**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ**

**ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

# PROJECT ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ "ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΕΥΡΕΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ"

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

**Πολίτη Όλγα**

**Α.Μ. 4528**

**Εξάμηνο 8ο**

**Υπεύθυνος Καθηγητής**

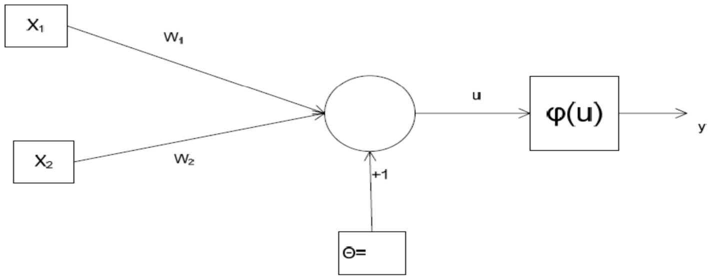
**Λυκοθανάσης Σπυρίδων**

**Ακαδημαϊκό Έτος: 2011-2012**

*~Νευρωνικά Δίκτυα~*

**(1.1)**

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα perceptron για να υλοποιήσουμε τις λογικές συναρτήσεις NAND και NOR με δύο εισόδους




Το Perceptron ακολουθεί το μοντέλο McCulloch – Pitts, και περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\upsilon = \sum_{j=0}^{m} w_j x_j \underset{x_0=-1}{\overset{w_0=\theta}{=}} \sum_{j=1}^{m} w_j x_j - \theta$$

$$y = \varphi(\upsilon) = \begin{cases} +1, \upsilon \geq 0 \\ -1, \upsilon < 0 \end{cases}$$

<u>Για την NOR</u>

Πίνακας αληθείας

| $X_1$ | $X_2$ | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

Παρατηρούμε ότι και οι δυο είσοδοι πρέπει να είναι σε χαμηλή λογική στάθμη για να παραχθεί έξοδος, οπότε θα θέσουμε μια τιμή κατωφλίου θ= - 0.1 . Θα θέσουμε τα βάρη w1= -0.5 , w2= -0.5

- Για $\mathbf{X_1}$=0 , $\mathbf{X_1}$=0

Έχουμε y= φ( 0*(-0,5)+ 0*(-0,5)) = φ(0) = 1 > -0.1 (κατώφλι)

- Για $\mathbf{X_1}$=0 , $\mathbf{X_1}$=1

Έχουμε y= φ( 0*(-0,5)+ 1*(-0,5)) = φ(-0.5) = 0 < -0.1 (κατώφλι)

- Για $\mathbf{X_1}$=1 , $\mathbf{X_1}$=0

Έχουμε y= φ( 1*(-0,5)+ 0*(-0,5)) = φ(-0.5) = 0 < -0.1 (κατώφλι)

- Για $\mathbf{X_1}$=1 , $\mathbf{X_1}$=1

Έχουμε y= φ( 1*(-0,5)+ 1*(-0,5)) = φ(-1) = 0 < -0.1 (κατώφλι)

Έτσι αν έστω και μια από τις δύο εισόδους είναι 1, η έξοδος θα είναι 0. Αν και οι δυο είσοδοι είναι 0, τα άθροισμα των βαρών τους είναι μεγαλύτερο από την τάση κατωφλίου και η έξοδος είναι 1.

Για την NAND

Πίνακας αληθείας

| **$X_1$** | **$X_2$** | **Y** |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Παρατηρούμε ότι για να παραχθεί έξοδος πρέπει οι δυο είσοδοι να μην είναι ταυτόχρονα σε υψηλή στάθμη, οπότε θα θέσουμε μια τιμή κατωφλίου θ= - 0.8 . Θα θέσουμε τα βάρη w1= -0.5 , w2= -0.5

- Για $\mathbf{X_1}$=0 , $\mathbf{X_1}$=0

Έχουμε y= φ( 0*(-0,5)+ 0*(-0,5)) = φ(0) = 1 > -0.8 (κατώφλι)

- Για $\mathbf{X_1}$=0 , $\mathbf{X_1}$=1

Έχουμε y= φ( 0*(-0,5)+ 1*(-0,5)) = φ(-0.5) =1 > -0.8 (κατώφλι)

- Για $\mathbf{X_1}$=1 , $\mathbf{X_1}$=0

Έχουμε y= φ( 1*(-0,5)+ 0*(-0,5)) = φ(-0.5) = 1 > -0.8 (κατώφλι)

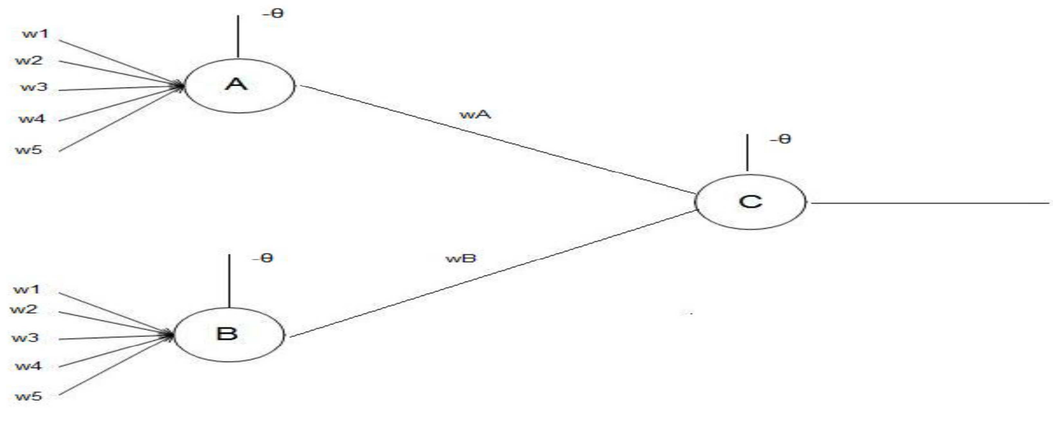
- Για $\mathbf{X_1}$=1 , $\mathbf{X_1}$=1

Έχουμε y= φ( 1*(-0,5)+ 1*(-0,5)) = φ(-1) = 0 < -0.8 (κατώφλι)

Έτσι αν οι δυο είσοδοι είναι ταυτόχρονα σε υψηλή στάθμη, η έξοδος θα είναι 0. Αν έστω και μια από τις δυο εισόδους είναι 0, τα άθροισμα των βαρών τους είναι μεγαλύτερο από την τάση κατωφλίου και η έξοδος είναι 1.

**(1.2)**

Θα υπολογίσουμε την έξοδο του νευρώνα C του νευρωνικού δικτύου που παρουσιάζεται στην επόμενη εικόνα. Οι νευρώνες A και B δέχονται είσοδο από 5 άλλους νευρώνες των οποίων οι τιμές είναι 6, 6, 2, - 3, 5 για τον νευρώνα A και 2, -1, 10, 4, -1 για τον νευρώνα B. Τα αντίστοιχα συναπτικά βάρη του νευρώνα A είναι $w_{1A}$=0.23, $w_{2A}$=0.84, $w_{3A}$=0.19, $w_{4A}$=0.22 και $w_{5A}$=0.17 και του νευρώνα B $w_{1B}$=0.22, $w_{2B}$=0.43, $w_{3B}$=-0.31, $w_{4B}$=0.92 και $w_{5B}$=0.43. Τα συναπτικά βάρη των δύο εισόδων του νευρώνα C είναι $w_A$=0.4 και $w_B$=0.6 αντίστοιχα. Επίσης θεωρούμε πως σε κάθε νευρώνα υπάρχουν είσοδοι κατωφλίων (ίσοι με 1) και βάρος $w_\theta$ = -1. Ο νευρώνας A χρησιμοποιεί την *σιγμοειδή* ως συνάρτηση ενεργοποίησης, ο νευρώνας B την *McCulloch-Pitts* και ο νευρώνας C την *γραμμική*.



Για των νευρώνα A:

$X_{1A}$ = 6 $W_{1A}$=0.23

$X_{2A}$= 6 $W_{2A}$=0.84

$X_{3A}$= 2 $W_{3A}$=0.19

$X_{4A}$= -3 $W_{4A}$=0.22

$X_{5A}$= 5 $W_{5A}$=0.17

$u_A = \sum_{i=0}^{5}(X_{iA} * W_{iA})$ = (6*0.23)+(6*0.84)+(2*0.19)+(-3*0.22)+(5*0.17) =
=1.38 + 5.04 + 0.38 - 0.66 + 0.85 = 6.99

Το A ακολουθεί την σιγμοειδή συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$\varphi(u) = \frac{1}{1+e^{-u}}$ άρα $y_A = \frac{1}{1+e^{-6.99}} = \frac{1}{1+0.0009} = 0.99$

Για των νευρώνα B:

$X_{1B}$ = 2 $W_{1B}$=0.22

$X_{2B}$= -1 $W_{2B}$=0.43

$X_{3B}$= 10 $W_{3B}$= -0.31

$X_{4B}$= 4 $W_{4B}$=0.92

$X_{5B}$= -1 $W_{5B}$=0.43

$u_B = \sum_{i=0}^{5}(X_{iB} * W_{iB})$ = (2*0.22)+(-1*0.43)+(-0.31*10)+(4*0.92)+(-1*0.43) =
=0.44 -0.43 – 3.10 + 3.68 - 0.43 =0.16

Το B ακολουθεί την συνάρτηση *McCulloch-Pitts* για την οποία ισχύει:

$\varphi(u) = \begin{cases} +1 & u \geq 0 \\ -1 & u < 0 \end{cases}$ άρα $y_B$ =1

Για των νευρώνα C:

$X_A$ = 0.99 $W_A$=0.4

$X_B$= 1 $W_B$=0.6

$u_C = X_A * W_A + X_B * W_B$ = (0.99*0.4) +(1*0.6) = 0.99

Το C ακολουθεί την γραμμική συνάρτηση, οπότε η έξοδός του είναι $y_C = \varphi(u) = u_C$=0.99

*~Γενετικοί Αλγόριθμοι~*

**(2.1)**

Δίνεται ένας πληθυσμός 8 ατόμων ο οποίος παρουσιάζεται στην συνέχεια.

**Πληθυσμός**

00100111
10101010
11000111
01010011
11110000
00111100
00101000
11010101

Θα χρησιμοποιηθεί διασταύρωση διπλού σημείου με πιθανότητα διασταύρωσης ίση με 0.7. Επίσης, θα χρησιμοποιηθεί ένα προσαρμοστικό είδος μετάλλαξης στο οποίο η πιθανότητα μετάλλαξης των ψηφίων κάθε ατόμου υπολογίζεται από τον τύπο:

$p_m = k_2 (f_{max} - f) / (f_{max} - f_{avg})$, $f \geq f_{avg}$

$p_m = k_4$, $f \leq f_{avg}$

όπου $f_{max}$ είναι η μέγιστη και $f_{avg}$ η μέση καταλληλότητα του προσωρινού πληθυσμού εκείνη την στιγμή και f η καταλληλότητα του ατόμου. Θεωρούμε $k_2 = k_4 = 0.5$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τυχαίους αριθμούς για να εφαρμόσουμε τον γενετικό αλγόριθμο με την σειρά που δίνονται στην εκφώνηση της άσκησης.

(α) Εύρεση καταλληλότητας

Σαν καταλληλότητες των ατόμων χρησιμοποιούμε την αντίστοιχη δεκαδική τιμή τους. Ονομάζοντας τα 8 άτομα του πληθυσμού της γενεάς 0, με τα γράμματα Α-Θ έχουμε:

| ΟΝΟΜΑΣΙΑ | ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ | ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΤΗΤΑ |
|---|---|---|
| Α | 00100111 | f(A)=39 |
| Β | 10101010 | f(B)=170 |
| Γ | 11000111 | f(Γ)=199 |
| Δ | 01010011 | f(Δ)=83 |
| Ε | 11110000 | f(E)=240 |
| Ζ | 00111100 | f(Z)=60 |
| Η | 00101000 | f(H)=40 |
| Θ | 11010101 | f(Θ)=213 |

Η συνολικά τιμή της αξιολόγησης είναι 39+170+199+83+240+60+40+213 = 1044 και η μέση τιμή αξιολόγησης είναι 1044/8 = 130.5

(β) Επιλογή

Για να εφαρμόσουμε τον συντελεστή απλής αναλογικής επιλογής πρέπει να υπολογίσουμε τις συσσωρευμένες πιθανότητες των ατόμων του πληθυσμού και να κατασκευάσουμε τη ρουλέτα. Άρα η πιθανότητα επιλογής κάθε ατόμου του πληθυσμού είναι η παρακάτω:

$P_A$ = 39/1044 = 0.037
$P_B$ = 170/1044 = 0.162
$P_\Gamma$ = 199/1044 = 0.190
$P_\Delta$ =83/1044 = 0.079
$P_E$ =240/1044 = 0.229
$P_Z$ =60/1044 = 0.057
$P_H$ =40/1044 = 0.038
$P_\Theta$ =213/1044 = 0.204

Οι αντίστοιχες αθροιστικές πιθανότητες είναι:
$q_A$=0.037
$q_B$= 0.199
$q_\Gamma$= 0.389
$q_\Delta$= 0.468
$q_E$= 0.697
$q_Z$= 0.754
$q_H$=0.792
$q_\Theta$=0.996
Έχοντας υπολογίσει τις συσσωρευμένες πιθανότητες μπορούμε να κάνουμε χρήση του τελεστή της απλής αναλογικής επιλογής και με βάση τη δοσμένη ακολουθία ψευδοτυχαίων αριθμών μπορούμε να βρούμε τα άτομα του αρχικού πληθυσμού που επιλέγονται για διασταύρωση. Μια και ο γενετικός αλγόριθμος είναι σταθερού πληθυσμού πρέπει να επιλεγούν 8 άτομα από τη γενεά 0, έτσι ώστε να προκύψουν τα 8 νέα άτομα της γενεάς 1.
Έτσι είναι:
0.037<0.1622<0.199 άρα επιλέγεται ο Β
0.792<0.7943<0.996 άρα επιλέγεται ο Θ
0.199<0.3112<0.389 άρα επιλέγεται ο Γ
0.468<0.5285<0.697 άρα επιλέγεται ο Ε
0.037<0.1656<0.199 άρα επιλέγεται ο Β
0.468<0.6020<0.697 άρα επιλέγεται ο Ε
0.199<0.2630<0.389 άρα επιλέγεται ο Γ
0.468<0.6541<0.697 άρα επιλέγεται ο Ε

Άρα ο προσωρινός πληθυσμός είναι ο εξής:
Β=10101010
Θ=11010101
Γ=11000111
Ε=11110000
Β=10101010
Ε=11110000
Γ=11000111
Ε=11110000

(Γ) Διασταύρωση

Τα ζευγάρια που προέκυψαν για διασταύρωση είναι τα εξής:

Β=10101010
Θ=11010101
Γ=11000111
Ε=11110000
Β=10101010
Ε=11110000
Γ=11000111
Ε=11110000

Παίρνουμε το $1^{ο}$ ζευγάρι. Η πιθανότητα διασταύρωσης είναι 0.7. Ο επόμενος τυχαίος αριθμός είναι ο 0.6892 <0.7 οπότε θα πραγματοποιηθεί διασταύρωση. Μας απομένει τώρα να προσδιοριστεί το σημείο διασταύρωσης. Υποθέτουμε ότι όλα τα ψηφία είναι ισοπίθανα να επιλεχθούν σαν σημεία διασταύρωσης, το καθένα με πιθανότητα 1/8 =0.125 άρα έχουμε τα διαστήματα: 0,125 | 0,25 | 0,375 | 0,5 | 0,625 | 0,750 | 0,875 | 1

Ο επόμενος τυχαίος αριθμός είναι το 0.7482 άρα το σημείο διασταύρωσης είναι μετά το πέμπτο ψηφίο. Έτσι :

10101|010
11010|101
όπου η κάθετη γραμμή ( | ) δηλώνει το σημείο διασταύρωσης. Οι απόγονοι που προκύπτουν είναι οι:
10101101
11010010

Κάνουμε την ίδια εργασία και για το δεύτερο ζευγάρι. Ο επόμενος τυχαίος αριθμός είναι ο 0.4505 < 0.7 οπότε θα πραγματοποιηθεί διασταύρωση. Ο επόμενος τυχαίος αριθμός είναι ο 0.0838 άρα το σημείο διασταύρωσης είναι μετά το πρώτο ψηφίο. Έτσι:

1|1000111
1|1110000
Οι απόγονοι που προκύπτουν είναι οι:
11110111
11000000

Προχωράμε στο τρίτο ζευγάρι. Ο επόμενος τυχαίος αριθμός είναι ο 0.2290 < 0.7 οπότε θα πραγματοποιηθεί διασταύρωση στο τρίτο ζευγάρι. Ο επόμενος τυχαίος αριθμός είναι το 0.9133 άρα το σημείο διασταύρωσης είναι μετά το έβδομο ψηφίο. Έτσι:

1010101|0
1111000|0

Οι απόγονοι που προκύπτουν είναι οι:
10101010
11110000

Για το 4$^{ο}$ ζευγάρι, 0 επόμενος τυχαίος αριθμός είναι ο 0.1524 < 0.7 οπότε θα πραγματοποιηθεί διασταύρωση. Ο επόμενος τυχαίος αριθμός είναι το 0.8258 άρα το σημείο διασταύρωσης είναι μετά το όγδοο ψηφίο. Έτσι:

11000111|
11110000|

Οι απόγονοι που προκύπτουν είναι οι:
11000111
11110000

Ο προσωρινός πληθυσμός , μετά την διασταύρωση είναι ο παρακάτω:

Α'=10101101
Β'=11010010
Γ'=11110111
Δ'=11000000
Ε'=10101010
Ζ'=11110000
Η'=11000111
Θ'=11110000

Μετάλλαξη
Χρησιμοποιούμε ένα προσαρμοστικό είδος μετάλλαξης στο οποίο η πιθανότητα μετάλλαξης των ψηφίων κάθε ατόμου υπολογίζεται από τον τύπο:
$p_m = 0.5 (f_{max} - f) / (f_{max} – f_{avg}), f \geq f_{avg}$
$p_m = 0.5, f \leq f_{avg}$
Παίρνουμε τα στοιχεία του νέου πληθυσμού μετά την διασταύρωση:

| ΟΝΟΜΑΣΙΑ | ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ | ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΤΗΤΑ |
|---|---|---|
| Α' | 10101101 | f(Α')=173 |
| Β' | 11010010 | f(Β')=210 |
| Γ' | 11110111 | f(Γ')=247 |
| Δ' | 11000000 | f(Δ')=192 |
| Ε' | 10101010 | f(Ε')=170 |
| Ζ' | 11110000 | f(Ζ')=240 |
| Η' | 11000111 | f(Η')=199 |
| Θ' | 11110000 | f(Θ')=240 |

$f_{max}$= 247
$f_{avg}$=(173+210+247+192+170+240+199+240)/8=1671/8=208.8
Σύμφωνα με τον τύπο έχουμε:
$P_{Α'}$ = 0.5
$P_{Β'}$= 0.5(247-210)/(247-208.8)=18.5/38.2=0.48
$P_{Γ'}$= 0.5(247-247)/(247-208.8)=0
$P_{Δ'}$ =0.5
$P_{Ε'}$ =0.5
$P_{Ζ'}$ =0.5(247-240)/(247-208.8)=3.5/38.2=0.09
$P_{Η'}$ =0.5
$P_{Θ'}$ =0.5(247-240)/(247-208.8)=3.5/38.2=0.09

Στην συνέχεια προχωράμε στον τελεστή μετάλλαξης. Θα χρησιμοποιήσουμε τους υπόλοιπους αριθμούς για κάθε ψηφίο (γονίδιο) των μελών του πληθυσμού προκειμένου να υπολογίσουμε τα ψηφία που θα υποστούν μετάλλαξη (ένα γονίδιο θα υποστεί μετάλλαξη όταν ο τυχαίος αριθμός που του αντιστοιχεί είναι μικρότερος της εκάστοτε πιθανότητας μετάλλαξης).

Για το Α'=10101101 οι τυχαίοι αριθμοί που αντιστοιχούν στα γονίδια του είναι:
0.5383 0.9961 0.0782 0.4427 0.1067 0.9619 0.0046 0.7749 , με $P_{A'} = 0.5$
Άρα, θα υποστούν μετάλλαξη το $3^o,4^o,5^o,7^o$ ψηφίο. Οπότε έχουμε Α''=10010111

Για το Β'=11010010 οι τυχαίοι αριθμοί που αντιστοιχούν στα γονίδια του είναι:
0.8173 0.8687 0.0844 0.3998 0.2599 0.8001 0.4314 0.9106, με $P_{B'} = 0.48$
Άρα, θα υποστούν μετάλλαξη το $3^o,4^o,5^o,7^o$ ψηφίο. Οπότε έχουμε Β''=11101000

Για το Γ'=11110111 οι τυχαίοι αριθμοί που αντιστοιχούν στα γονίδια του είναι:
0.1818 0.2638 0.1455 0.1361 0.8693 0.5797 0.5499 0.1450, με $P_{\Gamma'} = 0$
Άρα, δεν θα υποστεί μετάλλαξη. Οπότε έχουμε Γ''=11110111

Για το Δ'=11000000 οι τυχαίοι αριθμοί που αντιστοιχούν στα γονίδια του είναι:
0.8530 0.6221 0.3510 0.5132 0.4018 0.0760 0.2399 0.1233, με $P_{\Delta'} = 0.5$
Άρα, θα υποστούν μετάλλαξη το $3^o,5^o,6^o,7^o,8^o$ ψηφίο. Οπότε έχουμε Δ''=11101111

Για το Ε'=10101010 οι τυχαίοι αριθμοί που αντιστοιχούν στα γονίδια του είναι:
0.1839 0.2400 0.4173 0.0497 0.9027 0.9448 0.4909 0.4893, με $P_{E'} = 0.5$
Άρα, θα υποστούν μετάλλαξη το $1^o,2^o,3^o,4^o,7^o,8^o$ ψηφίο. Οπότε έχουμε Ε''=01011001

Για το Ζ'=11110000 οι τυχαίοι αριθμοί που αντιστοιχούν στα γονίδια του είναι:
0.3377 0.9001 0.3692 0.1112 0.7803 0.3897 0.2417 0.4039με $P_{Z'} = 0.09$
Άρα, δεν θα υποστεί μετάλλαξη. Οπότε έχουμε Ζ''=11110000

Για το Η'=11000111 οι τυχαίοι αριθμοί που αντιστοιχούν στα γονίδια του είναι:
0.0965 0.1320 0.9421 0.9561 0.5752 0.0598 0.2348 0.3532, με $P_{H'} = 0.5$
Άρα, θα υποστούν μετάλλαξη το $1^o,2^o,6^o,7^o,8^o$ ψηφίο. Οπότε έχουμε Η''=00000000

Για το Θ'=11110000 οι τυχαίοι αριθμοί που αντιστοιχούν στα γονίδια του είναι:
0.8212 0.0154 0.0430 0.1690 0.6491 0.7317 0.6477 0.4509, με $P_{\Theta'} = 0.09$
Άρα, θα υποστούν μετάλλαξη το $2^o,3^o$ ψηφίο. Οπότε έχουμε Θ''=10010000

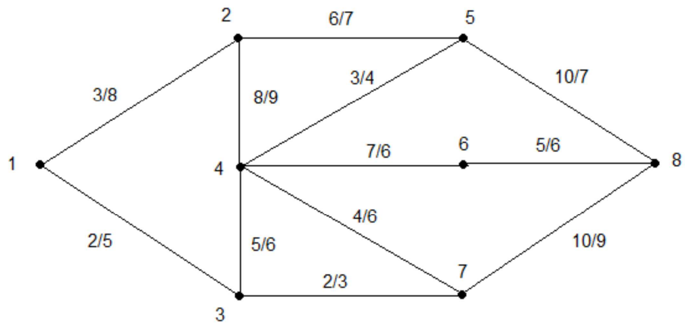
Οπότε ο ζητούμενος πληθυσμός της γενεάς 1 όπως προέκυψε από τις διασταυρώσεις και τις μεταλλάξεις γίνεται:

Α''=10010111
Β''=11101000
Γ''=11110111
Δ''=11101111
Ε''=01011001
Ζ''=11110000
Η''=00000000
Θ''=10010000

*~Δυναμικός Προγραμματισμός~*

**(3.1)**

Δίνεται ένα TSP 8 πόλεων. Για κάθε ζεύγος πόλεων δίνονται δύο αριθμοί που χωρίζονται με κάθετο. Ο πρώτος αριθμός παρουσιάζει την απόσταση από την πόλη με τον μικρότερο δείκτη μέχρι την πόλη με τον υψηλότερο δείκτη, ενώ ο δεύτερος αριθμός παρουσιάζει την απόσταση στην αντίθετη κατεύθυνση.




**(α)** ***Βέλτιστη διαδρομή από την πόλη 1 μέχρι την πόλη 8.***

Θα ακολουθήσουμε την εξής τακτική:

Σε κάθε πόλη που θα επιλέγουμε, θα επιλέγουμε να εξετάσουμε όλες τις διαδρομές προς τις γειτονικές πόλεις. Έτσι σε 1η φάση εξετάζουμε τις γειτονικές πόλεις της πόλης 1:

**φάση ' 1 '**

g({1},2) = 3

g({1},3)=2

Έπειτα, θα εξετάσουμε όλες τις διαδρομές από τις πόλεις 2,3 προς τις γειτονικές τους, λαμβάνοντας υπόψη την απόσταση τους από την 1(βρίσκοντας στην ουσία την απόσταση της πόλης 1 από αυτές), ως εξής:

**φάση ' 2'**

g(2,{4})= L(2,4) + g({1},2) = 8+3=11

g(2,{5})=L(2,5) + g({1},2) = 6+3=9

g(3,{4})= L(3,4) + g({1},3) =5+2=7

g(3,{7})= L(3,7) + g({1},3) =2+2=4

Επαναλαμβάνουμε, κρατώντας κάθε μονοπάτι που σχηματίσαμε πριν , ελέγχοντας για κάθε νέα γειτονική πόλη, μέχρι να συναντήσουμε την πόλη 8.

**φάση ' 3 '**

g (2, {4,3} ) =⟶ g(2,4) + g (4, {3} )=11+6=17

g (2, {4,5} ) = ⟶ g(2,4) + g (4, {5} )=11+3=14

g (2, {4,6} ) = ⟶ g(2,4) + g (4, {6} )=11+7=18

g(2,{4,7}) = ⟶ g(2,4) + g (4, {7} )=11+4=15

g(2,{5,4}) = ⟶ g(2,5) + g (5, {4} )=9+4=13

g(2,{5,8}) = ⟶ g(2,5) + g (5, {8} )=9+10=19

g (3, {4,2} ) =⟶ g(3,4) + g (4, {2} )=7 +9=16

g (3, {4,5} ) = ⟶ g(3,4) + g (4, {5} )=7+3=10

g (3, {4,6} ) = ⟶ g(3,4) + g (4, {6} )=7+7=14

g(3,{4,7}) = ⟶ g(3,4) + g (4, {7} )=7+4=11

g(3,{7,4}) = ⟶ g(3,7) + g (7, {4} )=4+6=10

g(3,{7,8}) = ⟶ g(3,7) + g (7, {8} )=4+10=14, επιλέγουμε το min=14

Συνεπώς, το βέλτιστο μονοπάτι από την( 1)⟶(8 )είναι το: **(1)⟶(3)⟶(7)⟶(8)**

(α) ***Βέλτιστη διαδρομή από την πόλη 8 μέχρι την πόλη 1.***

Ακολουθώντας την ίδια τακτική, έχουμε:

**φάση ' 1 '**

g({8},5) = 7

g({8},6)=6

g({8},7)=9

Έπειτα, θα εξετάσουμε όλες τις διαδρομές από τις πόλεις 5,6,7 προς τις γειτονικές τους, λαμβάνοντας υπόψη την απόσταση τους από την 8(βρίσκοντας στην ουσία την απόσταση της πόλης 8 από αυτές), ως εξής:

**φάση ' 2'**

g(5,{2})= L(5,2) + g({8},5) = 7+7=14

g(5,{4})=L(5,4) + g({8},5) = 4+7=11

g(6,{4})= L(6,4) + g({8},6) =6+6=12

g(7,{4})= L(7,4) + g({8},7) =6+9=15

g(7,{3})= L(7,3) + g({8},7) =3+9=12

Επαναλαμβάνουμε, κρατώντας κάθε μονοπάτι που σχηματίσαμε πριν , ελέγχοντας για κάθε νέα γειτονική πόλη, μέχρι να συναντήσουμε την πόλη 1.

**φάση ' 3 '**

g (5, {2,1} ) =→ g(5,2) + g (2, {1} )=14+8=22

g (5, {2,4} ) = → g(5,2) + g (2, {4} )=14+8=22

g (5, {4,2} ) = → g(5,2) + g (4, {2} )=14+9=23

g(5,{4,6}) = → g(5,4) + g (4, {6} )=11+7=18

g(5,{4,7}) = → g(5,4) + g (4, {7} )=11+4=15

g(5,{4,3}) = → g(5,4) + g (4, {3} )=11+6=17

g (6, {4,2} ) =→ g(6,4) + g (4, {2} )=12+9=21

g (6, {4,5} ) = → g(6,4) + g (4, {5} )=12+3=15

g (6, {4,7} ) = → g(6,4) + g (4, {7} )=12+4=16

g(6,{4,3}) = → g(6,4) + g (4, {3} )=12+6=18

g(7,{4,2}) = → g(7,4) + g (4, {2} )=15+9=24

g(7,{4,3}) = → g(7,4) + g (4, {3} )=15+6=21

g (7, {4,5} ) =→ g(7,4) + g (4, {5} )=15 +3=18

g (7, {4,6} ) = → g(7,4) + g (4, {6} )=15+7=22

g (7, {4,7} ) = → g(7,4) + g (4, {7} )=15+4=19

g(7,{3,4}) = → g(7,3) + g (3, {4} )=12+5=17

g(7,{3,1}) = → g(7,3) + g (3, {1} )=12+5=17, επιλέγουμε το min=17

Συνεπώς, το βέλτιστο μονοπάτι από την( 8)→(1 )είναι το**: (8)→(7)→(3)→(1)**

***(γ) Η βέλτιστη διαδρομή από την πόλη 1 μέχρι την πόλη 8 και ξανά στην πόλη 1.***

Είναι προφανές ότι αφού υπολογίσαμε τη βέλτιστη διαδρομή από την πόλη 1 μέχρι την πόλη 8 και τη βέλτιστη διαδρομή από την πόλη 8 μέχρι την πόλη 1, η απάντηση στο ερώτημα (γ) θα είναι το «άθροισμα» των προηγούμενων ερωτημάτων, άρα θα έχουμε ότι βέλτιστο μονοπάτι από την( 1)→(8 ) →(1) είναι το**:**

**(1)→(3)→(7)→(8) →(7)→(3)→(1)**

με μήκος g = g(α)+g(β)=14+17=31