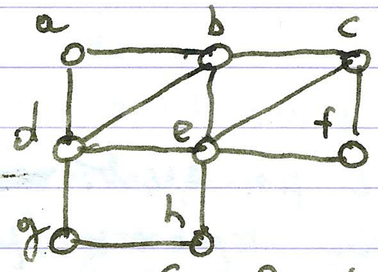
4/11/08

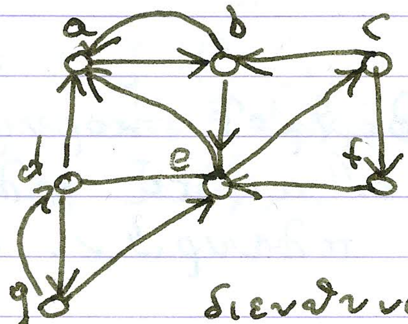
Γραφήματα $G = (V, E)$ $V =$ κορυφές ή κόμβοι

$E \subseteq V \times V$ $E =$ πλευρές ή ακμές

(1)



μη διευθυνόμενο



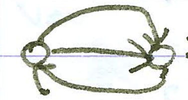
διευθυνόμενο

(a, b) (b, a)

(c, b) $(b, c$ δυνατά

Απλά Γραφήματα: δεν υπάρχουν βρόγχοι και παράλληλες ακμές

: βρόγχοι



: παράλληλες ακμές

$|V| = n$

$|E| = m$ $m \leq n(n-1) = O(n^2)$ διευθυνόμενο

$m \leq \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$ μη —"—

m: μέγιστος αρ. ακμών σε απλό γράφημα.

n: πληθάριθμος κορυφών

Υπογράφημα $G' = (V', E')$ γράφημα: $V' \subseteq V$ & $E' \subseteq E$

Επαγόμενο υπογράφημα (induced subgraph)

$G' = (V', E')$

$V' \subseteq V$, $E' = \{(x, y) \in E \mid x \in V' \text{ \& } y \in V'\}$

αυτό δεν είναι επαγόμενο του (1)

γτ λείπουν 2 ακμές (d, b), (e, b)

Στα διευθυνόμενα η κατεύθυνση των ακμών πρέπει να είναι ίδια στα υπογραφήματα του

• Βαθμός κορυφής v σε μη διευθ. γράφημα είναι το πλήθος των προσκείμενων πλευρών.

$$\deg(v) = \#\text{ προσκείμενων ακμών}$$

• Στα διευθυνόμενα γραφήματα:
βαθμός εισόδου $\text{in-deg}(v) = \#$ προσκ. με v τελική κορυφή
—//— εξόδου $\text{out-deg}(v) = \#$ —//— με v αρχική κορυφή

• Θεώρημα (διευθυνόμενων): $\sum_{v\in V} \text{in-deg}(v) = m = \sum_{v\in V} \text{out-deg}(v)$

• Θεώρημα (μη διευθυνόμενων): $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$

Διαδρομή: ακολουθία κορυφών $(v_1, \dots, v_k) : \forall\, 1 \le i < k,\ (v_i, v_{i+1}) \in E$
(δηλ. όλες οι διαδοχικές κορυφές της διαδρομής πρέπει να συνδέονται με ακμές)
π.χ. (a, b, a, e, c)

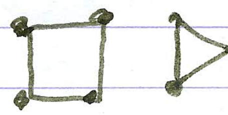
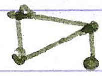
Ημιδιαδρομή: $(v_1, \dots, v_k) : \forall 1 \le i < k$ είτε $(v_i, v_{i+1}) \in E$
είτε $(v_{i+1}, v_i) \in E$

Απλή διαδρομή: διαδρομή χωρίς επανάληψη κορυφών

Κύκλος: απλή διαδρομή η τα άκρα της συμπίπτουν

Συνεκτικά

→ Μη διευθ. : συν $\forall\, x,y \in V \;\; \exists\, \Delta(x,y)$

 ← μη συνεκτικό  ← συνεκτικό

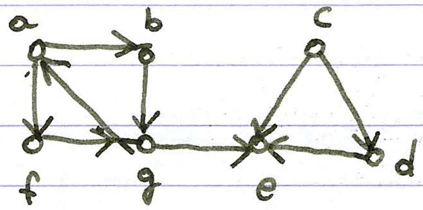
→ Διευθ. :

ημιδιαδρομή

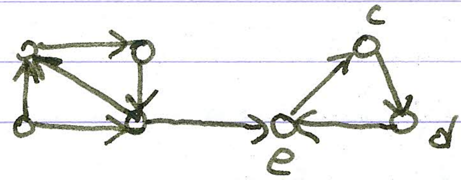
i) ασθενώς συνεκτικό : $\forall\, x,y \in V \;\; \exists\, H\Delta\,(x,y)$

ii) μονομερώς συνεκτικό : $\forall x,y \in V$ είτε $\exists\, \Delta(x,y)$ είτε $\Delta(y,x)$

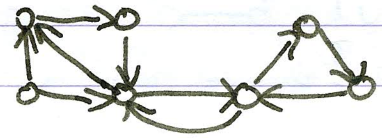
iii) ισχυρά συνεκτικό : $\forall\, x,y \in V,\;\; \exists\, \Delta(x,y)$



ασθενώς συνεκτικό
(δεν υπάρχει (d,a))



μονομερώς συνεκτικό



ισχυρά συνεκτικό

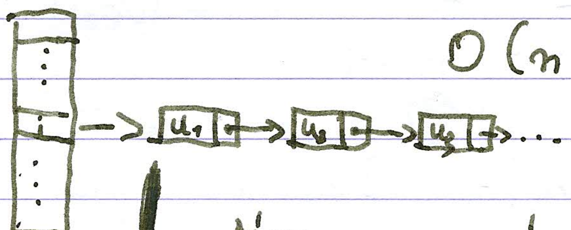
Μητρώο Γειτνίασης
$n \times n$

$$A[i,j] = \begin{cases} 1 & a(i,j) \in E \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&1 \\ 0&1&1&1 \\ 0&1&0&0 \\ 1&1&1&0 \end{bmatrix}$$

Χρειάζεται $O(n^2)$ χώρο

Λίστα γειτνίασης



$$O\Big(n + \sum_{i \in V} \text{out-deg}(i)\Big) = O(n+m)$$

! Λίστες γειτνίασης: γραμμικός χώρος καταλ... όμως ο χρόνος εύρεσης γειτνίασης μη σταθερός. Γι' αυτό αποφεύγονται έλεγχοι γειτνίασης όπου... αλγόριθμοι

5/11/08

<u>Δένδρο</u> : άκυκλο συνεκτικό μη διευθυνόμενο γράφημα

<u>Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες</u>

(i) Το $G=(V,E)$ είναι δένδρο

(ii) Οποιεσδήποτε 2 κορυφές συνδέονται με μια μόνο διαδρομή

(iii) G είναι συνεκτικό αλλά η διαγραφή μιας ακμής επιφέρει μη συνεκτικότητα

(iv) G συνεκτικό και $m=n-1$

(v) G είναι άκυκλο και $m=n-1$

(vi) G είναι άκυκλο, αλλά αν προστεθεί μια πλευρά, τότε δημιουργείται κύκλος

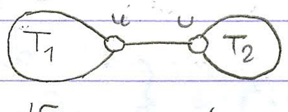
<u>Αποδείξεις (i)-(vi)</u> $\boxed{\text{SOS για εξετάσεις}}$!

• (i) => (ii) Έστω ότι υπάρχουν 2 διαδρομές μεταξύ 2 κορυφών x, y x⚬⚬y => υπάρχει κύκλος
άτοπο από ορισμό δένδρου

• (ii) => (iii) Αφού μεταξύ 2 κορυφών υπάρχει μια μοναδική διαδρομή => η πλευρά (u, v) u⚬—⚬v είναι η μοναδική διαδρομή μεταξύ u και v
άρα η διαγραφή πλευράς το κάνει μη συνεκτικό

• (iii) => (iv)

$\boxed{\text{Απόδειξη με επαγωγή}}$



$n=1 \Rightarrow m=1-1=0$ ισχύει

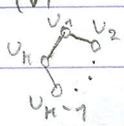
Έστω ότι ισχύει για $|V|<n$ (1)

(ισχύει ότι $|V(T_1)|<n$ και $|V(T_2)|<n$, δηλαδή το κάθε υπογράφημα το πολύ $n-1$ κόμβους θα έχει (ο άλλος για να φτάσουν στο n είναι ο v για το T_1 και ο u για το T_2))

$$m = |E(T_1)| + 1 + |E(T_2)| \overset{\text{από (1)}}{=} |V(T_1)| - 1 + 1 + |V(T_2)| - 1 =$$
$$= |V(T_1)| + |V(T_2)| - 1 = n-1$$

Χρησιμοποιώ την υπόθεση (1) γιατί τα T_1 και T_2 έχουν μικρότερο από n πλήθος κορυφών

• (iv) ⇒ (v) Έστω ότι το G έχει κύκλο (κ κορυφών)

G_k: 

$|V(G_k)| = |E(G_k)| = k$

$|V(G_{k+1})| = |E(G_{k+1})| = k+1$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία πρόσθεσης μιας κορυφής και της προσκείμενης ακμής μέχρι να πάρω όλες τις κορυφές

$G_n: |V(G_n)| = |E(G_n)| = n \Rightarrow m = n \neq n-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ άτοπο ως προς τον αριθμό των πλευρών

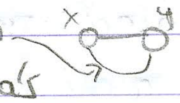
• (v) ⇒ (vi) G άκυκλο ⇒ κάθε συνεκτική συνιστώσα

T_1 T_2 ... T_k είναι δένδρο

n_1 n_2 ... n_k

(i) ⇒ (iv) : $m = n-1 = n_1 - 1 + n_2 - 1 + \dots + n_k - 1$

$\Leftrightarrow n-1 = \underbrace{n_1 + n_2 + \dots + n_k} - k \Leftrightarrow$

προσθήκη μιας πλευράς δημιουργεί κύκλο 

$k=1 \Rightarrow G$ είναι δένδρο

$\Rightarrow$ υπάρχει μοναδική διαδρομή μεταξύ x, y

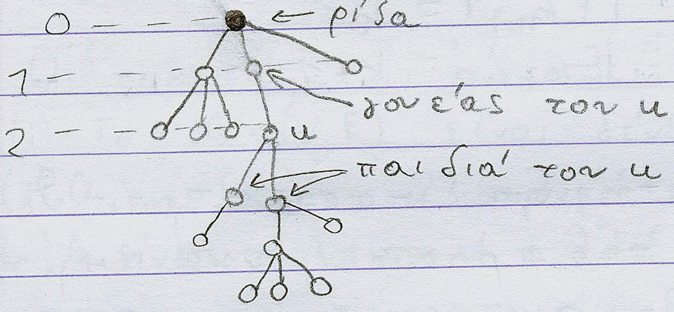
• (vi) ⇒ (i): 

υπάρχει διαδρομή μεταξύ x κ y και αυτό ισχύει

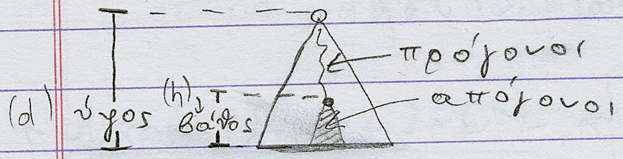
$\forall x, y \in V \Rightarrow G$ είναι συνεκτικό και αφού είναι άκυκλο τότε είναι δένδρο.

(Είναι σημαντικό να αποδειχθούν με αλυσιδωτή σειρά (και όχι π.χ. το (v) απ' το (ii) π είναι εύκολο) ώστε να αποδειχθεί πως είναι όλα ισοδύναμα μεταξύ τους)

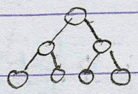
Δένδρο με ρίζα



ύψος: μέγιστο επίπεδο
επίπεδο u: αριθμός πλευρών στη μοναδική διαδρομή από τη ρίζα r στην u



Δυαδικό δένδρο λέγεται αυτό που κάθε κόμβος έχει το πολύ 2 παιδιά. Πλήρες λέγεται αυτό π έχει το μέγιστο δυνατό αριθμό παιδιών (ergo στο δυαδικό πλήρες 2 παιδιά ανά κόμβο)



1) # κορυφών στο επίπεδο $\ell \le 2^{\ell}$

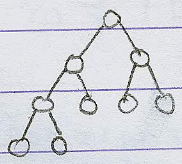
2) $n = 2^{d+1} - 1$, d = ύψος (πλήρες δυαδικό)

$$n = \sum_{\ell=0}^{d} 2^{\ell} = \frac{2^{d+1}-1}{2-1} = 2^{d+1} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n+1 = 2^{d+1} \Leftrightarrow d+1 = \log(n+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = \log(n+1) - 1 = O(\log n)$$

Δομή σωρού: δυαδικό δένδρο πλήρες εκτός ίσως από το τελευταίο επίπεδο



Σωρός: δομή σωρού στις κορυφές της οποίας αντιστοιχίζονται στοιχεία του A[1...n] έτσι ώστε να ικανοποιείται η
ιδιότητα σωρού: τιμή του γονέα είναι μεγαλύτερη ή ίση από την τιμή των παιδιών

11/11/2008

$$T = \sum_{h=0}^{\log n} \underbrace{(\#\text{κορυφών βάθους } h)}_{\le \frac{n}{2^{h+1}}} O(h) =$$

$\le \frac{n}{2^{h+1}} \rightarrow$ ιδιότητα δυαδικών δέντρων

$$= O\left(\sum_{h=0}^{\log n} \frac{n}{2^{h+1}} h\right) = O\left(n \underbrace{\sum_{h=0}^{\infty} h/2^{h+1}}_{\le 2}\right) = O(n)$$

HEAPSORT A[1...n]

1) BUILDHEAP (A)

2) for i=n down to 2

  { swap (A[1], A[i]);

   HEAPIFY (A[1...i-1], 1); }

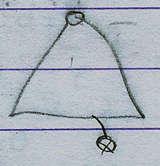
Ουρά προτεραιότητας (Priority Queue)

κάθε στοιχείο $\leftrightarrow$ τιμή

INSERT (A, x) $\rightarrow O(\log n)$

Find-Max (A) $\rightarrow O(1)$

DEL-Max (A) $\rightarrow O(\log n)$

INSERT : 

θέτουμε το x στο τελευταίο κενό παιδί από τα αριστερά και κλήση HEAPIFY στο γονέα του x

DEL-Max swap ρίζα με τελ.

σβήνουμε την τελ. θέση

κ HEAPIFY στην νέα ρίζα

Διερεύνηση / Διάτρεξη Γραφήματος

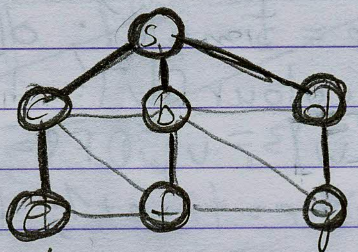
TRAVERSAL (G, s)

1) for all $v \in V$ { visited[v] = false; πλευρά[v]=0; }
2) $S = \{s\}$; visited[s] = true;
3) while $S \neq \emptyset$
   πάρε κάποια κορυφή $v \in S$
   if $\exists (v,w) \in E$: visited[v] = true AND visited[w] = false
   then { visited[w] = true;
   $S = S \cup \{w\}$; }
   else $S = S - \{v\}$;

$\boxed{T = \left(V, \bigcup_{w \in V} (G[w], w)\right)}$

Παίρνω μια τυχαία κορυφή.
Αν έχει μια αμαρκάριστη κορυφή γράφω την άλλη στο σύνολο S (και έτσι μαρκάρεται).
Αν δεν έχει αμαρκάριστη σβήνω απ' το S την τυχαία κορυφή π διάλεξα

Σχηματίζεται δένδρο



○ ← αμαρκάριστο
● ← μαρκαρισμένο

Το T είναι συνεκτικό και το πλήθος των πλευρών του T είναι $n-1$

1) Αναπαράσταση S
2) Επιλογή κορυφής απ' το S
3) Επιλογή γειτονικών ακμών διεέλευσης

Γραμμική στην είσοδο πολυπλοκότητα

• Πολυπλοκότητα TRAVERSAL
1) $O(n)$
2) $O(1)$
3) $O\left(\sum_{v \in V} \deg(v)\right) = O(m)$

Σύμφωνα με τον αλγ. για κάθε τυχαία v π σημειώνω κοιτάζω μόνο τις αμαρκάριστες γειτονικές της άρα →

προσθέτω ένα δείκτη π
δείχνει στο επόμενο ΑΜΑΡΚΑΡΙΣΤΟ

$v \mid \to \quad w_1 \to w_2 \to \dots \to w_i \dots \to w_k$

(i) Πρώτη κορυφή του S => Αναζήτηση πρώτα κατά πλάτος => S: ουρά

(ii) Τελευταία κορυφή του S => Αν. πρώτα κατά βάθος => S: στοίβα (stack)

18/11/2008

Αναζήτηση πρώτα κατά Βάθος

κορυφές ∈ { O (white), O (red), O (yellow) } ?

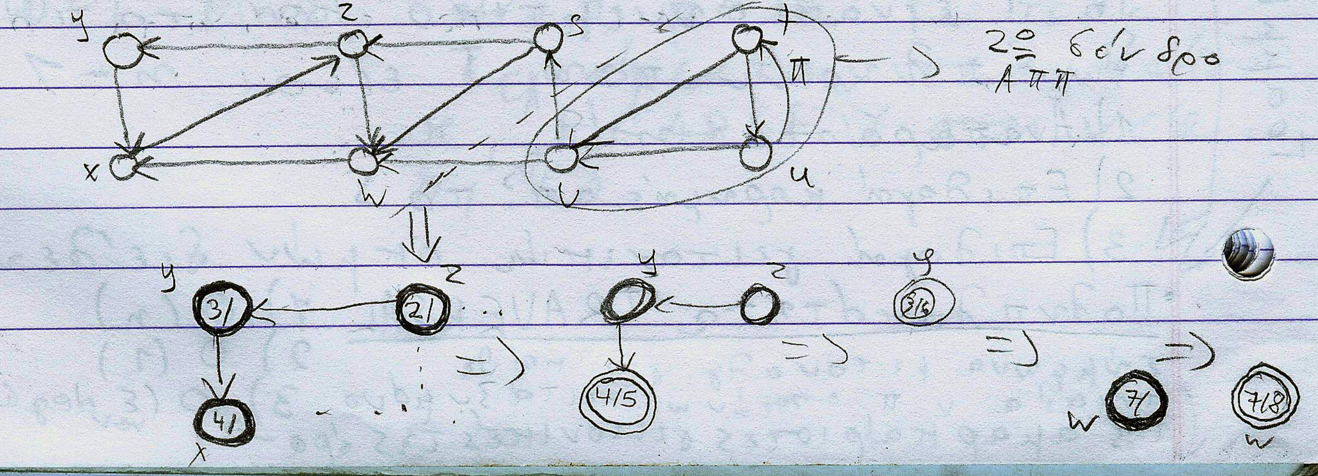
- white: μη μαρκαρισμένη
- red: βάζω 1η φορά
- yellow: "εγκαταλείπω"

Τι έπαθε η Μαρκέλλα?

Μαρία

DFS (G)
1) for all $v \in V$ { colour[v] = white; π[v] = 0; }
2) time = 0;
3) forall $v \in V$ { if colour[v] = white then DFS-visit(v); }

DFS-visit (v)
colour(v) = red; time = time+1; d[v] = time;
forall $(v, w) \in E$ { if colour[w] = white
then π[w] = v; DFS-visit(w); }
colour[v] = yellow; time = time+1; f[v] = time;



=> 1/ s => 1/10 s => μετά διαλέγω μια άσπρη (την t)

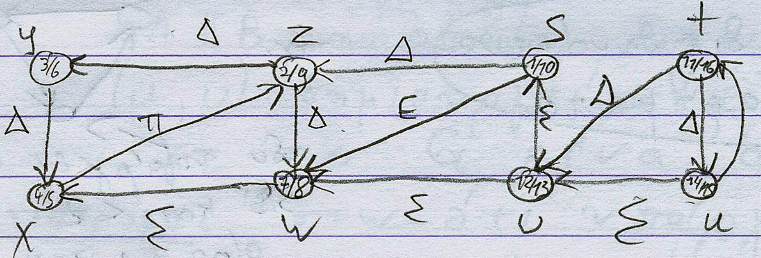
11/ => 12/ u => 12/13 u => επιστρέφω στην t

κ διατρέχω την ακμή t–u 14/ u =>

=> 14/15 u => t 11/16 => δεν έχει άλλες λευκές άρα τέλειωσα

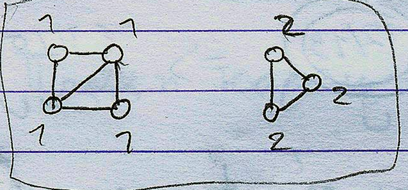
κορυφές: Δ δένδρου (κορυφή -> παιδί)
Π πίσω (κορυφή -> πρόγονο)
Ε εμπρός (κορυφή -> απόγονος)
Σ συνδετική

(Απόγονος = όχι άμεσο παιδί)



το πως προκύπτει αυτό εξαρτάται απ' την εκτέλεση του αλγορίθμου ~~π~~ ότι αρχίσαμε απ' το s

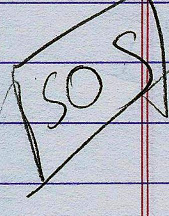
CC[υ] = συνεκτική συνιστώσα που περιέχει την υ

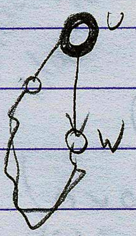


στο γράφημα αυτό έχω 2 συνεκτικές συνιστώσες

Αν το G είναι μη διευθυνόμενο, τότε η ΑΠΒ κατηγοριοποιεί τις πλευρές σε δέντρο ή σε πίσω πλευρές

Απόδειξη: $d(υ) < d(w)$ => θα ανακαλύψουμε την υ πριν τη w => είτε θα διατρέξω τη (υ,w) ή κάποια άλλη διαδρομή προς τη w => η (υ,w) είναι πλευρά δέντρου είτε θα ανακαλύψουμε την w και θα διατρέξουμε την (w,υ) => => η (w,υ) είναι πίσω πλευρά

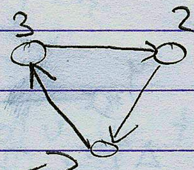




Τοπολογική Διάταξη

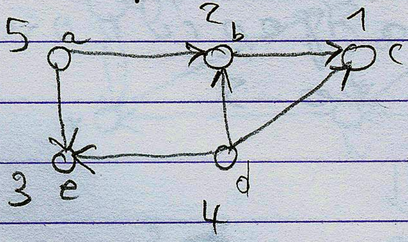
έχουν μόνο τα διευθυνόμενα ακυκλικά γραφήματα

πχ.



δεν υπάρχει αρ. $\in \mathbb{N}$ >3 και <2 άρα μη τοπ.

τοπολογική διάταξη $l: V \to \mathbb{N}: \forall (x,y) \in E \;\; l(x) > l(y)$



→ τοπολογική διάταξη

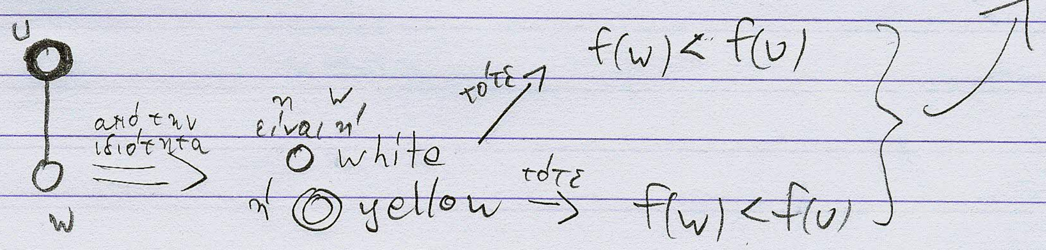
χρόνος εγκατάλειψης

1) Τρέχουμε DFS(G) για υπολογισμό $f[u]$, $\forall u \in V$
2) Κάθε κορυφή που εγκαταλείπεται τοποθέτησέ την στην αρχή λίστας L
3) Επέστρεψε την L

<u>Θεώρημα</u> Ο αλγόριθμος δημιουργεί τοπολογική διάταξη σε ένα διευθυνόμενο άκυκλο γράφημα.

<u>Ιδιότητα</u> G είναι ΔΑΓ $\Leftrightarrow$ ΑΠΒ (G) δεν επιστρέφει πίσω ακμές

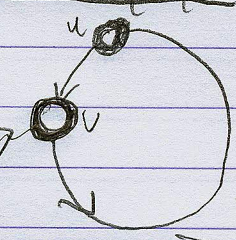
<u>Απόδειξη (θεωρ)</u>: αρκεί ν.δ.ο.: $\forall (u,w) \in E$, $f(u) > f(w)$



<u>Απόδειξη Ιδ</u>:

<u>Ευθύ</u>: Έστω ότι επιστρέφει πίσω πλευρά $(u,v) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ διαδρομή από v στη u στο δένδρο ΑΠΒ, διαδρομή μαζί με τη (u,v) δημιουργεί κύκλο $\Rightarrow$ άτοπο γτ το G είναι ακυκλικό.

<u>Αντίστροφο</u>: Έστω ότι υπάρχει κύκλος στο G



έστω v η 1η κορυφή του κύκλου που συναντά η ΑΠΒ, κ έστω u η τελευταία κορυφή του C π αναικαλύπτει η ΑΠΒ μετά τη v. Τότε η (u,v) είναι πίσω πλευρά $\Rightarrow$ άτοπο

καθώς πάμε από τη v στον κύκλο κοκκινίζουμε όλες τις κορυφές.
Όταν πρέπει να πάμε από u σε v έχουμε πίσω πλευρά γτ πάμε από κόκκινη σε κόκκινη