Ονοματεπώνυμο: .... Α.Μ. ....· Έτος ...

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Εξέταση Χειμερινού εξαμήνου κάτω από τον καλοκαιρινό ήλιο (4/7/07)

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1) Όλοι οι βαθμοί κατατίθενται στη Γραμματεία. 2) Παρακαλείστε να κλείσετε βιβλία, σημειώσεις και κινητά. 3) Επιπλέον της κόλλας πρέπει να επιστρέψετε τα θέματα καθώς και όλα τα πρόχειρα που θα δείχνουν την προσπάθειά σας, καθώς 4) για πλήρη βαθμό πρέπει να παρουσιάσετε όλο το συλλογισμό σας, όλα τα βήματα που κάνετε καθώς και τα ενδιάμεσα αποτελέσματα. *Να διαβάσετε προσεκτικά τις εκφωνήσεις. Έχετε 3 ώρες. Οι αλγόριθμοι πρέπει να περιγράφονται με σαφήνεια, π.χ. όπως στις σημειώσεις ή με MATLAB .*

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

1. **β.** $30 = 5 \times 6$

   (α′) Να εξηγήσετε ποιά απλοποίηση γίνεται στο υπολογιστικό μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε στο μάθημα όταν λέμε ότι ο χρόνος έκτέλεσης Ω αριθμητικών πράξεων για δεδομένα που βρίσκονται ήδη στους καταχωρητές (και δεν μας ενδιαφέρει ο χρόνος των μεταφορών) είναι $T_{\text{αρϑ}} = \tau_{\text{αρϑ}}\Omega$, όπου $\tau_{\text{αρϑ}}$ είναι ο χρόνος εκτέλεσης μιας αριθμητικής πράξης.

   Απάντηση. Ο χρόνος εκτέλεσης όλων των α.κ.υ. θεωρείται ότι είναι ίδιος ενώ είναι γνωστό, π.χ. ότι ο χρόνος για την εκτέλεση μιας διαίρεσης μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερος από το χρόνο που χρειάζεται η άθροιση. □

   (β′) Ο παρακάτω κώδικας εκτελείται σε περιβάλλον MATLAB που τρέχει σε PC στο υπολογιστικό του τμήματος ή στο φορητό σας. Τι αποτέλεσμα προκύπτει στο y αν αρχικοποιήσετε `x=realmin`; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

   ```
   y=x/2; if (y==0), y=2*x, else y=y+1; end
   ```

   Απάντηση. Τα παραπάνω συστήματα χρησιμοποιούν α.κ.υ. διπλής ακρίβειας IEEE και υποστηρίζει την υποκανονικοποίηση, επομένως το `y = x/2` όταν `x = realmin` θα επιστρέψει μη μηδενικό αριθμό. Επομένως, στη συνέχεια θα εκτελεστεί η επιλογή `y = y+1`. Επειδή όμως το `y = realmin/2`, που είναι πολύ μικρότερο του έψιλον της μηχανής, το αποτέλεσμα θα είναι `y = 1`. □

   (γ′) Να εξηγήσετε με ένα παράδειγμα γιατί ο παρακάτω ισχυρισμός μπορεί να είναι σωστός: Υπάρχουν μητρώα, έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένα από αυτά, για τα οποία η επίλυση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$ να κοστίζει $O(n)$ αριθμητικές πράξεις ενώ η επίλυση του $Bx = b$, όπου $B := A^n$ να στοιχίζει $O(n^3)$ πράξεις. Προσοχή: Θεωρούμε ότι το B είναι γνωστό (οπότε δεν συνυπολογίζουμε το κόστος του υπολογισμού του).

   Απάντηση. Αν το A είναι τριδιαγώνιο, η λύση του $Ax = b$ κοστίζει $\Omega = O(n)$ ενώ το B θα είναι πυκνό και η λύση $O(n^3)$. Θεωρούμε βέβαια ότι όταν χρησιμοποιούμε το B δεν γνωρίζουμε ότι προήλθε από το A^n, γιατί τότε θα μπορούσαμε να λύσουμε διαδοχικά τα $x^{(0)} := b, Ax^{(j)} = x^{(j-1)}, j = 1, ..., n$ και $x := x^{(n)}$. Επειδή κάθε λύση γίνεται σε $O(n)$, χρειάζονται $O(n^2)$ πράξεις. Καλύτερα ακόμα αν χρησιμοποιούσαμε LU του A (στην ειδική αυτή περίπτωση μόνον για βελτίωση της σταθεράς). □

(δ′) Γνωρίζουμε ότι η πίσω μέθοδος Euler για την επίλυση της ΔΕ $\frac{du}{dt} = Au$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $u \in \mathbb{R}^n$, είναι ευσταθής για κάθε επιλογή βήματος Δt, σε αντίθεση με την εμπρός μέθοδο Euler. Να εξηγήσετε γιατί παρόλη την ευστάθεια, δεν ενδείκνυται να χρησιμοποιήσουμε πολύ μεγάλο βήμα.

Απάντηση. Στην πίσω Euler για το παραπάνω πρόβλημα δεν παρουσιάζεται αστάθεια μια και η φασματική ακτίνα του μητρώου $(I - hA)^{-1}$ θα είναι μικρότερη του 1 για οποιαδήποτε επιλογή του $\Delta t > 0$. Όμως, το σφάλμα διακριτοποίησης για το σχήμα είναι $O(\Delta t)$ (το ίδιο και στην εμπρός Euler), επομένως, ένα μεγάλο βήμα θα οδηγούσε σε ανάλογα μεγάλο σφάλμα διακριποίησης. Σημειώνουμε πως στην εμπρός Euler δεν τίθεται τέτοιο θέμα γιατί αν λάβουμε μεγάλο Δt δεν θα προλάβουμε καν να δούμε μεγάλο σφάλμα, η μέθοδος θα παράγει πολύ γρήγορα σκουπίδια λόγω αστάθειας. □

(ε′) Έστω ότι γνωρίζετε ότι υπάρχει διάνυσμα $z \neq 0$ τέτοιο ώστε $Az = 0$. Να εξηγήσετε πολύ σύντομα γιατί τότε θα είναι πολύ δύσκολο να υπολογίσετε λύση του συστήματος $Ax = b$ για κάποιο άλλο b.

Απάντηση. Αφού υπάρχει τέτοιο μη μηδενικό διάνυσμα, οι στήλες του A θα είναι γραμμικά εξαρτημένες, επομένως η τάξη του μητρώου θα είναι μικρότερη του n και επομένως το μητρώο δεν θα είναι αντιστρέψιμο. □

2. **β.** $30 = 6 \times 5$

(α′) Να εξηγήσετε με συντομία τι είναι η πίσω ανάλυση σφάλματος και με ποιόν τρόπο μπορεί να βοηθήσει στην εκτίμηση του εμπρός σφάλματος υπολογισμών σε συστήματα αριθμητικής κινητής υποδιαστολής.

Απάντηση. Βιβλίο (εν. 3.5) □

(β′) Να δείξετε ότι ο αλγόριθμος Horner για τον υπολογισμό της τιμής ενός πολυωνύμου είναι πίσω ευσταθής.

Υπενθύμιση: Ο αλγόριθμος Horner υπολογίζει την τιμή ενός πολυωνύμου $p(x) := \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j$ αναδρομικά. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του $n = 3$, αντιστοιχεί στον υπολογισμό

$$((\alpha_3 x + \alpha_2)x + \alpha_1)x + \alpha_0$$

Απάντηση. Βιβλίο (εν. 3.5) □

(γ′) Να δείξετε με σαφήνεια πώς θα βελτιωνόταν η πίσω ευστάθεια αν η πλατφόρμα σας είχε εντολή FMA.

Απάντηση. Ακολουθεί άμεσα από τη συζήτηση στο βιβλίο σχετικά με τις ιδιότητες της FMA (ένα σφάλμα ανά πράξη τύπου $\gamma \leftarrow \gamma + \alpha\beta$. □

(δ′) Έστω ότι γνωρίζετε εκ των προτέρων ότι οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι όλοι μη αρνητικοί. Να εξηγήσετε (αν υπήρχε η επιλογή) αν θα ήταν καλύτερα να υπολογίσετε την τιμή του για αρνητική ή για θετική τιμή του x.

Απάντηση. Για θετικό διότι μειώνεται η πιθανότητα καταστροφικής απαλοιφής, δηλ. το αποτέλεσμα να είναι πολύ μικρό ενώ οι προστιθέμενοι παράγοντες μεγάλοι σε απόλυτη τιμή, κάτι που οδηγεί σε πολύ μεγάλο σχετικό δείκτη κατάστασης. □

(ε′) Δίδονται $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, όπου γνωρίζουμε ότι $n > 1, m \geq 1$ αλλά δεν ισχύει κατ′ ανάγκη ότι $m = n$. Επιπλέον, όλα τα στοιχεία των x, y είναι αριθμοί κινητής υποδιαστολής. Να αιτιολογήσετε πλήρως τον ισχυρισμό ότι οποιοσδήποτε αλγόριθμος υπολογισμού του $xy^\top$ δεν μπορεί γενικά να αποδειχτεί ότι είναι πίσω ευσταθής.

Απάντηση. Η απάντηση στο βιβλίο, εν. 4.2.2 (Ένας αλγόριθμος υπολογισμού εξωτερικού γινομένου δεν μπορεί να είναι πίσω ευσταθής γιατί δεν υπάρχουν αρκετά στοιχεία στην είσοδο για να ρίξουμε τα σφάλματα κατά τις πράξεις) □

(ϛ΄) Υπάρχει περίπτωση να μπορέσουμε να αποδείξουμε πίσω ευστάθεια για γενικά δεδομένα αλλά ειδικές τιμές των m, n (εντός των παραπάνω περιορισμών).

Απάντηση. Αν οι διαστάσεις το επιτρέπουν, π.χ. αν $m = 1$ οπότε είναι προφανές, μια και πρόκειται για πολλαπλασιασμό διανύσματος με βαθμωτό και γενικότερα αν $mn \le m+n$, π.χ. $m = 2, n = 2$. □

3. **β.** $24 = 3 \times 8$ Έστω ότι έχει χρησιμοποιηθεί παραγοντοποίηση QR ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ και ότι στο τέλος, τα στοιχεία του A έχουν αντικατασταθεί με τα παρακάτω:

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

α) Έστω ότι $b = [5, -15, 0, 30]^\top$. Με βάση μόνον αυτά τα στοιχεία, να υπολογίσετε τη λύση του $\text{argmin}_{x\in\mathbb{R}^3} \|b - Ax\|_2$ για το αρχικό (και άγνωστο προς το παρόν) A. β) Να υπολογίσετε το αρχικό μητρώο A χωρίς να υπολογίσετε άμεσα το Q. γ) Να υπολογίσετε το Q. Προσοχή: Για πλήρη βαθμό θα πρέπει να λύσετε το (α) όπως ζητάται από την εκφώνηση, δηλ. χωρίς να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα του (β). Ομοίως, το (β) πρέπει να λυθεί πριν το (γ).

Απάντηση. Προσέξτε ότι η διάσταση ήταν $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, επομένως χρειάστηκαν 3 ανακλαστές για να άνω τριγωνιοποιήσουν το μητρώο. Στις θέσεις του A επιστρέφονται, στο μεν άνω τριγωνικό μέρος το άνω τριγωνικό τμήμα του (άνω τριγωνικού) $R \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, ενώ στο κάτω τριγωνικό υπάρχει η πληροφορία για την ανασύνθεση των διανυσμάτων Householder. Ειδικότερα:

$$u_1 = [1, 1, 1, 1]^\top, u_2 = [0, 1, 2, 2]^\top, u_3 = [0, 0, 1, 2]$$

ενώ οι ανακλαστές θα είναι της μορφής $H_j = I - 2\frac{u_j u_j^\top}{u_j^\top u_j}$ που είναι ορθογώνιοι και συμμετρικοί (στη συνέχεια, αυτές οι ιδιότητες χρησιμοποιούνται χωρίς να αναφερόμαστε ειδικά). Τότε επειδή η ευκλείδεια νόρμα διατηρείται μετά από ορθογώνιους μετασχηματισμούς, όπως οι ανακλαστές H_j, ισχύει ότι

$$\|b - Ax\| = \|H_3 H_2 H_1 b - Rx\|.$$

Προσέξτε τώρα ότι για τους υπολογισμούς των $H_3 H_2 H_1 b$ μπορούμε να αξιοποιήσουμε την ειδική μορφή των H_j, καθώς για οποιοδήποτε διάνυσμα, έστω g, $H_j g = g - \frac{2}{u_j^\top u_j} u_j (u_j^\top g)$. Ακολουθώντας αυτή τη μέθοδο (έτσι δεν κατασκευάζουμε το A και το Q, αλλά ούτε τα H_j και όλοι οι υπολογισμοί γίνονται με πρόσβαση στα u_j), τα βήματα εδώ είναι τα ακόλουθα:

$$\hat{b} := H_3(H_2(H_1 b)) = [-5, -215/9, -202/9, -64/9]^\top$$

Χρησιμοποιώντας πίσω αντικατάσταση, λύνουμε το $Rx = \hat{b}$. Προσέξτε ότι η τελευταία γραμμή του R είναι όλο 0, και το τελικό σφάλμα θα είναι ο τελευταίος όρος του $\hat{b}$, δηλ. $\min_{x\in\mathbb{R}^3} \|\hat{b} - Rx\| = 64/9$. Όσο για το βέλτιστο x θα είναι η ακριβής λύση του άνω τριγωνικού (τετραγωνικού) $R_{1:3,1:3} x = \hat{b}_{1:3}$, που είναι $x = [257/40, 164/15, -101/9]^\top$.

Για τον υπολογισμό του A χρησιμοποιούμε πάλι τις ιδιότητες των H_j ανά στήλη του R, δηλ. το ότι

$$A_{:,j} = H_1(H_2(H_3 R_{:,j})) = H_1(H_2(R_{:,j} - \frac{2}{u_1^\top u_1} u_1^\top R_{:,j})), \quad j = 1, 2, 3$$

κ.ο.κ. οπότε

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7/9 & 283/90 \\ -4 & 11/4 & 83/30 \\ -4 & -22/9 & -397/90 \\ -4 & -22/9 & -649/90 \end{pmatrix}.$$

Τέλος υπολογίζουμε ανά στήλη και πάλι

$$Q_{:,j} = H_1(H_2(H_3(:,j)))$$

χρησιμοποιώντας το ότι

$$H_3(:,j) = e_j - \frac{2}{u_3^\top u_3} u_3 u_{3,j} = e_j - \frac{2}{5} u_3 u_{3,j}$$

και έχουμε

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/18 & -11/90 & -77/90 \\ -1/2 & 5/6 & -1/30 & -7/30 \\ -1/2 & -7/18 & 59/90 & -37/90 \\ -1/2 & -7/18 & -67/90 & -19/90 \end{pmatrix}.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στα παραπάνω η σειρά με την οποία γίνονται οι πράξεις έχει σημασία και βοηθά στην ταχύτερη επίλυση. Προσέξτε επίσης ότι η εκφώνηση δεν ζητά πουθενά τον άμεσο υπολογισμό των H_j. □

4. **β.** $24 = 3 \times 8$ Έστω ότι έχει χρησιμοποιηθεί παραγοντοποίηση QR ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ και ότι στο τέλος, τα στοιχεία του A έχουν αντικατασταθεί με τα παρακάτω:

$$\begin{pmatrix} 5 & -15 & 5 \\ -2 & 15 & 0 \\ 2 & 2 & 15 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

α) Έστω ότι $b = [5, -15, 0, 30]^\top$. Με βάση μόνον αυτά τα στοιχεία, να υπολογίσετε τη λύση του $\mathrm{argmin}_{x\in\mathbb{R}^3} \|b - Ax\|_2$ για το αρχικό (και άγνωστο προς το παρόν) A. β) Να υπολογίσετε το αρχικό μητρώο A χωρίς να υπολογίσετε άμεσα το Q. γ) Να υπολογίσετε το Q. Προσοχή: Για πλήρη βαθμό θα πρέπει να λύσετε το (α) όπως ζητάται από την εκφώνηση, δηλ. χωρίς να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα του (β). Ομοίως, το (β) πρέπει να λυθεί πριν το (γ).

Απάντηση. Προσέξτε ότι η διάσταση ήταν $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, επομένως χρειάστηκαν 3 ανακλαστές για να άνω τριγωνιοποιήσουν το μητρώο. Στις θέσεις του A επιστρέφονται, στο μεν άνω τριγωνικό μέρος το άνω τριγωνικό τμήμα του (άνω τριγωνικού) $R \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, ενώ στο κάτω τριγωνικό υπάρχει η πληροφορία για την ανασύνθεση των διανυσμάτων Householder. Ειδικότερα:

$$u_1 = [1, -2, 2, -1]^\top, u_2 = [0, 1, 2, -2]^\top, u_3 = [0, 0, 1, -3]$$

ενώ οι ανακλαστές θα είναι της μορφής $H_j = I - 2\frac{u_j u_j^\top}{u_j^\top u_j}$ που είναι ορθογώνιοι και συμμετρικοί (στη συνέχεια, αυτές οι ιδιότητες χρησιμοποιούνται χωρίς να αναφερόμαστε ειδικά). Τότε επειδή η ευκλείδεια νόρμα διατηρείται μετά από ορθογώνιους μετασχηματισμούς, όπως οι ανακλαστές H_j, ισχύει ότι

$$\|b - Ax\| = \|H_3H_2H_1b - Rx\|.$$

Προσέξτε τώρα ότι για τους υπολογισμούς των $H_3H_2H_1b$ μπορούμε να αξιοποιήσουμε την ειδική μορφή των H_j, καθώς για οποιοδήποτε διάνυσμα, έστω g, $H_jg = g - \frac{2}{u_j^\top u_j}u_j(u_j^\top g)$. Ακολουθώντας αυτή τη μέθοδο (έτσι δεν κατασκευάζουμε το A και το Q, αλλά ούτε τα H_j και όλοι οι υπολογισμοί γίνονται με πρόσβαση στα u_j), τα βήματα εδώ είναι τα ακόλουθα:

$$\hat{b} := H_3(H_2(H_1b)) = [4, 3, 33, 6]^\top$$

Χρησιμοποιώντας πίσω αντικατάσταση, λύνουμε το $Rx = \hat{b}$. Προσέξτε ότι η τελευταία γραμμή του R είναι όλο 0, και το τελικό σφάλμα θα είναι ο τελευταίος όρος του $\hat{b}$, δηλ. $\min_{x\in\mathbb{R}^3} \|\hat{b} - Rx\| = 6$. Όσο για το βέλτιστο x θα είναι η ακριβής λύση του άνω τριγωνικού (τετραγωνικού) $R_{1:3,1:3}x = \hat{b}_{1:3}$, που είναι $x = [-4/5, 1/5, 11/5]^\top$.

Για τον υπολογισμό του A χρησιμοποιούμε πάλι τις ιδιότητες των H_j ανά στήλη του R, δηλ. το ότι

$$A_{:,j} = H_1(H_2(H_3R_{:,j})) = H_1(H_2(R_{:,j} - \frac{2}{u_1^\top u_1}u_1^\top R_{:,j})), \quad j = 1, 2, 3$$

κ.ο.κ. οπότε

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 2 & -14 & -3 \\ -2 & 14 & 0 \\ 1 & -7 & 15 \end{pmatrix}.$$

Τέλος υπολογίζουμε ανά στήλη και πάλι

$$Q_{:,j} = H_1(H_2(H_3(:, j)))$$

και έχουμε

$$Q = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 2/5 & -8/15 & -1/3 & -2/3 \\ -2/5 & 8/15 & 2/15 & -11/15 \\ 1/5 & -4/15 & 14/15 & -2/15 \end{pmatrix}.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στα παραπάνω η σειρά με την οποία γίνονται οι πράξεις έχει σημασία και βοηθά στην ταχύτερη επίλυση. Προσέξτε επίσης ότι η εκφώνηση δεν ζητά πουθενά τον άμεσο υπολογισμό των H_j. □

5. **β.** 16

Ενδιαφέρει η επίλυση της ΣΔΕ (συνοριακό πρόβλημα 2 σημείων) με την εξής μορφή

$$-\frac{d^2}{dx^2}u(x) + 2\frac{d}{dx}u(x) + x^2u(x) \quad = \quad x$$

στο διάστημα $x \in [1, 2]$. Γνωρίζουμε ότι $u(1) = 0$, $u(2) = 1$. Να διακριτοποιήσετε με πεπερασμένες κεντρισμένες διαφορές χρησιμοποιώντας $n = 4$ εσωτερικά και ισαπέχοντα σημεία στο παραπανω διάστημα και να γράψετε το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει, δηλ. $AU = F$. Η απάντησή σας πρέπει να περιέχει την τελική μορφή για τα στοιχεία των A, F, (αριθμούς και όχι μεταβλητές!).

Απάντηση. Το πλέγμα θα περιέχει τα εσωτερικά σημεία $\{x_j = 1 + jh | j = 1, ..., 4\}$ όπου $h = (2-1)/(4+1) = 1/5$ Αντικαθιστούμε τις προσεγγίσεις

$$-\frac{d^2}{dx^2}u(x) \approx \frac{-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1}}{h^2}, \frac{d}{dx}u(x) \approx \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h},$$

οπότε λαμβάνουμε τις παρακάτω εξισώσεις

$$-(\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2})U_{i-1} + (\frac{2}{h^2} + (1+ih)^2)U_i + (\frac{1}{h} - \frac{1}{h^2})U_{i+1} = 1 + ih$$

για $i = 1, ..., 4$. Προσέξτε ότι είναι προτιμότερο (για δική σας ευκολία στις πράξεις, όχι χάριν ορθότητας) να αφήσετε το $1/h^2$ στον παρονομαστή, καθώς $1/h^2 = 25$.

Από τις συνοριακές συνθήκες $U_0 = u_0 = 0, U_5 = u(1) = 1$, θα έχουμε για τις ακραίες εξισώσεις ότι

$$\frac{1286}{25}U_1 - 20U_2 = x_1 + 30U_0 = \frac{6}{5}$$

και

$$-30U_3 + \frac{1331}{25}U_4 = x_4 + 20U_5 = \frac{109}{5}.$$

Εντέλει τα ζητούμενα στοιχεία είναι τα ακόλουθα:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1286}{25} & -20 & 0 & 0 \\ -30 & \frac{1299}{25} & -20 & 0 \\ 0 & -30 & \frac{1314}{25} & -20 \\ 0 & 0 & -30 & \frac{1331}{25} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{8}{5} \\ \frac{109}{5} \end{pmatrix}$$

□

6. **β.** 16

Ενδιαφέρει η επίλυση της ΣΔΕ (συνοριακό πρόβλημα 2 σημείων) με την εξής μορφή

$$-x^2\frac{d^2}{dx^2}u(x) + 2x\frac{d}{dx}u(x) + u(x) \quad = \quad x$$

στο διάστημα $x \in [1, 2]$. Γνωρίζουμε ότι $u(1) = 0$, $u(2) = 1$. Να διακριτοποιήσετε με πεπερασμένες κεντρισμένες διαφορές χρησιμοποιώντας $n = 4$ εσωτερικά και ισαπέχοντα σημεία στο παραπανω διάστημα και να γράψετε το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει, δηλ. $AU = F$. Η απάντησή σας πρέπει να περιέχει την τελική μορφή για τα στοιχεία των A, F, (αριθμούς και όχι μεταβλητές!).

Απάντηση. Το πλέγμα θα περιέχει τα εσωτερικά σημεία $\{x_j = 1 + jh | j = 1, ..., 4\}$ όπου $h = (2-1)/(4+1) = 1/5$ Αντικαθιστούμε τις προσεγγίσεις

$$-\frac{d^2}{dx^2}u(x) \approx \frac{-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1}}{h^2}, \frac{d}{dx}u(x) \approx \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h},$$

οπότε προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις

$$-(\frac{x_i}{h} + \frac{x_i^2}{h^2})U_{i-1} + (\frac{2x_i^2}{h^2} + 1)U_i + (\frac{x_i}{h} - \frac{x_i^2}{h^2})U_{i+1} = x_i$$

για $i = 1, ..., 4$. Προσέξτε ότι είναι προτιμότερο (για δική σας ευκολία στις πράξεις, όχι χάριν ορθότητας) να αφήσετε το $1/h^2$ στον παρονομαστή, καθώς $1/h^2 = 25$.

Από τις συνοριακές συνθήκες $U_0 = u_0 = 0, U_5 = u(1) = 1$, για τις ακραίες εξισώσεις θα έχουμε ότι

$$73U_1 - 30U_2 = 6/5 + 42U_0 = 6/5$$

και

$$-90U_3 + 163U_4 = 9/5 + 72U_5 = 9/5 + 72 = 369/5.$$

Εντέλει τα ζητούμενα στοιχεία είναι τα ακόλουθα:

$$A = \begin{pmatrix} 73 & -30 & 0 & 0 \\ -56 & 99 & -42 & 0 \\ 0 & -72 & 129 & -56 \\ 0 & 0 & -90 & 163 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{8}{5} \\ \frac{369}{5} \end{pmatrix}$$

□