ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

• Ασυμπτωτικοί συμβολισμοί

1) Κεφαλαίο Όμικρον: $f(n) = O(g(n))$ αν $\exists$ c σταθερά ώστε για $n \geq n_0$: $f(n) \leq c \cdot g(n)$, $\forall n \geq n_0$

2) Κεφαλαίο Ωμέγα: $f(n) = \Omega(g(n))$ αν $\exists$ d '' '' '' '' : $f(n) \geq d\, g(n)$, $\forall n \geq n_0$

3) Κεφαλαίο Θήτα: $f(n) = \Theta(g(n))$ αν $\exists$ σταθερές c_1, c_2 ώστε για $n \geq n_0$: $c_1|g(n)| \leq |f(n)| \leq c_2|g(n)|$

και c_3, c_3 '' '' '' : $c_3|f(n)| \leq |g(n)| \leq c_4|f(n)|$

$\forall n \geq n_0$ (ισοδύναμα)

αν δηλαδή $f(n) = O(g(n))$ και $f(n) = \Omega(g(n)) \rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$.

4) μικρό όμικρον: $f(n) = o(g(n))$ αν $\forall$ σταθερά c $\exists n_0$: $f(n) < g(n) \cdot c$, $\forall n \geq n_0$ ή αλλιώς

$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, $\forall n \geq n_0$

5) μικρό θήτα: $f(n) = \theta(g(n))$ όταν ισχύει $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$

π.χ. • $25n^2 + 72n\log n + 136\, n^{1.3} = O(n^2)$

• $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$ αφού $c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2$ (1)

διαιρώ την (1) με n^2 και έχω $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n}$, και $\frac{1}{2} - \frac{3}{n} > 0$ (αφού είναι θετική παράσταση ανάμεσα σε 2 τετράγωνα)

άρα $n > 6$, $n_0 = 7 \Rightarrow$ $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{1}{14}$

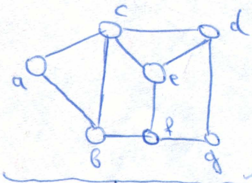
και $\frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2 \Rightarrow \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq \frac{1}{2}n^2 \Rightarrow$ $c_2 \geq \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 1$

• $f(n) = n^2 + 100n\log n = o(n^3)$
• $f(n) = n^2 + 100n\log n = \Theta(n^2)$
• $n^5 + 3n^{10000} + (1.1)^n = O[(1.1)^n]$

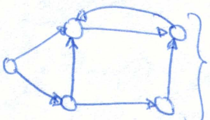
$\Rightarrow$ Για αρκετά μεγάλα (n) η ιεραρχία είναι: $\log n$, n σε δύναμη, σταθερά >1 με εκθέτη n.
(δηλαδή $c_1 \log n < c_2 n < c_3 c^n$ για $c_1, c_2, c_3 > 0$ και $c > 1$ και $c_4 n^k < c_5 c^n$ για $c_4, c_5 > 0$, και $c > 1$).

• ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

• Γράφημα είναι ένα σύνολο κορυφών και ένα σύνολο πλευρών που τις συνδέει: $G = (V, E)$ — V: κορυφές, E: πλευρές ή ακμές

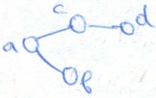


Απ' τον κόμβο a στον b έχουμε αμφίδρομη κατεύθυνση (μη διευθυνόμενο γράφημα)



διευθυνόμενο γράφημα.

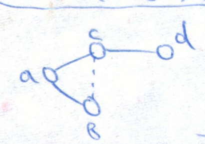
Υπογράφημα:



$G' = (V', E')$ όπου $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$

• Επαγόμενο (induced) υπογράφημα: $E' = \{(x,y) \in E : x \in V' \wedge y \in V'\} = E \cap (V' \times V')$

π.χ.

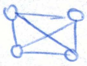


Παίρνω τις κορυφές a, c, b, d του αρχικού γραφήματος (αφού έχω ορίσει το V') και μετά κοιτάω ποιές πλευρές συνδέουν τις κορυφές αυτές. Πρέπει να πάρω όλες τις πλευρές για να έχω επαγόμενο υπογράφημα:

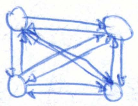
έχω $V' = \{a, b, c, d\}$

• Πλήρες γράφημα K_n (για n κορυφές)

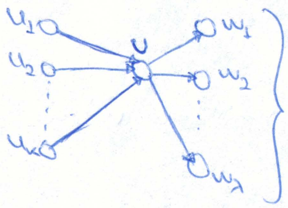
$K_n = (V, V\times V)$

π.χ. για $n=4 \Longrightarrow$  } αριθμός πλευρών πλήρους γραφήματος $= \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Για πλήρες διευθυνόμενο γράφημα ο αριθμός πλευρών είναι: $2\cdot\binom{n}{2} = n(n-1)$

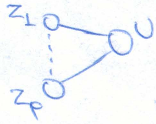


• Βαθμός κορυφής διευθυνόμενου γραφήματος (ή διγραφήματος)

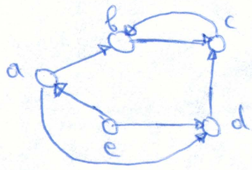


in-deg(v) = κ (αριθμός κορυφών που δείχνει η κορυφή v)

out-deg(v) = λ

Για μη διευθυνόμενο γράφημα έχω: 

} deg(v) = ρ

π.χ. 

in-deg(a) = 1
in-deg(c) = 2
out-deg(a) = 2
out-deg(c) = 1

Θεωρήματα Euler: *

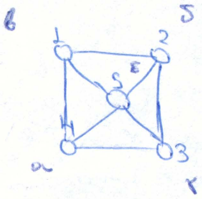
• $\sum_{v\in V} \text{in-deg}(v) = \sum_{v\in V} \text{out-deg}(v) = m$ ↳ πλήθος πλευρών

$n=|V|$, $m=|E|$

• $\sum_{v\in V} \deg(v) = 2m$

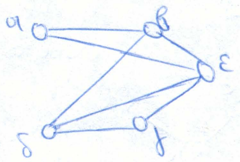
• Αν όλες οι κορυφές ενός γραφήματος έχουν τον ίδιο βαθμό β τότε το γράφημα λέγεται β-κανονικό. Σε ένα β-κανονικό γράφημα ο αριθμός των πλευρών είναι βn/2 και για κάθε γράφημα ο αριθμός των κορυφών με μονό βαθμό είναι ζυγός.

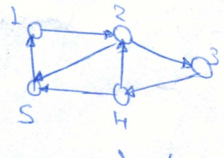
• Ισομορφία: Τα $G_1=(V_1,E_1)$ και $G_2=(V_2,E_2)$ είναι ισόμορφα αν $\exists\, h: V_1\to V_2$ τέτοια ώστε
i) h είναι 1-1 και επί
ii) $(i,j)\in E_1 \iff (h(i),h(j))\in E_2$

G_1: 

} h(1) = β, h(2) = δ, h(3) = γ, h(4) = α, h(5) = ε

$h:\{1,2,3,4,5\}\to\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$; Έτσι προκύπτει το G_2:



• Έχω το γράφημα: 

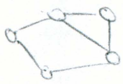
Διαδρομή (walk): $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$: $(v_i, v_{i+1})\in E$, $1\le i\le k-1$, π.χ. (2,3,4,2,5,1)

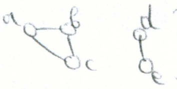
Ημιδιαδρομή (semiwalk): $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$: $(v_i, v_{i+1})\in E$ ή $(v_{i+1}, v_i)\in E$, π.χ. (5,4,2,1,5,4,3)

Απλή διαδρομή (path): διαδρομή χωρίς επαναλήψεις κορυφών, π.χ. (2,3,4,5,1)

κύκλος: απλή διαδρομή της οποίας τα άκρα συμπίπτουν ($v_1=v_k$), π.χ. (3,4,2,3)

• **συνεκτικότητα**: ένα γράφημα είναι συνεκτικό αν $\exists$ διαδρομή (u,v) $\forall u,v \in V$


} συνεκτικό


} μη συνεκτικό, αφού οι d και e δε συνδέονται με τις a, b, c

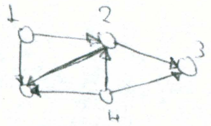
Για διευθυνόμενα γραφήματα έχουμε

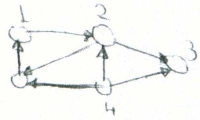
• ασθενώς συνεκτικό: $\forall u,v \in V$ $\exists$ μια ΗΔ(u,v) → ημιδιαδρομή

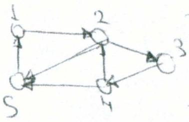
• μονομερώς συνεκτικό: $\forall u,v \in V$ $\exists$ μια Δ(u,v) ή Δ(v,u)

• ισχυρά συνεκτικό: $\forall u,v \in V$ $\exists$ Δ(u,v)

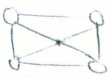
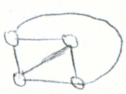
π.χ.

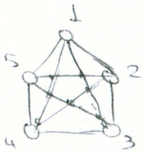
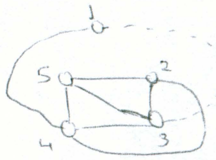

} ασθενώς συνεκτικό


} μονομερώς συνεκτικό


} ισχυρά συνεκτικό (κάθε ισχυρά συνεκτικό γράφημα δεν είναι διευθυνόμενο ακυκλικό γράφημα)

• **επίπεδο γράφημα**: εκείνο για το οποίο υπάρχει απεικόνιση στο επίπεδο τέτοια ώστε δύο οποιεσδήποτε πλευρές δεν τέμνονται.


} →

⇒ επίπεδο

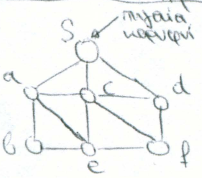

}

→ δεν είναι επίπεδο

• **συλλέπτυνση**: διαδρομή που μπορεί να τη συναιρέσω σε μια πλευρά: π.χ. x o—o—o—o—o y ⇒ x o—o y

Θεώρημα του Kuratowski: ένα γράφημα G είναι μη επίπεδο αν περιέχει υπογράφημα του οποίου η συλλέπτυνση είναι ισομορφική με το K_5 ή με το $K_{3,3}$

ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ (διερεύνηση) ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

• **Αναζήτηση πρώτα κατά πλάτος**: συνεχίζουμε από την πρώτη κορυφή v που έχει πλευρές διέλευσης



Ορίζω το σύνολο S των κορυφών σαν μια ουρά (FIFO) πλευρά διέλευσης: ◍——⊗

⊗: δεν έχει επισκεφθεί (άσπρο)

◍: έχει επισκεφθεί και ανήκει στο S σύνολο, δηλαδή στην ουρά (κόκκινο)

●: έχει επισκεφθεί και η λίστα γειτονικότητας έχει εξεταστεί (κίτρινο)

ΑΠΠ(G, s)

```
for all v∈V do {color[v]=white; π[v]=nil, d[v]=∞;}
color[s]=red; d[s]=0; ord[s]=1;
Q={s};
t=1;
while Q≠0 do
   v=HEAD[Q];
   for each w∈Adj(v) do
     {if color[w]=white then
         {color[w]=red; d[w]=d[v]+1; π[w]=v; t=t+1; ord[w]=t; ENQUEUE(Q,w);}}
   DEQUEUE(Q);
   color[v]=yellow;
od
```

π[v] → πατέρας του v

d[v] → απόσταση απ' την πηγαία κορυφή s στο v

Q → FIFO queue

Adj(v) → adjacency list (περιέχει όλες τις κορυφές που είναι διπλανές της v)

ord[w] → δείχνει τη σειρά με την οποία έχουμε επισκεφθεί τις κορυφές (με τη βοήθεια του t)

Απόσταση $\delta(s,v)$ = το μήκος (σε αριθμό πλευρών) της συντομότερης διαδρομής από την s στη v

π.χ. s o—1—o—1—o—1—o v } το μήκος $\delta(s,v) = 3$ (αφού έχω 3 πλευρές βάρους 1)

H

Θεώρημα: Για κάθε κορυφή $v \in V$ ο ΑΠΠ(G,S) δίνει $d[v] = \delta(s,v)$

Απόδ: Ορίζω το σύνολο $V_k = \{v \in V : \text{είναι } d[v] = \delta(s,v)\}$. Αρκεί ν.δ.ο. για οποιαδήποτε κορυφή το θεώρημα ισχύει

Επαγωγή στο $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (η μέγιστη διαδρομή για n κορυφές είναι $n-1$)

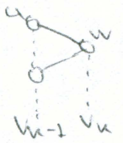
Για $k=0$: $d[S] = 0 = \delta(S,S)$. Επαγωγική υπόθεση: ισχύει $\forall\ j \le k-1$

Για $j = k$: Έστω η κορυφή $w \in V_k$. Η w πρέπει να έχει ανακαλυφθεί μετά από όλες τις κορυφές στο V_{k-1} (1)

$\Rightarrow \exists\, v \in V_j,\ j < k-1 : (v,w) \in E$, άρα $d[w] = d[v] + 1 < k-1+1 < k \Rightarrow w \notin V_k$

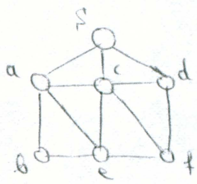
οπότε η παραπάνω πρόταση ισχύει και άρα η (1) είναι.

$(1) \Rightarrow \delta(s,w) = k \Rightarrow \exists\, u \in V_{k-1} : (u,w) \in E$



} Έστω u η πρώτη τέτοια κορυφή $\Rightarrow$ (u,w) ακμή διέλευσης $\Rightarrow d[w] = d[u]+1 = k-1+1 = \delta(s,w)$

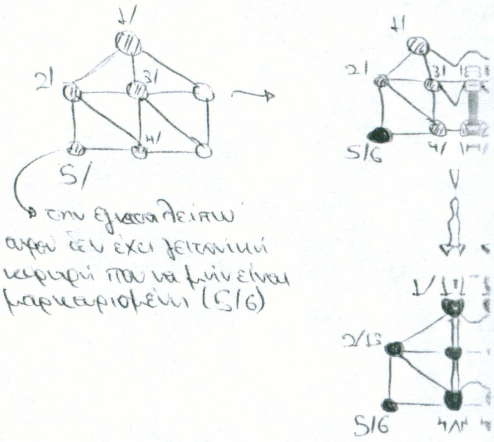
• Αναζήτηση πρώτα κατά βάθος: επιλογή κορυφής v η οποία μπήκε τελευταία στο σύνολο S (τον stack, δηλαδή αυτό που μπήκε τελευταίο θέλω να βγει και πρώτο)



⊗ : δεν έχει επισκεφθεί (άσπρο)

◍ : ανακαλύπτεται 1η φορά (κόκκινο)

● : εγκαταλείπεται, επειδή η λίστα γειτνίασης έχει εξεταστεί (κίτρινο)



ΑΠΒ(G,s)

```
for each v∈V do {color[v]=white, π[v]=nil;}
t=0;
for each v∈V do {if color[v]=white then DFS-Visit(v);}

DFS-Visit(v)
color[v]=red; t=t+1; d[v]=t;
for each w∈Adj(v) do
  {if color[w]=white then{π[w]=v; DFS-Visit(w);}}
color[v]=yellow; t=t+1; f[v]=t;
```

Adj[v] → λίστα γειτνίασης

d[v]: χρόνος ανακάλυψης

f[v]: χρόνος εγκατάλειψης

t → time counter

π[v] → πατέρας του v

Κατηγοριοποίηση πλευρών

i) πλευρές δέντρου

ii) πίσω πλευρές (αυτές που πάνε πίσω σ' ένα πρόγονο)

iii) εμπρός πλευρές (" " " σε κάποιο απόγονο)

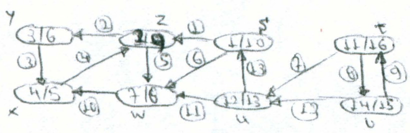
iv) διασυνδετικές πλευρές (όλες οι υπόλοιπες)

} Για κάθε 2 κορυφές u,v ακριβώς 1 απ' τα ακόλουθα:

i) Τα διαστήματα $[d[u], f[u]]$ και $[d[v], f[v]]$ είναι ξένα

ii) $[d[u], f[u]] \subset [d[v], f[v]]$ και u είναι απόγονος της v

iii) $[d[v], f[v]] \subset [d[u], f[u]]$ και v " "

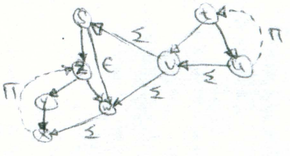


i) → ①,②,③,⑤,⑦,⑧

ii) → ④,⑨ (π)

iii) → ⑥ (ε)

iv) → ⑩,⑪,⑫,⑬ (Σ)



• Συνεκτικές συνιστώσες μη διευθυνόμενων γραφημάτων:

ΑΠΒ(G)

```
for each v∈V do {color[v]=white; π[v]=nil; CC[v]=0;}
t=0; CC=0;
for each v∈V do {if color[v]=white then cc=cc+1; DFS-Visit(v)}
```

CC → συνεκτική συνιστώσα

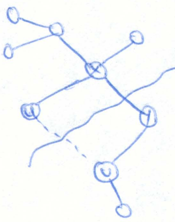
DFS-Visit(v)

```
color[v]=red, CC[v]=cc;
t=t+1; d[v]=t;
for each w∈Adj(v) do
  if color[w]=white then {π[w]=v; DFS-Visit(w)
```

Θεώρημα (αναγνώριση ασφαλών πλευρών)

Έστω T ένα ΕΓΔ του $G=(V,E)$ και $A \subseteq T$. Επίσης, έστω τομή $(S,V-S)$ που σέβεται το A και έστω (u,v) η ελαφριά πλευρά που τέμνει την $(S,V-S)$. Τότε η (u,v) είναι ασφαλής για το A.

Απόδ.: Έστω ότι η $(u,v) \notin T$. Θ.δ.ο. $\exists$ ΕΓΔ T' το οποίο περιέχει τη (u,v). (δηλαδή $A \cup \{(u,v)\}$)



Έστω P η μοναδική απλή διαδρομή $u \rightsquigarrow v$, στο T. Τότε θα $\exists$ πλευρά του T που τέμνει την $(S,V-S)$ και έστω (x,y) αυτή η πλευρά. Βγάζοντας τη (x,y) και συνδέοντας τη (u,v) παίρνουμε ένα νέο ΕΓΔ, το T'. (αφού το (x,y) δεν ανήκει στο A, γιατί η τομή σέβεται το A, και το (x,y) ανήκει στο P, βγάζοντάς το σπάμε το T και βάζοντας τη (u,v) φτιάχνουμε ένα νέο ΕΓΔ).

Επίσης, ξέρουμε ότι η (u,v) είναι ελαφριά πλευρά, άρα $c(u,v) \leq c(x,y)$.

Οπότε: $T' = T - \{(x,y)\} \cup \{(u,v)\}$

$c(T') = c(T) - (c(x,y) - c(u,v)) \leq c(T)$ ①

Όμως το T είναι ΕΓΔ $\Rightarrow c(T') \geq c(T)$ ②

$\xrightarrow{①,②} c(T') = c(T) \Rightarrow T'$ είναι ΕΓΔ.

Αφού, λοιπόν, $A \cup \{(u,v)\} \subseteq T' \Rightarrow$ η (u,v) είναι ασφαλής για το A.

Πόρισμα: Έστω $A \subseteq T$, και T είναι ΕΓΔ, και έστω C μια συνεκτική συνιστώσα του δάσους $G_A=(V,A)$. Αν (u,v) είναι μια ελαφριά πλευρά που συνδέει τη C με μια άλλη συνεκτική συνιστώσα C' στο G_A, τότε η (u,v) είναι ασφαλής για το A.

• Αλγόριθμος Kruskal

1) $A=\emptyset$;
2) Ταξινόμησε το E σε μια φθίνουσα σειρά κόστους
3) for each $(u,v) \in E$ do
 {if u & $v \notin$ στο ίδιο δένδρο then $A = A \cup \{(u,v)\}$}

Πολυπλοκότητα ($m \to E$, $n \to V$) (χειρότερη περίπτωση)

• $O(m \log m) = O(m \log n)$, αφού $m = n^2 \Rightarrow \log m = \log n^2 = 2\log n$ ($O(2\log n) = O(\log n)$)
 ↳ περίπτωση heapsort

• $O(m \cdot n) \rightsquigarrow O(m \cdot \alpha(m,n))$
 ↳ περίπτωση union-find

• Αλγόριθμος Prim (βρίσκει συνεχώς την ασφαλή πλευρά και την προσθέτει)

1) for each $v \in V$ do $key(v) = \infty$;
2) $key(r)=0$; $\pi(r)=nil$; $S=V$;
3) while $|S| \neq \emptyset$ do
 a) έστω u η κορυφή με ελάχιστο $key(u)$;
  $S = S - \{u\}$;
 b) for each $v \in Adj(u)$ do
  {if $c(u,v) < key(v)$ then
   $key(v) = c(u,v)$; $\pi(v) = u$;}

$key(v) = \min\{c(u,v) : u \in S \wedge v \in S' = V - S\}$

Υλοποίηση με priority queue:

a) $O(n \log n)$
b) $O(m \log n)$ } $\Rightarrow O(m \log n) =$ ΠΧΠ(Kruskal)

Πολυπλοκότητα χειρ. περίπτωσης: ($m \to E$, $n \to V$)

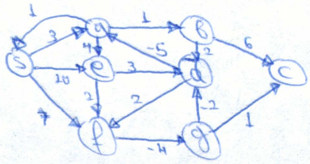
a) $n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = O(n^2)$
b) $\sum deg(u) = O(m)$
} $O(n^2 + m) = O(n^2)$

• Εύρεση συντομότερων διαδρομών

Έστω διαδρομή $P = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ ή $P: \Delta(v_1, v_k)$. Τότε $wt(P) = \sum_{i=1}^{k-1} wt(v_i, v_{i+1}) :=$ κόστος του P

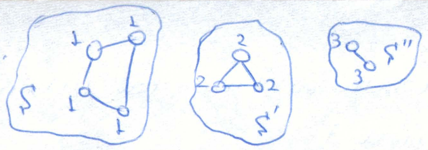
Για δεδομένα s,t είναι: $\Sigma\Delta(s,t) := \Delta(s,t)$ με το ελάχιστο κόστος (δεν υπάρχει συντομότερη διαδρομή πάντα, πχ. όταν υπάρχει αρνητικός κύκλος)

↳ συντομότερη διαδρομή



αρνητικός κύκλος ο abda με $wt(a,b,d,a) = 1+2-5 = -2 < 0$

$wt(\Sigma\Delta(s,e)) = 3+4 = 7$

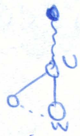
π.χ. 

Τα 1,2,3 σημαίνουν ότι ανήκουν στην 1η, 2η και 3η συνιστώσα αντίστοιχα.

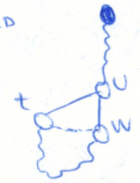
output διάνυσμα ⟹ ένα διάνυσμα που δείχνει σε ποιά συνεκτική συνιστώσα ανήκει

<u>Λήμμα</u>: Αν G είναι μη διευθυνόμενο τότε ∃ μόνο πλευρές δένδρου και πίσω πλευρές (91)

<u>Αποδ.</u>: Έστω u—w μια πλευρά με $d[u]<d[w] \Rightarrow$ η u ανακαλύφθηκε πριν την w.



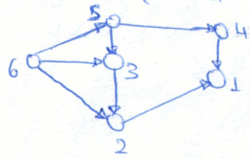
Αν εξετάσουμε πρώτα τη $(u,w) \Rightarrow$ είναι πλευρά δένδρου, αλλιώς είναι πίσω πλευρά ⟹



- <u>Τοπολογική διάταξη γραφήματος</u>: ορίζεται μόνο για διευθυνόμενα άκυκλα γραφήματα (ΔΑΓ)

διάταξη κορυφών (με ετικέτες): $\forall (u,v) \in E$: label(u) > label(v)

π.χ.



Με φθίνουσα σειρά των <u>χρόνων εγκατάλειψης</u> προκύπτει η τοπολογική διάταξη.

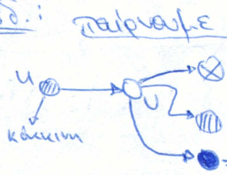
<u>Λήμμα</u>: αν G είναι ΔΑΓ ⟺ ΑΠΒ(G) δεν επιστρέφει πίσω πλευρές

<u>Αποδ.</u>: (⟹): Έστω ότι $\exists (u,v)$ πίσω πλευρά ⟹ ∃ διαδρομή $v \rightsquigarrow u$, αλλά τότε η διαδρομή $v \rightsquigarrow u$ και η πλευρά (u,v) δημιουργεί κύκλο ⟹ άτοπο.

(⟸): Έστω ότι ∃ κύκλος στο G και έστω v η πρώτη κορυφή του G που ανακαλύπτεται. Επειδή ∃ διαδρομή $v \rightsquigarrow u$ η u ανακαλύπτεται μετά την v ⟹ (u,v): πίσω πλευρά ⟹ άτοπο.

<u>Θεώρημα</u>: $\forall (u,v) \in E$ ισχύει $f[u]>f[v]$ τότε το $G=(V,E)$ είναι ΔΑΓ

<u>Αποδ.</u>: <u>παίρνουμε μια πλευρά (u,v)</u>



⟹ $f[v]<f[u]$ (αν το v είναι <u>άσπρο</u> γίνεται απόγονος του u και ισχύει)

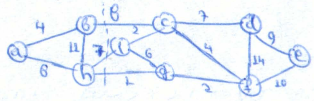
⟹ δεν ισχύει λόγω του λήμματος (το v δεν μπορεί να είναι <u>κόκκινο</u> γιατί τότε θα ήταν πρόγονος του u, πράγμα που αντιτίθεται στο λήμμα)

⟹ σημαίνει ότι έχει εγκαταλειφθεί: $f[v]<f[u]$ (αν το v είναι <u>μαύρο</u> ισχύει)

- <u>Ελάχιστα γεννητικά δένδρα</u>: μόνο για γραφήματα $G=(V,E)$ που είναι συνεκτικά και μη διευθυνόμενα

wt: $E \to \mathbb{R}$ ⟹ γεννητικό δένδρο έχουμε όταν το $\boxed{wt(T) = \sum_{(u,v)\in T} wt(u,v)}$ είναι <u>ελάχιστο</u>

↳ κόστος δένδρου



<u>Αρχή της απληστίας</u>: επιλογή καλύτερης λύσης σε κάθε βήμα (τοπικό βέλτιστο).

⟹ Αν T = ελάχιστο γεννητικό δένδρο (T → σύνολο πλευρών) και $A \subseteq T$ τότε μια πλευρά (u,v) είναι <u>ασφαλής πλευρά</u> όταν $A \cup \{(u,v)\} \subseteq T$
(αρχικά $A=\emptyset$ και τελικά $A \equiv T$)

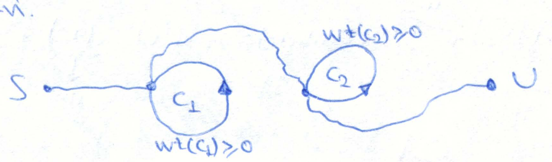
⟹ Τομή $(S, V-S)$: διαμερισμός του V σε S και V−S (π.χ. στο παραπάνω γεννητικό δένδρο και για $S=\{a,b,h\}$ οι πλευρές (b,c), (h,i) και (h,g) <u>τέμνουν</u> την τομή)

Μια τομή <u>σέβεται</u> ένα σύνολο πλευρών A αν <u>καμία</u> πλευρά του A <u>δεν τέμνει</u> την τομή.

⟹ Ελαφριά πλευρά μιας τομής: η πλευρά που τέμνει την τομή και έχει ελάχιστο κόστος $\{c(e) : e \in \text{τομή}\}$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $s, t \in V$ για τις οποίες υπάρχουν άνω της μιας διαδρομές $\Delta(s,t)$. Τότε υπάρχει $\Sigma\Delta(s,t)$ στο G <u>αν</u> δεν υπάρχει $\Delta(s,t)$ η οποία να περιέχει αρνητικό κύκλο. Αν υπάρχει $\Sigma\Delta(s,t)$ τότε είναι απλή διαδρομή.

π.χ.



} Αν δεν υπάρχουν κύκλοι που έχουν βάρος αρνητικό τότε μπορώ να αγνοήσω τους υπόλοιπους.

<u>Λήμμα 1</u>: υποδιαδρομή μιας ΣΔ είναι επίσης ΣΔ

<u>Είναι</u>: $wt(\Sigma\Delta(v_1,v_k)) = wt(\Delta(v_1,v_i)) + wt(\Delta(v_i,v_j)) + wt(\Delta(v_j,v_k)) > wt(\Delta(v_1,v_i)) + wt(\text{υποτιθέμενης } \Sigma\Delta) + wt(\Delta(v_j,v_k))$

Εάν υπάρχει διαδρομή με wt μικρότερο του $wt(\Sigma\Delta) \Rightarrow$ άτοπο ως προς τον ορισμό της ΣΔ.

Ορίζουμε ως ελάχιστη απόσταση <u>$\delta(s,t) := wt(\Sigma\Delta(s,t))$</u>

<u>Λήμμα 2</u>: Μια διαδρομή $p = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ είναι ΣΔ <u>αν και μόνο αν</u> ισχύει $\delta(v_1, v_{i+1}) = \delta(v_1, v_i) + wt(v_i, v_{i+1}) =$
$= wt(\Delta(v_1,v_i)) + wt(v_i, v_{i+1})$
$\forall (v_i, v_{i+1}) \in P$ με $1 \leq i \leq k-1$

<u>Απόδ.</u>: ($\Rightarrow$) Η $\Delta(v_1, v_{i+1})$ είναι υποδιαδρομή της $\Sigma\Delta \Rightarrow wt(\Delta(v_1, v_{i+1})) = \underline{\delta(v_1, v_{i+1})}$

Η $\Delta(v_1, v_i)$ " " " " $\Rightarrow \underline{wt(\Delta(v_1,v_i))} = \delta(v_1, v_i)$

Η $\Delta(v_i, v_{i+1})$ " " " " $\Rightarrow wt(\Delta(v_i, v_{i+1})) = \underline{wt(v_i, v_{i+1})}$

($\Leftarrow$) Αρκεί ν.δ.ο. $wt(P) = \delta(v_1, v_k)$

$$wt(P) = \sum_{i=1}^{k-1} wt(v_i, v_{i+1}) = \sum_{i=1}^{k-1} (\delta(v_1, v_{i+1}) - \delta(v_1, v_i)) = \cancel{\delta(v_1,v_2)} - \cancel{\delta(v_1,v_1)}^{0} + \delta(v_1,v_3) - \cancel{\delta(v_1,v_2)} + \dots + \delta(v_1,v_k) - \cancel{\delta(v_1,v_{k-1})} =$$

$$= \underline{\delta(v_1, v_k)}$$

• <u>Εύρεση συντομότερης διαδρομής από αρχική κορυφή (ΕΣΔΑΚ)</u>

κόστος για output $\Rightarrow$ ΣΔ για <u>n-1</u> ζευγάρια κορυφών

$\text{χώρος} = (n-1)\underset{\uparrow}{(n-1)} = O(n^2)$

μήκος διαδρομής στη χειρότερη περίπτωση

<u>Δέντρο συντομότερων διαδρομών Τ (ΔΣΔ)</u>: Γεννητικό δέντρο Τ του $G = (V, E)$ για το οποίο κάθε διαδρομή $\Delta(s, v)$ του Τ είναι $\Sigma\Delta(s, v)$ στο G.

<u>Λήμμα</u>: Ένα δέντρο Τ είναι ΔΣΔ <u>αν και μόνο αν</u> $\delta(s,v) = \delta(s,u) + wt(u,v) \ \forall (u,v) \in T$

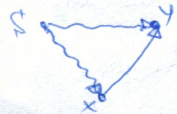
<u>Απόδ.</u>: ($\Rightarrow$) Έστω μια τυχαία $\Delta(s,v)$. Αφού το Τ είναι ΔΣΔ τότε η $\Delta(s,v)$ είναι $\Sigma\Delta(s,v)$ στο G. Οπότε, λόγω του λήμματος 2 ισχύει $\forall (u,v) \in \Delta(s,v)$: $\delta(s,v) = \delta(s,u) + wt(u,v)$

($\Leftarrow$) Παίρνω τυχαία διαδρομή $\Delta(s,v)$ στο Τ. Τότε για κάθε πλευρά ισχύει: $\delta(s,v) = \delta(s,u) + wt(u,v)$. Από <u>λήμμα 2</u> όμως τότε η $\Delta(s,v)$ αυτή είναι και η $\delta(s,v) = \Sigma\Delta(s,v)$ στο G.

Ορίζουμε ως $d(v)$ την <u>απόσταση</u> του v απ' την αρχική κορυφή s στο G.

<u>Θεώρημα 1</u>: Η $d(v) = \delta(s,v)$ <u>αν και μόνο αν</u> $d(v) \leq d(u) + wt(u,v) \ \forall (u,v) \in E$ (η ισότητα ισχύει για εκείνες τις (u,v) που ανήκουν στο ΔΣΔ)

<u>Απόδ.</u>: ($\Rightarrow$) Έστω ότι υπάρχει μια $(x,y) \in E$ τέτοια ώστε $d(y) > d(x) + wt(x,y)$. Οπότε, θα υπάρχει <u>$\Delta(s,y)$ μέσω του x</u> η οποία θα έχει κόστος μικρότερο του κόστους $d(y) = \delta(s,y) \Rightarrow$ <u>άτοπο</u>



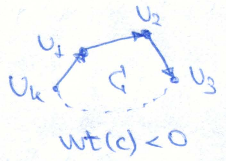
(⟸) Έστω διαδρομή $P=(u_1,u_2,\ldots,u_k)$ με $s=u_1$ και $u=u_k$. Τότε:

$$\left.\begin{aligned} d(u_2) &\le d(u_1)+wt(u_1,u_2)\\ d(u_3) &\le \cancel{d(u_2)}+wt(u_2,u_3)\\ &\vdots\\ d(u_k) &\le \cancel{d(u_{k-1})}+wt(u_{k-1},u_k)\end{aligned}\right\} \xrightarrow{(+)} d(u_k)\le d(u_1)+\sum_{i=1}^{k-1} wt(u_i,u_{i+1}) \Rightarrow d(u)\le \underset{0}{d(s)}+\Sigma\ldots \Rightarrow d(u)\le wt(P)$$

Οπότε για τη $\Sigma\Delta(s,u)$ θα ισχύει: $d(u)\le wt(\Sigma\Delta(s,u)) \Rightarrow \boxed{d(u)=\delta(s,u)}$.

<u>Θεώρημα 2</u>: Αν το $G=(V,E)$ έχει αρνητικό κύκλο τότε δεν υπάρχει $d(u)$ με $u\in V$ που να ικανοποιεί τις ιδιότητες του θεωρήματος 1.

<u>Απόδ.</u>: Έστω ότι $\exists\, d(u)$ με $u\in V$ που ικανοποιεί το Θ1. Τότε:



$$\left.\begin{aligned} \cancel{d(u_2)} &\le \cancel{d(u_1)}+wt(u_1,u_2)\\ \cancel{d(u_3)} &\le \cancel{d(u_2)}+wt(u_2,u_3)\\ &\vdots\\ \cancel{d(u_k)} &\le \cancel{d(u_{k-1})}+wt(u_{k-1},u_k)\\ \cancel{d(u_1)} &\le \cancel{d(u_k)}+wt(u_k,u_1)\end{aligned}\right\} \xrightarrow{(+)} 0\le \sum_{i=1}^{k-1} wt(u_i,u_{i+1})+wt(u_k,u_1)=wt(c) \Rightarrow$$

$\Rightarrow wt(c)\ge 0 \Rightarrow$ άτοπο.

• Αλγόριθμος ΕΣΔΑΚ

(αρχικοποίηση)
<u>for</u> all $u\in V$ <u>do</u> $d(u)=\infty$;
$d(s)=0$; $pred(s)=0$;

(χαλάρωση)
while $\exists (u,v)\in E: d(v)>d(u)+wt(u,v)$ <u>do</u>
$\{d(v)=d(u)+wt(u,v);\ pred(v)=u;\}$

Αν το $G=(V,E)$ δεν έχει αρνητικό κύκλο τότε ο αλγόριθμος τερματίζει.
Επίσης, για το predecessor graph ισχύει:

$G_\pi=\left(V,\bigcup_{v\in V}(pred(v),v)\right)$. Τότε το G_π είναι ΔΣΔ με ρίζα την s.

• Bellman-Ford

1. Προσδιόρισε μια τυχαία (αλλά σταθερή) διάταξη των E
2. κάνε περάσματα στο διατεταγμένο E και εξέτασε κάθε πλευρά $(u,v)\in E$ μια φορά
3. Σε κάθε πέρασμα χαλάρωσε την πλευρά $(u,v)\in E$
 (if $d(v)>d(u)+wt(u,v)$ then $\{d(v)=d(u)+wt(u,v);\ pred(v)=u;\}$)
4. Σταμάτησε όταν $\nexists\, d(u)$ με $u\in V$ η οποία άλλαξε κατά τη διάρκεια ενός ολόκληρου περάσματος.

<u>Θεώρημα</u>: Ο αλγόριθμος Bellman-Ford τρέχει σε $O(\overset{\text{relaxation}}{m}\,\underset{\text{initialization}}{n})$ χρόνο ($m\to$ αριθμός πλευρών, $n\to$ αριθμός κορυφών)

<u>Απόδ.</u>: Αρκεί νδο. ο αριθμός των περασμάτων είναι μικρότερος ή ίσος του $n-1$. Αν θεωρήσουμε $k=$ αριθμός περασμάτων, <u>αρκεί νδο. στο τέλος του k-περάσματος ισχύει $d(v)=\delta(s,v)$</u>, για $\Sigma\Delta(s,v)$ <u>με μικρότερες ή ίσες των k πλευρές</u>.
<u>Είμαστε στο βήμα k</u>: έστω $v\in V$ για το οποίο $\Sigma\Delta(s,v)=(u_1,u_2,\ldots,u_k)$ με $u_1=s$ και $u_k=v$. Τότε θα ισχύει:

$$\Delta(s,u_{k-1})\equiv \Sigma\Delta \Rightarrow d(s,u_{k-1})=\delta(s,u_{k-1})$$

Επειδή όμως δεν υπάρχει $\Sigma\Delta(s,v)$ με λιγότερες από k πλευρές, η πλευρά (u_{k-1},u_k) πρέπει να χαλαρωθεί στο βήμα k. <u>Δηλαδή</u>:

$$d(u_k)=d(u_{k-1})+wt(u_{k-1},u_k)=\delta(s,u_{k-1})+wt(u_{k-1},u_k)\xrightarrow[\text{λήμματος 2}]{\text{λόγω του}} d(u_k)=\delta(s,u_k)$$

(*) → για να ελέγξουμε αν υπάρχει αρνητικός κύκλος κοιτάμε τον counter και αν αυτός είναι $\ge n-1$ τότε υπάρχει.

(*) Για τον ΕΣΔΑΚ και τον Bellman-Ford, αν Δ είναι το μέγιστο (απόλυτο) κόστος μιας πλευράς τότε ισχύει:
$-n\cdot\Delta\le d(u)\le (n-1)\Delta\le n\cdot\Delta$ (αν βγει εκτός ορίων τότε έχουμε αρνητικό κύκλο)

Άσκηση στη μέθοδο αναγωγής μονών-ζυγών

1) Έστω σύστημα $A \cdot x = b$, όπου A είναι 63×63 και $A = \text{τριδ}(-1, 10, -1)$, $b(j) = 8 \cdot j$ για $j = 1, 2, \ldots, 62$ και $b(63) = 568$. Εφαρμόζουμε 2 βήματα της μεθόδου αναγωγής μονών-ζυγών στο σύστημα. **1**

(I) Ποιά η διάσταση του νέου συστήματος;

(II) Αν η γενική εξίσωση του νέου συστήματος είναι $a \cdot x_i + b \cdot x_j + \gamma \cdot x_k = \delta_j$ τότε ποιές είναι οι τιμές των i, k, a, b, γ;
Ποιά είναι η τιμή του δ_j συναρτήσει των αρχικών συνιστωσών του b;

(III) Υποθέτουμε ότι στον υπολογιστή που λύνουμε το σύστημα οι μικρότεροι σε απόλυτη τιμή αριθμοί είναι $\pm 10^{-4}$ και οι μεγαλύτεροι $\pm 10^{6}$. Υποθέτουμε επίσης ότι όλες οι πράξεις γίνονται με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων. Ποιά θα είναι η τιμή του x_{32} που θα υπολογίσουμε;

I) Η μέθοδος εφαρμόζεται σε συστήματα μεγέθους $2^p - 1$, άρα στην περίπτωσή μας $\boxed{p = 6}$ (σύστημα 63×63)

Το πρώτο βήμα της μεθόδου θα δώσει σύστημα μεγέθους $\boxed{2^{p-1} - 1 = 31}$.
Με νέα διάσταση συστήματος 31 (δηλαδή νέο $\boxed{p = 5}$) άλλη μία εφαρμογή της μεθόδου θα δώσει $2^{5-1} - 1 = 15$. Άρα θα έχω 15 εξισώσεις.

II) Θα χρησιμοποιήσω 7 εξισώσεις, όπου η μεσαία θα είναι η j, με j ζυγό.
(Γιατί όλα τα παραπάνω;)

$$
\begin{aligned}
& -x_{j-4} + 10 \cdot x_{j-3} - x_{j-2} &&= b_{j-3} \\
& -x_{j-3} + 10 \cdot x_{j-2} - x_{j-1} &&= b_{j-2} \\
& -x_{j-2} + 10 \cdot x_{j-1} - x_{j} &&= b_{j-1} \\
& -x_{j-1} + 10 \cdot x_{j} - x_{j+1} &&= b_{j} \\
& -x_{j} + 10 \cdot x_{j+1} - x_{j+2} &&= b_{j+1} \\
& -x_{j+1} + 10 \cdot x_{j+2} - x_{j+3} &&= b_{j+2} \\
& -x_{j+2} + 10 \cdot x_{j+3} - x_{j+4} &&= b_{j+3}
\end{aligned}
$$

$\Downarrow$

$$
\begin{aligned}
& -x_{j-4} + 98 \cdot x_{j-2} - x_{j} &&= b_{j-3} + 10 \cdot b_{j-2} + b_{j-1} \\
& -x_{j-2} + 98 \cdot x_{j} - x_{j+2} &&= b_{j-1} + 10 \cdot b_{j} + b_{j+1} \\
& -x_{j} + 98 \cdot x_{j+2} - x_{j+4} &&= b_{j+1} + 10 \cdot b_{j+2} + b_{j+3}
\end{aligned}
$$

Νέο τριδιαγώνιο σύστημα $(-1, 98, -1)$

$\Downarrow$ (Πολλαπλασιάζω με 98 την μεσαία εξίσωση)

$$
\boxed{-x_{j-4} + (98^2 - 2) \cdot x_j - x_{j+4} = (b_{j-3} + 10\, b_{j-2} + b_{j-1}) + 98 \cdot (b_{j-1} + 10 \cdot b_j + b_{j+1}) + (b_{j+1} + 10 \cdot b_{j+2} + b_{j+3})}
$$

Αφού η γενική εξίσωση είναι : $\boxed{a \cdot x_i + b \cdot x_j + \gamma \cdot x_k = \delta_j}$ καταλήγουμε ότι:

$a = -1$
$b = 98^2 - 2$
$\gamma = -1$
$i = j - 4$
$k = j + 4$
$\delta_j = \ldots$

III) Στην προηγούμενη εξίσωση και για $\boxed{j = 32}$ έχω: $(b(j) = bj)$

$$-x_{28} + (98^2 - 2) \cdot x_{32} - x_{36} = [8 \cdot (32-3) + 10 \cdot 8 \cdot (32-2) + 8 \cdot (32-1)] + 98 \cdot [8 \cdot (32-1) + 10 \cdot 8 \cdot 32 + 8 \cdot (32+1)] + [8 \cdot (32+1) + 10 \cdot 8 \cdot (32+2) + 8 \cdot (32+3)] \Rightarrow$$

$$\boxed{-x_{28} + 9602 \cdot x_{32} - x_{36} = 307.200}$$

- Ο σταθερός όρος δεν έπαθε overflow.
- **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Ο $b(63) = 568$ $(\neq 8 \cdot 63 = 504)$ δεν επηρεάζει τον υπολογισμό του x_{32}.
- Δεν μπορούμε να συνεχίσουμε με άλλο βήμα της μεθόδου. Αν συνεχίζαμε θα έπρεπε να πολλαπλασιάσουμε την παραπάνω εξίσωση (είναι ζυγή εξίσωση) με 9602. Άρα θα έκανε overflow και ο συντελεστής του x_{32} και ο σταθερός όρος.

ΑΡΑ:

$$-\frac{1}{9602} \cdot x_{28} + x_{32} - \frac{1}{9602} \cdot x_{36} = \frac{307.200}{9602}$$

Επειδή $-\frac{1}{9602} \simeq -10^{-4} \simeq 0$ για τον υπολογιστή μας προκύπτει

ότι: $x_{32} = \dfrac{307.200}{9602} \simeq 31{,}9933$ (4 δεκαδικά)

2) Η επαναληπτική διαδικασία

$$u_k = \sqrt[3]{\frac{2}{3-u_{k-1}^2}}$$

είναι πιθανό να βρίσκει ρίζα της:

α) $x^5 - 3\cdot x^3 + 2 = 0$ γ) $x^5 - 3\cdot x^3 - 2 = 0$

β) $x^5 + 3\cdot x^3 + 2 = 0$ δ) $x^5 - 2\cdot x^3 + 3 = 0$

- Αν η παραπάνω διαδικασία συγκλίνει τότε καθώς το $\boxed{k \to +\infty}$ το u_k και το u_{k-1} θα πλησιάζουν όλο και περισσότερο μεταξύ τους. Άρα για πολύ μεγάλο k μπορούμε να θεωρήσουμε $\boxed{u_{k-1} = u_k = x}$. Άρα:

$$x = \sqrt[3]{\frac{2}{3-x^2}} \Rightarrow x^3 = \frac{2}{3-x^2} \Rightarrow 3x^3 - x^5 = 2 \Rightarrow$$

$$\boxed{x^5 - 3x^3 + 2 = 0} \longrightarrow \text{(α)}$$

---

3) Διατυπώστε τις επαναληπτικές σχέσεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του ελαχίστου της συνάρτησης f, όπου:

$$f(x,\psi) = x^2 - x\cdot\psi + \psi^2 - 7\cdot x + 2\cdot\psi$$

I) Με την μέθοδο Jacobi

II) Με την μέθοδο Gauss-Seidel

III) Με την μέθοδο SOR και παράμετρο ω

I) Ελάχιστο της f έχω όταν $\boxed{\nabla f(x,\psi) = 0} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f(x,\psi)}{\partial x} = 0 \\ \text{και:} \\ \dfrac{\partial f(x,\psi)}{\partial \psi} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - \psi - 7 = 0 \\ -x + 2\psi + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(\psi + 7) \\ \psi = \frac{1}{2}(x - 2) \end{array}\right\}$$

Άρα:

$$\left.\begin{aligned} x^{k+1} &= \frac{1}{2}(\psi^{k}+7) \\ \psi^{k+1} &= \frac{1}{2}(x^{k}-2) \end{aligned}\right\}$$

II) Υπολογίζω όπως πριν:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(\psi+7) \\ \psi &= \frac{1}{2}(x-2) \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} u_1^{k} &= -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}u_2^{k-1}-b_1) \\ u_2^{k} &= -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}u_1^{k}-b_2) \end{aligned}\right\}$$

Άρα:

$$x^{k+1} = \frac{1}{2}(\psi^{k}+7)$$

$$\psi^{k+1} = \frac{1}{2}(x^{k+1}-2)$$

(Δώστε παράδειγμα με 3 μεταβλητές)

III) Γενικά: $\boxed{u_i^{k+1} = (1-\omega)\cdot u_i^{k} + \omega\cdot u_{i,GS}^{k+1}}$

Άρα στην περίπτωσή μας:

$$\left\{\begin{aligned} x^{k+1} &= (1-\omega)\cdot x^{k} + \omega\cdot\frac{1}{2}(\psi^{k}+7) \\ \psi^{k+1} &= (1-\omega)\cdot\psi^{k} + \omega\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^{k+1}-2) \end{aligned}\right\}$$

⊛ Να βρεθεί η μικρότερη θετική ρίζα για την $f(x) = x^3+12x^2-2x-24$ με τις εξής μεθόδους:

α) Διχοτόμηση (μέθοδος εγκλεισμού)

β) Τέμνουσα

γ) Newton-Raphson

α) Έχουμε:

$$f(0) = -24$$
$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -13 \\ f(2) = 28 \end{array}\right\} \text{ανάμεσα του 1 και του 2}$$

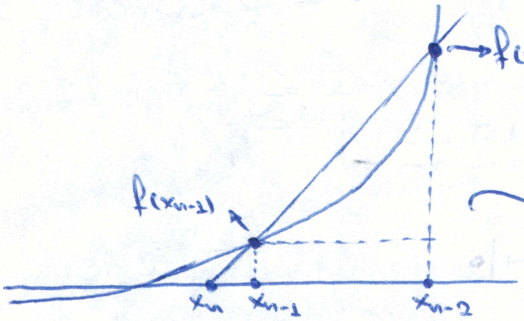
μεταξύ 1,2 → • $f(1{,}5) = 3{,}375$

μεταξύ 1, 1,5 → • $f(1{,}25) = -5{,}8$

μεταξύ 1,25 , 1,5 → • $f(1{,}375) = -1{,}462$

} μετά από 3 βήματα η μικρότερη θετική ρίζα είναι η 1,375

β)



→ τα 2 τρίγωνα είναι όμοια.

Θα βρούμε τον x_n συναρτήσει των $x_{n-1}, x_{n-2}, f(x_{n-1}), f(x_{n-2})$:

$$\frac{f(x_{n-2})-f(x_{n-1})}{x_{n-2}-x_{n-1}} = \frac{f(x_{n-1})-\overset{\to 0}{f(x_n)}}{x_{n-1}-x_n} \Rightarrow \boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})\cdot(x_{n-2}-x_{n-1})}{f(x_{n-2})-f(x_{n-1})}}$$

Οπότε:

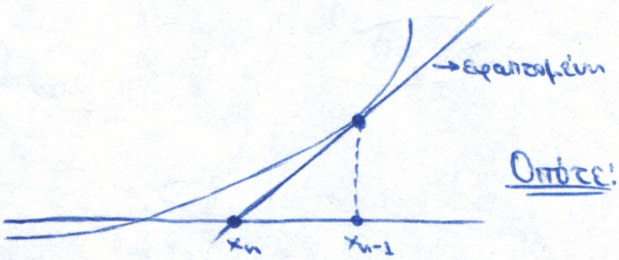
$$\left.\begin{array}{l} x_0=2 \\ x_1=1 \end{array}\right\} \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)\cdot(x_0-x_1)}{f(x_0)-f(x_1)} = 1{,}39707$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)\cdot(x_1-x_2)}{f(x_1)-f(x_2)} = 1{,}4354$$

$$x_4 = \ldots = 1{,}40811$$

} σε 3 βήματα.

γ)



Είναι: $f'(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1})}{x_{n-1}-x_n} \Rightarrow \boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}$

Οπότε: $x_0=2$:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 1{,}517$$

$$x_2 = \ldots$$

$$x_3 = \ldots = 1{,}414$$

} 3 βήματα

ΑΣΚΗΣΗ 2.10-1 ΒΙΒΛΙΟΥ | Εφαρμογή της μεθόδου μονών-ζυγών για το $Ax=b$, με $n=7$, $A=\text{τριδ}(1,-2,1)$ και $b=[0\ 0\ 0\ -2\ 0\ 0\ 0]^T$.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Είναι: $n=7$ **Άρα:** $2^p-1=7 \Rightarrow$
$\Rightarrow p=3$

Το νέο σύστημα θα έχει (με την εφαρμογή της μεθόδου) διάσταση $2^{p-1}-1=$
$=2^2-1=3$

Άρα: Επιλέγουμε 3 εξισώσεις:

Έχουμε: $-b=-2 \Rightarrow b=2,\ a=1$

$$\left.\begin{aligned} x_{j-2} - b x_{j-1} + x_j &= b_{j-1} \\ x_{j-1} - b x_j + x_{j+1} &= b_j \\ x_j - b x_{j+1} + x_{j+2} &= b_{j+1} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{πρόσθεση}}$$

πολ/σμός της μεσαίας με b (ζυγής)

$$\Rightarrow \boxed{x_{j-2} - (b^2-2)x_j + x_{j+2} = b b_j + (b_{j-1}+b_{j+1})}$$

Θέτω: $j=4$: $\boxed{x_2 - 2x_4 + x_6 = -4}$

(το j είναι ζυγός)

$j=2$: $x_0 - 2x_2 + x_4 = 0 \Rightarrow -2x_2 + x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 2x_2$

$j=6$: $x_4 - 2x_6 + x_8 = 0 \Rightarrow x_4 = 2x_6$

$\Rightarrow x_2 = x_6$

Άρα: $2x_2 - 2x_4 = -4 \Rightarrow x_2 - x_4 = -2 \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_4 &= x_2+2 \\ x_4 &= 2x_2 \end{aligned}\right\}$

$2x_2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_2 = 2 = x_6$ και $x_4 = 4$

Επίσης: (από το αρχικό σύστημα)

$-2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 = 1$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow 1 - 4 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 3$

✱ Έχουμε τη διαδικασία $f_n = 2f_{n-1} + 5f_{n-2} - 6f_{n-3}$ με $f_0 = 0, f_1 = 8, f_2 = 2$. Να βρεθεί ένας τύπος που να βρίσκει το f_n χωρίς να χρησιμοποιεί τα προηγούμενα στοιχεία.

<u>Θέτω</u>: $f_n = x^n \Rightarrow x^n = 2x^{n-1} + 5x^{n-2} - 6x^{n-3} \xrightarrow{\div x^{n-3}} x^3 = 2x^2 + 5x - 6 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(x-1)}_{1}\underbrace{(x^2 - x - 6)}_{-2,\ +3} = 0 \Rightarrow \boxed{f_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + c_3 x_3^n} = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot (-2)^n + c_3 \cdot 3^n$

$f_0 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 \cdot (-2)^0 + c_3 \cdot 3^0 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 + c_2 + c_3 = 0}$ ①

$f_1 = 8 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{c_1 - 2c_2 + 3c_3 = 8}$ ②

$f_2 = 2 \Rightarrow c_1 + c_2(-2)^2 + c_3 \cdot 3^2 = 2 \Rightarrow \boxed{c_1 + 4c_2 + 9c_3 = 2}$ ③

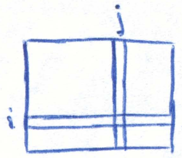
$\Big\}\ c_1 = 1,\ c_2 = -2,\ c_3 = +1.$

<u>Άρα</u>: $f_n = 1 + (-2)\cdot(-2)^n + 1 \cdot 3^n \Rightarrow \boxed{f_n = 1 - 2(-2)^n + 3^n}$ γενική λύση

✱ <u>Αναπαράσταση γραφημάτων (στην μνήμη)</u>

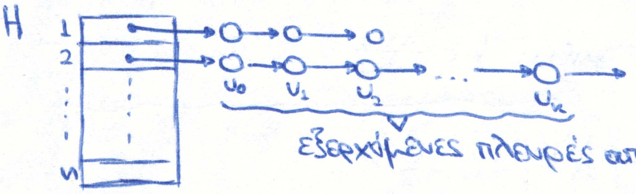
α) <u>Με πίνακα γειτνίασης</u>

$$M(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{αν } (i,j) \in E \\ 0 & \text{αν όχι} \end{cases}$$



} χωρητικότητα $n \times n \Rightarrow \underline{O(n^2)}$

β) <u>Λίστες γειτνίασης</u> (adjacency lists)



χωρητικότητα: $O(n + \sum \text{out-deg}(i)) = \underline{O(n+m)}$ όπου $n = |V|,\ m = |E|$

2m για διαδυτικό... / m για κατευθυνόμενο

ⓐ Μπορεί σε λίγο χρόνο να αποφανθεί αν δύο κορυφές είναι γειτονικές (+)
Σπατάλη χώρου μνήμης (-)

ⓑ Βέλτιστος χώρος μνήμης (+)
Θέλει περισσότερο χρόνο ώστε να αποφανθεί αν δύο κορυφές γειτονεύουν (-)

<u>Δυαδικά δένδρα</u>: δένδρα (με ρίζα) για τα οποία κάθε κορυφή έχει 0 ή 2 παιδιά.

Ιδιότητες (υποθέτουμε n κορυφές και ύψος d):

① $J \le 2^l$ κορυφές στο επίπεδο του l

Για $l=0 \Rightarrow J \le 2^0 = 1$ κορυφή, άρα ο τύπος ισχύει

Επαγωγική υπόθεση: $l=k \Rightarrow$ (# κορυφών επιπέδου k) $\le 2^k$

στο επίπεδο $k+1=l$ ο (# κορυφών επιπέδου $k+1$) $\le 2\cdot$(# κορυφών επιπέδου k) $= 2\cdot 2^k = 2^{k+1}$

② $n \le 2^{d+1}-1$

Είναι: $n \le \sum_{l=0}^{d} 2^l = \frac{2^{d+1}-1}{2-1} = 2^{d+1}-1$

③ Συμβολίζουμε με n_0 = # κορυφών με 0 παιδιά
n_2 = # " " 2 " } Τότε: $n_0 = n_2 + 1$

Είναι: $\left.\begin{array}{l} n = n_0 + n_2 \\ n-1 = 2n_2 \end{array}\right\} \rightarrow 1 = n_0 - n_2 \Rightarrow n_0 = n_2 + 1$

④ $n_0 \le 2^d$

$n = n_0 + n_2 = n_0 + n_0 - 1 = 2n_0 - 1 \Rightarrow n_0 = \frac{n+1}{2} \le \frac{2^{d+1}-1+1}{2} = 2^d$

⑤ $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \le n_0 \le \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$

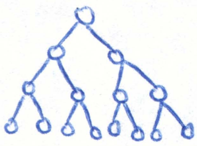
⑥ $d \ge \log(n+1) - 1$

Απ' τη ②: $n \le 2^{d+1} - 1 \Rightarrow 2^{d+1} \ge n+1 \Rightarrow \log(2^{d+1}) \ge \log(n+1) \Rightarrow d+1 \ge \log(n+1) \Rightarrow d \ge \log(n+1) - 1$

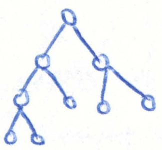
⑦ Αν το T είναι πλήρες ή δομή σωρού τότε τα ①,...,⑥ ισχύουν με ισότητα

Αν $h = d - l$:= βάθος $\Rightarrow$ # κορυφών βάθους $\boxed{h \le \frac{n+1}{2^{h+1}}}$

Πλήρες δυαδικό δένδρο



Δομή σωρού



(στο τελευταίο επίπεδο λείπουν φύλλα από δεξιά προς αριστερά)

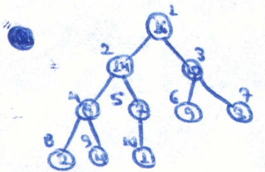
κορυφών βάθους h = # κορυφών επιπέδου $l = 2^l$

{απ' τη ② $\Rightarrow 2^{d+1} = n+1 \Rightarrow 2^{d+1-l+l} = n+1 \Rightarrow 2^l = \frac{n+1}{2^{d-l+1}} = \frac{n+1}{2^{h+1}}$ }

Σωρός (heap): δομή σωρού για την οποία οι κορυφές της σχετίζονται με τιμές ενός πίνακα A με A[1,...,n] και για τις οποίες ισχύει ότι: $\boxed{\text{τιμή(κορυφής)} \ge \text{τιμή(παιδιού)}}$

A:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
16	14	10	8	7	9	3	2	4	1



} Ισχύουν οι σχέσεις: PARENT(i) = $\lfloor i/2 \rfloor$
LEFT(i) = 2i
RIGHT(i) = 2i+1

Για i = 2 → PARENT(2) = 1
LEFT(2) = 4
RIGHT(2) = 5

⊛ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ ΣΩΡΟΥ

• HEAPIFY $(A[1,\dots,n], i)$

Input: $A[1,\dots,n]$, i το $A[i]$ μπορεί να μην επαληθεύει την ιδιότητα σωρού

Output: Δένδρο με ρίζα $A[i]$ που είναι σωρός

ψευδοκώδικας:
```
l = LEFT(i); r = RIGHT(i);
if l ≤ n ∧ A[l] > A[i] then max = l else max = i;
if r ≤ n ∧ A[r] > A[max] then max = r;
if max ≠ i then
        swap(A[i], A[max]);
        HEAPIFY(A[1,...,n], max);
```

Π.Χ.Π. (HEAPIFY) $= O(h)$

• BUILDHEAP (A)

Input: Δομή σωρού $A[1,\dots,n]$

Output: σωρός $A[1,\dots,n]$

ψευδοκώδικας:
```
for i = n/2 down to 1 do HEAPIFY(A[1,...,n], i);
```
HEAPIFY ↳ $O(h) = O(\log n)$

Π.Χ.Π.1 $= O(n\cdot d) = O(n\cdot \log n) \Rightarrow$ upper bound

Π.Χ.Π.2 $= \sum_{h=0}^{\log n} (\#\text{κορυφών ύψους } h)\times h \le \sum_{h=0}^{\log n} \frac{n}{2^{h+1}}\cdot h = \frac{n}{2}\sum_{h=0}^{\log n} h\left(\frac{1}{2}\right)^h = \frac{n}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = \underline{O(n)}$

• HEAPSORT

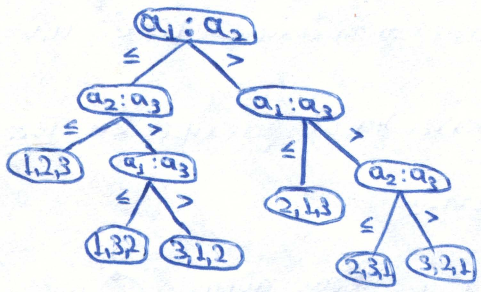
Input: πίνακας $A[1,\dots,n]$

Output: ταξινομημένος A

ψευδοκώδικας:
```
(1). BUILDHEAP(A)
(2). for i = n down to 2 do
        swap(A[1], A[i]);
        HEAPIFY(A[1,...,i-1], 1);
```

Π.Χ.Π. $= \underbrace{n}_{(1)} + \underbrace{n\log n}_{(2)} = O(n\log n)$

⊛ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ a_1, a_2, a_3 ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΣΥΓΚΡΙΣΕΩΝ



d ύψος

$\left.\begin{array}{l}\text{Π.Χ.Π.} \ge \text{ύψος δένδρου απόφασης} \\ \#\text{φύλλων} = n! \le 2^d \Rightarrow d \ge \log(n!)\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Π.Χ.Π. (οποιουδήποτε αλγ. ταξινόμησης) $\ge \log(n!) =$

$= \sum_{i=1}^{n} \log i \ge \int_0^n \log x\,dx = (x\log x - x)\Big|_0^n = n\log n - n =$

$= \underline{O}(n\log n)$

(*) ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ (διάτρεξη)

S: σύνολο κορυφών που έχουμε επισκεφθεί και οι οποίες πιθανόν να έχουν γειτονικές πλευρές διέλευσης.

$u \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ w$: έχουμε επισκεφθεί την u αλλά όχι την w.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ (G,S):

```
for all u∈V do visited[i] = false;
    S = {s}; visited[s] = true; π(s) = 0;
                                πατέρας
    while S ≠ ∅ do
        πάρε κάποια κορυφή u απ' το S;
        if ∃ πλευρά διέλευσης (u,w)∈E then
            visited[w] = true; π(w) = u;
            S = S ∪ {w};
        else
            S = S − {u};
    endofwhile
```

$T(while) = n \cdot O(1) + T(if) =$
$= O(n + \sum_{u \in V} deg(u)) = \underline{O(n+m)}$

- $U = \{u : visited[i] = true\} = \{u : \exists$ διαδρομή $s-u\}$
- $\pi()$ ορίζει δένδρο με ρίζα την s → $G_\pi = (V, E_\pi)$ με $E_\pi = \{(\pi(u), u)\}$

(*) ΔΕΝΔΡΑ

Ελεύθερο δένδρο: άκυκλο συνεκτικό γράφημα

Θεώρημα

Έστω $G(V,E)$ ένα γράφημα. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(1) Το G είναι δένδρο
(2) Οποιεσδήποτε 2 κορυφές συνδέονται με μια μοναδική απλή διαδρομή
(3) Το G είναι συνεκτικό αλλά αν διαγραφεί μια πλευρά τότε γίνεται μη συνεκτικό
(4) Το G " " και $m = n-1$ (m → αριθμός πλευρών)
(5) " " " άκυκλο " $m = n-1$
(6) " " " " αλλά αν προστεθεί μια πλευρά τότε δημιουργείται κύκλος

(1)→(2): u ⌒ v ⇒ κύκλος ⇒ μη δένδρο

(2)→(3): Έστω 2 γειτονικές κορυφές u—v. Η (u,v) είναι η μοναδική απλή διαδρομή μεταξύ u,v ⇒ διαγραφή της κάνει το G μη συνεκτικό.

(3)→(4): Για $n=1$ ή $n=2$ ⇒ $m=0$ ή $m=1$ (ισχύει). Έστω ότι ισχύει για όλες τις τιμές $<n$. Τότε:

$T_1 \triangleright u - v \triangleleft T_2 \}\ m = |E(T_1)| + |E(T_2)| + 1 = |V(T_1)| + |V(T_2)| - 1 - \cancel{1} + \cancel{1} = n-1$

(4)→(5): Έστω ότι ∃ κύκλος $u_1, u_2, \dots, u_k$ $\}\ G_k = (V_k, E_k)$ με $|V_k| = |E_k| = k$. Έστω τώρα: $u_1, u_2, u_3 \ \}\ G_{k+1}$

Είναι: $G_{k+1} = (V_k \cup \{u_{k+1}\}, E_k \cup \{u_{k+1}\})$ με $|V_{k+1}| = |E_{k+1}| = k+1$

οπότε, για $G_n = (V_n, E_n) \Rightarrow |V_n| = |E_n| = n > n-1 \Rightarrow$ άτοπο γιατί έχουμε $n-1$ πλευρές.

(5)→(6): G άκυκλο και κάθε συνεκτική συνιστώσα (έστω k από αυτές) είναι δένδρα (εξ ορισμού).

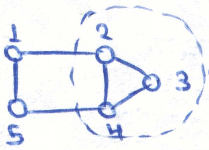
οπότε, αφού (1)→(5), $m = (n_1-1)+(n_2-1)+\dots+(n_k-1) = n-k = n-1$ ($k=1$) και το G είναι δένδρο

(1)→(3) ∃ μοναδική απλή διαδρομή από το v στο u: v ... u ⇒ προσθέτοντας την (v,u) δημιουργείται κύκλος.

(6)→(1):

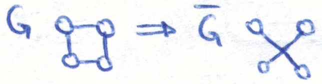
u — v Αν προσθέσουμε μια πλευρά δημιουργείται κύκλος ⇒ ∃ διαδρομή μεταξύ των u και v ⇒ το G είναι συνεκτικό και άρα άκυκλο ⇒ το G είναι δένδρο.

⊛ Κλίκα: πλήρες υπογράφημα του G:



→ κλίκα: $\{2,3,4\}$

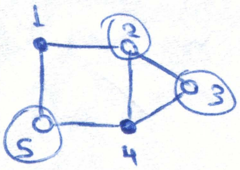
Συμπλήρωμα: $\bar{G}$ του G: $\bar{G} = (V, V\times V - E)$:



} δηλαδή κάνω το πλήρες γράφημα και αφαιρώ τις πλευρές που υπάρχουν στο G.

Ανεξάρτητο σύνολο κορυφών I: $I = \{u_1, \dots, u_k : \forall\, 1 \le i, j \le k,\ (u_i, u_j) \notin E\}$

π.χ.



$I = \{1,4\}$ και $C = \{2,3,5\}$ ⇒ υποσύνολο κορυφών που καλύπτει το G (ή C) → όλες οι πλευρές του G συντρέχουν σε τουλάχιστον μια κορυφή του C.

⊛ ΘΕΩΡΗΜΑ

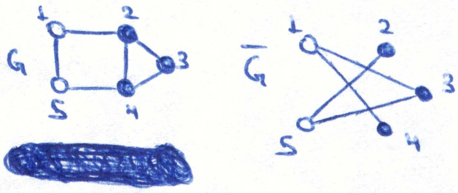
Αν θεωρήσουμε το γράφημα $G = (V,E)$ και το $S \subseteq V$ τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i) S είναι κλίκα του G

ii) S " ανεξάρτητο σύνολο στο $\bar{G}$

iii) V−S καλύπτει το $\bar{G}$

π.χ.



$S = \{2,3,4\}$ $I = \{2,3,4\}$

$C = \{1,5\}$

(i)→(ii): S είναι κλίκα στο G ⇒ ∃ πλευρά (x,y), $\forall x,y \in S \Rightarrow (x,y) \notin \bar{G}$, $\forall x,y \in S \Rightarrow$ το S είναι ανεξάρτητο του $\bar{G}$

(ii)→(iii): S ανεξάρτητο σύνολο στο $\bar{G}$ ⇒ όλες οι πλευρές έχουν το άλλο άκρο τους στο V−S ⇒ V−S καλύπτει το $\bar{G}$

(iii)→(i): Αφού V−S καλύπτει το $\bar{G}$ ⇒ ∄ πλευρά στο $\bar{G}$ που να έχει και τα 2 άκρα της στο S ⇒ ∃ πλευρά μεταξύ δύο οποιονδήποτε κορυφών του S στο G ⇒ το S είναι κλίκα στο G.

⊛ Να εφαρμοσθεί ο FFT για το $A=[2\ 3\ -1\ -4\ 2\ 3\ -1\ -4]^T$.

Είναι:

	1ο βήμα		2ο βήμα	3ο βήμα	4ο βήμα	
000	2	000	2	4	2	0
001	3	100	$2 \cdot \omega^0$	0	0	0
010	-1	010	-1	$-2 \cdot \omega^0$	6	$6+14\omega^2$
011	-4	110	$-1 \cdot \omega^0$	$0 \cdot \omega^2$	0	0
100	2	001	3	6	$-2 \cdot \omega^0$	4
101	3	101	$3 \cdot \omega^0$	0	$0 \cdot \omega^1$	0
110	-1	011	-4	$-8 \cdot \omega^0$	$14 \cdot \omega^2$	$6-14\omega^2$
111	-4	111	$-4 \cdot \omega^0$	$0 \cdot \omega^2$	$0 \cdot \omega^3$	0

$= \hat{A}$

⊛ Απ' το $\hat{A}=[0\ 0\ 6+14\omega^2\ 0\ 4\ 0\ 6-14\omega^2\ 0]^T$ θέλουμε το αρχικό

Είναι:

000	0	000	0	4	16	16
001	0	100	$4 \cdot \omega^0$	-4	$-4+28\omega^2$	-32
010	$6+14\omega^2$	010	$6+14\omega^2$	$12 \cdot \omega^0$	-8	-8
011	0	110	$6-14\omega^2 \cdot \omega^0$	$28\omega^2 \cdot \omega^2$	$-4-28\omega^2$	24
100	4	001	0	0	$0 \cdot \omega^0$	16
101	0	101	$0 \cdot \omega^0$	0	$0 \cdot \omega^1$	-32
110	$6-14\omega^2$	011	0	$0 \cdot \omega^0$	$0 \cdot \omega^2$	-8
111	0	111	$0 \cdot \omega^0$	$0 \cdot \omega^2$	$0 \cdot \omega^3$	24

$= \hat{\hat{A}}$

Διαιρώ με το 8:

8 στοιχεία

$\hat{A} = [2,\ -4,\ -1,\ 3,\ 2,\ -4,\ -1,\ 3]$, κρατάω το 1ο στοιχείο και αντιστρέφω τα άλλα στη σειρά

$\Rightarrow [2,\ 3,\ -1,\ -4,\ 2,\ 3,\ -1,\ -4]$ και έτσι βρίσκω το A.

Σχέσεις αναδρομής (recurrences)

- ## Σωστή πρόβλεψη (substitution method)

Έστω $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1$ Υποθέτω ότι $T(n) = O(n) \longrightarrow \underline{T(n) \leq c \cdot n}$

Άρα: $T(n) \leq 2 \cdot c \cdot \frac{n}{2} + 1 = cn + 1 = \underline{O(n)} \longrightarrow$ δεν αρκεί (αποδείξαμε κάτι διαφορετικό)

Οπότε, υποθέτω ότι $\underline{T(n) \leq cn - b}$. Τότε:

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1 \leq 2 \cdot (\frac{cn}{2} - b) + 1 = cn - 2b + 1 \leq cn - b$ όταν είναι $-b + 1 \leq 0 \Rightarrow \underline{b \geq 1}$

- ## Αντικατάσταση μεταβλητών

Έστω $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$. Θέτω $n = 2^m \Rightarrow m = \log n$ και $\sqrt{n} = 2^{m/2}$

άρα: $T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + m \xrightarrow[S(m) = T(2^m)]{} S(m) = 2S(\frac{m}{2}) + m$

Υποθέτω ότι $S(m) = O(m \log m) \Rightarrow S(m) \leq c \cdot m \cdot \log m$.

Άρα: $S(m) = 2S(\frac{m}{2}) + m \leq 2c\frac{m}{2}\log\frac{m}{2} + m = cm\log m - cm\log 2 + m = cm\log m - cm + m \leq cm\log m$. Άρα: $S(m) = O(m\log m) \longrightarrow T(n) = T(2^m) = S(m) \leq$

$\leq \underline{c \cdot \log n \cdot \log(\log n)}$

- ## Επαναληπτική μέθοδος (iteration method)

Έστω $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^2$. Τότε:

$T(1) = c$

$$T(n) = 2T(n/2) + n^2$$
$$\cancel{2T(n/2)} = 2 \cdot 2T(\tfrac{n}{4}) + 2(\tfrac{n}{2})^2$$
$$2^2T(\tfrac{n}{4}) = 2^3T(\tfrac{n}{2^3}) + 2^2(\tfrac{n}{4})^2$$
$$\vdots$$
$$2^{k-1}\cancel{T(\tfrac{n}{2^{k-1}})} = 2^kT(\tfrac{n}{2^k}) + 2^{k-1} \cdot (\tfrac{n}{2^{k-1}})^2$$

$\frac{n}{2^k} = 1 \Rightarrow \underline{k = \log_2 n}$

$T(n) = 2^{\log_2 n}T(1) + n^2 \cdot \sum_{k=0}^{k-1} \frac{1}{2^i} \leq$

$\leq c \cdot n + n^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = c \cdot n + 2n^2 = \underline{O(n^2)}$

{Για το κ-οστό βήμα θα είναι: $\frac{n}{2^k} = 1 \Rightarrow k = \log_2 n$
Άρα η λύση είναι το πολύ $n^2 \cdot \log_2 n = O(n^2)$}

Έστω $T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n$. Τότε:

$T(1) = c$

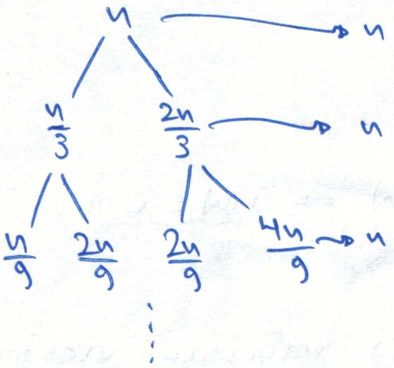
$$T(n) = 3T(\tfrac{n}{4}) + n$$
$$3T(\tfrac{n}{4}) = 3^2T(\tfrac{n}{4^2}) + 3 \cdot \tfrac{n}{4}$$
$$3^2T(\tfrac{n}{4^2}) = 3^3T(\tfrac{n}{4^3}) + 3^2 \cdot \tfrac{n}{4^2}$$
$$\vdots$$
$$3^{k-1}T(\tfrac{n}{4^{k-1}}) = 3^kT(\tfrac{n}{4^k}) + 3^{k-1} \cdot \tfrac{n}{4^{k-1}}$$

$n/4^k = 1$

$T(n) = 3^kT(1) + n \cdot \sum_{i=0}^{k-1}(\frac{3}{4})^i \leq c \cdot 3^{\log_4 n} + n \cdot \sum_{i=0}^{\infty}(\frac{3}{4})^i = c \cdot n^{\log_4 3} + n \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} \leq$

$\leq c \cdot n^{0,8} + 4n = O(n)$

Έστω $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n$. Κάνουμε επίλυση με recursion tree:



Για το κ-οστό βήμα θα είναι: $\left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot n = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{n} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^k = n \Rightarrow \underline{k = \log_{3/2} n}$

Άρα η λύση είναι το πολύ $\underline{n \cdot \log_{3/2} n = O(n \lg n)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Για $a, b \in Z^+$, $b \geq 2$, $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ και

$$T(x) = \begin{cases} g(1) & , x = 1 \\ aT(x/b) + g(x) & , x > 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T(n) = \sum_{i=0}^{k} a^i g\left(\frac{n}{b^i}\right) \quad , \text{για } n = b^k}$$

MASTER THEOREM

Για $a, b \in Z^+$, $b \geq 2$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}_0^+$, $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \rightsquigarrow g(x) = O(x^{\gamma} \cdot \log_b^{\delta} x)$ και

$$T(x) = \begin{cases} g(1) & , x = 1 \\ aT(\frac{x}{b}) + g(x) & , x > 1 \end{cases} \Rightarrow T(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b a} \cdot \log_b^{\delta} n) & , \text{αν } a > b^{\gamma} \\ O(n^{\gamma} \cdot \log_b^{\delta+1} n) & , \text{αν } a = b^{\gamma} \\ O(n^{\gamma} \cdot \log_b^{\delta} n) & , \text{αν } a < b^{\gamma} \text{ και } (\gamma > 0 \text{ ή } \delta \geq 1) \\ O(\log_b n) & , \text{αν } a < 1 \text{ και } (\gamma = 0 \text{ και } \delta > 1) \end{cases}$$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ ΣΩΡΟΥ

• HEAPIFY (A[1,...,n], i)

input: A[1,...,n], i το A[i] μπορεί να μην επαληθεύει την ιδιότητα σωρού
output: δένδρο με ρίζα A[i] που είναι σωρός

```
l=LEFT(i); r=RIGHT(i);
if l≤n ∧ A[l]>A[i] then max=l else max=i;
if r≤n ∧ A[r]>A[max] then max=r;
if max≠i then
        swap (A[i], A[max]);
        HEAPIFY (A[1,...,n], max);
```

Π.Χ.Π.(HEAPIFY) = O(h)

BUILDHEAP(A)

input: δομή σωρού A[1,...,n]
output: σωρός A[1,...,n]

for $i=\frac{n}{2}$ downto 1 do HEAPIFY(A[1,...,n], i); $\to O(h)=O(\log n)$

Π.Χ.Π. 1 = $O(n\cdot d) = O(n\log n)$ ⇒ upper bound

ΠΧΠ. 2 =

$$= \sum_{h=0}^{\log n} (\#\text{κορυφών βάθους } h) \times h \le \sum_{h=0}^{\log n} \frac{n}{2^{h+1}}\cdot h = \frac{n}{2}\sum_{h=0}^{\log n} h\left(\frac{1}{2}\right)^h =$$

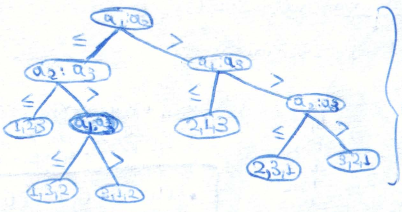
$$= \frac{n}{2}\cdot\frac{1/2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = O(n)$$

HEAPSORT

input: πίνακας A[1,...,n]
output: ταξινομένος A

```
(1) BUILDHEAP(A)
(2) for i=n downto 2 do
        swap(A[1], A[i]);
        HEAPIFY(A[1,...,i-1], 1);
```

$\Big\}$ ΠΧΠ = $\underset{(1)}{n} + \underset{(2)}{n\log n} = O(n\log n)$



ΠΧΠ ≥ ύψος δένδρου απόφασης
#φύλλων = $n! \le 2^d \Rightarrow d \ge \log(n!)$ $\Big\}$ ⇒

άρα ⇒ ΠΧΠ (οποιουδήποτε αλγ. ταξινόμησης) $\ge \log(n!) = \sum_{i=1}^{n}\log i \ge \int_1^n \log x\,dx =$

$= (x\log x - x)\Big|_1^n = n\log n - n = \Omega(n\log n)$

RECURRENCES

• Σωστή πρόβλεψη: $T(n) = 2T(\frac{n}{2})+1$, υποθέτω $T(n)=O(n) \Rightarrow T(n)\le cn$. Άρα $T(n) \le 2c\frac{n}{2}+1 = cn+1 = O(n)$ ↳ δεν αρκεί

οπότε υποθέτω $T(n)\le cn-b$: $T(n) = 2T(\frac{n}{2})+1 \le 2(\frac{cn}{2}-b)+1 = cn-2b+1 \le cn-b$ όταν είναι $b\ge 1$

• Αντικατάσταση μεταβλητών: $T(n) = 2T(\sqrt{n})+\log n$. Θέτω $n=2^m \Rightarrow m=\log n \Rightarrow \sqrt{n}=2^{m/2}$ ⇝ $T(2^m) = 2T(2^{m/2})+m \xrightarrow{S(m)=T(2^m)} \underline{S(m) = 2S(\frac{m}{2})+m}$

Υποθέτω ότι $S(m) = O(m\log m) \Rightarrow S(m)\le cm\log m$

Άρα: $S(m) = 2S(\frac{m}{2})+m \le 2c\frac{m}{2}\log\frac{m}{2}+m = cm\log m - cm\log 2 + m = cm\log m + m \le cm\log m - cm + m \le cm\log m$ ($\underline{c\ge 1}$). Άρα $S(m) = O(m\log m)$

Άρα $T(n) = T(2^m) = S(m) \le c\log n\log(\log n)$

• Επαναληπτική μέθοδος (iteration method)

Έστω $T(n) = 2T(\frac{n}{2})+n^2$, ΠΗ $= c$. Τότε:

$T(n) = \cancel{2T(\tfrac{n}{2})}+n^2$

$\cancel{2T(\tfrac{n}{2})} = 2\cdot 2T(\frac{n}{4}) + 2(\frac{n}{2})^2$

$2^2T(\frac{n}{4}) = 2^3T(\frac{n}{2^3}) + 2^2(\frac{n}{4})^2$

$2^{k-1}T(\frac{n}{2^{k-1}}) = 2^kT(\frac{n}{2^k}) + 2^{k-1}\cdot(\frac{n}{2^{k-1}})^2$

$\Big\}\ T(n) = 2^{\log n}T(1) + n^2\sum_{k=0}^{k-1}\frac{1}{2^i} \le cn + n^2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = cn+2n^2 = O(n^2)$, όπου $\frac{n}{2^k}=1 \Rightarrow k=\log n$

Για το k-οστό βήμα: $\frac{n}{2^k}=1 \Rightarrow k=\log_2 n$
Άρα η λύση είναι το πολύ $n^2\log_2 n = O(n^2)$

Έστω $T(n) = 3T(\frac{n}{4})+n$, $T(1)=c$. Τότε:

$T(n) = \cancel{3T(\tfrac{n}{4})}+n$

$\cancel{3T(\tfrac{n}{4})} = 3^2T(\frac{n}{4^2}) + 3\frac{n}{4}$

$\cancel{3^2T(\tfrac{n}{4^2})} = 3^3T(\frac{n}{4^3}) + 3^2\frac{n}{4^2}$

$3^{k-1}T(\frac{n}{4^{k-1}}) = 3^kT(\frac{n}{4^k}) + 3^{k-1}\frac{n}{4^{k-1}}$

$\Big\}\ T(n) = 3^kT(1) + n\sum_{i=0}^{k-1}(\frac{3}{4})^i \le c3^{\log_4 n} + n\cdot\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{3}{4})^i = cn^{\log_4 3} + n\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}} \le \underset{O(n)}{cn^{0,8}} + \underset{O(n)}{4n} = O(n)$

$T(n) = T(\frac{n}{3})+T(\frac{2n}{3})+n$

$n \to n$
$\frac{n}{3}\quad \frac{2n}{3} \to n$
$\frac{n}{9}\quad \frac{2n}{9}\quad \frac{2n}{9}\quad \frac{4n}{9} \to n$

Για το k-οστό βήμα είναι: $(\frac{2}{3})^k\cdot n = 1 \Rightarrow (\frac{2}{3})^k = \frac{1}{n} \Rightarrow (\frac{3}{2})^k = n \Rightarrow k = \log_{3/2} n$, άρα η λύση είναι το πολύ $\boxed{n\cdot\log_{3/2} n = O(n\log n)}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Για $a,b\in\mathbb{Z}^+$, $b\ge 2$, $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ και $T(x) = \begin{cases} g(1) & , x=1 \\ aT(\frac{x}{b})+g(x) & , x>1\end{cases}$

$\Rightarrow T(n) = \sum_{i=0}^{k} a^i g(\frac{n}{b^i})$, για $n=b^k$

MASTER THEOREM: $a,b\in\mathbb{N}$, $b\ge 2$, $\gamma,\delta\in\mathbb{R}_0^+$, $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ με $g(x) = O(x^\gamma\log_b^\delta x)$ και $T(x) = \begin{cases} g(1) & , \text{αν } x=1 \\ aT(\frac{x}{b})+g(x) & , \text{αν } x>1\end{cases}$ Τότε:

$$T(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b a}\cdot\log_b^\delta n) & \text{αν } a>b^\gamma \\ O(n^\gamma\cdot\log_b^{\delta+1} n) & \text{αν } a=b^\gamma \\ O(n^\gamma\cdot\log_b^\delta n) & \text{αν } a<b^\gamma \text{ και } \gamma>0 \text{ ή } \delta\ge 1 \\ O(\log_b n) & \text{αν } a<1, \text{ και } \gamma=0 \text{ και } \delta<1\end{cases}$$

Π.Χ. $T(n) = 2T(\frac{n}{2})+n \Rightarrow a=b=2$, $g(n) = n = n^1\cdot\log_2^0 n \Rightarrow \gamma=1, \delta=0$, επίσης $\frac{a}{b^\gamma} = \frac{2}{2^1} = 1$
άρα 2η περ. ⇝ $T(n) = O(n^1\log_2^1 n) = O(n\log n)$

Π.Χ. $T(n) = \frac{1}{2}T(\frac{4n}{5})+\sqrt{\log n} \Rightarrow a=\frac{1}{2}<1$, $b=\frac{5}{4}$, $g(n) = \sqrt{\log n} = n^0\log_2^{1/2} n = O(n^0\log_{5/4}^{1/2} n) \Rightarrow$
$\Rightarrow \gamma=0, \delta=\frac{1}{2} \Rightarrow$ 4η περ. ⇝ $T(n) = O(\log_{5/4} n) = O(\log n)$

ASYMPTOTIC NOTATIONS

• $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow |f(n)| \le c\cdot|g(n)|$
• $f(n) = \Omega(g(n)) \Rightarrow |f(n)| \ge c\cdot|g(n)|$
• $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow c_1|g(n)| \le |f(n)| \le c_2|g(n)|$
$\quad c_3|f(n)| \le |g(n)| \le c_4|f(n)|$
• $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0}$

Για μεγάλα n η ιεραρχία είναι $\log n$, n σε δύναμη, $c>1$ με εκθέτη n:

↳ $c_1\cdot\log n < c_2 n < c_3 c^n$, $c_1,c_2,c_3>0$, $c>1$ και $c_4 n^k < c_5 c^n$, $c_4,c_5>0$, $c>1$

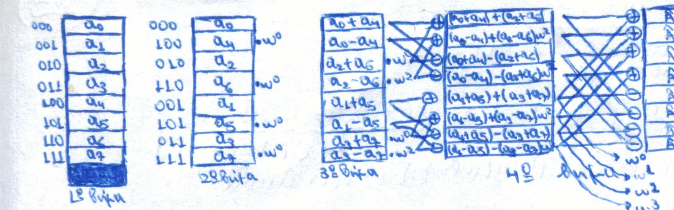
π.χ.
$n^5+n^5\log n = O(n^5\log n)$
$n^5+3n^{10000}+(1{,}1)^n = O[(1{,}1)^n]$
$0{,}5n^2-3n = \Theta(n^2)$
$6n^2-4 = \Theta(5n^2+n)$
$2^n = \Omega(n+5)$
$n^2-1000n = O(500n^3)$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ(G,s) S: κορυφές που έχουμε επισκεφθεί και οι οποίες πιθανόν να έχουν γειτονικές ακμές διέλευσης
$v \to w$ → έχουμε επισκεφθεί την v αλλά όχι την w.

```
for all v∈V do visited[i]=false;
  S={s}; visited[s]=true; π(s)=0;
  while S≠∅ do
     πάρε κάποια κορυφή v από το S;
  if ∃ πλευρά διέλευσης (v,w)∈E then
     visited[w]=true; π(w)=v;
     S=S∪{w};
  else S=S-{v};
end of while
```

$\Big\}\ T(\text{while}) = n\cdot O(1) + T(\text{if}) = O(n+\sum_{v\in V}\deg(v)) = O(n+m)$

FFT Για $N=8$, $A=[A(0),\dots,A(7)]^T=[a_0,\dots,a_7]^T \rightarrow \theta=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$ και $w=e^{i\theta}=\cos\theta+i\cdot\sin\theta=\frac{\sqrt2}{2}+i\cdot\frac{\sqrt2}{2}$. Υπάρχουν $1+\log N=4$ σχηματα. $(w_k=w^k,\ k=0,\dots,(N-1))$



Έχω $\hat A=[0\ 0\ 6+14w^2\ 0\ 4\ 0\ 6-14w^2\ 0]^T \rightarrow A=;$

0	0	4	16	16
0	4	-4	$-4+28w^2$	-32
$6+14w^2$	$6+14w^2$	12	-8	-8
0	$6-14w^2$	$28w^2$	$-4-28w^2$	24
4	0	0	0	16
0	0	0	0	-32
$6-14w^2$	0	0	0	-8
0	0	0	0	-24

$=\hat{\hat A} \rightarrow$ διαιρώ με το 8 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{\hat A}=[2, -4, -1, 3, 2, -4, -1, 3]^T$ και κρατάω το 1º στοιχείο και αντιστρέφω τα άλλα σε σειρά $\Rightarrow$

$\Rightarrow [2, 3, -1, -4, 2, 3, -1, -4]^T = A.$

$$\hat A(j)=\sum_{k=0}^{N-1}A(k)e^{kij\theta},\ j=0,\dots,N-1,\ i^2=-1,\ \theta=\frac{2\pi}{N}$$

$w^0=w^{\pm8}=w^{\pm16}=1,\ w^4=-1=-w^0,\ w^5=-w,\ w^6=-w^2,\ w^7=-w^3$

ΜΟΝΑ-ΖΥΓΑ $n=2^p-1$, $n\times n$ $Ax=b$ με $x=[x_1,\dots,x_n]^T$, $b=[b_1,\dots,b_n]^T$ και $A=$ τριδ $(a,-b,a)$. 1η εφαρμογή της μεθόδου $\rightsquigarrow 2^{p-1}-1$ διάσταση

$$\left.\begin{aligned} x_{j-2}-bx_{j-1}+x_j &= b_{j-1}\\ x_{j-1}-bx_j+x_{j+1} &= b_j\\ x_j-bx_{j+1}+x_{j+2} &= b_{j+1}\end{aligned}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow} x_{j-2}-(b^2-2)x_j+x_{j+2}=bb_j+(b_{j-1}+b_{j+1})$$

(j ζυγός)

Για $A=$ τριδ$(1,-2,1)$ και $b=[0\ 0\ 0\ -2\ 0\ 0\ 0]^T$ $\}$ $n=7 \rightsquigarrow 2^p-1=7\Rightarrow p=3$. Παίρνω 3 εξισώσεις για το 1º βήμα
$n=7$, $Ax=b$
$(b=2,\ a=1)$

$$\left.\begin{aligned} x_{j-2}-bx_{j-1}+x_j &= b_{j-1}\\ x_{j-1}-bx_j+x_{j+1} &= b_j\\ x_j-bx_{j+1}+x_{j+2} &= b_{j+1}\end{aligned}\right\}\underset{\text{πολ/σμός με } b}{\overset{(+)}{}}\ \underset{①}{x_{j-2}-(b^2-2)x_j+x_{j+2}=bb_j+(b_{j-1}+b_{j+1})}$$

① Θέτω $j=4$: $x_2-2x_4+x_6=-4$
$j=2$: $-2x_2+x_4=0$
$j=6$: $x_4-2x_6=0$ $\}$ $x_2=\dots$, $x_4=\dots$, $x_6=\dots$ $\}$ Από το αρχικό βρίσκω τα $x_1, x_3,\dots$

$A=$ τριδ$(-1,10,-1)$ 63×63
$Ax=b$, $b(j)=8j$, $j=1,\dots,62$, $b(63)=568$ $\}$ μετά από $\underset{6}{2\text{ βήματα}}$: $n=63\Rightarrow 2^p-1=63\Rightarrow p=6$

$2^{p-2}-1=15$ εξισώσεις.

Στο 3º βήμα: $2^{p-3}-1=7$ εξισώσεις:

$$\begin{aligned} -x_{j-4}+10x_{j-3}-x_{j-2} &= b_{j-3}\\ -x_{j-3}+10x_{j-2}-x_{j-1} &= b_{j-2}\\ -x_{j-2}+10x_{j-1}-x_j &= b_{j-1}\\ -x_{j-1}+10x_j-x_{j+1} &= b_j\\ -x_j+10x_{j+1}-x_{j+2} &= b_{j+1}\\ -x_{j+1}+10x_{j+2}-x_{j+3} &= b_{j+2}\\ -x_{j+2}+10x_{j+3}-x_{j+4} &= b_{j+3}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} -x_{j-4}+98x_{j-2}-x_j &= \dots\\ -x_{j-2}+98x_j-x_{j+2} &= \dots\\ -x_j+98x_{j+2}-x_{j+4} &= \dots\end{aligned}\right\}\rightarrow 1\text{ εξίσωση}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ Δ&Β $n\rightarrow$ αρχικό σχημάτυπο
$n=2^p \rightsquigarrow p=\log n$

- $T(i)=T(i-1)+E(i)\rightarrow T(i)=b+\sum_{j=i_0+1}^{i}E(j)$, $i=i_0,\dots,p$, $T(i_0)=b$
  $T(p)=b+\sum_{j=i_0+1}^{p}E(j)$ (για το αρχικό σχημάτυπο)

- $T(i)=2T(i-1)+E(i)$ και $\tau(i)=2^{p-i}T(i)\Rightarrow \tau(i)=\tau(i-1)+2^{p-i}E(i)$, $i=i_0+1,\dots,p$, $T(i_0)=2^{p-i_0}b$
  $\rightsquigarrow \tau(i)=2^{p-i_0}b+\sum_{j=i_0+1}^{i}2^{p-j}E(j)$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Η διαδικασία $u_k=\sqrt[3]{\frac{2}{3-u_{k-1}^2}}$, αν συγκλίνει τότε καθώς $k\rightarrow\infty$ το u_k και το u_{k-1} θα πλησιάζουν όλο και περισσότερο μεταξύ τους. Άρα για πολύ μεγάλο k μπορούμε να θεωρήσουμε $u_{k-1}=u_k=x$. Άρα: $x=\sqrt[3]{\frac{2}{3-x^2}}\Rightarrow x^3=\frac{2}{3-x^2}\Rightarrow 3x^3-x^5=2\Rightarrow x^5-3x^3+2=0$ (βρίσκω τη ρίζα της)

$f(x,y)=x^2-xy+y^2-7x+2y$

Ελάχιστο της f έχω όταν $\nabla f(x,y)=0\Rightarrow$ $\left.\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}&=0\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}2x-y-7&=0\\ -x+2y+2&=0\end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned}x&=\tfrac12(y+7)\\ y&=\tfrac12(x-2)\end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned}x^{k+1}&=\tfrac12(y^k+7)\\ y^{k+1}&=\tfrac12(x^k-2)\end{aligned}\right\}$ μέθοδος Jacobi: οι εξισώσεις λύνονται ως πρός τις αντίστοιχες μεταβλητές συναρτήσει των υπολοίπων $\}$ π.χ. $u_2^k=\left(-\frac{1}{a_{22}}\right)\left[a_{21}u_1^{k-1}+a_{23}u_3^{k-1}+\dots+a_{2n}u_n^{k-1}-b_2\right]$

Gauss-Seidel:
$$u_4^k=-\frac{1}{a_{44}}\left(a_{41}u_1^k+a_{42}u_2^k+a_{43}u_3^k+a_{45}u_5^{k-1}+\dots+a_{4n}u_n^{k-1}-b_4\right)$$

Έχουμε: $\left.\begin{aligned}x&=\tfrac12(y+7)\\ y&=\tfrac12(x-2)\end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned}x^{k+1}&=\tfrac12(y^k+7)\\ y^{k+1}&=\tfrac12(x^{k+1}-2)\end{aligned}\right\}$ αφού $u_1^k=-\frac{1}{a_{11}}(a_{12}u_2^{k-1}-b_1)$, $u_2^k=-\frac{1}{a_{22}}(a_{21}u_1^k-b_2)$

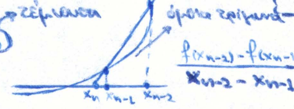
SOR: $u_i^{k+1}=(1-w)\cdot u_i^k+w\cdot u_{i,GS}^{k+1}$ $\}$ Άρα: $x^{k+1}=(1-w)x^k+w\cdot\frac12(y^k+7)$, $y^{k+1}=(1-w)y^k+w\cdot\frac12(x^{k+1}-2)$

$\left.\begin{aligned}f_n&=2f_{n-1}+5f_{n-2}-6f_{n-3}\\ f_0&=0,\ f_1=8,\ f_2=2\end{aligned}\right\}\ f_n=x^n\Rightarrow$
$\Rightarrow x^n=2x^{n-1}+5x^{n-2}-6x^{n-3}\ \div x^{n-3}$
$\Rightarrow x^3=2x^2+5x-6\Rightarrow x^3-2x^2-5x+6=0\Rightarrow \underset{1}{(x-1)}\underset{-2,\ 3}{(x^2-x-6)}=0\Rightarrow f_n=c_1x_1^n+c_2x_2^n+c_3x_3^n$
$\Rightarrow f_n=c_1\cdot1+c_2(-2)^n+c_3\cdot3^n$: $\left.\begin{aligned}f_0&=0\Rightarrow c_1+c_2+c_3=0\\ f_1&=8\Rightarrow \dots\\ f_2&=2\Rightarrow \dots\end{aligned}\right\}\ c_1=\dots, c_2=\dots, c_3=\dots$

$f(x)=x^3+12x^2-2x-24$ (να βρεθεί η μικρότερη θετική ρίζα)

(α) $f(0)=-24$, $f(1)=-13$, $f(2)=26$ $\}$ ανάμεσα 1, 2 • $f(1,5)=3,375$ • $f(1,25)=-5,6$ • $f(1,375)=-1,462$ $\}$ μικρότερη θετ. ρίζα $\rightsquigarrow$ 1,375
διχοτόμηση

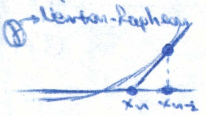
(β) τέμνουσα



$$\frac{f(x_{n-2})-f(x_{n-1})}{x_{n-2}-x_{n-1}}=\frac{f(x_{n-1})-\cancel{f(x_n)}^{\,0}}{x_{n-1}-x_n}\Rightarrow x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})\cdot(x_{n-2}-x_{n-1})}{f(x_{n-2})-f(x_{n-1})}$$

$x_0=2$, $x_1=1$ $\}$ $x_2=1,39707$, $x_3=1,4354$, $x_4=\dots$ $\}$ 3 βήματα

(γ) Newton-Raphson



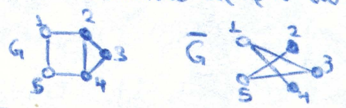
$$f'(x_{n-1})=\frac{f(x_{n-1})}{x_{n-1}-x_n}\Rightarrow x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$x_0=2$: $x_1=1,517$, $x_2=\dots$, $x_3=1,414$ $\}$ 3 βήματα

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν θεωρήσουμε $G=(V,E)$ και $S\subseteq V$ τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
(i) S κλίκα του G, (ii) S ανεξάρτητο σύνολο στο $\bar G$, (iii) $V-S$ καλύπτει το $\bar G$

(i)→(ii): S κλίκα στο $G\Rightarrow\exists$ πλευρά (x,y), $\forall x,y\in S\Rightarrow (x,y)\notin\bar G$, $\forall x,y\in S\Rightarrow$ το S είναι ανεξάρτητο του $\bar G$
(ii)→(iii): S ανεξάρτητο στο $\bar G\Rightarrow$ όλες οι πλευρές έχουν το άλλο άκρο τους στο $V-S\Rightarrow V-S$ καλύπτει το $\bar G$
(iii)→(i): Αφού $V-S$ καλύπτει το $\bar G\Rightarrow\nexists$ πλευρά στο $\bar G$ που να έχει και τα 2 άκρα της στο $S\Rightarrow\exists$ πλευρά μεταξύ 2 οποιονδήποτε κορυφών του S στο $G\Rightarrow$ το S είναι κλίκα στο G.

π.χ.



$S=\{2,3,4\}$
$I=\{2,3,4\}$
$\mathcal{G}=\{1,5\}$ όλες οι πλευρές του $\bar G$ συντρέχουν σε τουλάχιστον 1 κορυφή του $\mathcal{G}$

$\bar G=(V, V\times V-E)$ αν $G=(V,E)$

ΔΕΝΤΡΑ-ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

$G(V,E)$ γράφημα
① G δένδρο
② Οποιεσδήποτε 2 κορυφές συνδέονται με 1 απλή διαδρομή
③ G συνεκτικό αν αφαιρεθεί 1 πλευρά μη συνεκτικό
④ G συνεκτικό και $m=n-1$ ($m\rightarrow$ πλευρές)
⑤ " " άκυκλο $m=n-1$
⑥ " " " αν όμως προστεθεί 1 πλευρά δημιουργείται κύκλος

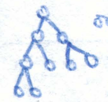
①→② $u \frown v\Rightarrow$ κύκλος $\Rightarrow$ μη δένδρο
②→③ έστω 2 γειτ. κορυφές $u\rightarrow v$. Η (u,v) είναι η μοναδική απλή διαδρομή μεταξύ u,v και διαγραφή της κάνει το G μη συνεκτικό
③→④ Για $n=1$ ή $2\Rightarrow m=0$ ή 1 (ισχύει). Έστω ότι ισχύει για όλες τις τιμές $<n$. Τότε:
T_1 T_2 $\}$ $m=|E(T_1)|+|E(T_2)|+1=|V(T_1)|-1+|V(T_2)|-1+1=$
$=n-1$
④→⑤ Έστω ότι $\exists$ κύκλος u_1, u_2, u_k $\}$ $G=(V_k,E_k)$ με $|V_k|=|E_k|=k$
Έστω τώρα u_1, u_2, u_3, u_{k+1} $\}$ G_{k+1}
Είναι: $G_{k+1}=(V_k\cup\{u_{k+1}\},E_k\cup\{u_{k+1}\})$ με $|V_{k+1}|=|E_{k+1}|=k+1$
όποτε, για $G_n=(V_n,E_n)\Rightarrow |V_n|=|E_n|=n>n-1\Rightarrow$ άτοπο γιατί έχω $n-1$ πλευρές
⑤→⑥ G άκυκλο και κάθε συνεκτική συνιστώσα (έστω k απ' αυτές) είναι δένδρα, οπότε αφού ①→⑤, $m=(n_1-1)+(n_2-1)+\dots+(n_k-1)=n-k=n-1$ ($k=1$) και το G είναι δένδρο
①→② $\exists$ μοναδική απλή διαδρομή από το v στο u: $v\frown u\Rightarrow$ προσθέτοντας την (v,u) δημ. κύκλος
⑥→① $u\ v$ Αν προσθ. 1 πλευρά δημ. κύκλος $\Rightarrow\exists$ διαδρομή μεταξύ u και $v\Rightarrow$ το G είναι συνεκτικό και άρα άκυκλο $\Rightarrow$ το G είναι δένδρο

Θ. Euler: το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών ενός γραφήματος είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των πλευρών του

Ιδιότητες δυαδικών δένδρων (n κορυφές και ύψος d)

- $\exists\le 2^l$ κορυφές στο επίπεδο του l
- $n\le 2^{d+1}-1$
- $\frac{n-1}{2}\le n_0\le\frac{n+1}{2}$
- $n_0=\#$ κορυφών με 0 παιδιά, $n_2=\#$ " " 2 " $\}$ $n_0=n_2+1$
- $n_0\le 2^d$
- $d\ge\log(n+1)-1$
- Αν το T είναι πλήρες ή δομή σωρού τότε τα ①, … ⑥ ισχύουν με ισότητα
  Αν $h=d-l=$ βάθος

Δομή σωρού



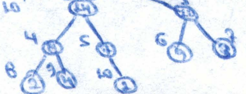
στο τελευταίο επίπεδο λείπουν φύλλα από δεξιά πρός αριστερά

$\#$ κορυφών βάθους h $-$ $\#$ κορυφών επιπέδου $l=2^l$

Σωρός (heap): δομή σωρού για την οποία οι κορυφές της σχετίζονται με τιμές ενός πίνακα A με $A[1,\dots,n]$ και για τις οποίες ισχύει: $\boxed{\text{τιμή(κορυφής)}\ge\text{τιμή(παιδιού)}}$

A:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
16	14	10	8	7	9	3	2	4	1



$\mathrm{PARENT}(i)=\lfloor i/2\rfloor$
$\mathrm{LEFT}(i)=2i$
$\mathrm{RIGHT}(i)=2i+1$