Επιστημονικός Υπολογισμός Ι
2η Εργαστηριακή Άσκηση

Ημερομηνία επιστροφής για πλήρη βαθμό: **07/12/2014** Ώρα: **23:59**
Δεν θα δοθεί καμία παράταση!!

Προσοχή: *Μπορείτε να συζητήσετε την άσκηση με συναδέλφους σας αλλά αν διαπιστωθεί αντιγραφή, θα* ***μηδενιστεί*** *ο βαθμός σας. Δείτε και τις οδηγίες που αναφέρονται στους κανόνες βαθμολογίας!*

Μην ξεχάσετε:
Σε μία παράγραφο να αναφέρετε όπως και στην πρώτη άσκηση τα χαρακτηριστικά του υπολογιστικού σας συστήματος.

- Αναφέρεται κατά πόσον χρησιμοποιούνται εντολές FMA από το σύστημά σας.

Ερώτημα 1 - Πράξεις με Πολυώνυμα

Σκοπός του ερωτήματος είναι η βαθύτερη κατανόηση της αριθμητικής πεπερασμένης ακρίβειας την οποία χρησιμοποιεί το MATLAB. Θα διερευνήσετε την επίδραση της αριθμητικής πεπερασμένης ακρίβειας πάνω σε πράξεις με πολυώνυμα. Αρχικά όμως θα πρέπει να μελετήσετε ορισμένες συναρτήσεις του MATLAB οι οποίες είναι σχεδιασμένες για τη διαχείριση πολυωνύμων.

(α΄) Σε μία παράγραφο να εξηγήσετε για ποιο λόγο χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις: `poly,polyval`. Να μελετήσετε τους κώδικες και να εξηγήσετε πώς ακριβώς λειτουργούν οι συναρτήσεις αυτές.

(β΄) Στο ερώτημα αυτό θα ασχοληθείτε με πολυώνυμα της μορφής:

$$p(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-i)$$

Τα πολυώνυμα αυτά φαίνονται πολύ απλά, αλλά (όπως και πολλά άλλα πολυώνυμα) είναι “δόλια”, κατά τον πετυχημένο χαρακτηρισμό του διάσημου ερευνητή James Wilkinson, γιατί η διαχείρισή τους κρύβει παγίδες.

Έστω το πολυώνυμο p_n για δυνάμεις του $n = 15 : 2 : 25$

Να υλοποιήσετε script MATLAB το οποίο:

(i) Θα υπολογίζει τους συντελεστές του πολυωνύμου p_n σε μορφή δυναμορφής

$$\{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0\}$$

(τους οποίους θα πρέπει να υπολογίσετε μέσω της κατάλληλης συνάρτησης `MATLAB`) .

(ii) Θα υπολογίζει τις τιμές του κάθε πολυωνύμου στα σημεία $x = 1, x = n$. Εξηγείστε τι παρατηρείτε.

(iii) Να συγκρίνετε τις ρίζες που επιστρέφει η συνάρτηση `MATLAB roots` με τις πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου. Παρουσιάστε τα αποτελέσματα και τις πραγματικές ρίζες σε κοινή γραφική παράσταση. Σχολιάστε τι παρατηρείτε.

Ερώτημα 2 - Αθροίσματα - Μονάδα Στρογγύλευσης

Η άθροιση μεγάλου συνόλου αριθμών μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά σφάλματα στρογγύλευσης. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για να ελεγχθεί αυτό. Παρακάτω θα εξετάσουμε μερικές από αυτές.

(α΄) Να υλοποιήσετε `script MATLAB` το οποίο θα υπολογίζει το άθροισμα για είσοδο x ενός συνόλου αριθμών δοθέντων μονής ακρίβειας (`single precision`) με τις παρακάτω μεθόδους:

- (i) Με σειρά από αριστερά προς τα δεξιά όπως δίνεται η είσοδος.
- (ii) Η είσοδος ταξινομείται σε αύξουσα σειρά πρώτα.
- (iii) Η είσοδος x_i αρχικά ταξινομείται σε αύξουσα σειρά. Στη συνέχεια υπολογίζεται το $x_1 + x_2$ και το αποτέλεσμα ενθέτεται στη λίστα έτσι ώστε να διατηρείται η διάταξη $x_3, \ldots, x_n$. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να απομείνει μόνο ένα νούμερο που θα είναι και το αποτέλεσμά μας.
- (iv) Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο άθροισης Pichat & Neumaier's

```
s = x_1;
e = 0;
for i = 2:n
    if abs(s) >= abs(x_i)
        [s,e_i] = fast2sum(s,x_i);
    else
        [s,e_i] = fast2sum(x_i,s);
    end
    e = e + e_i
end
return s+e

[s,t] = fast2sum(a,b)
s = a+b;
z = s-a;
t = b-z;
```

Σε όλες τις περιπτώσεις, ως "σωστό" άθροισμα θα θεωρείται το θεωρητικό αποτέλεσμα, εφόσον είναι γνωστό από τα δεδομένα του προβλήματος και αν όχι, τότε η τιμή του λαμβάνεται χρησιμοποιώντας διπλή ακρίβεια.

(β΄) Δοκιμάστε το script σας για τις παρακάτω εισόδους.

- (i) x_i είναι ο i-οστός όρος της σειράς Taylor για το e^{-2pi} για $n = 64$ όρους.
- (ii) $x_1 = x_2 \ldots x_{2047} = 1.0, x_{2048} = x_{2049} = 1.0e - 18, x_{2050} = x_{2051} = \cdots = x_{4096} = -1.0$
- (iii) x_i ισαπέχουν στο διάστημα $[1, 2]$ για $n = 4096$
- (iv) $x_i = 1/i^2$, για $n = 4096$

(γ΄) Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας για τους διαφορετικούς τύπους εισόδων και μεθόδων.

Ερώτημα 3 - Γραμμικά Συστήματα

Μέρος Α

Θέλουμε να αξιολογήσουμε σφάλματα αριθμητικής κινητής υποδιαστολής που μπορεί να προκύψουν για την πράξη επίλυσης συστήματος εξισώσεων $Ax = b$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Η επίλυση στη `Matlab` μπορεί να γίνει με τον τελεστή \ ή τη συνάρτηση `mldivide`.

Για τους παρακάτω τύπους μητρώων και μεγέθους $n = 512$

1. Για τυχαία μητρώα A με τη συνάρτηση `randn`
2. Για μητρώα που είναι κάτω τριγωνικά χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις `tril` και `randn`

3. Για μητρώα άνω τριγωνικά που επιστρέφει η συνάρτηση `lu` από το `randn`
4. Για μητρώα που παράγονται απο την συνάρτηση `gfpp` [1].
5. Για μητώα vandermonde που παράγονται από
   (i) ισαπέχουσες τιμές μεταξύ $[-1, 1]$ (βλ. συνάρτηση `linspace`)
   (ii) τιμές "Chebyshev" παραγόμενες ως $\cos\frac{\kappa\pi}{n+1}$ $\kappa = 0 : n$

(α΄) Υλοποιήστε `script MATLAB` που
   (i) Θα υπολογίζει τον δείκτη κατάστασης του μητρώου A, ως προς τη νόρμα μεγίστου.
   (ii) Θα υπολογίζει το εμπρός σχετικό σφάλμα. Θεωρούμε πως η λύση μας είναι το μοναδιαίο διάνυσμα `x=ones(n,1)` όποτε επιλέγουμε κατάλληλα το b. Για την νόρμα επιλέγουμε την νόρμα μεγίστου.
   (iii) Θα υπολογίζει το πίσω σφάλμα.

(β΄) Σχολιάστε αν τα αποτελέσματα για τα σφάλματα συμφωνούν με τις θεωρητικές προβλέψεις (φράγματα).

Μέρος Β

Στο μέρος αυτό συγκρίνουμε σφάλματα αριθμητικής κινητής υποδιαστολής που προκύπτουν για την πράξη του κλασσικού πολλαπλασιασμού μητρώων και τον block πολλαπλασιασμό μητρώων χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Strassen .

(α΄) Για τους παρακάτω τύπους μητρώων:
   (i) Για τυχαία τετραγωνικά μητρώα `rand` μεγέθους $n = 1024$
   (ii) Για μητρώα vandermonde μεγέθους $n = 1024$
   (iii) $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} MA_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ όπου $I = eye(n)$, τυχαία τετραγωνικά μητρώα $A_i = rand(n), i = 1 : 4$ και σταθερά $M = 10^7$ και $n = 512$

(β΄) Υλοποιήστε `script MATLAB` που θα συγκρίνει το εμπρός σχετικό σφάλμα για τις δύο διαφορετικές υλοποιήσεις του πολλαπλασιασμού μητρώων:
   (i) συνάρτηση της MATLAB `mtimes`
   (ii) και την συνάρτηση `strassen` [2].

   Για να υπολογίσουμε το εμπρός σχετικό σφάλμα εκτελούμε τις πράξεις σε `MATLAB` σε μονή ακρίβεια (`single precision`) ενώ θεωρούμε ως ¨άπειρη¨ ακρίβεια την πράξη που υλοποιείται με την συνάρτηση MATLAB `mtimes` σε διπλή ακρίβεια (`double precision`)

(γ΄) Σχολιάστε αν παρατηρείτε διαφορές στο εμπρός σχετικό σφάλμα μεταξύ των δύο υλοποιήσεων.

Τρόπος Παράδοσης Εργασίας

Παραδοτέα: Αναφορά (σε μορφή pdf) και κώδικας της άσκησης συμπιεσμένα σε αρχείο zip με ονομασία **AM_prb2_2014** π.χ. **3948_prb2_2014**.

Παράδοση & Αποστολή: Το συμπιεσμένο αρχείο παραδίδεται μέσω της πλατφόρμας e-class ενώ υποχρεούστε να παραδώσετε και εκτυπωμένη αναφορά, **για την παράδοση της οποία θα υπάρξει ειδική ανακοίνωση προς το τέλος του εξαμήνου.**

Ιδιαίτερη έμφαση θα δοθεί στον τρόπο παρουσίασης της εργασίας και των αποτελεσμάτων. Για τη συγγραφή της αναφοράς μπορείτε εκτός των γνωστών εργαλείων να πειραματιστείτε και με άλλα όπως το LaTeX ή το εργαλείο του MATLAB `publish`.

[1] http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/2360-the-matrix-computation-toolbox/content/matrixcomp/gfpp.m
[2] http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/2360-the-matrix-computation-toolbox/content/matrixcomp/strassen.m