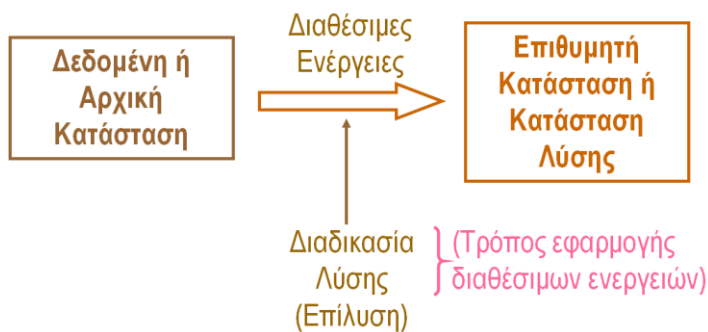


Επίλυση προβλημάτων με αναζήτηση



Αναζήτηση σημαίνει την εύρεση μιας λύσης (τελικής κατάστασης) ενός προβλήματος διά της συνεχούς δημιουργίας (νέων) καταστάσεων με την εφαρμογή των διαθέσιμων ενεργειών (τελεστών δράσης). Δηλαδή ξεκινάμε από την αρχική κατάσταση, εφαρμόζουμε τις διαθέσιμες ενέργειες και δημιουργούμε νέες καταστάσεις μέχρι να οδηγηθούμε στην κατάσταση λύσης.

Κατάσταση (ενός προβλήματος) είναι ένα στιγμιότυπο του προβλήματος δηλαδή η εικόνα του σε κάποια δεδομένη στιγμή.

Τελεστές δράσης/μετάβασης είναι οι ενέργειες που καθορίζουν τους τρόπους μετάβασης από μια κατάσταση σε μια άλλη. Συνοδεύονται από προϋποθέσεις εφαρμογής.

Λύση σε ένα πρόβλημα είναι η ακολουθία τελεστών που εφαρμόζονται στην αρχική κατάσταση για να προκύψει η τελική κατάσταση.

Χώρος καταστάσεων είναι το σύνολο S όλων των έγκυρων καταστάσεων ενός προβλήματος και οι δυνατές μεταβάσεις μεταξύ τους. Παριστάνεται σαν ένας γράφος.

Χώρος αναζήτησης είναι το υποσύνολο SP του χώρου καταστάσεων S που είναι προσβάσιμες από την αρχική $SP \subseteq S$.

Δέντρο αναζήτησης είναι μια αναπαράσταση του χώρου αναζήτησης ενός προβλήματος. Βασικά στοιχεία του είναι:

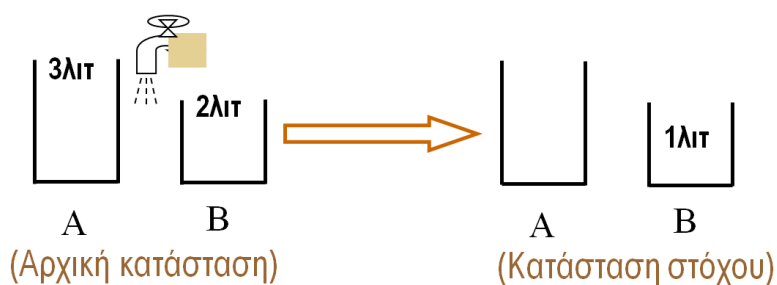
- οι κόμβοι που αναπαριστούν τις καταστάσεις
- οι ακμές που αναπαριστούν τους τελεστές
- η διαδρομή που αποτελείται από την ακολουθία των κόμβων που συνδέονται με διαδοχικές ακμές

Κάθε γράφος αναπαράστασης του χώρου κατάστασης μπορεί να μετατραπεί σε ένα αντίστοιχο δέντρο αναζήτησης.

Το πρόβλημα των 2 δοχείων

Υπάρχουν 2 δοχεία χωρητικότητας 3 και 2 lt αντίστοιχα και μια βρύση. Τα δοχεία αρχικά είναι άδεια. Θέλουμε να απομονώσουμε στο δοχείο B ποσότητα 1 lt και το δοχείο A να είναι άδειο. Οι δυνατές ενέργειες είναι:

- γέμισμα των δοχείων από τη βρύση
- άδειασμα των δοχείων στο έδαφος
- άδειασμα του ενός δοχείου στο άλλο μερικώς ή ολικώς



Ζητούνται:

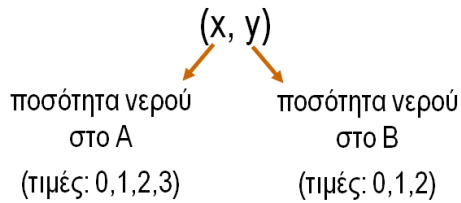
- α) Να ορίσετε
 - i) την αρχική κατάσταση
 - ii) την/τις τελική/ές κατάσταση/εις
 - iii) τους τελεστές μετάβασης με βάση την αναπαράσταση μιας κατάστασης
- β) Προσδιορίστε τον χώρο καταστάσεων του προβλήματος. Υπάρχουν ανέφικτες καταστάσεις; Αν ναι μπορούν να προσδιορισθούν;

Απάντηση

Επίλυση προβλήματος

1. Γέμισε το δοχείο A (από τη βρύση)
2. Άδειασε το δοχείο A στο B
3. Άδειασε το δοχείο B (στο έδαφος)
4. Άδειασε το δοχείο A στο B

Αναπαράσταση κατάστασης



Αρχική κατάσταση: (0, 0)

Τελικές καταστάσεις: (0, 1)
(κριτήριο τερματισμού : $x=0, y=1$)

Τελεστές Δράσης

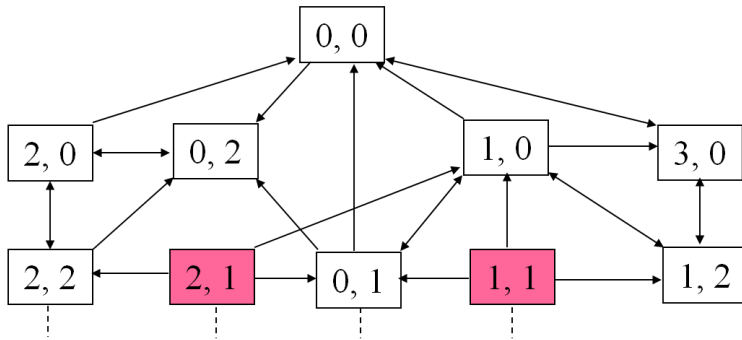
<u>Περιγραφή Ενέργειας</u>	<u>Προϋποθέσεις</u>	<u>Αποτέλεσμα</u>
T1: Γέμισε το δοχείο A	$x < 3$	(3, y)
T2: Γέμισε το δοχείο B	$y < 2$	(x, 2)
T3: Άδειασε το δοχείο A	$x > 0$	(0, y)
T4: Άδειασε το δοχείο B	$y > 0$	(x, 0)
T5: Άδειασε το δοχείο A στο B	$x > 0, y < 2$	$\begin{cases} (x-(2-y), 2) & \text{αν } x \geq 2-y \\ (0, y+x) & \text{αν } x < 2-y \end{cases}$
T6: Άδειασε το δοχείο B στο A	$x < 3, y > 0$	$\begin{cases} (3, y-(3-x)) & \text{αν } y \geq 3-x \\ (y+x, 0) & \text{αν } y < 3-x \end{cases}$

Χώρος Καταστάσεων

$S = \{(x, y) : x \in \{0, 1, 2, 3\}, y \in \{0, 1, 2\}\}$, δηλ.

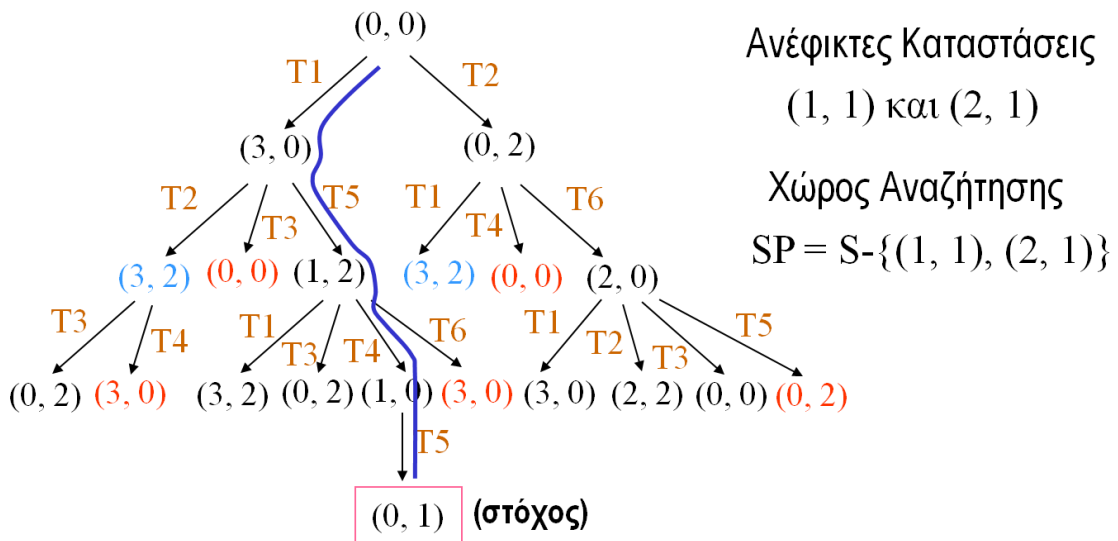
$S = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$

Γράφος καταστάσεων (μέρος)



Στον γράφο καταστάσεων πρέπει πάνω στα βέλη να μπαίνουν και οι τελεστές οι οποίοι υποτίθεται ότι σε μετακινούν από την μία κατάσταση σε μία άλλη.

Δέντρο Αναζήτησης (μέρος)



Ανέφικτες Καταστάσεις

(1, 1) και (2, 1)

Χώρος Αναζήτησης

$SP = S - \{(1, 1), (2, 1)\}$

Όπως είναι φανερό (και από τον γράφο καταστάσεων) με καμία αλληλουχία ενεργειών δεν μπορούμε να φθάσουμε στις καταστάσεις (1, 1) και (2, 1). Ο χώρος αναζήτησης εξαρτάται βέβαια από την αρχική κατάσταση. Στο παρόν πρόβλημα είναι ο ίδιος για όλες τις αρχικές καταστάσεις πλην των (1, 1) και (2, 1). Αν είναι μια από αυτές αρχική, τότε στον παραπάνω χώρο αναζήτησης προστίθεται και αυτή.

Οι καταστάσεις που είναι κόκκινες είναι καταστάσεις που έχουν ήδη επεκταθεί σε προηγούμενο επίπεδο του δέντρου (εναλλακτικά που ήδη έχουν εμφανιστεί προηγουμένως στην ίδια διαδρομή). Αυτές οι καταστάσεις δεν αναπτύσσονται, διότι ουσιαστικά

επαναλαμβάνουν το προηγούμενο υποδέντρο. Οι καταστάσεις με γαλάζιο χρώμα είναι ίδιες καταστάσεις στο ίδιο επίπεδο. Κατά μια έννοια, δεν έχει νόημα να αναπτυχθούν όλες, παρά μόνο μία, αφού από κει και πέρα παράγουν το ίδιο δέντρο. Βέβαια, προέρχονται από διαφορετικές διαδρομές και επομένως, αν στο υποδέντρο τους βρεθεί λύση, θα παράγουν διαφορετικές διαδρομές λύσεις. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε μεν να αποφύγουμε την επέκτασή τους δύο φορές για οικονομία χώρου, αλλά στο τέλος δεν θα πρέπει να ξεχάσουμε να αναφέρουμε και τις δύο λύσεις. Οι παραπάνω είναι συμβάσεις που κάνουμε απλά και μόνο για τον πιο αποδοτικό σχεδιασμό του δέντρου. Βέβαια, υπάρχουν και πρακτικά ζητήματα (πχ. η επέκταση των κόκκινων κόμβων θα οδηγούσε σε ατέρμονη λούπα στην περίπτωση που ο συγκεκριμένος κόμβος έχει εμφανιστεί προηγουμένως στην ίδια διαδρομή).

Το παιχνίδι με τα σπέρτα

Το παιχνίδι των σπέρτων ανάμεσα σε δύο παίκτες, A και B, παίζεται ως εξής:

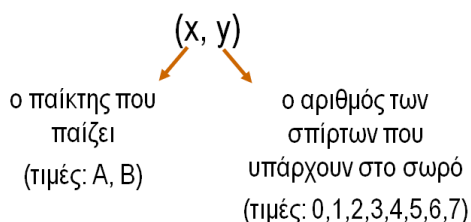
- ο A ξεκινάει και μετά εναλλάσσονται ως προς τη σειρά
- από ένα σωρό σπέρτων, ο παίκτης που έχει σειρά αφαιρεί 1, 2 ή 3 σπέρτα, με μία κίνηση
- αυτός που αφαιρεί το τελευταίο σπέρτο χάνει

Ο αρχικός σωρός περιέχει 7 σπέρτα.

1. Βρείτε ένα τρόπο αναπαράστασης μιας κατάστασης.
2. Προσδιορίστε τους τελεστές δράσης.
3. Σχεδιάστε πλήρως ένα δέντρο αναζήτησης του προβλήματος.

Απάντηση

Αναπαράσταση κατάστασης



Αρχική κατάσταση: (A, 7)

Τελικές καταστάσεις: (A, 0) ή (B, 0)
(κριτήριο τερματισμού: $x=A$ ή $B, y=0$)

Τελεστές Δράσης

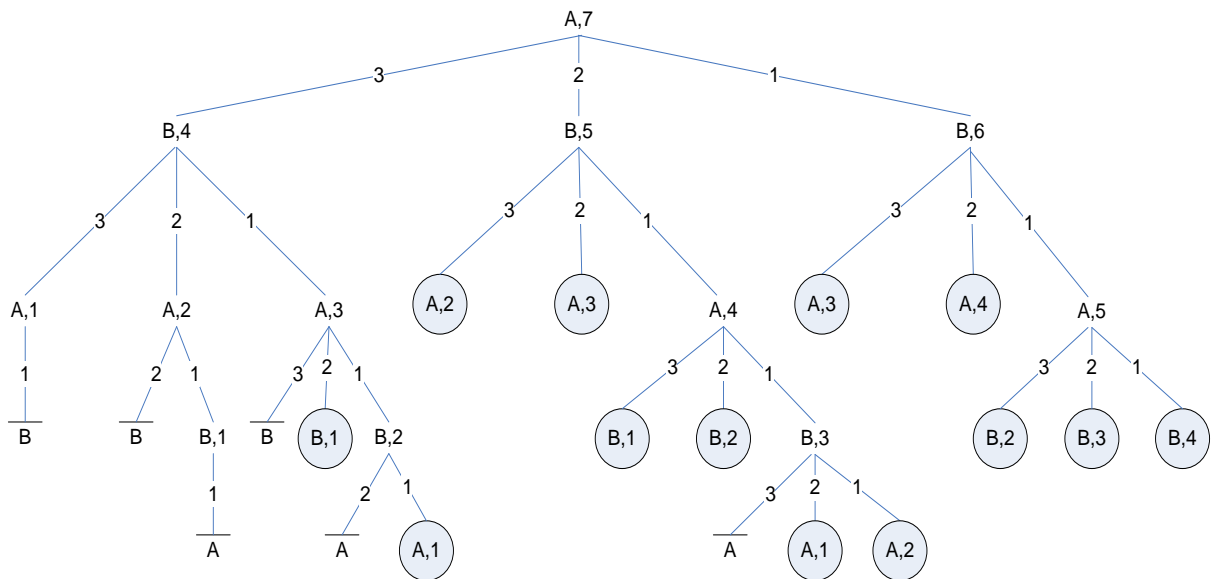
Περιγραφή Ενέργειας	Προϋποθέσεις	Αποτέλεσμα
1: Ο παίκτης αφαιρεί 1 σπύρτο (από το σωρό)	$y > 1$	$(x, y-1)$
2: Ο παίκτης αφαιρεί 2 σπύρτα (από το σωρό)	$y > 2$	$(x, y-2)$
3: Ο παίκτης αφαιρεί 3 σπύρτα (από το σωρό)	$y > 3$	$(x, y-3)$

Χώρος Καταστάσεων

$S = \{(x, y): x \in \{A, B\}, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\}$, δηλ.

$S = \{ (A, 0), (A, 1), (A, 2), (A, 3), (A, 4), (A, 5), (A, 6), (A, 7),$
 $(B, 0), (B, 1), (B, 2), (B, 3), (B, 4), (B, 5), (B, 6), (B, 7) \}$

Δέντρο αναζήτησης



Η γραμμή πάνω από ένα γράμμα (A ή B) υποδηλώνει ότι ο αντίστοιχος παίχτης κερδίζει. Εναλλακτικά θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό A' για το νικητή (A). Η αναγραφή μίας κατάστασης σε κύκλο υποδηλώνει ότι έχει αναπτυχθεί πλήρως σε άλλο σημείο του σχήματος.

Χώρος Αναζήτησης

$$SP = S - \{(A, 6), (B, 7)\}$$

Ο Σοφιστιάδης κι ο Διαταξαγόρας είναι και οι δυο κορυφαίοι καθηγητές στην Ακαδημία Πληροφορικής στην Αλεξάνδρεια. Είναι όμως και μεγάλοι ανταγωνιστές, με την καλή έννοια.

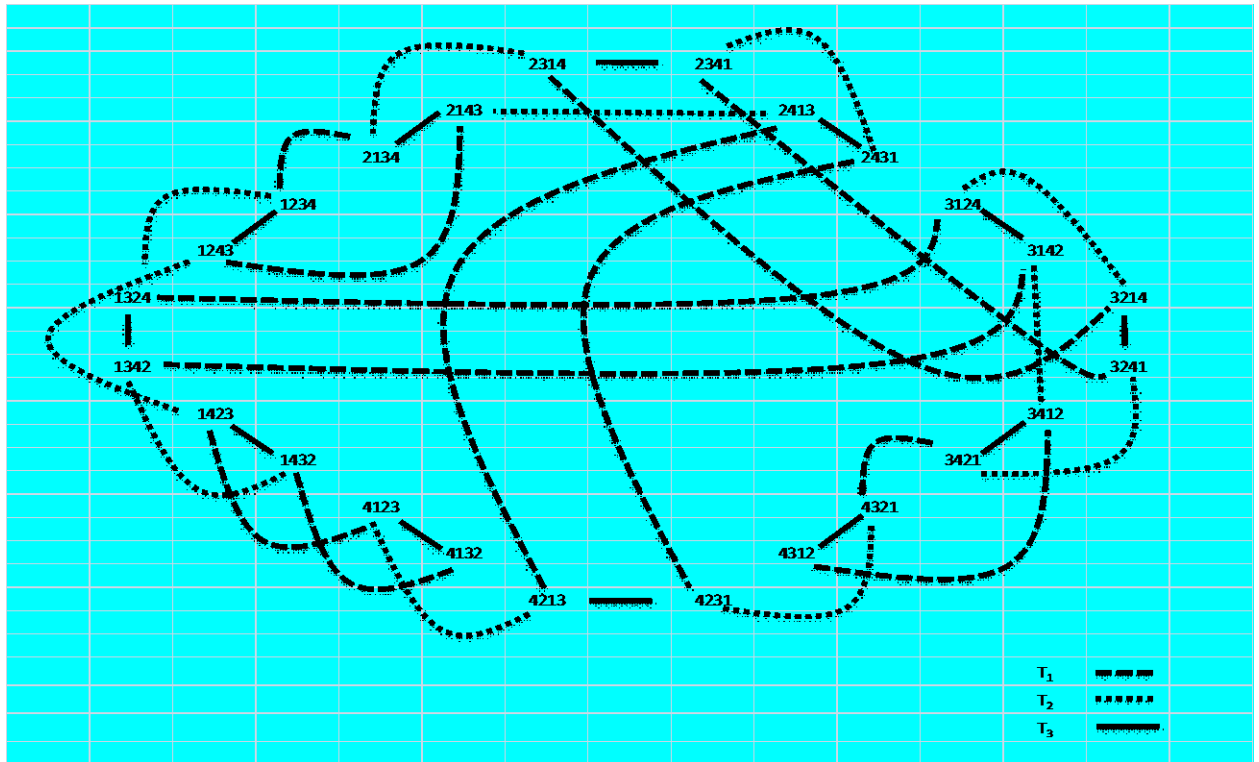
Κάποια στιγμή ο Σοφιστιάδης μαθαίνει πως ο Διαταξαγόρας θα διδάξει την επόμενη εβδομάδα στους φοιτητές τις βασικές έννοιες των αλγορίθμων διάταξης. Ο Σοφιστιάδης αποφασίζει μεν να προλειάνει το έδαφος, αλλά έχει και μία μικρή διάθεση να σπείρει λίγη δημιουργική σύγχυση: σκέφτεται πως είναι καλό να προλάβει ο ίδιος να πει στους φοιτητές αυτή την εβδομάδα πώς και γιατί οι αλγόριθμοι διάταξης έχουν σχέση με την αναζήτηση.

Ο Σοφιστιάδης θα χρησιμοποιήσει ένα απλό παράδειγμα: το πρόβλημα είναι δεδομένης οποιασδήποτε σειράς παρουσίασης των αριθμών 1, 2, 3 και 4, να παραχθεί μία διατεταγμένη ακολουθία τους (φθίνουσα ή αύξουσα). Μας έχει ζητήσει να τον βοηθήσουμε να ετοιμάσει το υλικό του.

1. Πόσες είναι οι καταστάσεις του χώρου καταστάσεων για το συγκεκριμένο πρόβλημα;
2. Ποιές είναι οι τελικές καταστάσεις;
3. Πόσοι είναι οι τελεστές;
4. Πόσες μεταβάσεις υπάρχουν συνολικά;
5. Σχεδιάστε ένα απόσπασμα του χώρου καταστάσεων (μέχρι βάθος 2), ξεκινώντας από την 1324.

Απάντηση

1. Υπάρχουν $4! = 24$ καταστάσεις και είναι όλες αναδιατάξεις των 4 αριθμών.
2. Υπάρχουν 2 καταστάσεις, η 1234 και η 4321.
3. Θα χρησιμοποιήσουμε 3 τελεστές
T1: ενάλλαξε τα ψηφία στις θέσεις 1 και 2
T2: ενάλλαξε τα ψηφία στις θέσεις 2 και 3
T3: ενάλλαξε τα ψηφία στις θέσεις 3 και 4
Θα μπορούσαμε να έχουμε και τον τελεστή Twrap: ενάλλαξε τα ψηφία στις θέσεις 1 και 4.
4. Αφού υπάρχουν 24 καταστάσεις και κάθε κατάσταση επιδέχεται και τους 3 τελεστές, έχουμε 72 μεταβάσεις.
5. Κάθε τελεστής αν εφαρμοστεί 2 απανωτές φορές, οδηγεί στην αρχική ακολουθία. Άρα οι 72 μεταβάσεις μπορούν να απλοποιηθούν σε 36 αμφίδρομες μεταβάσεις.



Υπάρχει ένας μοναδικός, εννιαψήφιος αριθμός, το κάθε ψηφίο του οποίου είναι διαφορετικό και επίσης το κάθε αριστερό τμήμα του μήκους k ψηφίων, για $k = 1, \dots, 9$, διαιρείται ακριβώς με το k .

Το πρόβλημα είναι να βρούμε ποιός είναι αυτός ο αριθμός. Πως μπορεί αυτό το πρόβλημα να επιλυθεί μέσω αναζήτησης; Σχεδιάστε το χώρο αναζήτησης, δηλαδή προσδιορίστε:

- τις καταστάσεις του προβλήματος
- τους τελεστές δράσης

Απάντηση

Ο εν λόγω αριθμός είναι ο 381654729. Πως βρέθηκε;

Αρχικά: τι ΔΕΝ είναι χώρος αναζήτησης

Υπάρχουν $9! = 362880$ μετατάξεις των 9 ψηφίων, αλλά ΔΕΝ είναι ο χώρος αναζήτησης.

Κατάσταση: φυσικός αριθμός μήκος n ψηφίων με

- $n \leq 9$
- όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά

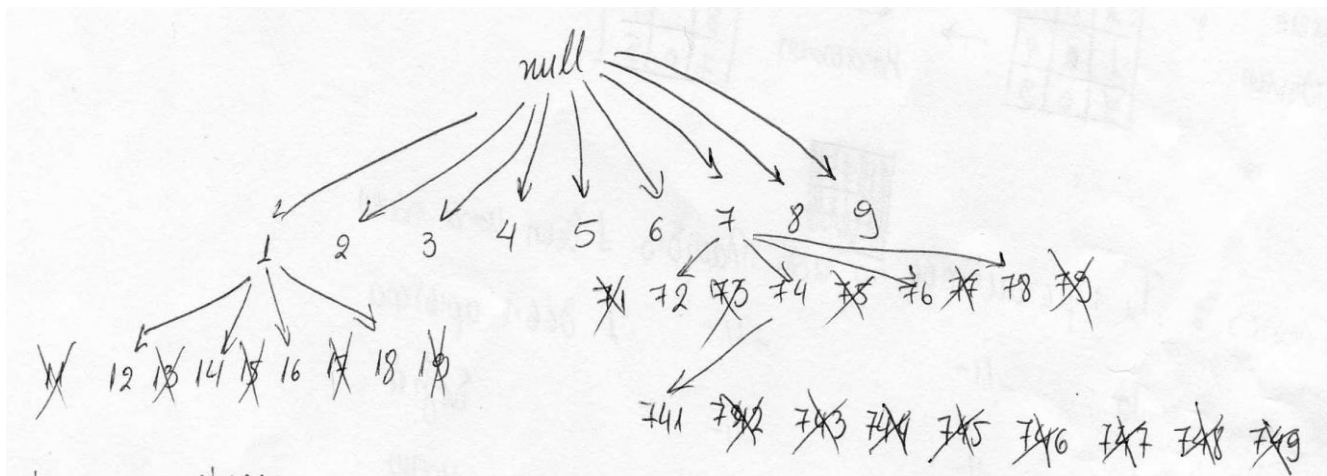
- κανένα ψηφίο δεν είναι 0

Αρχική κατάσταση: "κενός" φυσικός αριθμός.

9 τελεστές δράσης: πρόσθεσε το ψηφίο 1/2/.../9 στα δεξιά του αριθμού XYZ

Προϋποθέσεις:

- το εν λόγω ψηφίο δεν ανήκει ήδη στον αριθμό
- ο νέος αριθμός (με την προσθήκη του ψηφίου) διαιρείται ακριβώς με το μήκος του



Μετρώντας καταστάσεις

1 αρχική κατάσταση (null)

Σε απόσταση 1: 9 αριθμοί

Σε απόσταση 2: 9 αριθμοί (προηγούμενου επιπέδου) * 8 (επειδή κάθε ψηφίο εμφανίζεται μια φορά)

Σε απόσταση 3: $9*8*7$

Σύνολο: $1+9+ 9*8+ 9*8*7 +..+9*8*7*...*1= 986410$

(Άλλο να απαριθμούμε καταστάσεις και άλλο να περνάμε από αυτές- οι διαγραμμένες καταστάσεις πρέπει να μετρηθούν αλλά δεν χρησιμοποιούνται)

