

1^ο Φροντιστήριο

Υπολογιστική Νοημοσύνη 2

Θεωρείστε ένα Γενετικό Αλγόριθμο σταθερού πληθυσμού. Ο Γ.Α αποτελείται από 4 άτομα, διαθέτει τελεστή απλής αναλογικής επιλογής, τελεστή διασταύρωσης ενός σημείου με πιθανότητα διασταύρωσης 0.9 και τελεστή μετάλλαξης με πιθανότητα μετάλλαξης 0.2. Ο αρχικός πληθυσμός του Γ.Α. (γενεά 0) αποτελείται από τα εξής 4 άτομα:

0100 0010 1001 1101

Θεωρείστε επίσης ότι η συνάρτηση αξιολόγησης f (fitness function) των ατόμων του πληθυσμού του Γ.Α. είναι το αντίστοιχο αυτών των δυαδικών αριθμών στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

(α) να βρείτε την τιμή αξιολόγησης κάθε ατόμου της γενεάς 0, τη συνολική τιμή αξιολόγησης της γενεάς 0 και τη μέση τιμή αξιολόγησης της γενεάς 0.

(β) Δίνεται η παρακάτω ακολουθία ψευδοτυχαίων αριθμών:

0.8381	0.0196	0.6813	0.3795	0.8318	0.5028	0.7095	0.2289	0.3046	0.1897
0.1934	0.6822	0.3028	0.5417	0.1509	0.6979	0.3784	0.8600	0.8537	0.5936
0.4966	0.8998	0.1216	0.6449	0.8180	0.6602	0.3420	0.2897	0.3412	0.5341

Με χρήση των παραπάνω ψευδοτυχαίων αριθμών (μπορεί να μην χρειαστούν όλοι, ή να χρειαστούν περισσότεροι, οπότε τους ξαναχρησιμοποιείται με την ίδια σειρά από την αρχή) και εφαρμογή των γενετικών τελεστών επιλογής, διασταύρωσης και μετάλλαξης να βρείτε τα άτομα του πληθυσμού της επόμενης γενεάς (γενεά 1). Θεωρείστε ότι αφού ολοκληρωθεί η διαδικασία της επιλογής για όλο τον πληθυσμό, τα άτομα διασταυρώνονται ανά δυο με τη

σειρά που προέκυψε από την διαδικασία της επιλογής. Τα σημεία διασταύρωσης είναι ισοπίθانا. Επίσης θεωρείστε ότι ο τελεστής μετάλλαξης εφαρμόζεται μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας της διασταύρωσης για όλο τον πληθυσμό.

(γ) Να βρείτε την τιμή αξιολόγησης των ατόμων της γενεάς 1, τη συνολική τιμή αξιολόγησης της γενεάς 1 και τη μέση τιμή αξιολόγησης της γενεάς 1. Να κάνετε σύγκριση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της γενεάς 0 όπως αυτά προέκυψαν από την απάντησή σας στο υποερώτημα (α).

(δ) Να υπολογίσετε τη μέση απόδοση των σχημάτων $0^{**}0$ και $1^{**}1$ στις γενεές 0 και 1.

ΛΥΣΗ

(α)

Ονομάζοντας τα 4 άτομα του πληθυσμού της γενεάς 0, με τα γράμματα Α-Δ, είναι:

$$A=0100 \quad B=0010 \quad \Gamma=1001 \quad \Delta=1101$$

Εφαρμογή της δοσμένης συνάρτησης καταλληλότητας f (μετατροπή από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης), η αξιολόγηση των ατόμων της γενεάς 0, δίνει:

$$f(A) = 4$$

$$f(B) = 2$$

$$f(\Gamma) = 9$$

$$f(\Delta) = 13$$

Η συνολική τιμή αξιολόγησης είναι $4+2+9+13 = 28$ και η μέση τιμή αξιολόγησης είναι $28/4=7$.

(β)

ΕΠΙΛΟΓΗ

Για να εφαρμόσουμε τον τελεστή απλής αναλογικής επιλογής πρέπει να υπολογίσουμε τις συσσωρευμένες πιθανότητες των ατόμων του πληθυσμού και να κατασκευάσουμε τη ρουλέτα.

Οι σχετικές τιμές αξιολόγησης για τα 4 άτομα του πληθυσμού είναι $4/28 = 0.1429$ για το άτομο Α, $2/28 = 0.0714$ για το άτομο Β, $9/28 = 0.3214$ για το άτομο Γ και $13/28 = 0.4643$ για το άτομο Δ. Οι αντίστοιχες συσσωρευμένες πιθανότητες είναι:

$$q(A) = 0.1429,$$

$$q(B) = 0.2143,$$

$$q(\Gamma) = 0.5357,$$

$$q(\Delta) = 1.0.$$

Έχοντας υπολογίσει τις συσσωρευμένες πιθανότητες μπορούμε να κάνουμε χρήση του τελεστή της απλής αναλογικής επιλογής και με βάση τη δοσμένη ακολουθία ψευδοτυχαίων αριθμών μπορούμε να βρούμε τα άτομα του αρχικού πληθυσμού που επιλέγονται για διασταύρωση. Μια και ο Γ.Α. είναι σταθερού πληθυσμού πρέπει να επιλεγούν 4 άτομα από τη γενεά 0, έτσι ώστε να προκύψουν δυο ζευγάρια, από τα οποία θα προκύψουν τα 4 νέα άτομα της γενεάς 1. Έτσι είναι:

Με χρήση του πρώτου ψευδοτυχαίου αριθμού 0.8381 το οποίο βρίσκεται στο διάστημα $[0.5357, 1]$, επιλέγεται το άτομο Δ.

Με χρήση του δεύτερου ψευδοτυχαίου αριθμού 0.0196 το οποίο βρίσκεται στο διάστημα $[0, 0.26667]$, επιλέγεται το άτομο Α.

Με χρήση του τρίτου ψευδοτυχαίου αριθμού 0.6813 το οποίο βρίσκεται στο διάστημα $[0.5357, 1]$, επιλέγεται το άτομο Δ.

Με χρήση του τέταρτου ψευδοτυχαίου αριθμού 0.3795 το οποίο βρίσκεται στο διάστημα $[0.3143, 0.5357]$, επιλέγεται το άτομο Γ.

ΔΙΑΣΤΑΥΡΩΣΗ

Έχοντας ολοκληρώσει τη διαδικασία επιλογής, μπορούμε να προχωρήσουμε στη διαδικασία της διασταύρωσης. Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος τα άτομα διασταυρώνονται ανά δυο με τη σειρά που προέκυψαν από τη διαδικασία της επιλογής.

Έτσι το πρώτο ζευγάρι για διασταύρωση αποτελείται από τα άτομα Δ και Α της γενεάς 0. Εξετάζουμε αν αυτό το ζευγάρι όντως θα διασταυρωθεί συγκρίνοντας τον επόμενο (πέμπτο) ψευδοτυχαίο αριθμό 0.8318 με την πιθανότητα διασταύρωσης που είναι 0.9. Επειδή ο ψευδοτυχαίος αριθμός είναι μικρότερος της πιθανότητας διασταύρωσης έχουμε διασταύρωση, οπότε πρέπει να επιλεγεί το σημείο διασταύρωσης με χρήση του επόμενου (έκτου) ψευδοτυχαίου αριθμού 0.5028. Τα άτομα έχουν μήκος 4, άρα υπάρχουν 3 θέσεις-σημεία για διασταύρωση (crossover points), συνήθως αριθμημένες από αριστερά προς τα δεξιά. Αν ο τυχαίος αριθμός r είναι μικρότερος του 0.333 ($r < 0.333$), τότε επιλέγεται η 1^η θέση, αν το r είναι μεταξύ των 0.333 και 0.666 ($0.333 \leq r < 0.666$), τότε επιλέγεται η 2^η θέση, αν το r είναι μεταξύ του 0.666 και του 1.0 ($0.666 \leq r < 1.0$), τότε επιλέγεται η 3^η θέση. Συνεπώς, επειδή είναι $r = 0.5028$, δηλαδή μεταξύ 0.333 και 0.666 και επιλέγεται η 2^η θέση. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο διασταύρωσης είναι η δεύτερη πιθανή θέση (μεταξύ των bits 2 και 3), γιατί έχουμε τρία ισοπίθανα σημεία διασταύρωσης, όπως φαίνεται στο σχήμα:

$$\begin{aligned}\Delta &= 11|01 \\ A &= 01\ 00\end{aligned}$$

Έτσι λαμβάνονται οι εξής απόγονοι: 1100 και 0101

Το δεύτερο προς διασταύρωση ζευγάρι αποτελείται από τα άτομα Δ και Γ. Εξετάζουμε αν τα δυο αυτά άτομα διασταυρώνονται συγκρίνοντας τον επόμενο (έβδομο) ψευδοτυχαίο αριθμό ίσο με 0.7095 με την πιθανότητα διασταύρωσης που είναι 0.9. Επειδή ο ψευδοτυχαίος αριθμός είναι μικρότερος της πιθανότητας διασταύρωσης θα πραγματοποιηθεί διασταύρωση, οπότε πρέπει να επιλεγεί σημείο διασταύρωσης. Αυτό επιλέγεται με βάση το επόμενο (όγδοο) ψευδοτυχαίο αριθμό που είναι ίσος με 0.2289 γεγονός που οδηγεί στην εκλογή του σημείου διασταύρωσης μεταξύ 1^{ου} και 2^{ου} bit. Σχηματικά αυτό μπορεί να αναπαραστηθεί σαν:

$$\begin{aligned}\Delta &= 1|101 \\ \Gamma &= 1|001\end{aligned}$$

Το παραπάνω σχήμα θα δώσει σαν απογόνους τα άτομα 1001 και 1101.

Με την ολοκλήρωση της διαδικασίας διασταύρωσης ο πληθυσμός που έχει προκύψει έχει ως εξής: 1100 0101 1001 και 1101

ΜΕΤΑΛΛΑΞΗ

Μένει να εφαρμοστεί ο τελεστής μετάλλαξης. Για να γίνει αυτό χρειαζόμαστε $4 \times 4 = 16$ ψευδοτυχαίους αριθμούς αρχίζοντας από τον 9^ο της δοσμένης ακολουθίας. Συνεπώς οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί που θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι:

0.3046 0.1897 0.1934 0.6822 0.3028 0.5417 0.1509 0.6979 0.3784 0.8600
 0.8537 0.5936 0.4966 0.8998 0.1216 0.6449

και θα συγκρίνουμε κάθε ένα από αυτούς με την πιθανότητα μετάλλαξης (που είναι ίση με 0.2) για να δούμε αν το συγκεκριμένο δυαδικό ψηφίο μεταλλάσσεται. Έτσι θα έχουμε τις εξής μεταλλάξεις:

Για το πρώτο άτομο (1100) θα χρησιμοποιηθεί η τετράδα 0.3046 0.1897 0.1934 0.6822 ψευδοτυχαίων αριθμών, έτσι θα έχουμε μετάλλαξη στο 2^ο και 3^ο ψηφίο (οι ψευδοτυχαίοι 0.1897 και 0.1934 είναι μικρότεροι του 0.2), οπότε το άτομο αυτό γίνεται: 1010.

Για το δεύτερο άτομο (0101) θα χρησιμοποιηθεί η τετράδα 0.3028 0.5417 0.1509 0.6979 ψευδοτυχαίων αριθμών, έτσι θα έχουμε μετάλλαξη στο 3^ο ψηφίο (ο ψευδοτυχαίος 0.1509 είναι μικρότερος του 0.2), οπότε το άτομο αυτό γίνεται: 0111.

Για το τρίτο άτομο (1001) θα χρησιμοποιηθεί η τετράδα 0.3784 0.8600 0.8537 0.5936 ψευδοτυχαίων αριθμών, και δε συμβαίνει καμιά μετάλλαξη γιατί κανένας από τους ψευδοτυχαίους αριθμούς δεν είναι μικρότερος του 0.2, Έτσι το άτομο αυτό παραμένει αναλλοίωτο: 1001.

Για το τέταρτο άτομο (1101) θα χρησιμοποιηθεί η τετράδα 0.4966 0.8998 0.1216 0.6449 ψευδοτυχαίων αριθμών, έτσι έχουμε μετάλλαξη στο 3^ο ψηφίο (γιατί ο ψευδοτυχαίος 0.1216 είναι μικρότερος του 0.2), οπότε το άτομο αυτό γίνεται: 1111.

Συνεπώς με την ολοκλήρωση της διαδικασίας μετάλλαξης τα άτομα που αποτελούν τη γενεά 1 είναι τα εξής:

$$A' = 1010 \quad B' = 0111 \quad \Gamma' = 1001 \quad \Delta' = 1111$$

(γ)

Μετατρέποντας τα άτομα από δυαδικούς σε δεκαδικούς αριθμούς είναι :

$$f(A') = 10$$

$$f(B') = 7$$

$$f(\Gamma') = 9$$

$$f(\Delta') = 15.$$

Η συνολική τιμή αξιολόγησης της γενεάς 1 είναι $10+7+9+15 = 41$ και η μέση τιμή αξιολόγησης είναι $41/4 = 10.25$.

(δ)

Η γενεά 0 αποτελείται από τα άτομα $A=0100$ $B=0010$ $\Gamma=1001$ $\Delta=1101$

.

Η γενεά 1 αποτελείται από τα άτομα $A' = 1010$ $B' = 0111$ $\Gamma' = 1001$ $\Delta' = 1111$

.

Στο σχήμα $0^{**}0$:

υπάρχουν τα άτομα A και B της γενεάς 0 με συνολική απόδοση $4+2 = 6$, οπότε η μέση απόδοση του σχήματος αυτού στη γενεά 0 είναι $6/2 = 3$.

Στο ίδιο σχήμα δεν υπάρχει κανένα άτομο της γενεάς 1, οπότε η μέση απόδοση του σχήματος αυτού στη γενεά 1 είναι 0.

Στο σχήμα $1^{**}1$:

υπάρχουν τα άτομα Γ και Δ της γενεάς 0 με συνολική απόδοση $9+13 = 22$, οπότε η μέση απόδοση του σχήματος αυτού στη γενεά 0 είναι $22/2 = 11$.

Στο ίδιο σχήμα υπάρχουν τα άτομα Γ' και Δ' της γενεάς 1 με απόδοση $9+15 = 24$, οπότε η μέση απόδοση του σχήματος αυτού στη γενεά 1 είναι $24/2 = 12$.

Άσκηση

Δίνεται ο αρχικός πληθυσμός, στην 1^η στήλη στον παρακάτω πίνακα και οι αντίστοιχες καταλληλότητες (στήλη 2). Υποθέστε ότι, το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση της καταλληλότητας. Η πιθανότητα διασταύρωσης είναι 0.8 και η πιθανότητα μετάλλαξης 0.1. Τα ζευγάρια προς διασταύρωση σχηματίζονται με βάση τη σειρά επιλογής. Πριν τον προσδιορισμό του σημείου διασταύρωσης, γίνεται έλεγχος αν όντως το ζευγάρι θα διασταυρωθεί.

Αρχικός Πληθυσμός	Καταλληλότητα	Καταλληλότητα (μετασχ/σμένη)	Νέος Πληθυσμός
100010111	4	25	
100000001	-10	11	
010101010	-6	15	
010100110	1	22	
001100111	-5	16	
110110110	21	42	

Αν χρειαστείτε τυχαίους αριθμούς, χρησιμοποιείστε τους παρακάτω, με τη σειρά που δίνονται:

0.86, 0.59, 0.67, 0.14, 0.34, 0.08, 0.11, 0.29, 0.85, 0.76, 0.43, 0.47, 0.89, 0.80, 0.98, 0.58, 0.03, 0.57, 0.49, 0.92

Επαναλάβετε από την αρχή, αν χρειαστείτε περισσότερους.

1. Στη στήλη 3 του πίνακα, δίνονται οι μετασχηματισμένες καταλληλότητες, του αρχικού πληθυσμού. Τι μετασχηματισμός έχει γίνει; Να αιτιολογήσετε (σε 2-3 σειρές) τι χρειάζεται.

Για να μπορέσουμε να βρούμε την συσσωρευμένη πιθανότητα κάθε ατόμου του πληθυσμού, θα πρέπει να μετατοπίσουμε τις τιμές καταλληλότητας έτσι ώστε να έχουν όλες θετικές τιμές. Επιλέγουμε να προσθέσουμε τον αριθμό 21 (επειδή όταν $f(x) < 0$, τότε ορίζουμε $g(x): \max g(x) = \max (f(x) + C)$, (σελ. 62 του Γ'τόμου) σε όλα τα άτομα του πληθυσμού, έτσι ώστε να μην μεγαλώσει πολύ το εύρος τιμών και να διατηρηθεί η

ποιότητα της διαφοράς μεταξύ των ατόμων του πληθυσμού. Έτσι έχουμε:

Αρχικός Πληθυσμός	Καταλληλότητα
A=100010111	25
B=100000001	11
Γ=010101010	15
Δ=010100110	22
E=001100111	16
Z=110110110	42

2. Να υπολογίσετε την επόμενη γενιά, που προκύπτει από μία επανάληψη του Γ.Α., χρησιμοποιώντας τις νέες καταλληλότητες.

Βρίσκουμε την συνολική καταλληλότητα του πληθυσμού:

$$25+11+15+22+16+42 = 131$$

Άρα η πιθανότητα επιλογής κάθε ατόμου του πληθυσμού είναι η παρακάτω:

$$P_A = 25/131 = 0.191$$

$$P_B = 11/131 = 0.084$$

$$P_\Gamma = 15/131 = 0.115$$

$$P_\Delta = 22/131 = 0.168$$

$$P_E = 16/131 = 0.122$$

$$P_Z = 42/131 = 0.321$$

Οι αντίστοιχες αθροιστικές πιθανότητες είναι:

$$q_A=0.191$$

$$q_B= 0.275$$

$$q_\Gamma= 0.390$$

$$q_\Delta= 0.558$$

$$q_E= 0.680$$

$$q_Z= 1$$

Επιλέγουμε τα άτομα που θα περάσουν στον επόμενο (προσωρινό) πληθυσμό χρησιμοποιώντας τους έξι πρώτους τυχαίους αριθμούς που μας έχουν δοθεί:

0.86 0.59 0.67 0.14 0.34 0.08

Έχουμε:

$0.672 < 0.86 < 1$ οπότε επιλέγεται το Z.

$0.552 < 0.59 < 0.672$ οπότε επιλέγεται το E

$0.552 < 0.67 < 0.672$ οπότε επιλέγεται το E

$0 < 0.14 < 0.192$ οπότε επιλέγεται το A

$0.272 < 0.34 < 0.384$ οπότε επιλέγεται το Γ

$0 < 0.08 < 0.192$ οπότε επιλέγεται το A

Άρα ο προσωρινός πληθυσμός είναι ο εξής:

Z=110110110

E=001100111

E=001100111

A=100010111

Γ=010101010

A=100010111

Και τα ζευγάρια που προέκυψαν για διασταύρωση είναι τα εξής:

Z=110110110

E=001100111

E=001100111

A=100010111

Γ=010101010

A=100010111

Παίρνουμε το πρώτο ζευγάρι. Η πιθανότητα διασταύρωσης είναι 0.8. Ο επόμενος τυχαίος αριθμός είναι το 0.11 < 0.8 οπότε θα πραγματοποιηθεί διασταύρωση. Μας απομένει τώρα να προσδιοριστεί το σημείο διασταύρωσης. Υποθέτουμε ότι όλα τα ψηφία είναι ισοπίθανα να επιλεγθούν σαν σημεία διασταύρωσης. Ο επόμενος τυχαίος αριθμός είναι το 0.29. άρα το σημείο διασταύρωσης είναι μετά το **τρίτο** ψηφίο. Έτσι :

110|110110

001|100111

όπου η κάθετη γραμμή (|) δηλώνει το σημείο διασταύρωσης. Οι απόγονοι που προκύπτουν είναι οι:

110100111

001110110

Κάνουμε την ίδια εργασία και για το δεύτερο ζευγάρι. Ο επόμενος τυχαίος αριθμός είναι ο 0.85 > 0.8 οπότε δεν θα πραγματοποιηθεί διασταύρωση στο δεύτερο ζευγάρι.

Οπότε, προχωράμε στο τρίτο ζευγάρι. Ο επόμενος τυχαίος αριθμός είναι ο 0.76 < 0.8 οπότε θα πραγματοποιηθεί διασταύρωση στο τρίτο ζευγάρι. Ο επόμενος τυχαίος αριθμός είναι το 0.43 άρα το σημείο διασταύρωσης είναι μετά το τρίτο ψηφίο.

Έτσι :

0101|01010

1000|10111

όπου η κάθετη γραμμή (|) δηλώνει το σημείο διασταύρωσης. Οι απόγονοι που προκύπτουν είναι οι:

010110111

100001010

Ο προσωρινός πληθυσμός , μετά την διασταύρωση είναι ο παρακάτω:

A'=110100111

B'=001110110

Γ'=001100111

Δ'=100010111

$E'=010110111$

$Z'=100001010$

Μετάλλαξη

Στην συνέχεια προχωράμε στον τελεστή μετάλλαξης. Θα χρησιμοποιήσουμε τους υπόλοιπους αριθμούς για κάθε ψηφίο (γονίδιο) των μελών του πληθυσμού προκειμένου να υπολογίσουμε τα ψηφία που θα υποστούν μετάλλαξη (ένα γονίδιο θα υποστεί μετάλλαξη όταν ο τυχαίος αριθμός που του αντιστοιχεί είναι μικρότερος του 0.1).

Για το $A'=110100111$ οι τυχαίοι αριθμοί που αντιστοιχούν στα γονίδια του είναι:

0.47, 0.89, 0.80, 0.98, 0.58, 0.03, 0.57, 0.49, 0.92

Άρα, μόνο το έκτο ψηφίο θα υποστεί μετάλλαξη. Οπότε έχουμε $A''=110101111$

Για το $B'=001110110$ οι τυχαίοι αριθμοί που αντιστοιχούν στα γονίδια του είναι:

0.86, 0.59, 0.67, 0.14, 0.34, 0.08, 0.11, 0.29, 0.85,

Άρα, μόνο το έκτο ψηφίο θα υποστεί μετάλλαξη. Οπότε έχουμε $B''=001111110$

Για το $\Gamma'=001100111$ οι τυχαίοι αριθμοί που αντιστοιχούν στα γονίδια του είναι:

0.76, 0.43, 0.47, 0.89, 0.80, 0.98, 0.58, 0.03, 0.57,

Άρα, μόνο το όγδοο ψηφίο θα υποστεί μετάλλαξη. Οπότε έχουμε $\Gamma''=001100111$

Για το $\Delta'=100010111$ οι τυχαίοι αριθμοί που αντιστοιχούν στα γονίδια του είναι:

0.49, 0.92, 0.86, 0.59, 0.67, 0.14, 0.34, 0.08, 0.11,

Άρα, μόνο το όγδοο ψηφίο θα υποστεί μετάλλαξη. Οπότε έχουμε $\Delta''=100010111$

Για το $E'=010110111$ οι τυχαίοι αριθμοί που αντιστοιχούν στα γονίδια του είναι:

0.29, 0.85, 0.76, 0.43, 0.47, 0.89, 0.80, 0.98, 0.58

Άρα κανένα ψηφίο δεν θα υποστεί μετάλλαξη. Οπότε έχουμε $E''=010110111$

Για το $Z'=100001010$ οι τυχαίοι αριθμοί που αντιστοιχούν στα γονίδια του είναι:

0.03, 0.57, 0.49, 0.92, 0.86, 0.59, 0.67, 0.14, 0.34

Άρα, μόνο το πρώτο ψηφίο θα υποστεί μετάλλαξη. Οπότε έχουμε $Z' = 00001010$

Οπότε ο ζητούμενος πληθυσμός της γενεάς 1 όπως προέκυψε από τις διασταυρώσεις και τις μεταλλάξεις γίνεται:

A = 11010111

B = 00111110

Γ = 00110011

Δ = 10001011

E = 01011011

Z = 00001010