ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΔΙΑΛΕΞΗ 17, 21/12/09

Ε. ΓΑΛΛΟΠΟΥΛΟΣ
Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής
Παν/μιο Πατρών

Τοπικά και ολικά σφάλματα

ΣΔΕ αρχικής τιμής $u'(t) = f(t, u), u(0) = u_0$

$\Omega = [0, T]$

Εμπρός Euler $U_{k+1} = U_k + hf(t_k, U_k)$, σταθερό βήμα h

$$\begin{aligned} u(t_{k+1}) &= u(t_k) + hf(t_k, u(t_k)) + \frac{h^2}{2} u''(t_k + \theta_{k+1} h), \theta_{k+1} < 1 \\ U_{k+1} &= U_k + hf(t_k, U_k) \end{aligned}$$

$$\underbrace{u(t_{k+1}) - U_{k+1}}_{\text{Ολικό Σφάλμα (ΟΣ)}} = (u(t_k) - U_k) + h(f(t_k, u(t_k)) - f(t_k, U_k)) + \underbrace{\frac{h^2}{2} u''(t_k + \theta_{k+1} h)}_{\text{Τοπικό Σφάλμα (ΤΣ)}}$$

- Αν $u(t_k) = U_k$, ο μόνο όρος που συνεισφέρει στο ολικό σφάλμα είναι το τοπικό σφάλμα
- $h(f(t_k, u(t_k)) - f(t_k, U_k)) = h \overbrace{\frac{\partial f}{\partial u}}^{J}(w)(u(t_k) - U_k)$

Επομένως

$$\boxed{\text{ΟΣ}(t_{k+1}) = (I + hJ)\text{ΟΣ}(t_k) + \text{ΤΣ}(t_{k+1})}$$

Τοπικό σφάλμα στο t_{k+1}: Το σφάλμα στο t_{k+1} αν όλες οι τιμές για όλους τους κόμβους $t < t_{k+1}$ ήταν ακριβείς.

$(I + hJ)$ Συντελεστής (ή μητρώο) μεγέθυνσης

- Για να μην μεγενθύνεται το σφάλμα, πρέπει $\|I + hJ\| < 1$.

- Για να έχουμε σύγκλιση πρέπει $\lim_{h\to 0} \mathrm{Τ\Sigma}(t_{k+1}) = 0$ για κάθε k.

Επομένως

$$\boxed{\mathrm{Ο\Sigma}(t_{k+1}) = \underbrace{(I + hJ)}_{\substack{\downarrow \\ \|I+hJ\|<1 \\ \text{ευστάθεια}}} \mathrm{Ο\Sigma}(t_k) + \underbrace{\mathrm{Τ\Sigma}(t_{k+1})}_{\substack{\to 0 \\ \downarrow \\ \text{συνέπεια}}}}$$

$$\boxed{\text{Ευστάθεια + Συνέπεια} \Rightarrow \text{Σύγκλιση}}$$

- Αν $\mathrm{Τ\Sigma} \approx O(h^{q+1})$ λέμε πως η μέθοδος είναι τάξης q.
- Πολλές φορές μία μέθοδος τάξης q έχει και ολικό σφάλμα τάξης q.
- Αν γνωρίζουμε την τάξη q και χρησιμοποιήσουμε βήμα $h_1 < h$ τότε το ολικό σφάλμα πρέπει να μειωθεί περίπου κατά $(\frac{h_1}{h})^q$.

Τα παραπάνω χρησιμοποιούνται για

- *πρόβλεψη σφάλματος*
- *επιλογή βήματος*

Οι σύγχρονες μέθοδοι επίλυσης ΣΔΕ δεν χρησιμοποιούν σταθερό βήμα h. Συνήθως όμως, ισχύουν τα παρακάτω:

- Για το ίδιο h, μια μέθοδος υψηλότερης τάξης είναι πιο ακριβής από μια μέθοδο χαμηλότερης τάξης.
- Για μια μέθοδο τάξης p, αν επιλύσουμε τη ΣΔΕ με βήμα $\hat{h} < h$, τότε το ολικό σφάλμα μειώνεται κατά παράγοντα $(\hat{h}/h)^p$.
- Με βάση το παραπάνω, μπορούμε να κατασκευάσουμε μεθόδους για την εκτίμηση του σφάλματος και για την επιλογή του βήματος.
- Προσοχή: Στα παραπάνω δεν λάβαμε υπόψη μας τα σφάλματα στρογγύλευσης.

Λογισμικό στη MATLAB:

ΟΝΟΜΑ	Περιγραφή
`ode23`	RK τάξεων (2,3) χαμηλής τάξης για μη δύσκαμπτες ΣΔΕ
`ode45`	RK τάξεων (4,5) για μη δύσκαμπτες ΣΔΕ
`ode113`	Μέθοδος ABM[1] για μη δύσκαμπτες ΣΔΕ
`ode15s`	BDF για δύσκαμπτες ΣΔΕ
`ode23s`	RK χαμηλής τάξης[2] για μη δύσκαμπτες ΣΔΕ
`ode23t`	RK[3] χαμηλής τάξης για μετρίως δύσκαμπτα ΣΔΕ.

The MATLAB ODE Suite, L. F. Shampine and M. W. Reichelt, *SIAM J. on Scientific Computing*, 18-1, 1997.

Παράδειγμα

$$\frac{d}{dt}u(t) = -u(t)/2, \qquad u(0) = 1.$$

Εμπρός Euler:

$$U_{k+1} = U_k - 0.5\Delta t_k U_k \qquad \text{με σταθερό βήμα } h = \Delta_k = 1/N.$$

t	$u(t) = e^{-t/2}$	$N = 5$	$N = 10$	$N = 20$
0.2	0.9048	0.9000	0.9025	0.9037
0.6	0.7408	0.7290	0.7351	0.7380
1.0	0.6065	0.5905	0.5987	0.6027

«Ακριβείς» και υπολογισμένες τιμές U_j με $\Delta t = 1/N$

Η διακύμανση του σφάλματος σε κάθε σημείο:

t	$u(t) = e^{-t/2}$	$N = 5$	$N = 10$	$N = 20$
0.2	0.9048	0.0048	0.0023	0.0011
0.6	0.7408	0.0118	0.0057	0.0028
1.0	0.6065	0.0160	0.0078	0.0038

καθώς $h \leftarrow \frac{h}{2}$, το «ολικό σφάλμα διακριτοποίησης» υποδιπλασιάζεται

επιβεβαιώνοντας ότι η Euler είναι 1ης τάξης.

Από την αναδρομική σχέση

$$U_{k+1} = U_k - 0.5\Delta t_k U_k$$

για $h = \Delta t_k$,

$$U_{k+1} = U_k - 0.5hU_k = (1 - 0.5h)U_k = \cdots = (1 - 0.5h)^{k+1}U_0 = (1 - 0.5h)^{k+1}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = e^x$$

αν $h(s+1) = T$ σταθερό

$$U_{k+1} = (1-0.5h)^{k+1} = (1 + \frac{-0.5h(k+1)}{k+1})^{k+1} = (1 + \frac{-0.5T}{k+1})^{k+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to\infty} U_{k+1} = e^{-0.5T}.$$

Παράδειγμα

$$\frac{d}{dt}u(t) = e^{-t}, \qquad u(0) = 1.$$

Εμπρός Euler:

$$U_{k+1} = U_k + \Delta_k e^{-t_k} \qquad \text{με σταθερό βήμα } h = \Delta_k = 1/N.$$

t	$u(t) = 2 - e^{-t}$	$N=5$	$N=10$	$N=20$
0.2	1.1813	1.2000	1.1905	1.1858
0.6	1.4512	1.4978	1.4741	1.4626
1.0	1.6321	1.6974	1.6643	1.6481

«Ακριβείς» και υπολογισμένες τιμές U_j με $\Delta t = 1/N$

Η διακύμανση του σχετικού σφάλματος σε κάθε σημείο:

t	$u(t) = 2 - e^{-t}$	$N=5$	$N=10$	$N=20$
0.2	1.1813	0.0158	0.0078	0.0038
0.6	1.4512	0.0321	0.0158	0.0079
1.0	1.6321	0.0400	0.0197	0.0098

καθώς $h \leftarrow \frac{h}{2}$, το «ολικό σφάλμα διακριτοποίησης» υποδιπλασιάζεται

επιβεβαιώνοντας ότι η Euler είναι 1ης τάξης.

Παρατήρηση Διακύμανση σχετικού σφάλματος στο 1ο βήμα με διαφορετικά βήματα, δηλ. προσεγγίσεις για

$$h = 0.2, u(h), u(h/2), u(h/4):$$

εκκινώντας πάντα από το $u(0) = 1$ αλλά κάνοντας μόνον ένα βήμα:

Χρησιμοποιούμε το προηγούμενο παράδειγμα, $du/dt = e^{-t}$, $u(0) = 1$.

t	ακριβές $u(t)$	Προσέγγιση $U(t)$	Σχετικό σφάλμα $\|u(t) - U(t)\|/\|u(t)\|$
0.2	1.1813	1.2	0.0159
0.1	1.0952	1.1	0.0044
0.05	1.0488	1.05	0.0012

καθώς $h \leftarrow \frac{h}{2}$, το «τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης» υποτετραπλασιάζεται

επιβεβαιώνοντας ότι το τοπικό σφάλμα είναι 2ης τάξης και η Euler 1ης τάξης.
Επιλογή βήματος για την ευστάθεια του σχήματος επίλυσης Έστω $u'(t) = au(t), u(0) = c$, για κάποιο σταθερό a. Τότε η λύση είναι

$$u(t) = e^{at}c.$$

$a > 0$ οπότε η θεωρητική λύση $u(t)$ μεγαλώνει $u(t_0) < u(t_1) < u(t_2) < \cdots$ και $\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$. Η ΣΔΕ περιγράφει μια ασταθή συνάρτηση.

$a < 0$ οπότε $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$. Η ΣΔΕ περιγράφει μια ευσταθή συνάρτηση.

Αν η ΣΔΕ περιγράφει μια ευσταθή συνάρτηση, θέλουμε και η αριθμητική μέθοδος επίλυσης να ακολουθεί παρόμοια συμπεριφορά.
Π.χ. στην εμπρός Euler:

$$U_{k+1} = (1 + a\Delta t)U_k$$

θα πρέπει και $|1 + a\Delta t| < 1$, οπότε

$$-1 < 1 + a\Delta t < 1 \Rightarrow 0 < \Delta t < -2/a$$

Προσέξτε: Στην εμπρός Euler, το μέγεθος του Δt περιορίζεται από το $1/a$.

- Αυτό σημαίνει ότι αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη λύση από το 0 στο T, θα πρέπει να κάνουμε τουλάχιστον $T/\Delta t \approx Ta/2$ βήματα.

Αν η ΣΔΕ είναι σύστημα εξισώσεων:

$$\frac{du}{dt} = Au, u(0) = c \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Παράδειγμα: Έστω $u'(t) = Au(t)$, όπου $A = \mathrm{diag}[-100, -1, -0.5]$.
Ακριβής λύση: $u(t) = [e^{-100t}u_1(0), e^{-t}u_2(0), e^{-t/2}u_3(0)]^\top$
Παρατηρείστε

$$\|u(0)\| > \|u(t_1)\| > \|u(t_2)\| \cdots, \qquad \lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = 0$$

Θέλουμε οι τιμές που λαμβάνουμε από την αριθμητική μέθοδο να παρουσιάζουν αντίστοιχη συμπεριφορά.

$$\text{Εμπρός Euler:} \quad U_{k+1} = (I + \Delta t A)U_k = \cdots = (I + \Delta t A)^{k+1} U_0$$

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= (I + \Delta t \mathrm{diag}[-100, -1, -0.5])^{k+1} U_0 \\ &= \begin{pmatrix} (1-100\Delta t)^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & (1-\Delta t)^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & (1-0.5\Delta t)^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,0} \\ U_{2,0} \\ U_{3,0} \end{pmatrix}, \qquad U_{j,0} = u_j(t_0) \end{aligned}$$

Για ευστάθεια θα πρέπει το Δt να ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$|1-100\Delta t|<1, |1-\Delta t|<1, |1-0.5\Delta t|<1,$$

Το μέγιστο Δt για οποίο ικανοποιούνται αυτές οι συνθήκες είναι

$$0<\Delta t<\min\{2/100, 2, 4\}=0.02$$

επομένως για να υπολογίσουμε τη λύση στο $T=1$ θα χρειαστούμε 50 βήματα. Αντίστοιχα, αν αντί για την πρώτη εξίσωση είχαμε $u_1'(t)=10^4 u_1(t)$ θα χρειαζόμασταν

$$0<\Delta t<2/10^4=0.0002$$

επομένως για να υπολογίσουμε τη λύση στο $T=1$ θα χρειαστούμε 5000 βήματα, κ.ό.κ.
Παρατηρείστε ότι στο προηγούμενο παράδειγμα, το A ήταν διαγώνιο οπότε τα στοιχεία της διαγωνίου ήταν και οι ιδιοτιμές του.
Για γενικά, μη δαγώνια μητρώα A, οι περιορισμοί για το βήμα σε σχέση με την ευστάθεια της υπολογισμένης λύσης προκύπτουν μέσω των ιδιοτιμών του A: Π.χ. αν $A=A^\top$ και $Q^T AQ=\Lambda$,

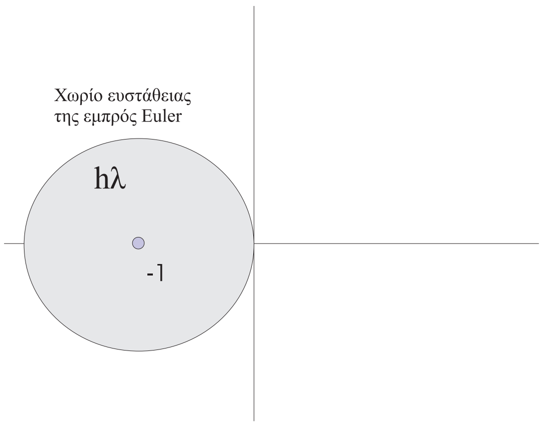
$$\begin{aligned} U_{k+1} &= QQ^T(I+\Delta t A)^{k+1}QQ^T U_0 \\ &= Q(I+\Delta t\Lambda)^{k+1}Q^T U_0 \\ &= Q\mathrm{diag}[(1+\Delta t\lambda_j)^{k+1}]Q^T U_0 \end{aligned}$$

- Αν $\exists j, |1+\Delta t\lambda_j|>1$ οι τιμές μεγαλώνουν χωρίς φράγμα
- για να μην υπάρχει πρόβλημα,

  $\forall j, |1+\Delta t\lambda_j|\le 1$ επομένως πρέπει $\Re\lambda_j<0$.
  $A=A^\top \Rightarrow -2\le \Delta t\lambda_j\le 0$

$$\boxed{\text{Συνθήκη απόλυτης ευστάθειας: } \Rightarrow \Delta t\le -\frac{2}{\lambda_j} \text{ εφόσον } \lambda_j<0}$$

Χωρίο απόλυτης ευστάθειας: Οι τιμές z του μιγαδικού επιπέδου στις οποίες το $z=h\lambda$ ικανοποιεί τη συνθήκη ευστάθειας της αριθμητικής μεθόδου.



Παρατηρήσεις Πώς μπορούμε

- να μειώσουμε
- ... ή να αποφύγουμε εντελώς

περιορισμούς στο βήμα που τίθενται στην εμπρός Euler λόγω ευστάθειας;

Υπάρχει ποικιλία μεθόδων. Η πιο «δραστική θεραπεία» είναι με τη χρήση των αποκαλούμενων «έμμεσων» ή «πεπλεγμένων» μεθόδων (implicit methods) οι οποίες αποφεύγουν οποιοδήποτε περιορισμό στο βήμα για λόγους ευστάθειας (παραμένουν οι περιορισμοί για τον έλεγχο του σφάλματος διακριτοποίησης).
Το πιο απλό παράδειγμα είναι η μέθοδος «πίσω Euler» που περιγράφουμε στη συνέχεια.
Πίσω Euler Στην εμπρός Euler προσεγγίσαμε ως U_{k+1} την τιμή $u(t_{k+1})$ χρησιμοποιώντας την τιμή U_k και την «κλίση» $f(t_k, U_k)$:

$$U_{k+1} = U_k + hf(t_k, U_k)$$

Εναλλακτικά μπορούμε να προσεγγίσουμε χρησιμοποιώντας την κλίση στο t_{k+1}. Προφανώς, η τιμή της U_{k+1} είναι και αυτή μέρος του προβλήματος, μπορούμε όμως να γράψουμε

$$U_{k+1} = U_k + hf(t_{k+1}, U_{k+1}), \qquad \text{με αρχική τιμή } U_0 = c.$$

και να υπολογίσουμε το U_{k+1} λύνοντας την παραπάνω εξίσωση!
Αυτό είναι ισοδύναμο με το να προσεγγίσουμε την παράγωγο με «πίσω διαφορά», δηλ.

$$u'(t_{k+1}) \approx \frac{U_{k+1} - U_k}{h}$$

Το ΤΣΔ παραμένει το ίδιο με την εμπρός Euler, όμως
το U_k δίδεται έμμεσα (implicitly). Έτσι προκύπτει και το όνομα των μεθόδων.
Ευστάθεια της πίσω Euler Αν για παράδειγμα $u'(t) = au(t), u(0) = c$, για κάποιο σταθερό $a < 0$ (γιατί; ... ώστε το θεωρητικό πρόβλημα να είναι ευσταθές). Τότε η λύση είναι

$$u(t) = e^{at}c.$$

και η ΣΔΕ περιγράφει μια ευσταθή συνάρτηση.
Στην πίσω Euler:

$$U_{k+1} = (1 - a\Delta t)^{-1}U_k$$

θα πρέπει $|(1 - a\Delta t)^{-1}| < 1$, οπότε

$$-1 < (1 - a\Delta t)^{-1} < 1$$

εφόσον ισχύει ότι $a < 0$, οι παραπάνω συνθήκες ισχύουν για οποιοδήποτε $\Delta t > 0$.

- Επομένως, για την παραπάνω εξίσωση, η λύση με εμπρός Euler δεν θέτει κανέναν περιορισμό στο μέγεθος του Δt.
- Ο μόνος περιορισμός προέρχεται από το ότι θέλουμε να έχουμε αποδεκτό σφάλμα αποκοπής).

Στην περίπτωση που έχουμε γραμμικό σύστημε ΣΔΕ, όπως και πριν, η ανάλυση γίνεται με βάση τις ιδιοτιμές του A:

$$\begin{aligned}(I - A\Delta t)U_{k+1} &= U_k,\\ U_{k+1} &= (I - A\Delta t)^{-1}U_k,\end{aligned}$$

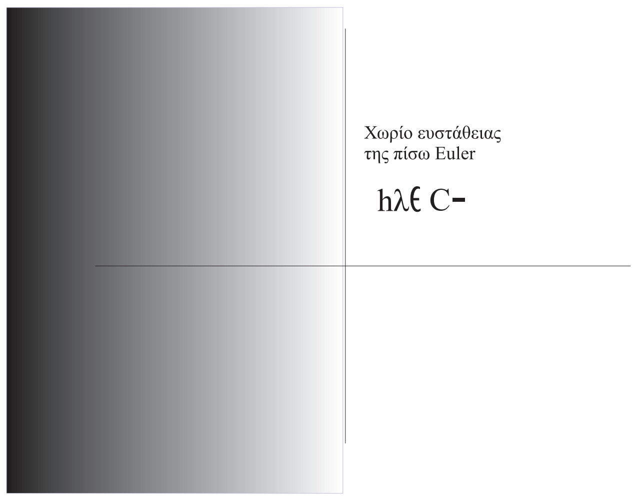
και αν $A = A^\top$ και αναλύσουμε σε ιδιοτιμές

$$\begin{aligned}U_{k+1} &= Q(I - \Lambda\Delta t)^{-1}Q^\top U_s,\\ &= Q(I - \Lambda\Delta t)^{-s}Q^\top U_0,\end{aligned}$$

και θέλουμε

$$|1 - \lambda_j \Delta t|^{-1} \leq 1$$

$\boxed{\text{Αν } \lambda_j : \Re(\lambda_j) < 0, \text{ η πίσω Euler είναι ευσταθής για οποιοδήποτε βήμα } \Delta t}$



<u>Παρατηρήσεις</u>

- Ιδιαίτερο ενδιαφέρον όταν $U, f \in \mathbb{R}^n$
- Αν η f είναι γραμμική ως προς u: $f(t, u(t)) = Au(t)$

$$f(t_k, U_k) = AU_k, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

- Εμπρός Euler → MXV

$$U_{k+1} = (I + \Delta t A(t_k))U_k$$

- Πίσω Euler → λύση συστήματος

$$(I - \Delta t A(t))U_{k+1} = U_k$$

Συμπεράσματα για την αριθμητική επίλυση του $u'(t) = Au(t)$ με σχήματα Euler:
Με εμπρός Euler:

- Για ευστάθεια πρέπει να περιορίσουμε το βήμα.
- Αν οι ιδιοτιμές είναι πολύ μεγάλες, το βήμα πρέπει να γίνει πολύ μικρό!!!

Με πίσω Euler:

- Έχουμε ευστάθεια ανεξάρτητα βήματος.
- Το βήμα περιορίζεται από την ακρίβεια.
- Πρέπει να λύσουμε ένα σύστημα εξισώσεων σε κάθε βήμα.

Παρατηρήσεις:

- Στο παραπάνω πρόβλημα το σύστημα τυχαίνει να είναι γραμμικό επειδή και το σύστημα ΣΔΕ είναι γραμμικό
- Σε κάθε περίπτωση, στόχος είναι να περιορίσουμε το συνολικό κόστος επίλυσης. Θυμηθείτε ότι στην περίπτωση που το μητρώο $I - A\Delta t$ είναι γενικό (δηλ. χωρίς ειδική δομή), η λύση, μέσω LU στοιχίζει $2/3n^3 + O(n^2)$.
  - Όσο το μητρώο $I - A\Delta t$ παραμένει ίδιο επαναχρησιμοποιούμε την ίδια διάσπαση.
  - Το μητρώο αλλάζει όταν αλλάζει το βήμα ή αν το A είναι χρονοεξαρτώμενο.
  - Σημαντικό θέμα: Πώς να υπολογίσουμε λύσεις κατά τη διάρκεια του βηματισμού με το ελάχιστο κόστος; Το κυρίαρχο κόστος προέρχεται από την επίλυση των συστημάτων, προσπαθούμε να βρούμε τρόπους να μειώσουμε το κόστος. Για παράδειγμα, α) αν το A και το βήμα παραμένουν τα ίδια, αρκεί μια παραγοντοποίηση LU και επαναχρησιμοποίηση των παραγόντων. β) Αν το A αλλάζει πολύ αργά, μπορούμε να επιχειρήσουμε να προσεγγίσουμε τη λύση με μια παραγοντοποίηση για διαδοχικά βήματα, μέχρι η προσέγγιση να μην είναι πλέον ικανοποιητική. γ) Αν αλλάζει μόνον το A, τότε αντί για LU μπορούμε να επιλέξουμε αναγωγή σε μορφή Hessenberg με ορθογώνιο μετασχηματισμό (βλ. Ενότητα 6.4.5 βιβλίου και συνάρτηση `hess` της MATLAB). Το κόστος αναγωγής είναι κυβικό, αλλά το κόστος επίλυσης με Hessenberg τετραγωνικό. Σε περίπτωση συμμετρικού A το κόστος μειώνεται σε γραμμικό... Το θέμα δεν εξαντλείται εδώ ...

- Οι παραπάνω μέθοδοι προκύπτουν εναλλακτικά από την προσέγγιση του τελεστή/μητρώου $e^{-A\Delta t}$

  Εμπρός Euler: Μέσω του $e^{a\Delta t} \approx 1 + a\Delta t$ επομένως $U(t+\Delta t) = (I + A\Delta t)U(t)$

  Πίσω Euler: Μέσω του $e^{a\Delta t} \approx (1 - a\Delta t)^{-1}$ επομένως $U(t+\Delta t) = (I - A\Delta t)^{-1}U(t)$

Μέθοδοι Runge-Kutta Πρόκειται για μεγάλη οικογένεια σημαντικών μονοβηματικών μεθόδων για την επίλυση ΣΔΕ. Πολλές από τις μεθόδους RK μπορούν να παραχθούν με συστηματικό τρόπο από τη μέθοδο Taylor.

Γενική μορφή μεθόδου RK s σταδίων:

$$U_{n+1} = U_k + h\sum_{i=1}^{s} b_i K_i$$

όπου

$$K_i = f(t_n + c_i h, U_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}K_j)$$

Συμβολικά χρησιμοποιούμε τον «πίνακα Butcher»:

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array} = \begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^\top \end{array}$$

- Άμεσες μέθοδοι $\rightarrow$ ο υποπίνακας των a_{ij} αυστηρά κάτω τριγωνικός
- ... ειδάλλως, έμμεσες (ακριβές αλλά χρήσιμες για δύστροπες «άκαμπτες» ΣΔΕ.
- Πώς αυξάνει η τάξη της μεθόδου με τα στάδια; Για τις οικονομικές άμεσες μεθόδους;
- ... για $s \leq 4$ στάδια, υπάρχουν άμεσες μέθοδοι τάξης s. Γενικά, μια άμεση μέθοδος s σταδίων έχει τάξη μικρότερη ή ίση με s. Αυτό δεν μας εκπλήσσει. Δυστυχώς, όταν έχουμε $s > 4$ στάδια, η μέγιστη δυνατή τάξη θα είναι μικρότερη. Π.χ. η μέγιστη τάξη όταν $s = 5$ είναι 4. Η μέγιστη γνωστή τάξη όταν $13 \leq s \leq 17$ είναι 10, κ.λπ.
- Θέλουμε να πετυχουμε τη μέγιστη τάξη με τον ελάχιστο αριθμό σταδίων.

Παραδείγματα

Μέθοδος Runge-Kutta, άμεση, τάξης 2 (Heun)

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, U_n) \\ K_2 &= f(t_{n+1}, U_n + hK_1) \end{aligned}$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

Μέθοδος Runge-Kutta, άμεση, τάξης 2 (midpoint)

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, U_n) \\ K_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, U_n + \frac{h}{2}K_1) \end{aligned}$$

$$U_{n+1} = U_n + hK_2$$

Μέθοδος Runge-Kutta, άμεση, τάξης 4

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, U_n) \\ K_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, U_n + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, U_n + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 &= f(t_{n+1}, U_n + hK_3) \end{aligned}$$

οπότε

$$U_{n+1} = U_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Σχόλιο Έχουμε αναφερθεί στις διαλέξεις στη σημασία της εκθετικής συνάρτησης στην επίλυση του προβλήματος Cauchy. Ας δούμε από κοντά τι συμβαίνει αν θέλουμε να λύσουμε το $u'(t) = au(t), u(0) = c$. Αν κάνουμε ένα βήμα

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + hu'(t_n) + \frac{h^2}{2!}u''(t_n) + \frac{h^3}{3!}u'''(t_n) + \ldots$$

από την εκφώνηση όμως

$$\begin{aligned} u^{(2)}(t) = (au(t))' = au'(t) = a^2u(t) \\ u^{(3)}(t) = (au(t))'' = au''(t) = a^3u(t) \end{aligned}$$

επομένως γενικά

$$u^{(k)}(t) = a^k u(t)$$

άρα

$$\begin{aligned} u(t_{n+1}) &= u(t_n) + ahu(t_n) + \frac{(ah)^2}{2!}u(t_n) + \frac{(ah)^3}{3!}u(t_n) + \ldots \\ &= e^{ah}u(t_n) \end{aligned}$$

Ο ρόλος του εκθετικού είναι προφανής!