Λύσεις Θεμάτων Εξέτασης Προόδου - Δεκέμβριος 2000

5ο Θέμα (0,5 μονάδες)

Σε ένα γράφημα όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 5 και έχει δοθεί η πληροφορία ότι το πλήθος των κορυφών είναι n = 22 ή 23 ή 25. Ποια τιμή του n είναι κατ' αρχήν δεκτή; n = 22 . Γιατί;

Γιατί το πλήθος των κορυφών με μονό βαθμό είναι ζυγός. (Πόρισμα 1.4-3 του βιβλίου, σελ. 12)

6ο Θέμα (0,5 μονάδες)

Η επαναληπτική διαδικασία:

$$u_k = \frac{16}{\log\left(\frac{1}{4}\cdot u_{k-1}^2\right)}$$

είναι πιθανό να βρίσκει ρίζα ποιας από τις παρακάτω εξισώσεις; (Κυκλώστε την σωστή απάντηση)

(α) $x\cdot\log x + x - 8 = 0$ (γ) $-x\cdot\log x - x + 8 = 0$

(β) $-x\cdot\log x - x - 8 = 0$ $\boxed{(\delta)\ x\cdot\log x - x - 8 = 0}$

7ο Θέμα (0,5 μονάδες)

Δίνεται η αναδρομική σχέση $f_n = 7\cdot f_{n-1} - 13\cdot f_{n-2} + 7\cdot f_{n-3} - 12\cdot f_{n-4}$. Η χαρακτηριστική εξίσωση της παραπάνω σχέσης είναι $x^4 - 7\cdot x^3 + 13\cdot x^2 - 7\cdot x + 12 = 0$. Από τις παρακάτω ποσότητες κυκλώστε αυτές που είναι λύσεις της αναδρομικής σχέσης:

(α) $f_n = (-1)^n$ (β) $f_n = 2^n$ $\boxed{(\gamma)\ f_n = 3^n}$ (δ) $f_n = (-6)^n$

8ο Θέμα (0,5 μονάδες)

Ένα πολύ μορφωμένο και άπληστο σκαθάρι (που γνωρίζει καλά γενικές μεθόδους αλγορίθμων και ανάλυση) βρίσκεται στο σημείο (6, 1) του επιπέδου μίας πλάκας, η οποία θερμαίνεται απότομα με θερμοκρασία που δίνεται από τον τύπο

$$u(x,y) = \sqrt{x^2 + 4\cdot y^2 + 10\cdot x}, \qquad x \ge 0, y \ge 0$$

για κάθε σημείο (x, y) της πλάκας. Προς ποια κατεύθυνση του επιπέδου της πλάκας θα κινηθεί στιγμιαία το σκαθάρι για να δροσιστεί όσο γίνεται πιο γρήγορα; _____
(Δώστε οποιοδήποτε διάνυσμα που έχει την ζητούμενη κατεύθυνση)

9ο Θέμα *(0,5 μονάδες)*

Αν ένα γράφημα έχει n κορυφές, οι οποίες έχουν βαθμούς 2, 4, 6, ..., (2·n), τότε το πλήθος των πλευρών του γραφήματος είναι $\boxed{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$.

10ο Θέμα *(0,5 μονάδες)*

Στον αλγόριθμο FFT για διανύσματα μήκους $N=2^p$ υπάρχουν <u>p</u> βήματα υπολογισμού (ή p+1 με την αναδιάταξη) και σε κάθε βήμα απαιτούνται <u>N</u> μιγαδικές προσθέσεις.

11ο Θέμα *(0,5 μονάδες)*

Εκτελέστε δύο βήματα του αλγορίθμου Mergesort για την λίστα που ακολουθεί.

3	1	7	12	10	11	6	4	9	2	5	8

1	3	7	12	10	11	4	6	2	9	5	8

1	3	7	12	4	6	10	11	2	5	8	9

12ο Θέμα *(0,5 μονάδες)*

Διατυπώστε τις επαναληπτικές σχέσεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του ελαχίστου της συνάρτησης f, όπου:

$$f(x,y)=x^2+8\cdot x\cdot y-y^2-2\cdot x+4\cdot y$$

(α) με τη μέθοδο Jacobi:

$$x^{k+1}=1-4\cdot y^k$$
$$y^{k+1}=4\cdot x^k+2$$

(β) με τη μέθοδο Gauss-Seidel:

$$x^{k+1}=1-4\cdot y^k$$
$$y^{k+1}=4\cdot x^{k+1}+2$$

(γ) με τη μέθοδο SOR και με παράμετρο ω:

$$x^{k+1}=(1-\omega)\cdot x^k+\omega\cdot(1-4\cdot y^k)$$
$$y^{k+1}=(1-\omega)\cdot y^k+\omega\cdot(4\cdot x^{k+1}+2)$$

13° Θέμα *(0,5 μονάδες)*

Έστω διάνυσμα A του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier $\hat{A}$ δίνεται παρακάτω. Να βρεθεί το αρχικό διάνυσμα A.

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 + 14\cdot\omega^2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 6 - 14\cdot\omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

14° Θέμα *(0,5 μονάδες)*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2\cdot x^2 + x - 2$. Εφαρμόστε δύο βήματα της μεθόδου Newton-Raphson για την εύρεση ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ και με αρχική τιμή την $x_0 = 3$. Η τιμή που βρήκατε ως λύση της εξίσωσης είναι 2,079.
Μπορούμε να ξεκινήσουμε με αρχική τιμή $x_0 = 1$; Όχι. Γιατί;

Γιατί $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ και $f'(x_0) = 0$.

15° Θέμα *(0,5 μονάδες)*

(α) Αν το διάνυσμα $A = [A(0), A(1), \ldots, A(N-1)]^T$ είναι πραγματικό, τότε για να ισχύει $\hat{\hat{A}}(j) = \hat{A}(m)$, πρέπει (συναρτήσει του j) να είναι m = _____, για $j = 1, 2, \ldots, N-1$.

(β) Αν το διάνυσμα $A = [A(0), A(1), \ldots, A(N-1)]^T$ είναι φανταστικό, τότε για να ισχύει $\hat{\hat{A}}(j) = \hat{A}(m)$, πρέπει (συναρτήσει του j) να είναι m = _____, για $j = 1, 2, \ldots, N-1$.

$\begin{pmatrix} f_{n-2} \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-3} \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$

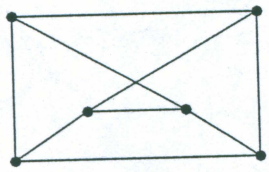
16° Θέμα *(0,5 μονάδες)*

Δίνεται η αναδρομική εξίσωση $f_n = -f_{n-1} + 2 \cdot f_{n-2} + 3 \cdot f_{n-3}$. Χρειάζεται να υπολογιστεί ο όρος f_n για κάποιο μεγάλο n με χρήση της μεθόδου «Διαίρει και Βασίλευε». Για το σκοπό αυτό γράφουμε $v_{k+1} = A \cdot v_k$, όπου:

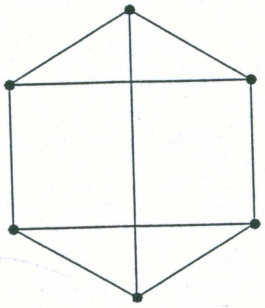
$$v_{k+1} = \begin{bmatrix} f_{n-2} \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad v_k = \begin{bmatrix} f_{n-3} \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{bmatrix}$$

17° Θέμα *(0,5 μονάδες)*

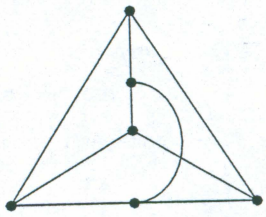
Ποια από τα παρακάτω γραφήματα είναι ισόμορφα;



G_1



G_2

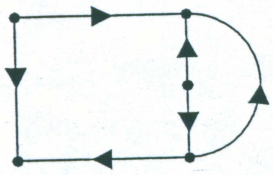


G_3

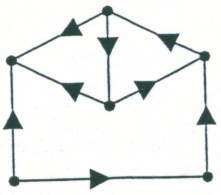
(α) G_1 με G_2 $\boxed{\text{(β) } G_1 \text{ με } G_3}$ (γ) Κανένα

(δ) G_2 με G_3 (ε) Όλα

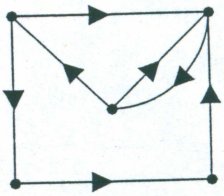
18° Θέμα *(0,5 μονάδες)*



G_1



G_2



G_3

Ποιο από τα παραπάνω γραφήματα είναι:

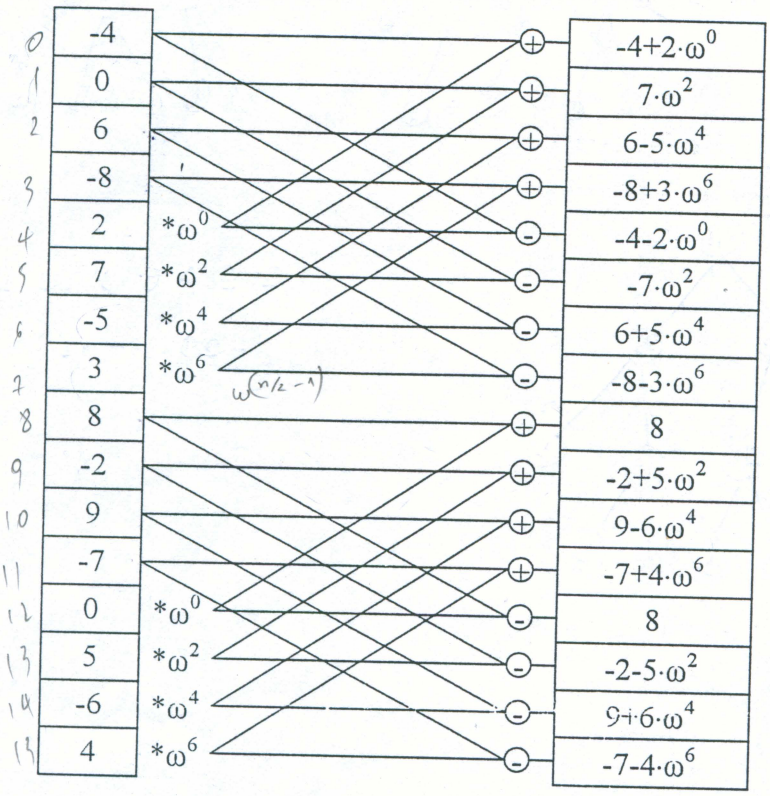
(α) Μονομερώς συνεκτικό: G_2 (β) Ισχυρά συνεκτικό: G_3

(γ) Ασθενώς συνεκτικό: G_1

19ο Θέμα (0,5 μονάδες)

2α 4β+1

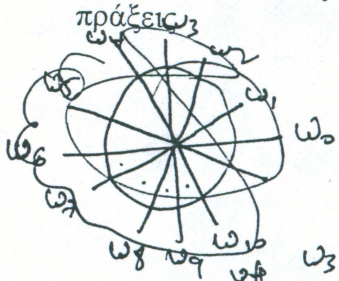
Έστω διάνυσμα A μήκους N = 16. Εκτελούμε το βήμα της αναδιάταξης και δύο βήματα υπολογισμού του αλγορίθμου FFT για το A. Το διάνυσμα που προκύπτει φαίνεται παρακάτω. Εκτελέστε το τρίτο βήμα υπολογισμού του αλγορίθμου FFT.

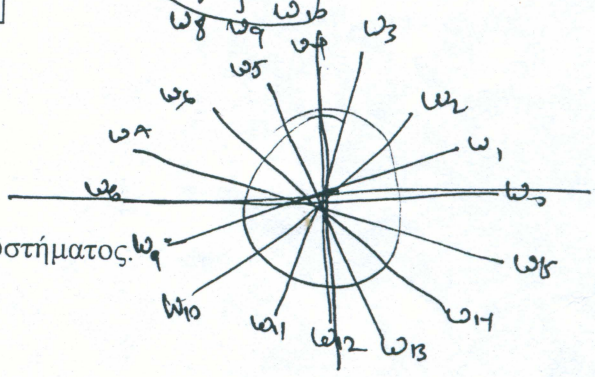


0+4 — 0-4
1+5 1-5
2+6 2-6
3+7 3-7
8+12
9+13
10+14
11+15

0+8
1+9
2+10
3+11
4+12
5+13
6+14
7+15

Σημειώστε πάνω στο σχήμα τους αριθμούς με τους οποίους πολλαπλασιάζετε τα στοιχεία του διανύσματος που δίνεται. Επίσης, χρησιμοποιήστε βέλη για να δείξετε μεταξύ ποιών τιμών του διανύσματος κάνετε πράξεις.





20ο Θέμα (0,5 μονάδες)

Δίνονται η 7η, 8η και 9η εξίσωση ενός τριδιαγώνιου συστήματος.

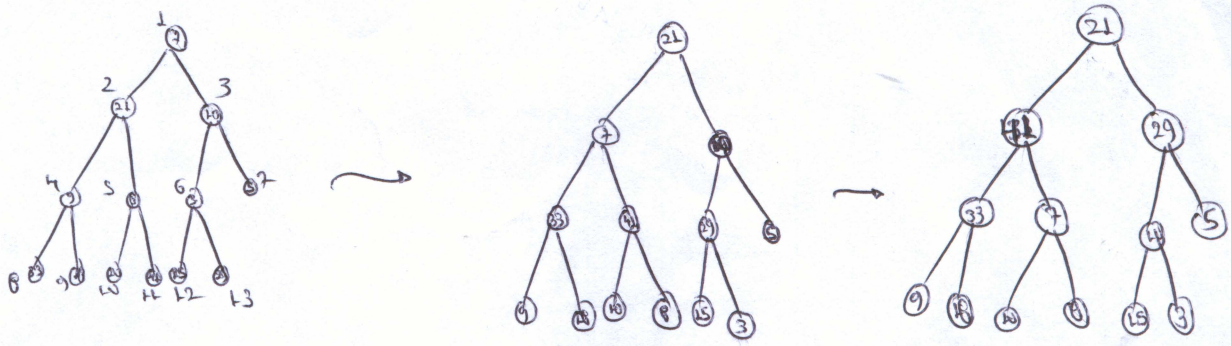
$$
\begin{aligned}
5\cdot x_6 - 2\cdot x_7 \quad 7\cdot x_8 \qquad\qquad &= -5\\
4\cdot x_7 \quad 3\cdot x_8 \quad -8\cdot x_9 \qquad &= 6\\
-2\cdot x_8 \quad 2\cdot x_9 \quad 9\cdot x_{10} &= 8
\end{aligned}
$$

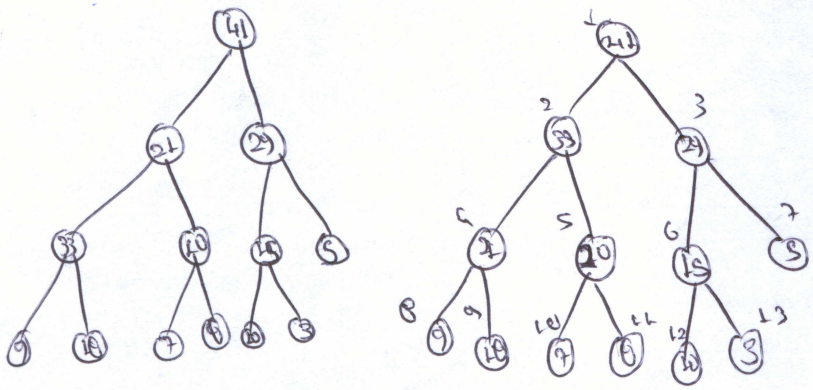
Εφαρμόστε ένα βήμα της μεθόδου αναγωγής μονών – ζυγών για τις εξισώσεις αυτές.
Η νέα εξίσωση που βρήκατε είναι η: $\underline{10\cdot x_6 + 9\cdot x_8 + 36\cdot x_{10} = 28}$.

Καλή χρονιά 2001

A

7	21	10	9	8	3	5	33	18	20	41	15	29





3 5 7 8 9 10 15 18 20

21 29 33 41