1 & 3k_2 & 3k_3 \\ 2k_1 & 2k_2 & 2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3+3k_1 & 3k_2 & 3k_3 \\ 4+2k_1 & 2+2k_2 & 2k_3 \\ 2+k_1 & 3+k_2 & 1+k_3 \end{bmatrix}.$$

Για να έχει ο $A+bk^T$ διαφορετικές ιδιοσυχνότητες πρέπει οι ιδιοτιμές του να είναι διαφορετικές.

Θέλω τις ιδιοτιμές στην κύρια διαγώνιο. Για να γίνει αυτό ο $A+bk^T$ πρέπει να είναι τριγωνικός.

Επιλέγουμε: ~~$k_2 = 0$, $k_3 = 0$~~

$$\left.\begin{aligned} 4+2k_1 = 0 &\Rightarrow \underline{\underline{k_1 = -2}} \\ 3+k_2 = 0 &\Rightarrow \underline{\underline{k_2 = -3}} \end{aligned}\right\} \text{ τότε:}$$

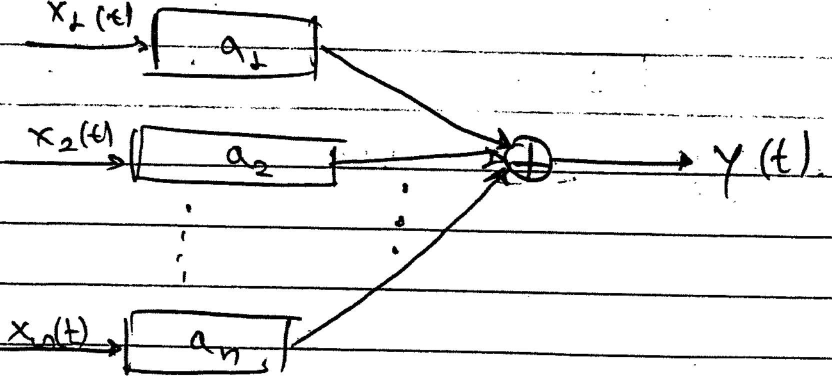
$$A+Bk^T = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & -9 & 3k_3 \\ 0 & -4 & 2k_3 \\ 0 & 0 & 1+k_3 \end{bmatrix}}_{\text{επιλέγω } k_3 = -2 \text{ ή } -6 \ldots}$$

Τότε $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = -1$ (για $k_3 = -2$).

⊕ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ

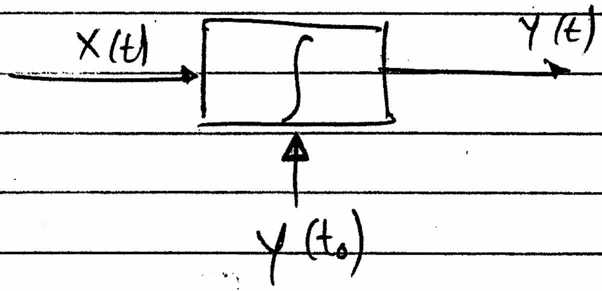
- Ηλεκτρονικά στοιχεία:

1) Γραμμικός Συνδυαστής:



Για το στοιχείο αυτό ισχύει: $\underbrace{y(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i(t)}$

• **Ο ολοκληρωτής:**

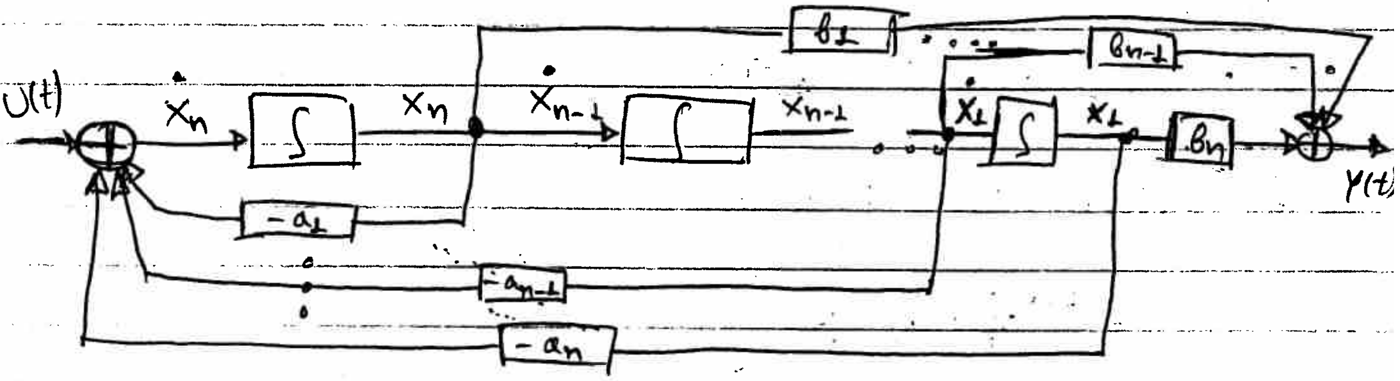


Για το στοιχείο αυτό είναι:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} x(\tau)d\tau + y(t_0)$$

⊛ Αντιστοιχίζω τις μεταβλητές κατάστασης στις εξόδους ισάριθμων ολοκληρωτών και με κατάλληλους συμβολισμούς καταλήγω στα σχήματα ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας

→ Σχήμα ελεγξιμότητας:



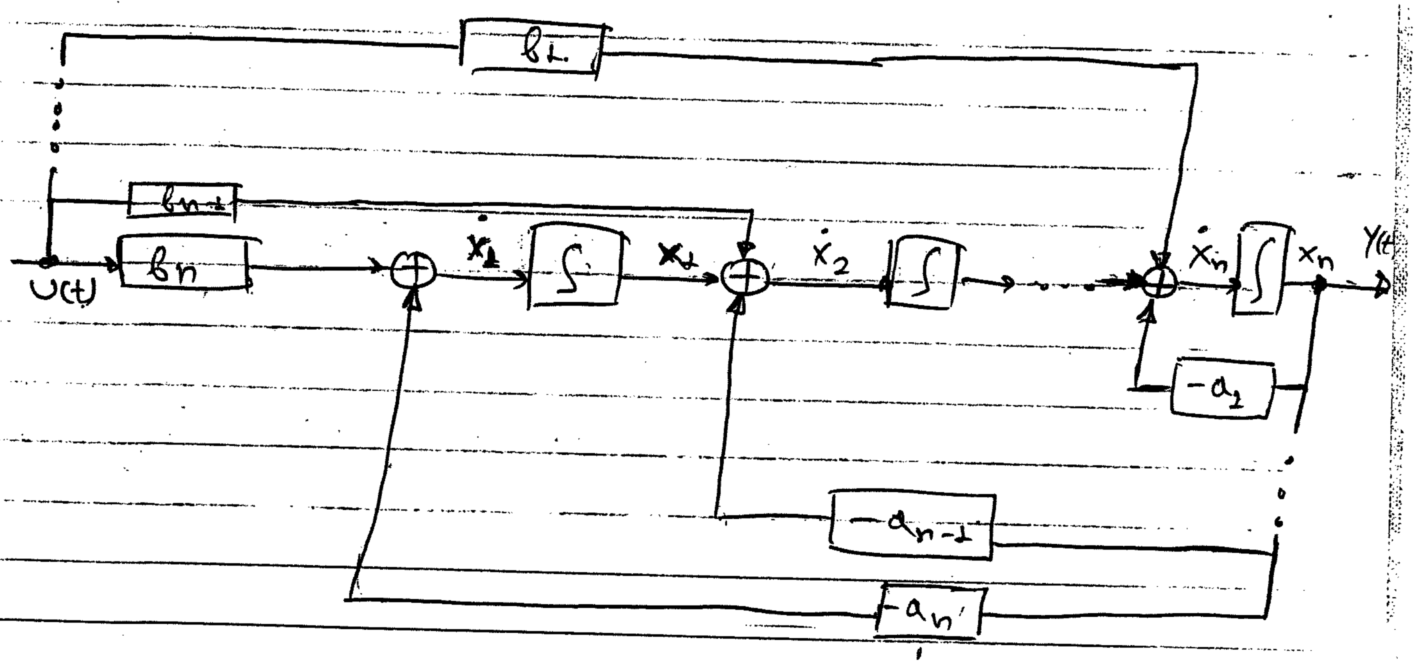
Για το σχήμα ελεγξιμότητας είναι:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}}_{n\times n} \cdot x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{n\times 1} \cdot u(t).$$

όπου $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $y(t) = c^T x(t) =$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}$$

→ Σχήμα παρατηρησιμότητας



~~$\dot{x}(t) =$~~

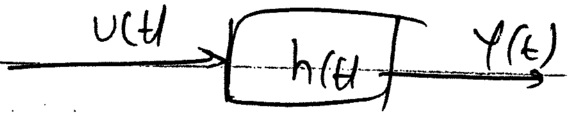
$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \quad 1 & -a_1 \end{bmatrix}}_{n\times n} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix}}_{n\times 1} u(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{n\times 1}$$

και $y(t) = c^T x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ : Δίνεται η $\boxed{H(s) = \dfrac{2s^3+16s^2+15s+19}{s^3+3s^2+5s+6}}$

Να σχεδιαστούν τα αντίστοιχα σχήματα ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας που την υλοποιούν.



ΛΥΣΗ

Παρατηρώ ότι βαθμός αριθμητή = βαθμός παρονομαστή. Οπότε:

$$\begin{array}{l|l} 2s^3+16s^2+15s+19 & s^3+3s^2+5s+6 \\ \hline 2s^3+6s^2+10s+12 & 2 \\ \hline \quad 10s^2+5s+7 & \end{array}$$

Άρα:

$$H(s)=\frac{10s^2+5s+7}{s^3+3s^2+5s+6}+\textcircled{2}=H_1(s)+2$$

Τότε:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow Y(s)=U(s)\cdot H(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s)=U(s)\cdot H_1(s)+2\cdot U(s) \xrightarrow{\text{ΜL}^{-1}}$$

$$Y(t)=L^{-1}\{U(s)\cdot H_1(s)\}+2u(t).$$

⊛ Για να βρω το σχήμα ελεγξιμότητας δοθείσας H(s) της μορφής:

$$\boxed{H(s)=\frac{b_1 s^{n-1}+b_2 s^{n-2}+\ldots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}}$$

οι εξισώσεις κατάστασης και οι εξισώσεις εξόδου δίνονται από:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & & & -a_1 \end{bmatrix}}_{A\,:\,n\times n} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{bmatrix} x(t) + d \cdot u(t)$$

Στην περίπτωσή μας είναι: $n=3$, $a_1=3$, $a_2=5$, $a_3=6$, $b_1=10$, $b_2=5$, $b_3=7$

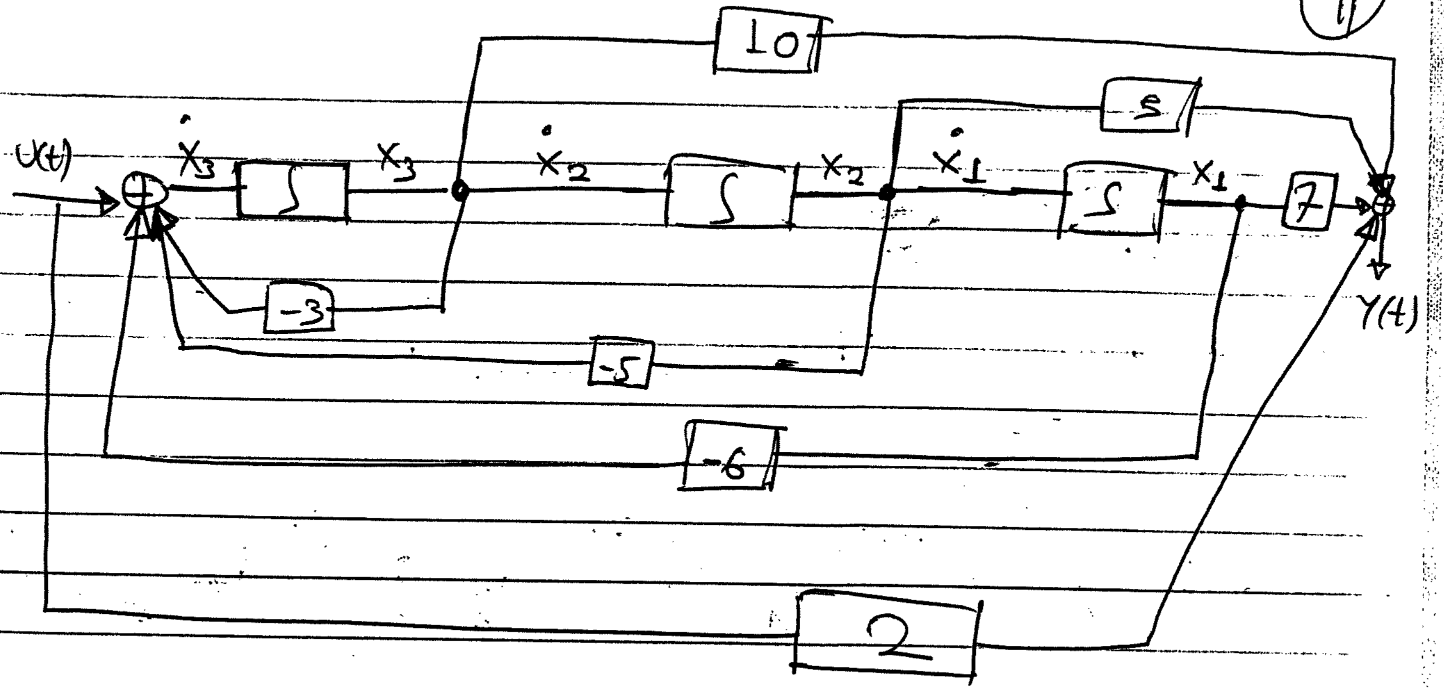
Τότε οι διαφορικές εξισώσεις είναι:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & -3 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 10 \end{bmatrix} x(t) + \underset{\downarrow}{2} \cdot u(t)$$

προκύπτει λόγω απλοποίησης της $H(s)$

<u>Τότε:</u>



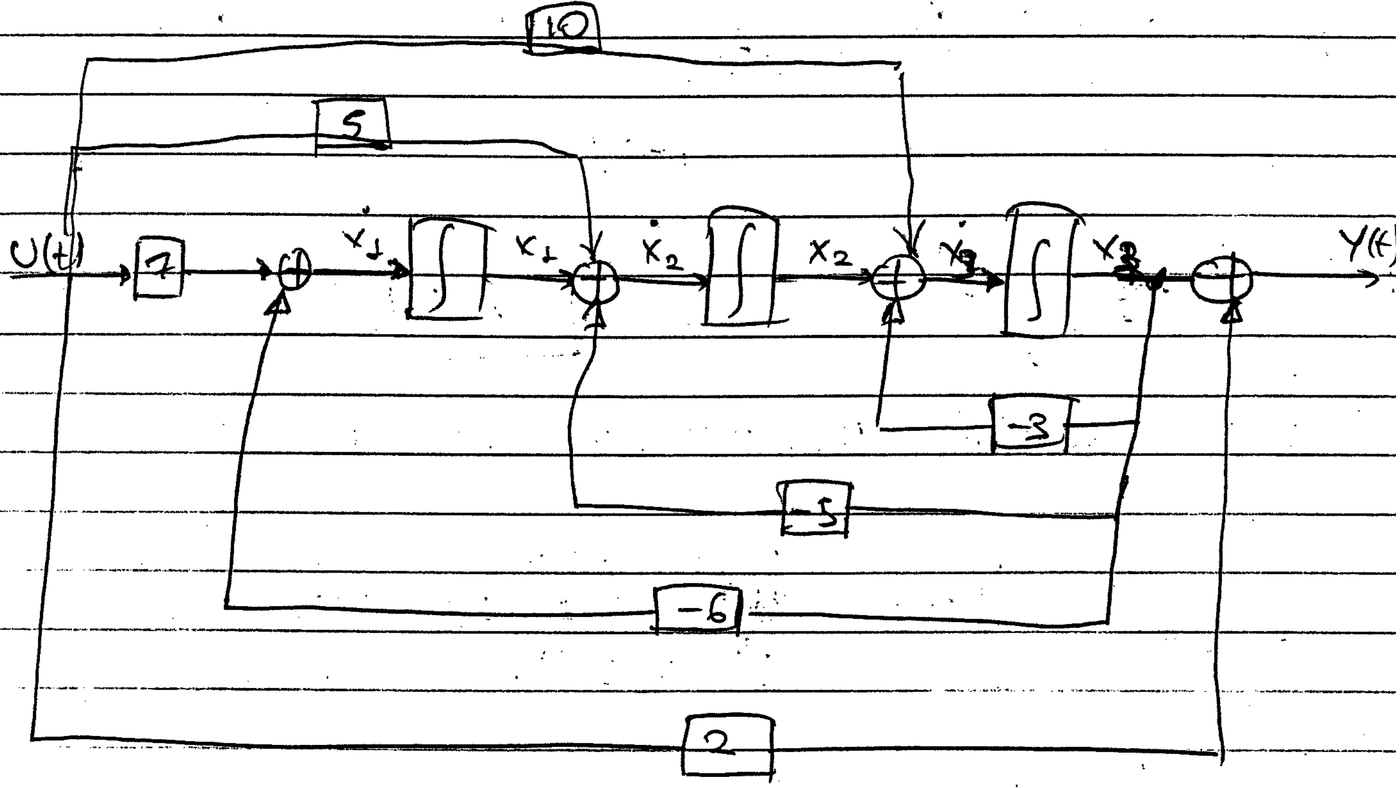
⊗ Για το σχήμα παρατηρησιμότητας θα είναι:

Γενικά: $H(s) = \dfrac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$

τότε οι δυναμικές εξισώσεις:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \ \dots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_n \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} U(t)$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} x(t) + d\,u(t).$$



$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -6\\ 1 & 0 & -5\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}7\\ 5\\ 10\end{bmatrix} U(t)$$

$$Y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{1\times 3}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}}_{3\times 1} + \underset{2}{0}\,U(t)$$

Μάθημα 17ο

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Z :

1. Ορισμός : ο Μz ενός σήματος διακριτού χρόνου x

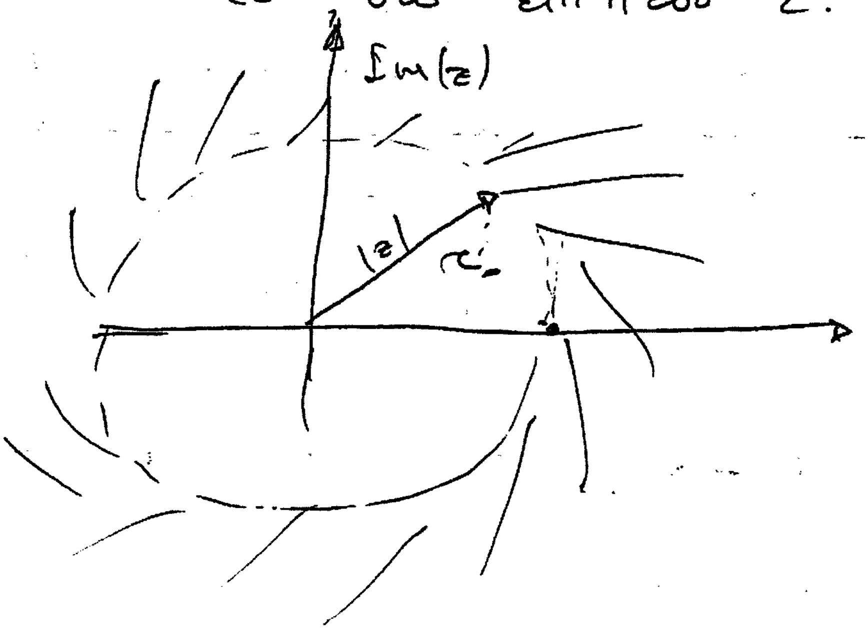
ορίζεται ως : $X(z) = Z\{x(n)\} =$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n} \quad , \quad z \text{ μιγαδική μεταβλητ}$$

→ Ο Μz είναι αμφίπλευρος σε αντιπαράθεση με τον μονόπλευρο Μz

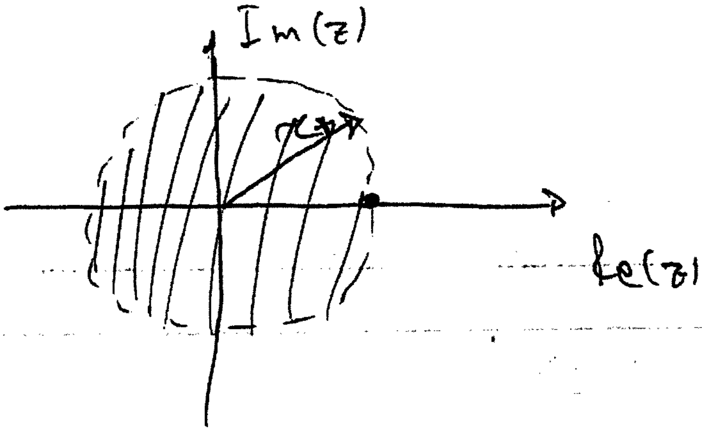
2. ΠΣ. (Περιοχή Σύγκλισης):

α) Η ΠΣ του Μz για αιτιατό σήμα x(n) ($x(n)=0$ $\forall\, n<0$) εκτείνεται έξω από κύκλο ακτίν r_- στο επίπεδο Z.



$|z| > r_-$

β) Η ΠΣ του Μz για αντιαιτιατό σήμα x(n) (x(n $=0$ $\forall n>0$) εκτείνεται εντός κύκλου ακτίνας r_+ στο Μιγ. επίπεδο z :



$$|z| < r_+.$$

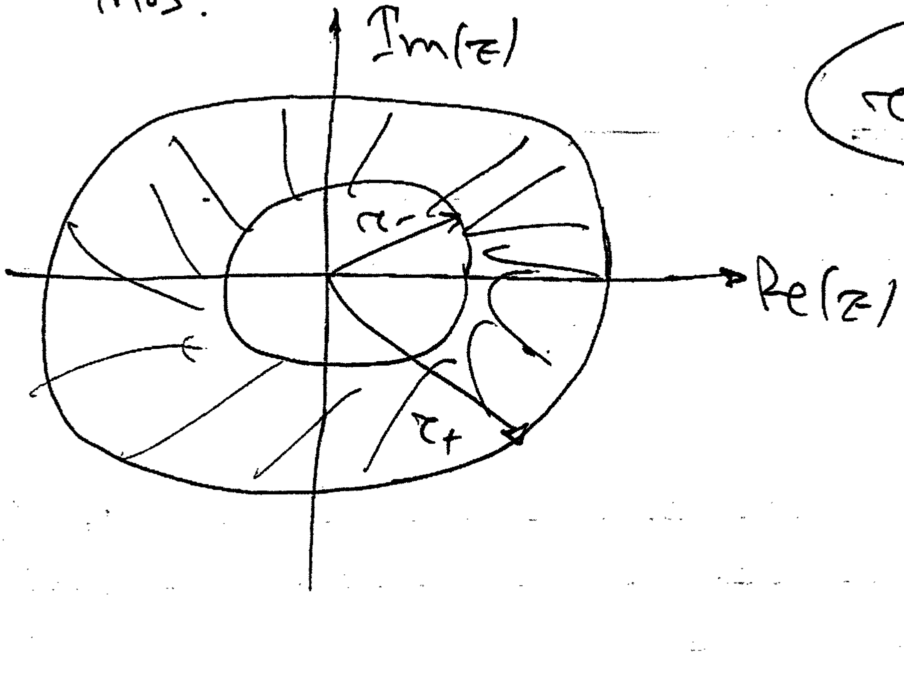
3) Αν έχω σήμα x(n) που είναι μη μηδενικό για θετικές κ' αρνητικές τιμές του n, τότε

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z$$

$$= \underline{\sum_{n=1}^{\infty} x(-n) \cdot z^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}}$$

Τότε η ΠΣ του X(z) του x(n) θα είναι η τομή των 2ΠΣ του επιπέδου z για τις οποίες

$|z| > r_-$ και $|z| < r_+$ αντίστοιχα. (προφανώς πρέπει $r_- < r_+$. Η κοινή ΠΣ είναι δακτύλιος:



$$\boxed{r_- < |z| < r_+.}$$

$$(r_- < r_+)$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΖ. (Αμφίπλευρος)

1/ Γραμμικότητας: αν a, β σταθεροί:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\} \quad , \quad r_{x-} < |z| < r_{x+}$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(n)\} \quad , \quad r_{y-} < |z| < r_{y+}$$

Τότε: $\boxed{\mathcal{Z}\{a\,x(n) + \beta\, y(n)\} = a \cdot X(z) + \beta \cdot Y(z)}$,

$r_- < |z| < r_+$, όπου $r_- \le \max\{r_{x-}, r$

$r_+ \le \max\{r_{x+}, r_{y+}$

2/ Χρονική ολίσθηση. αν $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ τότε

$$\boxed{\mathcal{Z}\{x(n-m)\} = z^{-m} \cdot X(z)} \quad , \quad r_{x-} < |z| < r_{x+}.$$

SOS.

3) Συνέλιξη στο πεδίο χρόνου:

Αν $w(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot y(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k) \cdot y$

τότε $\boxed{W(z) = \mathcal{Z}\{w(n)\} = X(z) \cdot Y(z)}$ $r_- < |z|$

και $r_- \le \max\{r_{x-}, r_{y-}\}$, $r_+ \le \max\{r_{x+}, r_{y+}\}$.

4). Συζυγής Ακολουθία : αν $Z\{x(n)\} = X(z)$

τότε $\boxed{Z\{x^*(n)\} = X^*(z^*)}$, $r_{x-} < |z| < r_{x}$

5) Κατοπτρισμός στον άξονα του χρόνου

αν $Z\{x(n)\} = X(z)$ τότε:

$$\boxed{Z\{x(-n)\} = X(z^{-1})} \quad , \quad \frac{1}{r_{x+}} < |z| < \frac{1}{r_{x}}$$

6) Παραγώγιση : αν $X(z) = Z\{x(n)\}$ τότε:

Sos.

⟶ $$\boxed{Z\{n \cdot x(n)\} = -z \cdot \frac{d}{dz} X(z)} ,$$

$r_{x-} < |z| < r_{x+}$.

7) Κλιμάκωση στο επίπεδο z :

αν $X(z) = Z\{x(n)\}$ τότε $\underbrace{X(mz)} =$

$\underbrace{= Z\{m^{-n} \cdot x(n)\}}$, $\frac{1}{|m|} \cdot r_{x-} < |z| < \frac{1}{|m|} \cdot r$

(m ≠ 0 μιγαδικός αριθμό

$$X(z) = \sum_{n=0} x(n) z^{-n}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΥ Μz

α) Δεξιά Ολίσθηση - Καθυστέρηση:

αν $X(z) = Z\{x(n)\}$ τότε ΣΟΣ.

$$\boxed{Z\{x(n-k)\} = z^{-k}\left[X(z) + \underbrace{\sum_{n=1}^{k} x(-n) z^{n}}\right]},$$

$k > 0$.

β) Αριστερή Ολίσθηση - Προήγηση:

αν $X(z) = Z\{x(n)\}$ τότε: Σ.Ο.Σ.

$$\boxed{Z\{x(n+k)\} = z^{k}\left[X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n) z^{-n}\right]},$$

$k > 0$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ:

1. Θεώρημα Αρχικής Τιμής (Θ.Α.Τ.):

αν $Z\{x(n)\} = X(z)$ ο μονόπλευρος Μz του $x(n)$ τότε:

$$\boxed{x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)}$$

2. Θεώρημα Τελικής Τιμής (Θ.Τ.Τ.):

αν $Z\{x(n)\} = X(z)$ είναι ο μονόπλευρος Μz του $x(n)$ τότε:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} x(n) = \lim_{z \to 1} (z-1) \cdot X(z)}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ Μz ΓΙΑ ΡΗΤΕΣ X(z)

Τρείς τρόποι υπολογισμού:

1. Υπολογισμός με ολοκληρωτικά υπόλοιπα (residuals).
2. Υπολογισμός με ανάπτυξη σε δυναμοσειρά
3. " — με ανάπτυγμα σε απλά κλάσματα.

↳ Διακρίνω 2 περιπτώσεις

α. Βαθμός αριθμητή $m \leq$ βαθμού παρονομαστή: $(m<n)$

Τότε:

$$X(z) = \frac{c_{11}}{z-z_1} + \dots + \frac{c_{1n_1}}{(z-z_1)^{n_1}} + \frac{c_{21}}{z-z_2} + \dots + \frac{c_{2n_2}}{(z-z_2)^{n_2}} + \dots + c_{\ell 1} + \dots + c_{\ell n_\ell}$$

όπου $z_1, z_2, \ldots, z_\ell$ είναι οι $\underline{\ell}$ πόλοι της $X(z)$ μ
πολ/τητες $n_1, n_2, \ldots, n_\ell$ αντίστοιχα (προφανώς

$n_1 + n_2 + \ldots + n_\ell = n$ δηλ. το βαθμό του παρονομαστή

<u>Τότε:</u>

$$\rightsquigarrow C_{ij} = \frac{1}{(n_i - j)} \cdot \frac{d^{(n_i - j)}}{dz} \left[(z - z_i)^{n_i} \cdot X(z) \right] \Big|_{z=z_i}$$

⟶ (σε περίπτωση απλού πόλου):

$$c_{ij} = \left[(z - z_i) \; X(z) \right] \Big|_{z = z_i}$$

β. Βαθμός αριθμητή ≥ βαθμό παρονομαστή ($m \geq n$)
Τότε διαιρώ πρώτα τα πολυώνυμα και κατα
λήγω σε μια έκφραση της μορφής:

$$X(z) = B_{m-n} \cdot z^{m-n} + \ldots + B_0 z^0 + X_1(z$$

όπου η $X_1(z)$ έχει βαθμό αριθμητή $<$ του βαθμού
του παρονομαστή.

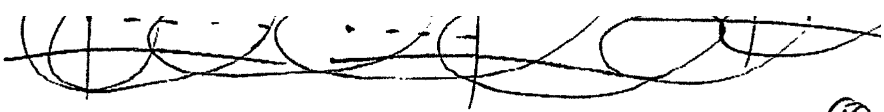
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

<u>ΓΧΑΣ</u>:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k) \cdot h(k) \xleftrightarrow{Mz}$$

$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$. $H(z) \quad Y(z)$ Σημείωση



<u>COS</u>

ⓑ

ⓐ H(z) και ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

i) Για να είναι ένα ΓΧΑΣ ευσταθές πρέπει

α) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ (1ο κεφ.)

(*) β) Πρέπει η ΠΣ της H(z) να περιλαμβάνει τον <u>ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΚΥΚΛΟ</u>.

ii) Για να είναι ένα ΓΧΑΣ αιτιατό πρέπει:

α) $h(n) = 0 \quad \forall n < 0$ (1ο κεφ.)

β) η ΠΣ της H(z) να είναι της

$|z| > r_-$ (εξωτερικό κύκλου)

iii) Για να είναι ένα ΓΧΑΣ αιτιατό κ' ευσταθές πρέπει:

(ΟΙ ΠΟΛΟΙ ΤΗΣ H(z) ΝΑ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΚΥΚΛΟΥ.)

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 3 - ΣΕΠΤ. 04.

- 2 πόλους $z = 1/2$, $z = -1$.
- $h(1) = 1$, $h(-1) = 1$.
- ΠΣ περιλαμβάνει το $z = \frac{3}{4}$.

$H(z) = \frac{\cdot}{\cdot}$?

$h(n) =$?

ΛΥΣΗ

- Η $H(z)$ έχει 2 πόλους. Τότε ο παρονομαστής της θα είναι: $(z - \frac{1}{2})(z+1)$. Δηλαδή:

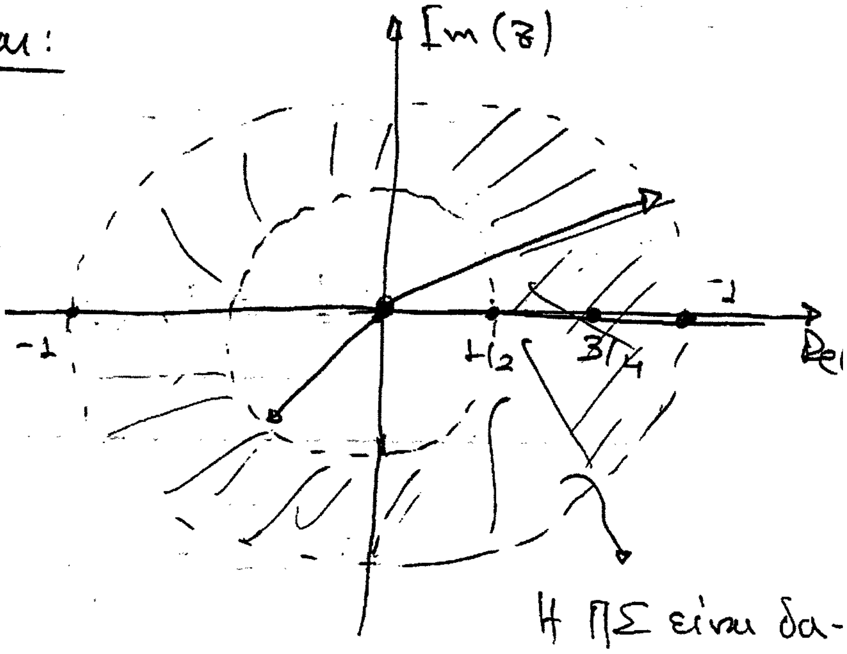
$$H(z) = \frac{\alpha(z)}{(z - \frac{1}{2})(z+1)}$$

αφού είναι ρητή συνάρτηση

- Τότε: $H(z) = c_1 \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{2}} + c_2 \cdot \frac{1}{z+1}$.

- Για την ΠΣ θα είναι:

Τότε $|z| > \frac{1}{2}$, $|z| < |-1|$



Η ΠΣ είναι δακτύλιος αφού το $z = \frac{3}{4}$ περιλαμβάνεται

- Επομένως για την $H(z)$ θα είναι:

$$H(z) = \frac{c_1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{c_2}{z+1} = c_1 \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \cdot z^{-1} + c_2 \cdot \frac{z}{z+}$$

$$\cdot z^{-1} \xleftrightarrow{\mathcal{M}z^{-1}}$$

$$h(n) = \underbrace{c_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}_{|z| > \frac{1}{2}}\!\!\!\!\!\!\overbrace{}^{}\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)}_{\text{ΧΡΟΝΙΚΗ ΟΛΙΣΘΗΣΗ}} + c_2 \cdot \left[-(-1)^{n-1} \cdot u(-(n-1)\right.$$

(λόγω πολ/ζουμε z^{-1}).

$$\Rightarrow \boxed{h(n) = c_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) + c_2 \cdot \left((-1)^n \cdot u(-n)\right).} \quad (1)$$

• Επίσης: $h(1) = 1 \xRightarrow{(1)} c_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0} u(0) + c_2 \cdot (-1)^1 u($

$= 1 \Rightarrow c_1 \cdot 1 \cdot 1 + c_2 \cdot (-1) \cdot 0 = 1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 1}$

$h(-1) = 1 \xrightarrow{(1)} c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} u(-2) + c_2 \cdot \left((-1)^{-1} u(\right.$

$= 1 \Rightarrow c_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 0 + c_2 \cdot (-1) \cdot 1 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{c_2 = -1}$

Άρα: $H(z) = \frac{1}{z-\frac{1}{2}} - \frac{1}{z+1} = \frac{z+1-(z-\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{2})(z+1)} \rightarrow$

$$\to \boxed{H(z) = \frac{3/2}{(z-\frac{1}{2})(z+1)}} \quad , \quad \boxed{h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) - (-1)^{n} u(-n}$$

ΘΕΜΑ 3α) - ΦΕΒΡ. 05.

Αιτιατό Σύστημα.

$$H(z) = \frac{z^2 - 2,4z + 0,8}{z^2 - 2,8z + 1,6}$$

πόλοι: $\Delta = 2,8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1,6 = 7,84 - 6,4 = 1,44 =$

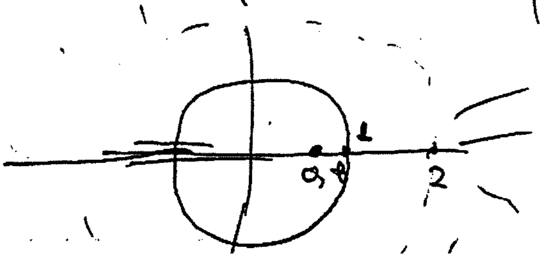
$$= (1,2)^2$$

$$\begin{array}{r} 2,8 \\ \times 2,8 \\ \hline 224 \\ + 56 \\ \hline 7,84 \end{array}$$

$$\left. z_{1,2} = \frac{2,8 \pm 1,2}{2} \begin{matrix} \nearrow \boxed{2} \\ \searrow \boxed{0,8} \end{matrix} \right\}$$

$$H(z) = \frac{z^2 - 2,4z + 0,8}{(z-2)(z-0,8)}$$

⊛ Για να είναι το αιτιατό σύστημα ΚΑΙ ευσταθές πρέπει οι πόλοι της H(z) να βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.



⊛⊛ Πιθανή απλοποίηση:

Αριθμητής: $z^2 - 2,4z + 0,8 = 0$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ +48 \\ \hline 5,76 \end{array}$$

$$\Delta = 5,76 - 3,2 = 2,56 = 1,6^2$$

$$z_{1,2} = \frac{2,4 \pm 1,6}{2} \begin{array}{l} \rightarrow \textcircled{2} \\ \rightarrow \boxed{0,4} \end{array} \Bigg\}$$

$$H(z) = \frac{\cancel{(z-2)}(z-0,4)}{\cancel{(z-2)}(z+0,8)} \Rightarrow \underbrace{H(z) = \frac{z-0,4}{z-0,8}}_{\text{ΕΥΣΤΑΘΕΣ.}}$$

ΘΕΜΑ 2β ΣΕΠΤ. 04

$$H(z) = \frac{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}} \Bigg\} \; h(n).$$

α. Για να είναι το σύστημα ευσταθές πρέπει η ΠΣ να περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Τότε:

$$\xrightarrow[\times z^2]{\times z^2} H(z) = \frac{z^2 - \frac{3}{2}z}{\underbrace{z^2 - \frac{3}{2}z - 1}}$$

$$\Delta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2.$$

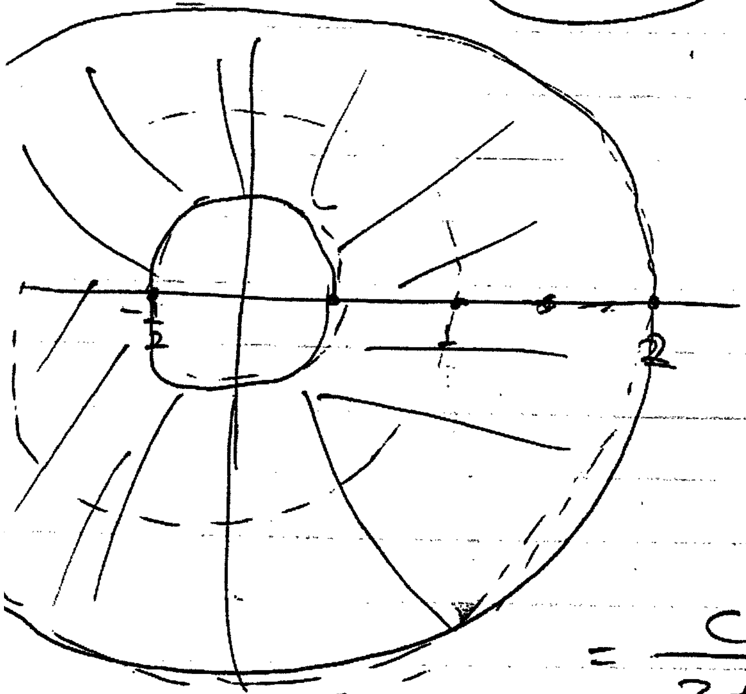
$$z_{1,2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2} \begin{array}{l} \rightarrow \textcircled{2} \\ \rightarrow \boxed{-\frac{1}{2}}. \end{array}$$

$$z(z - \tfrac{3}{2})$$

Για να περιλαμ

Φαίνεται ο μοναδιαίος κύκλος στην ΠΣ της $H(z)$ πρε

$|z| > |\frac{1}{2}|$, $\underbrace{|z| < |2|}$



Άρα:

$$H(z) = \frac{\boxed{z}(z-\frac{3}{2})}{(z-2)(z+\frac{1}{2})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{H(z)}{z} = \underbrace{\frac{z-\frac{3}{2}}{(z-2)(z+\frac{1}{2})}}$$

$$= \frac{c_1}{z-2} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}} ,$$

όπου

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \left.\frac{z-\frac{3}{2}}{z+\frac{1}{2}}\right|_{z=2} = \frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{5}{\cancel{2}}} = \frac{1}{5} ; \\ c_2 &= \left.\frac{z-\frac{3}{2}}{z-2}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{4}{2}}{-\frac{5}{2}} = \frac{4}{5} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{H(z)}{z} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z-2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{z+\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{5} \cdot \frac{z}{z-2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{z}{z+\frac{1}{2}} \xleftrightarrow{Mz^{-1}}$$

$h(n) =$

β) Για να είναι αιτιατό πρέπει η ΠΣ της H(z) να είναι:

$$|z| > 2$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{c_1}{z-2} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{5}\cdot\frac{z}{z-2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}} \xleftarrow{Mz^{-1}}$$

$$\boxed{h(n) = \underbrace{\frac{1}{5}\cdot 2^n u(n)} + \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n).}$$

ΘΕΜΑ 1ο/ΦΕΒΡ. 2005 :

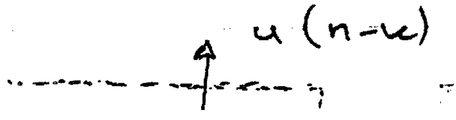
αναδρομική σχέση: $\underbrace{x(n+1) - \sum_{k=0}^{n} x(k)a^{n-k} = 2^n}_{a\neq 1.\qquad\qquad (1)}$,

- Προφανώς αφού η x(n) ακολουθία είναι αιτιατ

θα ισχύει:

ΕΠΕΚΤΕΙΝΩ ΤΟ Σ ΜΕ ΤΗΝ u.

$$\sum_{k=0}^{n} x(k)a^{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)a^{n-k} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot a^{n-k}\cdot u(}_{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΕΛΙΞ}}$$



$$= x(n) * (a^n u(n))$$

$$(1) \Rightarrow (2)$$

Τότε: $\underbrace{x(n+1)}_{\downarrow} - \underbrace{x(n) * (a^n u(n))}_{\downarrow} = 2^n \xleftrightarrow{Mz}$

ΧΡΟΝΙΚΗ ΟΠΙΣΘΗΣΗ (ΑΡΙΣΤΕΡΗ ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΥ Μz)!!!!!!!

Θ. ΣΥΝΕΛΙΞΗ

$$z^1 \cdot \left[X(z) - \sum_{n=0}^{0} x(n) z^{-n} \right] - X(z) \cdot \frac{z}{z-a} =$$

$$= \underbrace{\frac{z}{z-2}}_{\downarrow} \Rightarrow z X(z) - \underbrace{z \cdot x(0)} - X(z) \frac{z}{z-}$$

λόγω αιτιατής ακολουθίας x(n)

$$= \frac{z}{z-2} \xrightarrow{x(0)=0} \cancel{z}\left(X(z) - \frac{X(z)}{z-a} \right) = \frac{\cancel{z}}{z-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(z) \cdot \frac{z-a-1}{z-a} = \frac{1}{z-2} \Rightarrow X(z) = \frac{z-a}{\underbrace{(z-2)(z-}}$$

$$\rightarrow X(z) = \frac{c_1}{z-2} + \frac{c_2}{z-a-1},$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \left.\frac{z-a}{z-a-1}\right|_{z=2} = \frac{2-a}{1-a}, \\ c_2 &= \left.\frac{z-a}{z-2}\right|_{z=a+1} = \frac{1}{a-1} \end{aligned}\right\}$$

$$X(z) = \frac{2-a}{1-a} \cdot \frac{z \cdot z^{-1}}{z-2} + \frac{1}{a-1} \cdot \frac{z \cdot z^{-1}}{z-(a+1)} \quad \xleftrightarrow{Mz^{-1}}$$

$$\boxed{x(n) = \frac{2-a}{1-a} \cdot 2^{n-1} u(n-1) + \frac{1}{a-1} \cdot (a+1)^{n-1} u(n-1)}$$

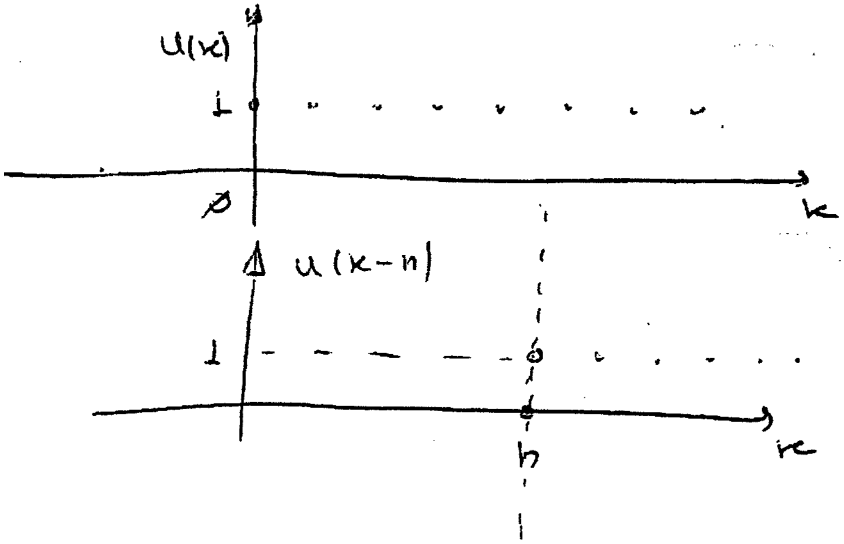
ΜΑΘΗΜΑ ιθ^{ο}

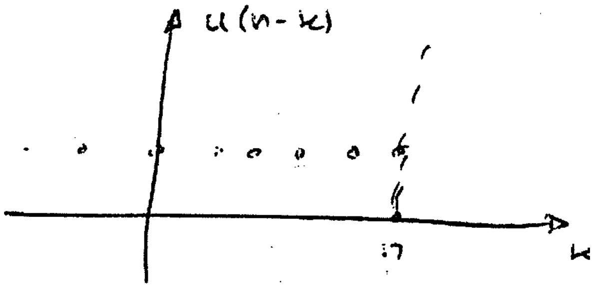
ΘΕΜΑ 1 - ΦΕΒΡ. 06 :

α) $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x(k)\cdot a^{n-k} - x(n+1) = 2^{n}}$$

⊛ Αφού η x(n) είναι αιτιατή ακολουθία θα
είναι:

$$\sum_{k=0}^{n} x(k)\, a^{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)\, a^{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) a^{n-k} \cdot$$





Άρα: $$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} x(k)\, a^{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, a^{n-k} u(n-k) = \\ &= x(n) * \left(a^{n} u(n)\right) \end{aligned} \right\}$$

Οπότε: αναδρομή: $x(n) * (a^{n} u(n)) - x(n+1) = 2^{n} \leftarrow$ Μz

ΙΔ. ΧΡΟΝ. [illegible]

②

$$X(z)\cdot\frac{z}{z-a} = \overbrace{z^{1}\left[X(z)-\sum_{n=0}^{0} x(n)\,z^{-n}\right]}^{\text{ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΥ 4Z}} = \frac{z}{z-2}$$

$$\to\quad X(z)\cdot\frac{\cancel{z}}{z-a} = \cancel{z}X(z) + \underbrace{z\cdot\cancel{x(0)}\,z^{0}}_{0\ \cancel{0}} = \frac{\cancel{z}}{z-2}$$

$$\to\quad X(z)\left(\frac{1-(z-a)}{z-a}\right) = \frac{1}{z-2} \to$$

$$\to\quad X(z) = \frac{z-a}{(z-2)(1+a-z)} = \frac{a-z}{(z-2)(z-(a+1))}$$

$$= \frac{c_1}{z-2} + \frac{c_2}{z-(a+1)},$$

$$c_1 = \left.\frac{a-z}{z-a-1}\right|_{z=2} = \frac{a-2}{1-a}$$

$$c_2 = \left.\frac{a-z}{z-2}\right|_{z=a+1} = \frac{-1}{a-1} = \frac{1}{1-a}.$$

Άρα: $X(z) = \frac{a-2}{1-a}\cdot\frac{z}{z-2}\cdot z^{-1} + \frac{1}{1-a}\cdot\frac{z}{z-(a+1)}\cdot z^{-1}$

$$\xleftrightarrow{Mz^{-1}} \boxed{x(n) = \frac{a-2}{\ }\cdot 2^{n-1}u(n-1) + \frac{1}{1-a}\cdot(a+1)^{n-1}u(n-1)}$$

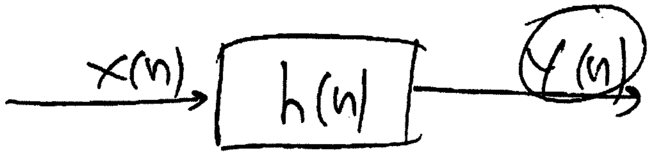
$\delta(n) \longleftrightarrow 1$

$y(n-2) \xleftrightarrow{Mz} Y(z)\cdot z^{-2}$ $\quad \delta(n-1) \xleftrightarrow{Mz} 1\cdot z^{-1}$

β) $\underline{\underline{n=0}}$ $\quad x(n) = \underbrace{\delta(n)} - \frac{1}{3}\delta(n-1)$

$$\longrightarrow y(n) = \frac{5}{6}y(n-2) - \frac{1}{6}y(n-1) + x(n)$$

εξίσωση διαφορών



· Για το σύστημα θα είναι: $\boxed{y(n) = x(n) * h(n)}$

· Για την εξίσωση διαφορών θα είναι:
(εφαρμόζω Mz για να λύσω την εξίσωση).

$$\underbrace{Y(z) = \frac{5}{6}\cdot \underbrace{z^{-2}\cdot Y(z)} - \frac{1}{6}\cdot z^{-1}\cdot Y(z) + X(z}$$

όπου $\underbrace{X(z) = 1 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot z^{-1}}$

· $\underline{\underline{\text{Τότε:}}}$ $\quad Y(z) = \frac{5}{6}z^{-2}Y(z) + \frac{1}{6}z^{-1}Y(z) + 1 - \frac{1}{3}z^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{-\frac{5}{6}z^{-2} + \frac{1}{6}z^{-1} + 1} \xrightarrow{*z^2}$$

$$\rightarrow Y(z) = \frac{z^2 - \frac{1}{3}z}{\underbrace{z^2 + \frac{1}{6}z - \frac{5}{6}}} = \frac{z^2 - \frac{1}{3}z}{(z-\frac{5}{6})(z+1)} \Rightarrow$$

$$\Delta = \frac{1}{36} - 4\cdot 1\cdot\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{36} + \frac{20}{6} = \frac{1}{36} + \frac{120}{36} =$$

$$= \frac{121}{} = \left(\frac{11}{}\right)^2 \qquad -\frac{1}{}, \frac{11}{}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{z-\frac{1}{3}}{\left(z-\frac{5}{6}\right)(z+1)} = \frac{c_1}{z-\frac{5}{6}} + \frac{c_2}{z+1},$$

$$c_1 = \left.\frac{z-\frac{1}{3}}{z+1}\right|_{z=\frac{5}{6}} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{11}{6}} = \frac{3}{11}$$

$$c_2 = \left.\frac{z-\frac{1}{3}}{z-\frac{5}{6}}\right|_{z=-1} = \frac{-\frac{4}{\cancel{3}}}{-\frac{11}{\cancel{6}_2}} = \frac{8}{11}.$$

Άρα: $$Y(z) = \frac{3}{11}\cdot\frac{z}{z-\frac{5}{6}} + \frac{8}{11}\cdot\frac{z}{z+1} \xleftarrow{\mathcal{Z}^{-1}}$$

$$\boxed{y(n) = \frac{3}{11}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n u(n) + \frac{8}{11}\cdot(-1)^n u(n)}$$

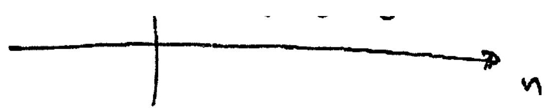
⊛ ΘΕΜΑ 3 - ΙΟΥΛΙΟΣ 2005

$$X(z) = \frac{1}{1-1{,}2z^{-1}+0{,}2z^{-2}}$$

α) $$X(z) = \frac{1}{1-1{,}2z^{-1}+0{,}2z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-1{,}2z+0{,}2}$$

$$\Delta = 1{,}44 - 4\cdot 1\cdot 0{,}2 = 0{,}64 = 0{,}8^2$$

$$\left.\begin{aligned} z_{1,2} = \frac{1{,}2\pm 0{,}8}{2} &\longrightarrow \textcircled{1} \\ &\longrightarrow \textcircled{0{,}2} \end{aligned}\right\} X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0{,}2)} =$$



$$\Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \boxed{\frac{z}{(z-1)(z-0{,}2)}} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-0{,}2},$$

$$c_1 = \frac{z}{z-0{,}2}\Big|_{z=1} = \frac{1}{0{,}8} = \frac{5}{4}.$$

$$c_2 = \frac{z}{z-1}\Big|_{z=0{,}2} = \frac{0{,}2}{-0{,}8} = -\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{1}{4}.$$

Άρα:

$$X(z) = +\frac{5}{4}\cdot\frac{z}{z-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z-0{,}2} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}}$$

$$\boxed{x(n) = +\frac{5}{4}\cdot 1^n\cdot u(n) - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n).}$$

[redacted]

$$\rightarrow x(0) = +\frac{5}{4}\cdot 1^0\cdot u(0) - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^0\cdot u(0) = +\frac{5}{4} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4}.$$

$$\rightarrow x(\infty) = +\frac{5}{4}\cdot 1^\infty\cdot u(\infty) - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^\infty\cdot u(\infty) =$$

$$= +\frac{5}{4}\cdot 1 - \frac{1}{4}\cdot 0 = \underline{\underline{+\frac{5}{4}}}.$$

Επαλήθευση ΘΑΤ: $x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{1-1{,}2z^{-1}+0{,}2z^{-}}$

$$= \boxed{1}.$$

– **Επαλήθευση Θ.Τ.Τ. :**

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1} (z-1)\, X(z) \Rightarrow$$

$$\rightarrow x(\infty) = \lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)} \cdot \frac{z^2}{\cancel{(z-1)}(z-0{,}2)} \rightarrow$$

$$\rightarrow x(\infty) = \frac{1}{1-0{,}2} \rightarrow x(\infty) = \frac{1}{\frac{4}{5}} \rightarrow \boxed{x(\infty) = \frac{5}{4}}$$

β) το ίδιο με ΘΕΜΑ 1β) ΦΕΒ. 06.

SOS

ΘΕΜΑ 1β) – ΣΕΠΤ. 05

Δίνεται ακολουθία x(n)

$$X(z) = \frac{1+3{,}25z^{-1}}{2-0{,}25z^{-2}+0{,}125z^{-3}}$$

$x(1) = ;$

ΛΥΣΗ : Για να βρω την τιμή της x(n) στο n=1

κάνω τα εξής:

• Ορισμός της X(z): $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \dots$$

↓ x(n) : αιτιατή

$$\Rightarrow X(z) = X(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \dots \quad (1)$$

• Για να βρω τώρα το x(1), το απομονώνω από τη σχέση (1). Δηλ. πολ/ζω την (1) με z. Τότε:

$$z \cdot X(z) = z \cdot X(0) + x(1) + x(2) \cdot z^{-1} + x(3) z^{-2} + \dots$$

$$\Rightarrow z\left(X(z) - x(0)\right) = \underset{\sim}{x(1)} + x(2) z^{-1} + \dots \Longrightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{z \to \infty} z\left(X(z) - x(0)\right) = \lim_{z \to \infty} \left[x(1) + x(2) z^{-1} + \dots\right]$$

$$\rightarrow \lim_{z \to \infty} z\left(X(z) - x(0)\right) = x(1) + \underbrace{\lim_{z \to \infty}\left(x(2) z^{-1} + \dots\right)}_{0}$$

$$\rightarrow \boxed{x(1) = \lim_{z \to \infty} z\left(X(z) - x(0)\right)} \quad (2)$$

• Στη σχέση (2) δεν γνωρίζω το x(0). Για να βρω το x(0) εφαρμόζω Θ.Α.Τ.:

$x(0) = \lim X(z) = \lim \quad 1 + 3.25$

Άρα η (2):

$$x(1) = \lim_{z\to\infty} z\left(X(z) - \frac{1}{z}\right) =$$

$$= \lim_{z\to\infty}\left(\frac{z + 3{,}25\cdot 1}{2-0{,}25z^{-2}+6{,}125z^{-3}} - \frac{z}{2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to\infty}\left(\frac{\cancel{2z} + 6{,}5 - \cancel{2z} + 0{,}25z^{-1} - 6{,}125z}{2\left(2-0{,}25z^{-2}+6{,}125z^{-3}\right)}\right.$$

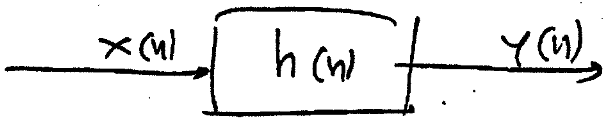
$$= \frac{6{,}5 + 0}{4} \rightarrow \boxed{x(1) = \frac{6{,}5}{4} = \frac{13}{8}}$$

~~$X(z) = \dfrac{1 + 3{,}25z^{-1}}{2-0{,}25z^{-2}+6{,}125z^{-3}} = \dfrac{z^3 + 3{,}25z^2}{2z^3 - 0{,}25z + 6,}$~~

ΘΕΜΑ 1ο - ΙΟΥΝΙΟΣ 08.

$$\boxed{y(n) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(a+\beta)^{n-m}} \cdot x(m)}$$

a) Κρουστική Απόκριση $(h(n))$.



$$y(n) = x(n) * h(n) = \underline{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot h(n-m)}$$

⇒ Από τη δοθείσα σχέση της $y(n)$ θα είναι:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(a+\beta)^{n-m}} \cdot x(m) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) \cdot \underbrace{\frac{1}{(a+\beta)^{n-m}} \cdot u(n-}$$

Απ' την παραπάνω σχέση η $\boxed{h(n) = \frac{1}{(a+\beta)^{n}} \cdot u(n)}$

- ΓΧΑΣ: $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot h(n-m)$.
- Αιτιατό ΓΧΑΣ: $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)\, h(n-m)$.
- Αιτιατό ΓΧΑΣ με αιτιατή είσοδο: $y(n) = \underline{\sum_{m=0}^{n} x(m) \cdot h(n-m}$

Τότε: $\boxed{h(n) = \frac{1}{(a+\beta)^n} u(n).}$

β) Είναι άρα $h(n) = \frac{1}{(a+\beta)^n} \cdot u(n)$ $\left(h(n) = 0 \ \forall n < 0 \right)$.

γ) Για υλοποίηση σε Η/Υ, η σχέση

$$y(n) = \underbrace{\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(a+\beta)^{n-m}} \cdot x(m)}$$

θα γράφεται ω

$$y(n) = \underbrace{x(n) * \left(\frac{1}{a+\beta} \right)^n u(n)} =$$

$$= \underbrace{x(0) \cdot \frac{1}{(a+\beta)^n} + x(1) \cdot \frac{1}{(a+\beta)^{n-1}} + \dots + x(n) \cdot \frac{1}{(a+\beta)^0}}$$

ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΜΝΗΜΗ:

→ Όλοι οι όροι είναι $\underline{n+1}$. Άρα έχω $\underline{n}$ προσθέσεις και $\underline{n+1}$ πολ/σμούς. Οπότε θέλω

~ (n+1) θέσεις μνήμης για αποθήκευση των $x(0), x(1), \dots, x(n)$.

→ 1 θέση για το n

~ " " " " $\left(\frac{1}{a+\beta} \right)$

→ " " " " $\left(\frac{1}{a\beta} \right)^n$, $\forall n$.

~ " " " "

(*)

(11

δ) Απόκριση Συχνότητας : Για να λάβω τ

απόκριση συχνότητας (για την περίπτωση των Μz
λαμβάνω όπου $\boxed{z = e^{-j\omega}}$:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\cdot z^{-n} \to$$

$$\to H(e^{j\omega}) = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\cdot e^{-j\omega m}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(a+b)^{m}}\cdot e^{-j\omega m} =$$

$$= \underbrace{\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{1}{(a+b)\cdot e^{-j\omega}}\right)^{m}} =$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{(a+b)e^{-j\omega}}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{1}{(a+b)e^{-j\omega}}\right)}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{i} = \frac{1}{1-q} \quad , 0<q<1$$

$$\sum^{L} q^{i} = \frac{1-q^{L-1}}{}$$

ε) <u>ΦΕΦΕ ευσταθές:</u>

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

<u>Όμως:</u> $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{(a+b)^{n}} u(n) \right| =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+b)}\right)^{n} = \left(\frac{1}{a+b}\right)^{0} + \frac{1}{(a+b)^{1}} + \frac{1}{(a+b)^{2}} + \cdots$$

Αν $\boxed{0 < \frac{1}{a+b} < 1}$: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(a+b)}\right)^{n} = \frac{1}{1-\frac{1}{a+b}} < \infty$