

## Άσκηση 1

Μια επιχείρηση επιθυμεί να καταναίμει 5 μονάδες προϊόντος στα 4 καταστήματά της ώστε να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της. Τα αναμενόμενα κέρδη από την κατανομή των μονάδων στα διαφορετικά καταστήματα δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

	Καταστήματα			
Μονάδες	A	B	Γ	Δ
0	0	0	0	0
1	1	2	2	3
2	2	4	3	4
3	3	5	4	4
4	4	5	5	4

Υποτίθεται ότι δεν προκύπτει επιπλέον κέρδος με το να καταναίμουμε περισσότερες από 4 μονάδες σε ένα μόνο κατάστημα.

Απάντηση

Έστω:

$f_n(s)$  το μέγιστο δυνατό κέρδος που προκύπτει από την κατανομή  $s$  μονάδων στα τελευταία  $n$  καταστήματα

$x_n$  ο αριθμός των μονάδων που καταναίμονται στο  $n$ -οστό από το τέλος κατάστημα. Δηλαδή εδώ το κάθε βήμα αντιστοιχεί στην κατανομή μονάδων σε ένα από τα καταστήματα

$\dot{x}_n$  το βέλτιστο  $x_n$  για κάποιο ορισμένο  $s$

Τότε

$s$	0	1	2	3	4	5
$f_1(s)$	0	3	4	4	4	4
$\dot{x}_1$	0	1	2	2,3	2,3,4	2,3,4,5

και

$$f_n(s) = \max_{0 \leq x_n \leq s} \{r_n(x_n) + f_{n-1}(s-x_n)\}$$

όπου  $r_n(x_n)$ , το κέρδος που προκύπτει από την κατανομή  $x_n$  μονάδων στο  $n$ -οστό (από το τέλος) κατάστημα. Προφανώς, αν διατίθενται συνολικά  $s$  μονάδες για τα τελευταία  $n$  καταστήματα και κατανεμηθούν  $x_n$  στο  $n$ -οστό, θα μείνουν  $s-x_n$  για τα τελευταία  $n-1$ . Έτσι όταν  $n=2$  έχουμε για το  $f_2(s)$  :

$$f_2(x_2, s) = [r_2(x_2) + f_1(s - x_2)]$$

s	0	1	2	3	4	5	$f_2(s)$	$\dot{x}_2$
0	0+0=0	-	-	-	-	-	0	0
1	0+3=3	2+0=2	-	-	-	-	3	0
2	0+4=4	2+3=5	3+0=3	-	-	-	5	1
3	0+4=4	2+4=6	3+3=6	4+0=4	-	-	6	1,2
4	0+4=4	2+4=6	3+4=7	4+3=7	5+0=5	-	7	2,3
5	0+4=4	2+4=6	3+4=7	4+4=8	5+3=8	5+0=5	8	3,4

Παρόμοια για  $n=3$  ο συνοπτικός πίνακας που δίνει το  $f_3(s)$  και το αντίστοιχο  $\dot{x}_3$  είναι (οι αναλυτικοί υπολογισμοί παραλείπονται):

s	0	1	2	3	4	5
$f_3(s)$	0	3	5	7	9	10
$\dot{x}_3$	0	0	0,1	1,2	2	2,3

Τέλος για  $n=4$  έχουμε:

$$f_4(s) = \max \{0+10, 1+9, 2+7, 3+5, 4+3, 4+0\} = 10 \text{ με } \dot{x}_4 = 0,1.$$

Έτσι προκύπτουν οι βέλτιστες κατανομές:

	Καταστήματα			
<b>Βέλτιστες κατανομές</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>Γ</b>	<b>Δ</b>

1η	0	2	1	2
2η	0	2	2	1
3η	0	3	1	1
4η	1	2	1	1

## Άσκηση 2

Μια μεγάλη εταιρεία σκοπεύει να μπει δυναμικά στην αγορά αναψυκτικών της χώρας διαθέτοντας συνολικά 7 μονάδες κεφαλαίου. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζει είναι αν πρέπει να κατασκευάσει ένα κεντρικό εργοστάσιο σε κάποιο σημείο όπου θα παράγεται όλη η ποσότητα αναψυκτικών, ή περισσότερα μικρά εργοστάσια που θα βρίσκονται πιο κοντά στον τόπο κατανάλωσης. Το επιτελείο της εταιρείας μετά από έρευνα της αγοράς, του κόστους μεταφορών και αποθήκευσης, των αναπτυξιακών νόμων και άλλων στοιχείων, κατέληξε στο ότι μπορούν να δημιουργηθούν μέχρι 5 εργοστάσια σε διαφορετικές περιοχές της χώρας, ενώ το όφελος από κάθε εργοστάσιο εξαρτάται από τις μονάδες κεφαλαίου που θα επενδυθούν σε κάθε ένα και δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Μονάδες Κεφαλαίου		0	1	2	3	4	5	6	7
Εργοστάσια	1	0	3	5	6	7	8	9	9
	2	0	2	4	5	6	7	8	10
	3	0	5	6	6	7	8	10	11
	4	0	4	5	6	7	9	9	10
	5	0	6	7	8	8	9	10	12

Ζητείται να προσδιορισθούν ποια εργοστάσια πρέπει να κατασκευασθούν και πόσες ακέραιες μονάδες κεφαλαίου να επενδυθούν σε καθένα, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος της επιχείρησης.

### Απάντηση

Στάδια:  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  (εργοστάσια)

Μεταβλητή απόφασης:  $x_n$ , το ποσό των μονάδων που διαθέτουμε στο στάδιο  $n$  ( $6-n$  εργοστάσιο)

Μεταβλητή κατάσταση:  $S_n$ , διαθέσιμες μονάδες στο στάδιο  $n$

Στάδιο  $n=1$

$S_1$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1^*$	0	1	2	3	4	5	6	7
$F_1^*(S_1)$	0	6	7	8	8	9	10	12

Στάδιο n = 2

$x_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	$F_2^*(S_2)$	$x_2^*$
$S_2$										
0	0								0	0
1	6	4							6	0
2	7	10	5						10	1
3	8	11	11	6					11	1,2
4	8	12	12	12	7				12	1,2,3
5	9	12	13	13	13	9			13	2,3,4
6	10	13	13	14	14	15	9		15	5
7	12	14	14	14	15	16	15	10	16	5

Στάδιο n = 3

$x_3$	0	1	2	3	4	5	6	7	$F_3^*(S_3)$	$x_3^*$
$S_3$										
0	0								0	0
1	6	5							6	0
2	10	11	6						11	1
3	11	15	12	6					15	1
4	12	16	16	12	7				16	1,2
5	13	17	17	16	13	8			17	1,2
6	15	18	18	17	17	14	10		18	1,2
7	16	20	19	18	18	18	16	11	20	1

Στάδιο n = 4

$x_4$	0	1	2	3	4	5	6	7	$F_4^*(S_4)$	$x_4^*$
$S_4$										
0	0								0	0
1	6	2							6	0
2	11	8	4						11	0
3	15	13	10	5					15	0
4	16	17	15	11	6				17	1
5	17	18	19	16	12	7			19	2
6	18	19	20	20	17	13	8		20	2,3
7	20	20	21	21	21	18	14	10	21	2,3,4

Στάδιο n = 5

$x_5$	0	1	2	3	4	5	6	7	$F_5^*(S_5)$	$x_5^*$
$S_5$										
7	21	23	24	23	22	19	15	9	24	2

Λύση

$x_5 \longrightarrow 2$

$x_4 \longrightarrow 2$

$x_3 \longrightarrow 1$

$x_2 \longrightarrow 1$

$x_1 \longrightarrow 1$

Συνολικό κέρδος: 24