Εισαγωγή στους Αλγόριθμους
Σεπτέμβριος 2002

Εξεταστές: Χ. Ζαρολιάγκης, Θ. Παπαθεοδώρου

*Ονοματεπώνυμο:*___________________________

*Α.Μ.:*____________ *Έτος:*_______

<u>Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες</u>

<u>1ο Θέμα</u> *(1 μονάδα)*

i) Δίνεται το διάνυσμα A με N = 8 στοιχεία. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός FFT του διανύσματος A. Συμπληρώστε τις συνιστώσες του A κατά τις διάφορες φάσεις του αλγορίθμου.
<u>(ΠΡΟΣΟΧΗ : $\omega^5 = -\omega$)</u>

A				$\hat{A}$
-3	-3	-2	0	4
-2	1	-4	$-4-4\cdot\omega^2$	$-4\cdot(1+\omega+\omega^2+\omega^3)$
-1	-1	2	-4	$-4\cdot(1+\omega^2)$
0	3	-4	$-4+4\cdot\omega^2$	$-4\cdot(1-\omega^2+\omega^3-\omega^5)$
1	-2	0	4	-4
2	2	-4	$-4-4\cdot\omega^2$	$-4\cdot(1-\omega+\omega^2-\omega^3)$
3	0	4	-4	$-4\cdot(1-\omega^2)$
4	4	-4	$-4+4\cdot\omega^2$	$-4\cdot(1-\omega^2-\omega^3+\omega^5)$

ii) Τα στοιχεία της προτελευταίας στήλης που έχουν γκρι φόντο σε ποιο πολυώνυμο αντιστοιχούν και για ποιες ρίζες της μονάδας;

$P_1(x) = -3 - x + x^2 + 3\cdot x^3$, για $x = \omega^2$

$P_2(x) = -2 + 2\cdot x^2 + 4\cdot x^3$, για $x = \omega^0$

2ο Θέμα *(2 μονάδες)*

Δίνεται η αναδρομική εξίσωση $f_{\mathrm{n}} = f_{n-1} - f_{n-2} + f_{n-3}$, με αρχικές συνθήκες $f_0 = 1$, $f_1 = -2$ και $f_2 = 5$. Να υπολογιστεί ο όρος f_{13792}:

i) *(1 μονάδα)* Με χρήση της μεθόδου «Διαίρει και Βασίλευε»

a) Για το σκοπό αυτό γράφουμε $v_n = \mathrm{A} \cdot v_{n-1}$, όπου:

$$v_n = \begin{bmatrix} f_{n-2} \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad v_{n-1} = \begin{bmatrix} f_{n-3} \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{bmatrix}$$

b) Επομένως, συναρτήσει των αρχικών συνθηκών:

$v_{13792} = \mathrm{A}^k \cdot v_l$, όπου ο εκθέτης $k =$ <u>13790</u> και ο δείκτης $l =$ <u>2</u>

c) Από τον πίνακα Α που δώσατε στο υποερώτημα a) υπολογίστε τις παρακάτω δυνάμεις:

$$\mathrm{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{A}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{A}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου k ο αριθμός που δώσατε στο υποερώτημα b)

d) Άρα τελικά $f_{13792} =$ <u>1</u>

ii) *(1 μονάδα)* Με χρήση της μεθόδου της χαρακτηριστικής εξίσωση

a) Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\underline{x^3 - x^2 + x - 1 = 0}$

b) Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι:

$x_1 =$ <u>1</u>

$x_2 =$ <u>i</u>

$x_3 =$ <u>$-i$</u>

c) Η γενική λύση της εξίσωσης, συναρτήσει των σταθερών c_1, c_2, c_3, είναι:

$f_n = \underline{c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot i^n + c_3 \cdot (-i)^n}$

d) Επομένως:

$c_1 =$ <u>3</u>

$c_2 = \underline{-1 - 5 \cdot i/2}$

$c_3 = \underline{-1 + 5 \cdot i/2}$

e) Άρα τελικά $f_{13792} =$ <u>1</u>

3ο Θέμα *(1 μονάδα)*

Στο σύστημα $A \cdot x = b$ ο πίνακας A είναι 63×63 με A=τριδ(-1, 10, -1), b(j)=8·j για j=1,2,…,62 και b(63)=568. Μετά από δύο βήματα της μεθόδου αναγωγής μονών-ζυγών, το σύστημα που θα προκύψει θα έχει διάσταση (αριθμό εξισώσεων) __15__ και η γενική του εξίσωση θα είναι:

$$\alpha \cdot x_i + \beta \cdot x_j + \gamma \cdot x_k = \delta_j$$

όπου (συναρτήσει του j):
i = __j – 4__
k = __j + 4__
α = __-1__
β = __9602__
γ = __-1__

και (συναρτήσει των αρχικών συνιστωσών του b)
$\delta_j = 98 \cdot [10 \cdot b(j) + b(j-1) + b(j+1)] + [10 \cdot b(j-2) + b(j-3) + b(j-1)] +$
$[10 \cdot b(j+2) + b(j+1) + b(j+3)] =$
$b(j-3) + 10 \cdot b(j-2) + 99 \cdot b(j-1) + 980 \cdot b(j) + 99 \cdot b(j+1) + 10 \cdot b(j+2) + b(j+3)$

Υποθέστε τώρα ότι στον υπολογιστή σας οι μικρότεροι σε απόλυτη τιμή μη μηδενικοί αριθμοί είναι οι $\pm 10^{-4}$ και οι μεγαλύτεροι οι $\pm 10^{6}$. Υποθέστε επίσης ότι όλες οι πράξεις γίνονται με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων. Τότε η εφαρμογή της μεθόδου θα δώσει:

x_{32} = __31.9968__

4ο Θέμα *(1 μονάδα)*

Διατυπώστε τις επαναληπτικές σχέσεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του ελαχίστου της συνάρτησης f, όπου:

$$f(x,y,z) = x^2 + 2 \cdot y^2 + 3 \cdot z^2 - 4 \cdot x \cdot y + 6 \cdot x \cdot z - 12 \cdot y \cdot z + 10 \cdot x - 12 \cdot y + 18 \cdot z$$

a) με την μέθοδο Jacobi:

$x^{k+1} = 2 \cdot y^k - 3 \cdot z^k - 5$, $\quad y^{k+1} = x^k + 3 \cdot z^k + 3$, $\quad z^{k+1} = -x^k + 2 \cdot y^k - 3$

b) με την μέθοδο Gauss-Seidel:

$x^{k+1} = 2 \cdot y^k - 3 \cdot z^k - 5$, $\quad y^{k+1} = x^{k+1} + 3 \cdot z^k + 3$, $\quad z^{k+1} = -x^{k+1} + 2 \cdot y^{k+1} - 3$

c) με την μέθοδο SOR και με παράμετρο ω:

$x^{k+1} = (1-\omega) \cdot x^k + \omega \cdot (2 \cdot y^k - 3 \cdot z^k - 5)$, $\quad y^{k+1} = (1-\omega) \cdot x^k + \omega \cdot (x^{k+1} + 3 \cdot z^k + 3)$,
$z^{k+1} = (1-\omega) \cdot z^k + \omega \cdot (-x^{k+1} + 2 \cdot y^{k+1} - 3)$

<u>5</u>

5º Θέμα *(1 μονάδα)*

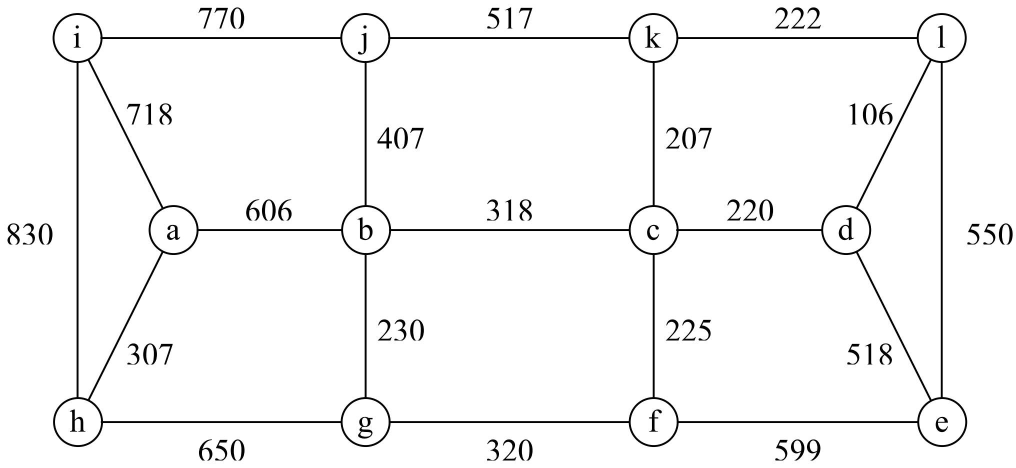
Να δοθεί ο κλειστός τύπος, σε ασυμπτωτικό συμβολισμό, των παρακάτω αναδρομικών σχέσεων:

(α) $T(n) = T(n-1000) + 10$ Απάντηση: $T(n) = \underline{\ O(n)\ }$

(β) $T(n^3) = 3 \cdot T(n^3/3) + n^{3/2}$ Απάντηση: $T(n^3) = \underline{\ O(n^3)\ }$

6^o Θέμα *(1 μονάδα)*

Να βρείτε το Ελάχιστο Γεννητικό Δένδρο (ΕΓΔ) του παρακάτω γραφήματος (α) με την μέθοδο Prim θεωρώντας ως αρχική κορυφή την ***α***, και (β) με την μέθοδο Kruskal. Και στις δύο περιπτώσεις το ΕΓΔ να δοθεί σαν μια ακολουθία πλευρών του γραφήματος με τη σειρά κατά την οποία προστίθενται οι πλευρές στο ΕΓΔ σε κάθε μέθοδο.

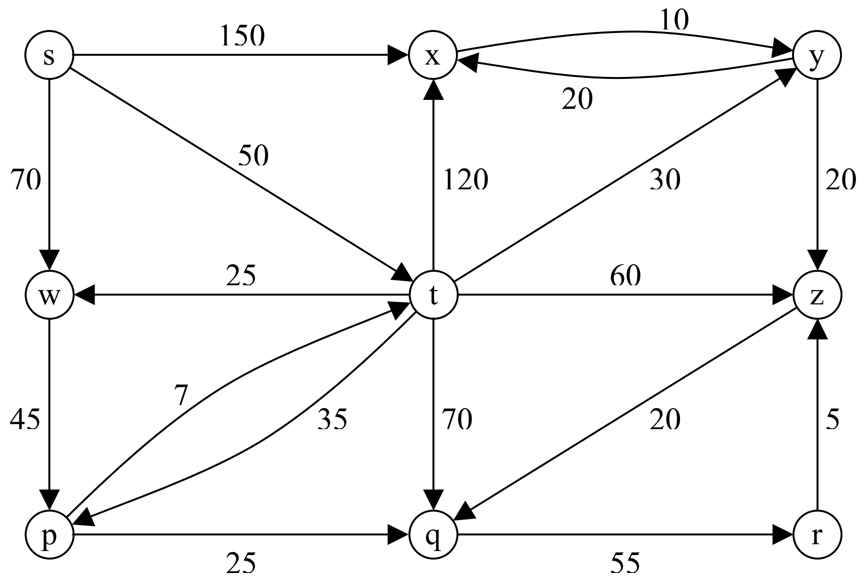


(α) ΕΓΔ = {(a,h), (a,b), (b,g), (b,c), (k,c), (c,d), (d,l), (c,f), (b,j), (d,e), (a,i)}

(β) ΕΓΔ = {(d,l), (k,c), (c,d), (c,f), (b,g), (h,a), (b,c), (b,j), (d,e), (a,b), (a,i)}

*<u>7° **Θέμα**</u> (1 μονάδα)*

Στο παρακάτω διγράφημα να βρείτε αποστάσεις (κόστη συντομότερων διαδρομών) από την κορυφή *s* προς όλες τις υπόλοιπες κορυφές εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Dijkstra. Η απάντησή σας να δοθεί συμπληρώνοντας τον σχετικό πίνακα, στον οποίο πρέπει να δώσετε: (α) τις κορυφές με την σειρά κατά την οποία οριστικοποιούνται («μονιμοποιούνται») από τον αλγόριθμο Dijkstra, και (β) την απόσταση *d(u)* κάθε κορυφής *u* του διγραφήματος από την *s*.

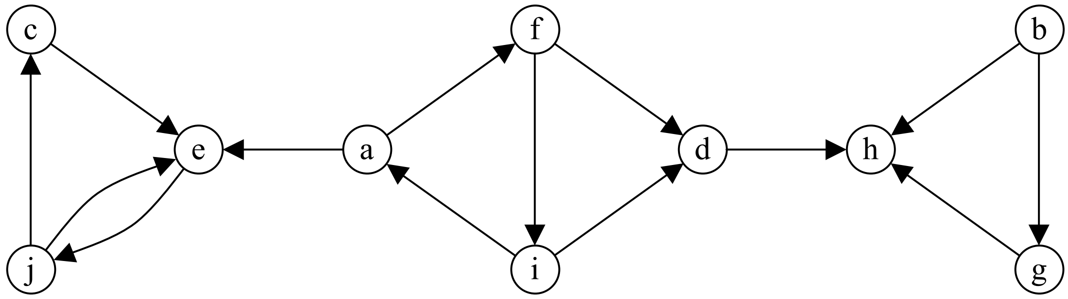


Α/Α οριστικοποίησης	Κορυφή [*u*]	Απόσταση [*d(u)*]
1	s	0
2	t	50
3	w	70
4	y	80
5	p	85
6	x	100
7	z	100
8	q	110
9	r	165

8^{o} Θέμα *(1 μονάδα)*

(α) Στο διγράφημα του παρακάτω σχήματος να δώσετε τους χρόνους ανακάλυψης (πρώτης επίσκεψης) και εγκατάλειψης σε μία Αναζήτηση Πρώτα κατά Βάθος (ΑΠΒ), η οποία αρχίζει από την κορυφή a.

(β) Να κατηγοριοποιήσετε τις πλευρές (τόξα) του διγραφήματος σύμφωνα με την ΑΠΒ του ερωτήματος (α).



(α)

Κορυφή	Χρόνος Ανακάλυψης	Χρόνος Εγκατάλειψης
a	1	16
b	17	20
c	4	5
d	9	12
e	2	7
f	8	15
g	18	19
h	10	11
i	13	14
j	3	6

(β) Πλευρές δέντρου: (a, e), (a, f), (b, g), (d, h), (e, j), (f, d), (f, i), (j, c)
Πίσω τόξα: (c, e), (i, a), (j, e)
Εμπρός τόξα: -
Διασυνδετικά τόξα: (b, h), (g, h), (i, d)

9^ο^ Θέμα *(1 μονάδα)*

Έστω $A[1:n]$ ένας μη ταξινομημένος (μονοδιάστατος) πίνακας που περιέχει n στοιχεία ενός συγκεκριμένου τύπου που μπορεί να είναι οποιοσδήποτε (π.χ. ο A είναι ένας πίνακας σειρών χαρακτήρων του οποίου τα στοιχεία αναπαριστούν ονοματεπώνυμα υποψήφιων δημάρχων ή νομαρχών στις πρόσφατες εκλογές). Επίσης, πολλά από τα στοιχεία μπορεί να είναι ίδια μεταξύ τους (π.χ. κάθε στοιχείο του A αντιστοιχεί στην ψήφο ενός εκλογέα και πολλοί εκλογείς ψηφίζουν τον ίδιο υποψήφιο). Να δοθεί ένας αλγόριθμος ο οποίος να βρίσκει το στοιχείο του A που *πλειοψηφεί* (εάν υπάρχει), δηλαδή το στοιχείο εκείνο το οποίο εμφανίζεται περισσότερες από $n/2$ φορές. Ο αλγόριθμός σας θα πρέπει να εκτελεί μόνο μία «σάρωση» του A (δηλαδή ξεκινώντας από την αρχή του πίνακα να διαβάζει κάθε στοιχείο μόνο μία φορά), να μην τροποποιεί καμία εγγραφή του A (δηλαδή ο πίνακας είναι "read-only"), και να χρησιμοποιεί (εκτός από τον A) το πολύ τρεις ακόμη μεταβλητές. Επιχειρηματολογήστε για την ορθότητα του αλγορίθμου σας.

```
counter = 0;
for i=1 to n do
    if counter==0 then curr_elem=A[i];
    if curr_elem==A[i] then ++counter else --counter;
od

if counter>0 then curr_elem is the majority element
else there is no majority element
```